# PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN MEDIANTE EL USO DE PRUEBAS PRAGMÁTICAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

**MARYLIN CÓRDOBA CASTILLO**

**CODIGO: 0432737**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

**INTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA**

**SANTIAGO DE CALI**

**2011**

# PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN MEDIANTE EL USO DE PRUEBAS PRAGMÁTICAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CON ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

**MARYLIN CÓRDOBA CASTILLO**

**0432737**

**LÍNEA DE FORMACIÓN:**

**Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM)**

**Trabajo de grado para optar por el título de**

**LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**DIRECTORA:**

**Mg. MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

**INTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA**

**SANTIAGO DE CALI**

**2011**

**NOTA DE ACEPTACIÓN**

**JURADO 1**

**JORGE ENRIQUE GALEANO**

**JURADO 2**

**EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA**

**DIRECTORA**

**MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ**

*A Dios por darme la sabiduría y fortaleza necesaria para hacer realidad este proyecto.*

*A mis padres Wilson y Flor y a mis hermanas Mariana e Ingrid por su apoyo, comprensión y motivación.*

*A mi novio Leonardo por su apoyo incondicional y su colaboración.*

*A mi directora, Marisol Santacruz por creer posible este proyecto, por su orientación y por compartir conmigo sus conocimientos.*

*A todos los profesores que me acompañaron en mi formación profesional desde primero hasta último semestre.*

*¡A todos muchas gracias!*

## RESUMEN

Este Trabajo de Grado centra su reflexión alrededor de los procesos de prueba mediante el uso de pruebas pragmáticas en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD). Para esto, se propone el diseño de una Secuencia Didáctica compuesta de tres situaciones con el propósito de promover los tipos de prueba pragmática, en los estudiantes de séptimo grado de Educación Básica a partir de la exploración de algunas propiedades de los paralelogramos, planteadas como problemas abiertos.

**PALABRAS CLAVE:** Prueba pragmática, secuencia didáctica, problemas abiertos,argumentación, Ambiente de Geometría Dinámica, arrastre, Teoría de las situaciones didácticas.

# INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está inscrito en la línea de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y propone la caracterización de una Secuencia Didáctica para estudiantes de grado séptimo donde se enfatice el uso de las pruebas pragmáticas.

El desarrollo del presente trabajo está dividido en cinco capítulos, los cuales van caracterizando el diseño experimental poco a poco.

En el primer capítulo se realiza una contextualización del problema donde se precisan algunos términos que se usarán a lo largo del trabajo además de una aproximación al estado del arte.

El capítulo dos está compuesto por el marco teórico donde se expone todo el papel de la demostración a través del tiempo, además de cómo es vista en las matemáticas experimentales y como un AGD influye en los procesos de formulación de una conjetura. También se exponen toda la información pertinente al objeto matemático tratado.

El capítulo tres está conformado por el diseño de la Secuencia Didáctica (SD)y algunos aspectos metodológicos de la investigación y también los análisis *a priori*de la SD.

El capítulo cuatro se presentan la evaluación de la SD y los análisis *a posteriori,* mostrando algunas producciones por parte de los estudiantes y finalmente el capítulo quinto se muestran las conclusiones del presente trabajo de investigación.

## TABLA DE CONTENIDO

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABLAS

# CAPITULO I

## CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA

### 1.1 El papel de la demostración en matemáticas y en el contexto escolar

La demostración es uno de los aspectos importantes en matemáticas (Alcolea, 2002), dado que es un proceso valioso y preferido para la validación de saberes matemáticos. Para que un saber pueda considerarse propio de las matemáticas, el acuerdo es que debe tener una demostración, generalmente en un sentido formal, y ésta debe ser aceptada por la comunidad de matemáticos.

La demostración en matemáticas es esencial dada la naturaleza propia de la disciplina. En este sentido, la demostración es concebida como "formal" en la medida en que está compuesta generalmente por teoremas, axiomas, reglas de inferencia y definiciones. Así, la naturaleza propia de las matemáticas es la que siempre va a orientar el sentido o concepción que se tenga de demostración.

De Villiers (1990) propone para la demostración cinco tipos de funciones las cuales son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación

> *"La verificación, concerniente a la verdad de una afirmación; la explicación, profundizando en por qué es verdad; sistematización, la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas; descubrimiento, el descubrimiento o invención de nuevos resultados; comunicación, la transmisión del conocimiento matemático.."*

A continuación se presentan algunas concepciones respecto a la demostración que algunos matemáticos han expuesto (Larios, 2003):

- **Morris Kline** (Estados Unidos, siglo XX): *"todas las demostraciones matemáticas deben ser deductivas. Cada demostración es una cadena de inferencias deductivas, y cada una de éstas con sus correspondientes premisas y conclusiones*."Kline, 1992 (citado en Larios, 2003)

- **Ignacio Bartolache** (Nueva España, siglo XVIII): *"[Es,] por un exacto y bien ordenado discurso, la conexión que hay entre la hipótesis y la tesis, empleando para esto otras proposiciones establecidas de antemano, hasta venir a caer de silogismo en silogismo en la dicha tesis como en una consecuencia necesaria."*Bartolache, 1990 (citado en Larios, 2003)

- **Simon Singh**(Inglaterra, siglo XX): *"la idea clásica de una demostración matemática consiste en partir de una serie de axiomas o afirmaciones que pueden considerarse ciertos o que por evidencia propia lo son. Después, con una argumentación lógica y progresiva, se puede llegar a una conclusión. Si los axiomas son correctos y la lógica es impecable, la conclusión final es innegable. Esta conclusión constituye un teorema […] La diferencia entre las pruebas científicas y las matemáticas es a la vez sutil y profunda y resulta crucial para poder comprender la obra de todo matemático […] La prueba científica es tomadiza y chapucera sin remedio. Por el contrario, la demostración matemática es absoluta y libre de dudas*." Singh, 1998 (citado en Larios, 2003)

En términos generales (Larios, 2003), la concepción de demostración en los matemáticos, no ha variado mucho desde la Grecia clásica hasta el momento, pues se puede notar que la característica más representativa, es la que se refiere a que debe ser una cadena de deducciones.

En definitiva, la demostración en matemáticas ha existido por la necesidad de justificar conocimientos abstractos que tienen que ser validados, proporcionando simultáneamente razones sobre su plausibilidad. Sin embargo, la demostración debe ser aceptada por una comunidad matemática, para que sea considerada cómo convincente.

Actualmente con la necesidad de la verificación del conocimiento se ha recurrido a el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), lo que ha provocado una discusión entre lo que es la demostración en matemáticas y como puede ser concebida cuando esta acude al uso de la computadora.

Hanna (1997) expone que la experimentación en matemáticas a partir del uso de TIC, no solo se está realizando como una actividad matemática competente, sino también como una alternativa a la demostración, una forma igualmente válida de confirmación matemática.

Durante los últimos años con el avance de las TIC, estas se han considerado para la construcción o verificación de demostraciones muy largas. Lo que ha conllevado a crear una fuerte discusión entre lo que es una demostración a través de este medio y si esta puede conservar su rigor.

En el campo de la didáctica de las matemáticas, para Dreyfus 1999 (citado en Alvarado & González, 2009) una las dificultades por las cuales la demostración no se lleva al aula de clase es que los estudiantes tienen dificultad para comprender las demostraciones presentadas en los libros de texto, los cuales son argumentos más o menos formales que se suelen acompañar de algunas justificaciones visuales o intuitivas, de ejemplos genéricos o inducciones ingenuas que invitan al estudiante a considerar estas formas de exposición como demostración.

Otros autores como Ortega 1996 (citado en Ibáñez, 2002) presenta un esquema de valoración para los textos escolares donde exponen que en estos libros de texto usados dentro del aula de clase hay una ausencia de intencionalidad didáctica entorno a la demostración.

Por su parte, Hanna (1997) sostiene que la demostración debe jugar un papel importante en el currículo de matemáticas, pues continua siendo una característica central de la misma practica matemática, como método privilegiado de validación.

No obstante, no se debe reducir el papel de la demostración en el aula de clase al proceso de verificación de veracidad de una proposición, Balacheff (2000) sitúa la demostración no solo como un método de validación, sino como un método para comunicar ideas, entre otras funciones ya mencionadas.

### 1.2 La demostración y Ambientes de Geometría Dinámica (AGD)

A pesar de la fuerte tensión entre el "formalismo" de la demostración y el uso de TIC en procesos de validación, la investigación en didáctica de las matemáticas ha reconocido que la geometría dinámica privilegia la observación y la manipulación de objetos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos.

Lo anterior, es con el fin de que los usuarios traten de justificar sus actividades, las cuales no serán demostraciones que intenten convencer a una comunidad matemática, pero sí que logre convencerse a sí mismo y a otra persona de la veracidad de la proposición.

Los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) permiten la manipulación de los objetos geométricos, una de las características importantes de un AGD es que permite diferenciar al estudiante entre (Larios, 2006a) dibujo y figura, pues en este ambiente las construcciones geométricas están hechas con base en las relaciones lógicas entre los objetos, no solo sobre los aspectos figúrales de las mismas.

Sin duda al incorporar AGD se obliga a cambiar todo en el campo educativo. Balacheff (2000) precisa el vocabulario, para referirse a varios procesos que interesan en el presente trabajo:

La **explicación** es cuando el sujeto expresa, de manera clara y convincente, por medio de un discurso en lenguaje natural, la validez de una proposición a un interlocutor.

La **prueba** es el paso de la explicación a la elaboración de una argumentación (argumentación se refiere a un escrito con el objetivo de convencer) que puede ser en lenguaje natural o en lenguaje formal, más adelante se caracterizarán estos tipos de prueba.

La **demostración** es un tipo de prueba, que se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Balacheff(2000), clasifica las pruebas en dos grandes grupos: **pruebas pragmáticas** a las que recurren a la acción y a la ostensión y **pruebas deductivas** a las que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones.

Se distinguen tres (3) tipos principales de pruebas pragmáticas y dos (2) de pruebas intelectuales que tendrán un lugar privilegiado en la génesis cognitiva de la demostración. En este caso para las pruebas pragmáticas (Balacheff, 2000) se tiene:

- Empirismo ingenuo: sucede cuando el alumno valida la afirmación después de verificarla para algunos casos particulares.
- Experimento crucial: es cuando el alumno toma en cuenta la problemática de la generalidad y la “resuelve” mediante el uso de un caso particular que reconoce como “no especial”
- El ejemplo genérico: es cuando el alumno justifica la afirmación operando sobre un objeto concreto al que considera representante de los pertenecientes al dominio de dicha afirmación.

### 1.3 Planteamiento del problema y algunos aspectos de la justificación

En el conjunto de grados sexto y séptimo El Ministerio de Educación Nacional, (2006) se pretende que el estudiante pueda clasificar polígonos en relación con sus propiedades, predecir y comparar los resultados al aplicar trasformaciones (traslaciones, rotaciones y reflexiones) y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte, resolver y clasificar problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. De manera que en este nivel se podrán trabajar procesos de razonamiento y de comunicación usando los paralelogramos junto con sus propiedades.

Para el desarrollo de este proyecto se hará uso del micromundoCabriGéomètre II plus (versión PC) pues, principalmente, su diseño permite la construcción de figuras geométricas partiendo de objetos básicos (puntos, líneas rectas, segmentos, círculos, etc.) y relaciones (punto medio, perpendicular, paralela, etc.) que el estudiante selecciona a partir de un menú. Una vez construida la figura, se pueden mover sus puntos básicos y observar sus modificaciones en la pantalla, en la que cada parte de la construcción se mueve de forma aparentemente continúa.

Si la construcción está bien hecha (Larios, 2006a), todas las limitaciones que el estudiante haya establecido explícitamente se mantienen mientras éste arrastra el o los puntos por la pantalla. Por tanto, se trabaja con una representación ejecutable, mucho más que un dibujo. Al mismo tiempo, proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden observarse en la pantalla: una propiedad será probablemente cierta sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos básicos de la construcción.

De acuerdo con lo planteado anteriormente la pregunta de indagación que orienta el desarrollo de este trabajo de grado se presenta en los siguientes términos:

*¿Qué caracteriza el diseño de una Secuencia Didáctica, en grado séptimo, alrededor del uso de pruebas pragmáticas con propiedades de paralelogramos en un AGD?*

Como OBJETIVO GENERAL se planteó la necesidad de caracterizar el diseño de una Secuencia Didáctica, en grado séptimo, alrededor del uso de pruebas pragmáticas respecto a las propiedades de paralelogramos en un AGD.

Los OBJETIVOS ESPECIFICOS de este trabajo de grado, quedarían planteados en los siguientes términos:

- Fundamentar el diseño de una secuencia didáctica que integra un AGD, desde la perspectiva epistemológica de las matemáticas experimentales.
- Concebir el diseño de una secuencia didáctica, sobre pruebas pragmáticas con paralelogramos en un AGD, desde la TSD.
- Reconocer el papel de un AGD, particularmente la función semiótica del arrastre, en el diseño de una Secuencia Didáctica.

## 1.4 Una aproximación al estado del arte

A manera de estado del arte se han clasificado las investigaciones realizadas a nivel internacional en dos partes la primera muestra los trabajos realizados acerca de los cuadriláteros y la segunda parte son trabajos de investigación que tratan sobre la prueba en el ámbito de la Geometría Escolar.

Primera parte:

- ***El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría.*** (Larios & González, 2001). Es un trabajo donde se presentan actividades para un tema específico: "*los cuadriláteros en secundaria*", con la intención de ayudar en el desarrollo de un razonamiento deductivo en los alumnos, ayudados principalmente por el doblado de papel. Se concluye en este trabajo que el doblado de papel como apoyo didáctico en el estudio de la educación Básica (1° a 9°) permite ventajas manuales y medios para reflexionar sobre sus observaciones para llegar a la demostración deductiva.
- ***Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. Una justificación.***(Barroso, 2003). A pesar que es un estudio dirigido a estudiantes de licenciatura en matemáticas, los problemas planteados

tienen la intención de buscar una argumentación de acuerdo a las propiedades de algunos cuadriláteros con ayuda de CabríGéomètre, donde el énfasis se hace en la función del arrastre para comprobar algunos enunciados.

- ***Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria.*** (Larios. 2005). En este trabajo se presenta un micromundo propuesto en secundaria para estudiar las propiedades del paralelismo y el desarrollo de justificaciones con relación al estudio del triángulo y los cuadriláteros. Se considera en este trabajo el uso del arrastre como herramienta primordial en el software de geometría dinámica, dado que permite el uso de justificaciones por parte de los estudiantes acerca de sus construcciones y de las propiedades que se conservan. Las consideraciones finales de este trabajo proponen que se deben considerar figuras no estándares para una mejor identificación durante la actividad de arrastre y conjetura.
- ***Actividades para el reconocimiento del paralelogramo*** (Lima& Orejuela, 2006). Es una propuesta de actividades para estudiantes de grado octavo sobre la noción de paralelogramo donde se involucra el trabajo manual con lápiz, regla y papel y posteriormente el trabajo en Cabrí donde el estudiante puede identificar y generalizar las invariantes de la familia de cuadriláteros estudiados.

Segunda Parte:

- ***Analternative introduction to proof in dynamic Geometry*** (De Villiers, 1995). Es un trabajo donde se proponen una serie de actividades para que los estudiantes hagan uso de una prueba. Las actividades son planteadas en un AGD porque favorece la exploración de la situación propuesta.

- ***Deductive and Intuitive approaches to solving geometrical problems.*** Jones, K. (1998) Este trabajo de investigación trata acerca de como el intuitivo y el enfoque formal se relacionan cuando se va a tratar de de resolver algún problema geométrico.

- ***Proof in dynamicGeometryContexts.*** Hoyles, C. y Jones, K. (1998)Este trabajo propone que, para la enseñanza de la prueba se fomenten actividades de exploración con un AGD que animen a los estudiantes a plantear conjetura teniendo en cuenta la relaciones entre los objetos geométricos.

### 1.5 Conclusión

Dado que la demostración es el método por el cual se valida el conocimiento matemático, es importante que se enseñe dentro del aula de clase. Pues, además que la demostración está ligada al desarrollo de habilidades mentales, cumple con otras funciones como el placer por descubrir ideas nuevas, la convicción, la sistematización, la explicación y la comunicación de ideas matemáticas.

Con las TIC en el proceso de enseñanza de la demostración, se han abierto nuevas perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas se puede relacionar con un AGD como Cabrí el estudiante puede manipular los objetos a través del arrastre, lo que puede conllevar al planteamiento de conjeturas y uso de pruebas pragmáticas.

En los trabajos mencionados en el estado del arte ayudan a caracterizar las diferentes propuestas a nivel internacional sobre la enseñanza de la prueba en el contexto escolar.

# CAPITULO II

# MARCO TEÓRICO

## 2.1 Una mirada al rigor y formalismo en matemáticas.

Desde el punto de vista histórico (Arsac, 1987), la demostración inició en Grecia, apareciendo antes de Los Elementos de Euclides, que es una de las obras que marco la historia de la geometría por el contenido y su forma de realizar las demostraciones. Las siguientes nociones son acerca de la demostración:

- *"La definición de los objetos matemáticos con ayuda de axiomas, de definiciones, como objetos ideales, independientes de la experiencia sensible;*
- *Los enunciados generales (teoremas, proposiciones,…) que explicitan como hipótesis precisas las afirmaciones verdaderas para los seres matemáticos;*
- *Las demostraciones que prueban las afirmaciones precedentes basándose únicamente en los axiomas, las definiciones y las reglas de lógica, en particular el tercero excluido."*

Sin embargo el libro los Elementos de Euclides no satisfacción completamente las nociones nombradas anteriormente, pues en las demostraciones que se realizan en esta obra hacían referencia a la figura. Por lo que el rigor euclidiano(Bkouche&Soufflet, 1983)se basa en la intuición geométrica y es a partir de la figura que se construye el razonamiento, cuyo objeto es el descubrimiento de nuevas propiedades.

A pesar de las inconsistencias que algunos críticos han observado, el método euclidiano permitió la edificación de la geometría como ciencia racional. Consideremos también que por la necesidad de demostrar el quinto postulado propuesto por Euclides, nacieron otras geometrías.

El método de las matemáticas es el método deductivo (Bkouche&Soufflet, 1983), que sirve para alcanzar el criterio de la verdad del conocimiento, la función de la deducción es la de hacer evidente lo que no es *a priori,* de producir evidencia.

Las matemáticas son esencialmente demostrativas y el objetivo del matemático es desarrollar métodos de demostración que garanticen la validez de las demostraciones. Es por esto que se fundó el formalismo, que se caracteriza por que todo se reduce a la demostración siguiendo una estructura para relacionar los objetos matemáticos.

En cuanto a la necesidad de la organización de conocimientos y calidad de conocimientos se creó el método axiomático. La construcción euclidiana es un modelo de construcción axiomática y fundamento esencialmente la intuición geométrica con la respectiva noción de evidencia.

Sin embargo, esta concepción de axiomática pierde su estatus cuando otra geometría no euclidiana cuestiona algunos de los postulados de la geometría euclidiana y el papel de la intuición geométrica. La nueva axiomática fue la que se consideró independiente de toda intuición geométrica y se apoyó en el formalismo; es así como las primeras axiomáticas es la de geometría expuesta por David Hilbert en su obra Fundamentos de Geometría de 1889.

## 2.2 Demostración y matemáticas experimentales

Hanna (1997) ha propuesto algunas clases de demostraciones como lo son: las demostraciones a conocimiento cero, las demostraciones holográficas y la producción y verificación de demostraciones asistidas por un computador; lo que conlleva al nacimiento de unas nuevas matemáticas llamadas experimentales.

Estas matemáticas experimentales se caracterizan porque usan la computadora para generar datos y poner a prueba una conjetura para reconocer la formalización de un conocimiento válido por la experimentación, en espera de una posible formalización, es decir el desarrollo de una posible demostración.

La experimentación en matemáticas (Hanna, 1997) está haciéndose nosolo como una actividad matemática competente, sino también como una alternativa a la demostración, pues se ha convertido en una forma permitida para los procesos de validación en matemáticas.

La demostración en matemáticas, según Balacheff (2000) es un tipo de prueba aceptada por una comunidad de matemáticos, sin embargo en la actualidad los procesos de validación que se desarrollan con ayuda de las matemáticas experimentales no son aceptadas por aquella comunidad como una demostración.

A pesar de ello, se debe tener presente que este tipo de matemáticas pueden favorecer los procesos de argumentación de los estudiantes en el aula de clase pues este tipo de matemáticas favorece la exploración, lo cual puede conllevar al descubrimiento y formulación de conjeturas, experimentación y explicación que se puede entender como la justificación de la conjetura pero no una demostración en matemáticas.

## 2.3 Pruebas pragmáticas

La prueba pragmática, es un tipo de prueba que se caracteriza por el uso de ejemplos como elementos de convicción, usando un lenguaje natural.

A continuación se describen dos grandes grupos de demostraciones que están relacionadas con lo planteado de pruebas por Balacheff (2000). Demostraciones empíricas y demostraciones deductivas, en el primer grupo se hace una caracterización de los ejemplos que pueden usar los estudiantes en sus procesos de validación, es en este grupo donde se puede identificar la prueba pragmática a continuación se describe los dos grupos Marrades y Gutierrez 2000 (citado en Fiallo & Gutiérrez 2007):

- **Demostraciones empíricas:** Caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

    - ***Empirísmo ingenuo:*** cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismos ingenuo:

        - *Perceptivo:* cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.

        - *Inductivo:* cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.

    - ***Experimento crucial:*** cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:

        - *Basado en el ejemplo:* cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.

        - *Constructivo:* cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.

        - *Analítico:* cuando se usan ejemplos seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo.

- ***Ejemplo genérico:*** cuando en la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase.

  Los tres tipos de demostración definidos en los párrafos anteriores para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

- **Demostraciones deductivas:** caracterizadas por la descontextualización. Se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

  - ***Experimento mental:*** cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se distinguen dos tipos:

    - *Experimento mental transformativo:* cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El ejemplo ayuda a prever las transformaciones convenientes.

    - *Experimento mental estructural:* cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados. El ejemplo ayuda a organizar o entender los pasos de las deducciones.

  - **Deducción formal:** cuando la demostración se basa en operaciones mentales, es decir acciones interiorizadas sobre el objeto matemático tratado sin la ayuda de ejemplos.

## 2.4 Sobre la noción de paralelogramo

En un intento de definición de paralelogramo, Samper (2008) lo presenta como un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos.

Por su parte, Hemmerling (2002) define un cuadrilátero como *un paralelogramo es si, y solo si, las parejas de lados opuestos son paralelos.* Pág. 208.

Lang & Murrow (1988) definen el paralelogramo realizando la siguiente descripción:

> *Sean P, Q, M y N cuatro puntos que determinan una figura de cuatro lados formada por* $\overline{PQ}, \overline{QM}, \overline{MN}$, $y \overline{NP}$. *Cualquier figura de cuatro lados en el plano se llama un cuadrilátero. Si los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos, es decir* $\overline{PQ}$*es paralela a*$\overline{MN}$*y* $\overline{PN}$ *es paralela a* $\overline{QM}$, *entonces la figura es un paralelogramo.*

Alrededor de estas definiciones se pueden asociar algunas propiedades de las realizadas por Euclides (1991) en los Elementos:

> ***Proposición 33****. Los segmentos que unen los extremos de segmentos iguales y paralelos en la misma dirección son también iguales y paralelos.*

La hipótesis es que[1] sean $\mathrm{AC}$ y $\mathrm{CD}$ segmentos iguales y paralelos, y sean $\mathrm{AC}$ y $\mathrm{BD}$ los segmentos que unen los extremos A con C y B con D en las mismas direcciones, respectivamente. Por su lado, la tesis es demostrar que $\mathrm{AC}$ y $\mathrm{BD}$ son iguales y paralelos.

[1]Demostración adaptada de http://132.248.17.238/geometria/t_1_033/t_1_033_m.html Consultada en Marzo de 2011.

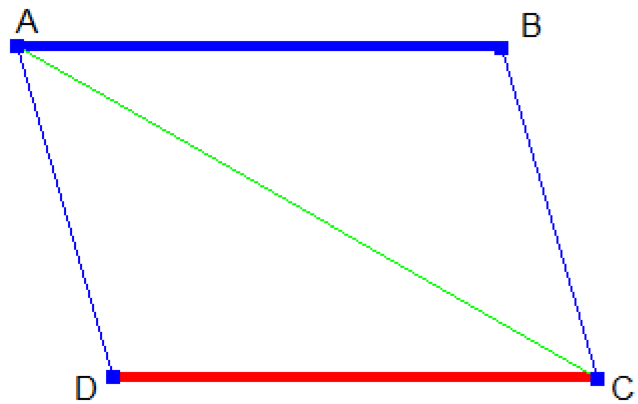



Figura 1.Segmentos iguales y paralelos en un paralelogramo

La demostración consiste en los siguientes puntos:

- Por el Postulado 1(una recta puede trazarse de un punto cualquiera a otro), unimos B con C. Por lo tanto, tenemos que la recta BC es una transversal a las rectas AB y CD.
- Puesto que AB es paralela a CD, y BC es una transversal, por Proposición I.29(*Una transversal a dos rectas paralelas hace los ángulos alternos internos iguales entre sí, el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, y la suma de los dos ángulos internos del mismo lado igual a 180º*), tenemos que los ángulos alternos $\measuredangle \mathrm{ABC}$ y $\measuredangle \mathrm{BCD}$ son iguales.
  Es decir, $\measuredangle \mathrm{ABC} = \measuredangle \mathrm{BCD}$
- En los triángulos $\Delta ABC$ y $\Delta DCB$ tenemos que los lados AB y CD son iguales, que BC es lado común, y que $\measuredangle \mathrm{ABC} = \measuredangle \mathrm{BCD}$, entonces por la Proposición I.4 (*Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son iguales. (L- A - L)*) Tenemos que la base AC es igual a la base BD, el triángulo $\Delta ABC$es igual al triángulo $\Delta DCB$, y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes,

respectivamente.

Por lo tanto, $AC=BC$, $\Delta ABC=\Delta DCB$ y $\measuredangle ACB=\measuredangle CBD$

- Ahora, demostremos que las rectas AC y BD son paralelas. Puesto que la recta BC es transversal a las dos rectas AC y BD y forma con ellas, ángulos alternos iguales entre sí, $\measuredangle ACB=\measuredangle CBD$ por la Proposición I.27 (*Si una transversal a dos rectas forma ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces las rectas son paralelas*), concluimos que AC es paralela a BD.
- Por lo tanto, por el paso 3, $AC=BD$y por el paso 4, tenemos que AC es paralela a BD. Por lo tanto, AC y BD son iguales y paralelas.

*Por lo tanto, los segmentos que unen los extremos de segmentos iguales y paralelos, son también iguales y paralelos.*

***Proposición 34****. Los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales uno al otro y la diagonal divide el área en dos partes iguales.*

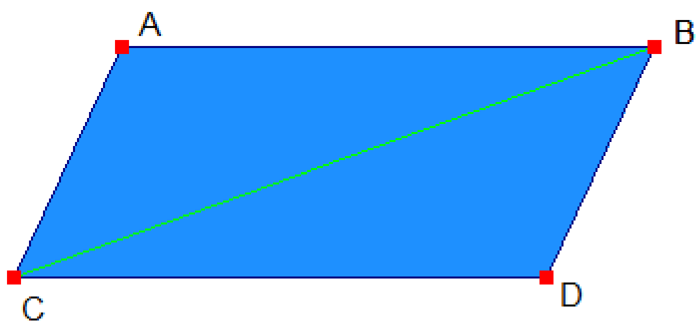



Figura 2. Lados y ángulos opuestos de un paralelogramo.

Hipótesis[2]: Sea ABCD un paralelogramo, y BC su diagonal.

[2]Demostración adaptada de:http://132.248.17.238/geometria/t_1_034/t_1_034_m.html Consultada en Marzo de 2011.

Tesis: Demostrar que los lados y ángulos opuestos del paralelogramo ABCD son iguales, y que la diagonal BC divide el área del paralelogramo en dos áreas iguales.

A continuación se realiza la demostración:

- Como AB es paralela a CD, y la recta BC es transversal a ellas, por la Proposición I.29 (*Una transversal a dos rectas paralelas hace los ángulos alternos internos iguales entre sí, el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, y la suma de los dos ángulos internos del mismo lado igual a 180º*), tenemos que los ángulos alternos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCD$ son iguales entre sí.
  Es decir, $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD$.
- Nuevamente, como AC es paralela a BD, y BC es transversal a ellas, por la Proposición I.29, tenemos que los ángulos alternos $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle CBD$son iguales entre sí.
  Es decir, $\measuredangle ACB = \measuredangle CBD$.
- Por lo tanto, $\Delta ABC$ y $\Delta DCB$son dos triángulos que tienen los dos ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$ igual a los dos ángulos $\measuredangle BCD$ y $\measuredangle CBD$, respectivamente, y el lado BC colinda con los ángulos iguales y es común a ambos. Por la Proposición I.26 (*Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro y un lado de uno igual a un lado del otro, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales, o el lado opuesto a los ángulos iguales, entonces los dos triángulos son congruentes. (ALA)),* se sigue que los triángulos tienen los lados restantes iguales a los lados restantes, respectivamente, y el ángulo restante igual al ángulo restante, y en consecuencia, los triángulos ∆ABC y ∆DCB son iguales. Por lo tanto,

$$AB = CD \text{ y } AC = BD$$

$$\text{Y } \measuredangle BAC = \measuredangle CDB$$

$$\text{Y } \Delta ABC = \Delta DCB$$

- Como $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD$ y $\measuredangle CBD = \measuredangle ACB$, por la noción común 2 (Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las totales son iguales), el ángulo $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$. Por lo tanto,$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$.
- Resumiendo,

$$AB = CD \text{ y } AC = BD$$

$$\text{Y } \measuredangle BAC = \measuredangle CDB$$

$$\text{Y } \measuredangle ABD = \measuredangle ACD$$

Y $\Delta ABC = \Delta DCB$*,*

Por lo tanto, en todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí.

- Como consecuencia de trazar la diagonal BC, en el paso 3, concluimos que los triángulos ∆ABC y ∆DCB son iguales. Por lo tanto, la diagonal BC divide el área del paralelogramo en dos áreas iguales.

*Por lo tanto, en todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales, y la diagonal divide el área en dos partes iguales.*

*"**Proposición 35**. Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales sus areas."*

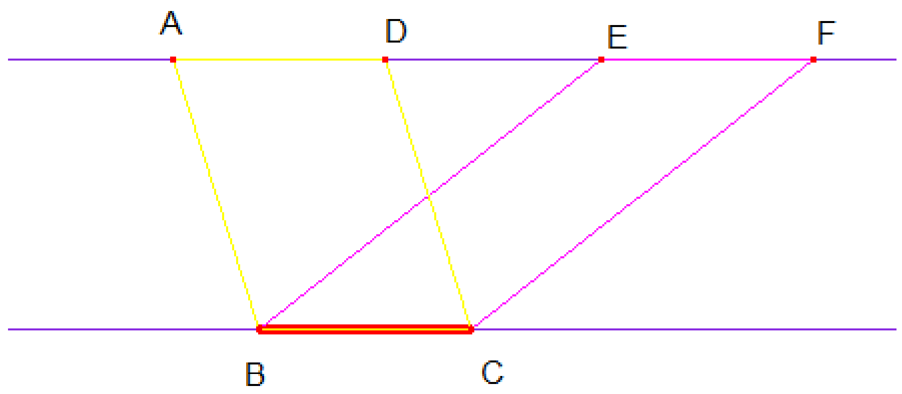



Figura 3. Paralelogramos sobre una misma base

Hipótesis[3]: Sean ABCD y EBCF paralelogramos sobre la misma base $\mathrm{BC}$ y en las mismas paralelas $\mathrm{AF}$y $\mathrm{BC}$.

Tesis: las áreas de los paralelogramos ABCD y EBCF son iguales.

La demostración se describe a continuación:

- Consideramos el caso en que el punto D permanece entre A y E.
  Como ABCD es un paralelogramo, por la Proposición I.34 (*En todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales, y la diagonal divide el área del paralelogramo en en dos partes iguales*), tenemos que AD = BC. Y por la misma proposición, en el paralelogramo EBCF, también se cumple que BC = EF.
  Por la Noción común 1(*Cosas que sean iguales a una tercera son iguales entre sí*), tenemos que AD = EF.
- Como el segmento DE es común a los segmentos AE y DF, entonces por la Noción común 2, tenemos que AE = DF.
- Por la misma Proposición I.34, en el paralelogramo ABCD también AB = DC.
- Por lo tanto, los dos lados EA y AB son iguales a los dos lados FD y DC, respectivamente, y por la Proposición I.29, el ángulo $\measuredangle \mathrm{FDC}$ es igual al ángulo$\measuredangle \mathrm{EAB}$, el ángulo externo es igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado.
- Por la Proposición I.4, se sigue que la base EB es igual a la base FC, y el triángulo $\Delta \mathrm{EAB}$es igual al triángulo$\Delta \mathrm{DFC}$.
  Por lo tanto, EB = FC
  y $\Delta \mathrm{EAB}$= $\Delta \mathrm{DFC}$
  Y en consecuencia, sus áreas son iguales.

[3]Demostración adaptada de http://132.248.17.238/geometria/t_1_035/t_1_035_m.html Consultada en marzo de 2011.

- Substrayendo el área del triángulo$\Delta DGE$ de cada uno de los triángulos, por la Noción común 3, el área del trapecio ABGD es igual al área del trapecio EGCF.
- Sumando el área del triángulo$\Delta GBC$ a cada una de las áreas de los trapecios, por la Noción común 2, el área del paralelogramo ABCD es igual al área del paralelogramo EBCF.

*Por lo tanto, los paralelogramos que tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.*

*"**Proposición 36**. Los paralelogramos que están sobre bases iguales entre las mismas paralelas son iguales entre sí."*

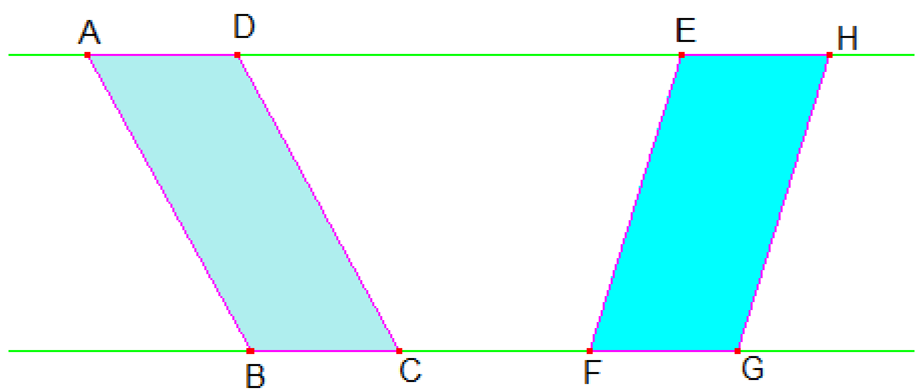



Figura 4. Paralelogramos entre paralelas

Hipótesis[4]: Sean ABCD y EFGH paralelogramos cuyas bases $BC$y $FG$ son iguales y están contenidas en las mismas paralelas $AH$ y $BG$.

Tesis: las áreas de los paralelogramos ABCD y EFGH son iguales.

[4]Demostración adaptada de http://132.248.17.238/geometria/t_1_036/t_1_036_m.html Consultada en Marzo de 2011.

La demostración consiste en:

- Por el Postulado 1, podemos construir los segmentos BE y CH.
- Puesto que BC es igual a FG y como EFGH es un paralelogramo, por la Proposición I.34, tenemos que FG es igual a EH. Luego, por la Noción común 1, concluimos que BC es igual EH.
- Por lo tanto, BC y EH son iguales y también son paralelos, y los segmentos BE y CH unen sus extremos, por la Proposición I.33, tenemos que EBCH es un paralelogramo.
- Por la Proposición I.35 el área del paralelogramo EBCH es igual al área del paralelogramo ABCD, pues los paralelogramos tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas BC y AH.
- También por la misma Proposición I.35, el área del paralelogramo EFGH es igual al área del paralelogramo EBCH.
- Y por la Noción común 1, concluimos que el área del paralelogramo ABCD también es igual al área del paralelogramo EFGH.

*Por lo tanto, los paralelogramos que tienen bases iguales y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.*

*“**Proposición 43**. En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.”*

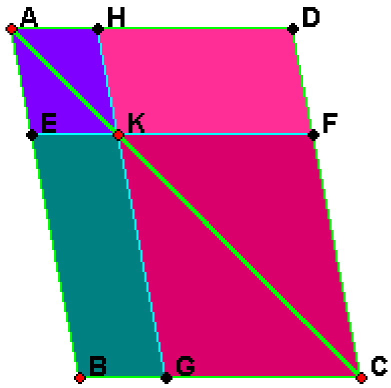



Figura 5. Complementos de paralelogramos ubicados en torno a la diagonal.

A continuación se describe la demostración[5].

- Como ABCD es un paralelogramo, y AC es su diagonal, por la Proposición I.34, tenemos que el área del triángulo ABC es igual al área del triángulo ACD.
- Sabemos que EKHA es un paralelogramo y AK es su diagonal, y que GCFK es un paralelogramo y KC es su diagonal.
- Entonces por la Proposición I.34, el área del triángulo AEK es igual al área del triángulo AHK. Por la misma razón, el área del triángulo KFC es igual al área del triángulo KGC.
  Y por la Noción común 2, tenemos que el área del triángulo AEK junto con el área del triángulo KGC es igual al área del triángulo AHK junto con el área del triángulo KFC.
  Esto mismo haciendo uso de la notación (ABC) para denotar el área del triángulo ABC, lo escribimos así:

[5]Demostración adaptada de http://132.248.17.238/geometria/t_1_036/t_1_036_m.html Consultada en Marzo de 2011.

$$(AEK)=(AHK) y\ (KGC)=(KFC) \rightarrow (AEK)+(KGC)=(AHK)+(KFC)$$

*Por lo tanto, en cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos alrededor de la diagonal tienen áreas iguales.*

## 2.5 Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) fue desarrollada por Guy Brousseau (2007) en Francia a finales de los años sesenta ante la necesidad de abordar de manera científica las cuestiones vinculadas a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, primeramente en situación escolar y luego, en general, en los fenómenos vinculados a la difusión de los saberes y conocimientos matemáticos.

La TSD en matemáticas (Perrin, 2009) es un medio para estudiar saberes matemáticos y producir los conocimientos correspondientes. El objetivo principal de la TSD es explicar los fenómenos vinculados a la enseñanza de matemáticas y no confundirlos con las condiciones para la enseñanza en las clases.

En la TSD intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y medio didáctico; de acuerdo a las relaciones que se dan entre estos tres elementos se define lo siguiente:

La **Situación no didáctica** es cuando ningún sujeto ha organizado la situación para permitir un aprendizaje, es decir, una situación que carece de intencionalidad de enseñanza. Margolinas (2009) entiende la situación no didáctica como:

> *"(…) un problema que aparece "naturalmente" en la vida profesional o personal del sujeto. Las personas que participan en una situación no didáctica puede ser un profesor y unalumno en otra situación, y por lo tanto las características de "profesor" y "alumno" no dependen*

> *de títulos particulares, sino de sus situaciones respectivas con respecto a un saber en juego en la relación" (*p. 34-35*).*

Por su lado, la **situación didáctica** generalmente se da en la clase y comprende al estudiante, al profesor y al medio, es decir que se rige estrictamente por el contrato didáctico, gracias al cual las intenciones de enseñar y aprender son claras.

Esto implica que la situación didáctica está determinada por el conjunto de obligaciones (y relaciones) entre el estudiante, el profesor y el saber, tal como se expresa en la Figura 6[6].

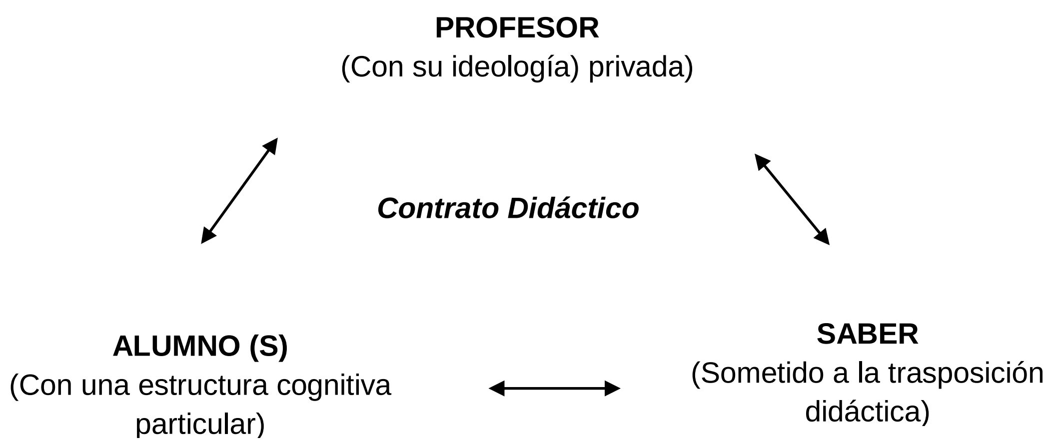



**Figura 6.** El Sistema Didáctico

La situación didáctica busca que el estudiante construya con sentido un concepto matemático, de acuerdo con una situación creada por el profesor y a unas variables que se presentan en ésta.

También el medio donde se presenta la situación debe permitir retroacciones, es decir que según las acciones realizadas por el estudiante dadas por la

[6]Tomado de JOSHUA y J DUPIN (1993). Traducido por Castrillón y Vega (1998).

incertidumbre de sus acciones, debe ir construyendo la información del concepto y no debe venir por parte del profesor.

Acosta (2010) plantea el siguiente esquema como ilustración a la situación didáctica.

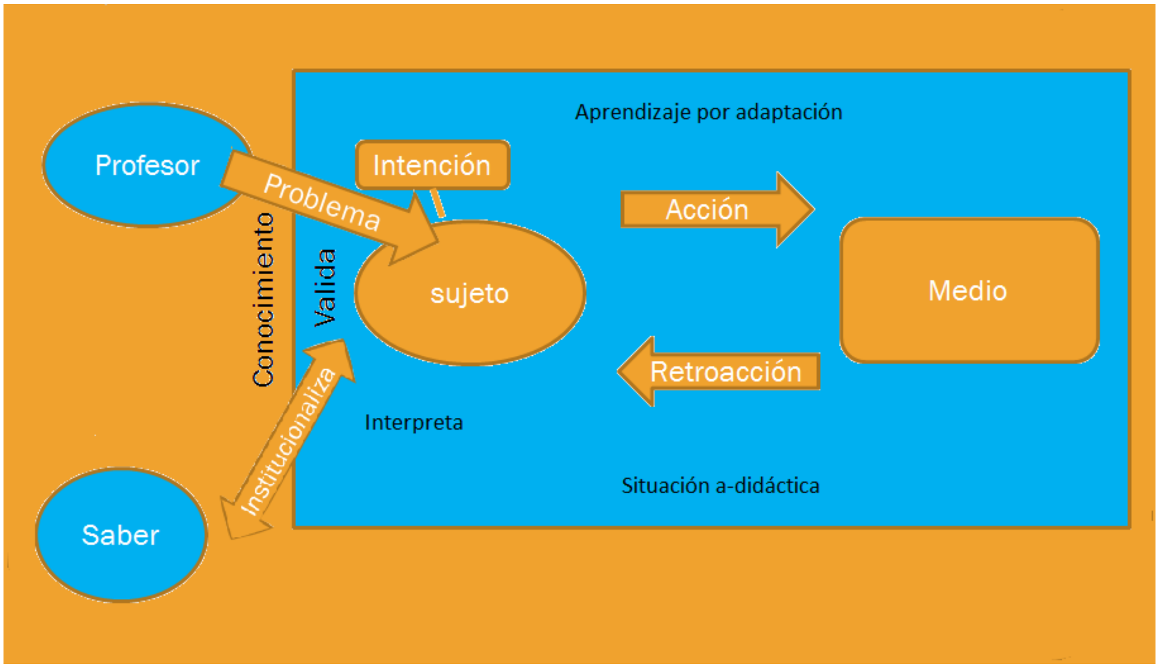



Figura 7. Situación Didáctica.

La **situación a-didáctica** es una situación que puede ser vivida por el alumno como investigador de un problema matemático, independientemente del sistema de enseñanza.

Un elemento fundamental del TSD es la noción de medio (Margolinas, 2009), pues este constituye el espacio donde se desenvuelve los elementos del contrato didáctico.

El medio material (Perrin, 2009), puede ser traducido en representaciones semióticas, incluidas las simbólicas o lingüísticas. Se trata de los elementos conocidos por el estudiante, que traen retroalimentaciones que el estudiante puede interpretar con sus conocimientos previos, mientras actúa para solucionar un problema planteado en este medio.

Cuando Cabri es medio, se debe tener en cuenta que este es un ambiente de aprendizaje interactivo, donde las pautas son dadas de acuerdo a las distintas funcionalidades del software y donde el estudiante experimenta, es decir puede arrastrar la figura o hacer construcciones y gracias a ello puede plantear diversas conjeturas observadas en este.

En la TSD (Perrin 2009) se pueden identificar algunas situaciones como lo son:

- **La situación de acción**: donde se trata que el estudiante trabaje un problema planteado y pueda interactuar con el medio.
- **La situación de formulación**: se trata de que los estudiantes comuniquen sus experiencias de acuerdo al problema planteado.
- **La situación de validación**: luego de que los estudiantes hayan explorado y comunicado sus experiencias del problema planteado, el profesor participa en la validación del conocimiento de los estudiantes es decir rectifica que lo que han discutido es cierto o no.
- **La situación de institucionalización**: en esta situación los estudiantes ya han construido la idea del saber tratado. Por lo que es el docente quien retoma todo lo discutido, clarifica ideas y formaliza el saber del cual se ha tratado.

### 2.6 La mediación semiótica: el caso del arrastre

El concepto de mediación semiótica según Vygotski (1979), se refiere a la mediación a través de herramientas ya sean físicas o psicológicas, que se dan entre un sujeto y un objeto.

En particular, los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se desarrollan en el aula de clase están caracterizados por una intencionalidad a través de la acción del docente, quien se convierte en un mediador entre el alumno y el saber. Para llevar a cabo esta función; el docente puede apoyarse en diferentes medios, sean éstos de carácter situacional, instrumental o lingüístico, siendo éste último rasgo el que conduce al concepto de mediación semiótica.

El programa Cabri-géomètre se enmarca dentro de los ambientes de geometría dinámica y los elementos característicos que hacen de Cabri un instrumento de mediación semiótica, según Mariotti, 2001(citado en Angulo, 2009), es que incorpora una gran parte de la teoría elemental de la geometría euclidiana.

Los objetos geométricos computarizados a través de los cuales el estudiante interactúa con el ambiente pueden ser pensados como herramientas de mediación, pues permiten actuar al estudiante de una forma frente a situación planteadas por el profesor para luego prescindir de estas herramientas frente a nuevas situaciones.

De ahí que el problema abierto (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010) ayuda para que el estudiante construya el saber matemático. Un problema abierto se caracteriza por tener diversas soluciones, que se pueden dar a través de una exploración en un ambiente determinado. El uso de un AGD en la resolución de problemas abiertos fomenta la producción y validación de conjeturas, pues los problemas abiertos ponen énfasis en aspectos teóricos del dibujo y hacen que los estudiantes sean conscientes de los elementos teóricos del mismo.

Desde esta perspectiva una de las características principales de un AGD es el arrastre, el cual permite la modificación directa de la forma o posición de los objetos geométricos a través del ratón.

Con el uso del arrastre se logra diferenciar entre (Laborde, 1998) el dibujo y objeto geométrico, este último se caracterizan por el hecho de que las propiedades se traducen gráficamente por relaciones espaciales, es decir, el objeto no se deforma ni pierde sus propiedades al hacer uso del arrastre; por el contrario el dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en medida que el sujeto tenga conocimiento de estos pero en un AGD no guarda las relaciones espaciales es decir que al hacer uso del arrastre la figura se deformará y no conservará invariantes.

Existen diversas formas de arrastre (*dragging*) que se pueden usar en un AGD Olivero, Paola y Robutti, 1998 (Citado en Quintero, 2007) a continuación se hace una breve descripción:

- *Dragging Test*: es la prueba del arrastre efectuada para ver si la figura dibujada mantiene aquellas propiedades geométricas que se le quisieron atribuir.

- *Wandering dragging*: consiste en arrastrar al azar a los elementos libres de la figura para descubrir eventuales regularidades, invariantes, o propiedades.

- *Lieumuet dragging*: consiste en arrastrar a lo largo de una trayectoria privilegiada construida empíricamente a través de la interacción perceptiva entre figuras sobre la pantalla y movimientos del ratón, de modo que se conserve cierta propiedad o regularidad.

- *Line dragging*: consiste en señalar los puntos sobre la pantalla que mantienen a una propiedad de la figura; con el line dragging el lieumuet se vuelve expreso a nivel visual. La herramienta "traza" permite esta explicitación.

- *Link dragging*: consiste en vincular un punto a un objeto donde es posible mover luego el punto sobre el objeto.

- Bound dragging: consiste en arrastrar un punto que ya fue vinculado a un objeto.

**Conclusión.**

Varias investigaciones exponen las dificultades que se presentan cuando se enseña la demostración en el aula de clase, por ello se han presentado diversas teorías para tratar de solucionar los problemas de aprendizaje alrededor de la demostración. Este trabajo pretende usar principalmente la TSD para el diseño de una secuencia didáctica tal, que los estudiantes desarrollen procesos de validación y empleen unos tipos de pruebas como las pragmáticas.

Considerando que las matemáticas están fundamentadas en el rigor y en formalismo, dado que es propio de su naturaleza al igual que la demostración; por tal razón dentro del contexto educativo debe ser enseñada los tipos de prueba. Las matemáticas experimentales son una propuesta para enseñar los tipos de prueba que propone Balacheff (2010), este trabajo se enfoca en las pruebas pragmáticas a través de las propiedades con los paralelogramos.

Un AGD permite realizar la verificación de relaciones entre los objetos matemáticos y realizar de acuerdo a la experimentación los distintos tipos de pruebas pragmáticas.

# CAPÍTULO III

## DISEÑO DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

### 3.1 Aspectos Metodológicos generales de la investigación

Como metodología de investigación en el presente trabajo se tomaran algunos elementos de una ingeniería didáctica, particularmente a nivel de microingeniría, que se designa (Artigue, 1995) como un conjunto de secuencias de clase organizadas y articuladas de forma coherente en un tiempo determinado, por un profesor para efectuar un proyecto de enseñanza de un saber matemático dado en un grupo concreto de alumnos. El sustento teórico de esta metodología es la TSD y la teoría de la transposición didáctica, tiene un carácter cualitativo, basado en un  estudio de caso.

Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental en el aula de clase, donde se distinguen dos niveles: nivel de micro-ingeniería y nivel de macro-ingeniería. El nivel de micro-ingeniería se usa en las investigaciones, que tienen por objeto el estudio de un determinado saber, en el presente trabajo el saber matemático de interés son los cuadriláteros en especial las propiedades de los paralelogramos. La micro-ingeniería toma en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula de clase, por tanto en este trabajo se han realizado análisis *a-priori* y *a-posteriori.*

La Secuencia didáctica (SD) realizada bajo estas características de una micro-ingeniería, ha sido diseñada para la aplicación por parte de un docente investigador, que es la persona que ha diseñado bajo la TSD teniendo en cuenta un saber matemático, los paralelogramos en función de promover el uso de la prueba pragmática. Por tanto el docente investigador es la persona que aplica y realiza los análisis *a priori* y *posteriori* de la SD.

### 3.2 Variables didácticas

En el diseño de la SD se tendrán en cuenta las siguientes variables:

- **Tipo de prueba pragmática** privilegiada en el diseño de cada una de las situaciones que compone la SD, por ejemplo en la situación 1 está diseñada para el uso del empirismo ingenuo perceptivo donde se trata que el estudiante se base en lo que observa en la figura para hacer una justificación de la afirmación que ha propuesto dentro de la fase de validación; en la situación 2 se pretende que el estudiante en la fase de validación, para realizar una justificación de su afirmación use el experimento crucial analítico, dado que se quiere que la justificación del estudiante tenga elementos teóricos de la figura observados durante el arrastre; en la última situación se quiere que dentro de la fase de validación el estudiante use el ejemplo genérico dado que debe identificar la figura que es representante de una clase de paralelogramos para hacer su justificación.

- **El tipo de arrastre** como retroacción del medio, funcionando como mediador semiótico, es una variable dado que permite al estudiante identificar las propiedades invariantes en cada una de las distintas situaciones que componen la SD. El tipo de arrastre que predomina en la SD es el *Wandering dragging,* pues los estudiantes al inicio de cada situación exploran libremente la construcción dada, sin embargo en algunas fases se hace uso del *Dragging test*..

- **Las propiedades de los paralelogramos** explícitas en las construcciones geométricas propuestas en Cabri. El tipo de figura, en la SD del presente trabajo las figuras son importantes dado que la prueba pragmática se basa en lo que se pueda observar de la figura y las invariantes que se puedan identificar en ella, por eso a lo largo de la SD se usan cuadriláteros, paralelogramos no rectángulos ni cuadrados y rombos, es decir se intentan usar figuras poco usuales a las que se realizan normalmente en el aula de clase, en conclusión figuras con las cuales quizás se pueda llegar a una generalización.

### 3.3 Análisis *a priori* de la secuencia didáctica

Esta SD constituye un diseño experimental que pretende abordar el uso de las pruebas pragmáticas con respecto a las propiedades de los paralelogramos, para estudiantes de grado séptimo en un AGD con la característica fundamental de promover la exploración de construcciones geométricas de paralelogramos por medio del arrastre (*Wandering dragging o Dragging test*).

La SD está distribuida en tres situaciones y cada situación se dividen en cuatro fases, de acuerdo a la TSD: acción, formulación, validación e institucionalización, en esta última fase es donde el docente investigador interviene para institucionalizar la propiedad a la que se quería llegar por medio de la situación trabajada en clase.

Se recomienda que para que se pueda llegar a las propiedades a través de las fases nombradas anteriormente el trabajo realizado en la SD se desarrolle en un tiempo de 90 minutos y se conformen parejas o equipos de 3 personas, apoyando esta idea y recogiendo la ideas de Brousseau, 1986 ( citado en Balacheff, 2000):

> *En el trabajo por parejas, considera dos aspectos: el carácter esencial de esta dimensión social que parte de "hacer" para llegar a "hacer que otros hagan" y su papel determinante en la construcción de los significados de los conocimientos matemáticos.*

| Situación | Propósito | Tiempo |
|---|---|---|
| 1 | Planteamiento de conjetura haciendo uso del empirismo ingenuo perceptivo. | 90 min |
| 2 | Argumentación de conjetura mediante los distintos tipos de experimento crucial basado en el ejemplo o analítico. | 90 min |
| 3 | Argumentación de conjetura haciendo uso del ejemplo genérico. | 90 min |

Tabla 1. Descripción general de la SD.

Nótese que el propósito de cada situación diseñada pretende movilizar aspectos particulares de las pruebas pragmáticas.

De acuerdo a las variables didácticas consideradas, los tipos de prueba pragmática juegan un papel primordial en el diseño, de esta manera la SD se estructura de acuerdo al tipo de prueba privilegiado:

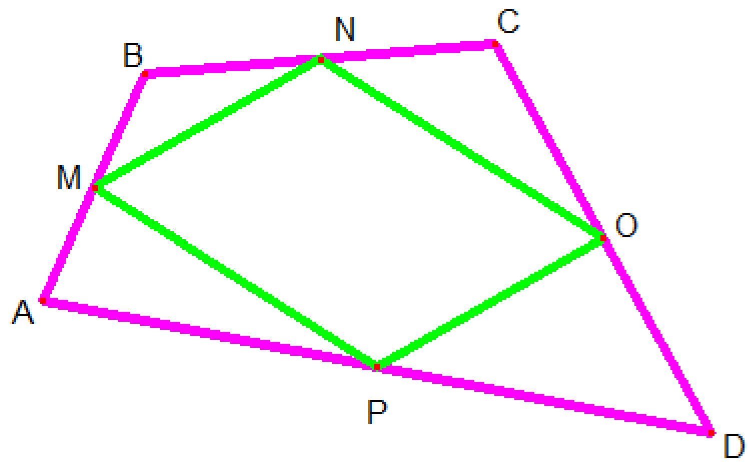
| Situación | Tipo de prueba privilegiada | Descripción |
|---|---|---|
| 1 | Empirismo ingenuo perceptivo. | El estudiante se basa en lo que observa en la figura para realizar su justificación. En este caso tiene el cuadrilátero ABCD y el paralelogramo MNOP. |
| 2 | Experimento crucial analítico. | El estudiante debe observar las invariantes en la figura teniendo en cuenta algunos elementos teóricos. En este caso las rectas interceptadas KI y JL. |
| 3 | Ejemplo genérico | El estudiante debe identificar la figura que representa a una clase general de paralelogramos para poder realizar su justificación. En este caso tiene dos figuras |

| | | |
|---|---|---|
| | | con una diferencia en el punto de intersección, las rectas TR y QS, PN y MO. |

Tabla 2. Descripción del tipo de prueba en la SD.

### 3.3.1 Análisis a priori Situación 1

La propiedad que se tiene en cuenta en esta situación se formula de la siguiente manera.




Hipótesis:

$$M: PM\ (\overline{AB}); N: PM(\overline{BC});\ O: (\overline{CD});\ P: PM(\overline{AD})$$

Tesis:

$$\overline{MN} \parallel \overline{OP}\ y\ \overline{MP} \parallel \overline{ON}$$

Demostración:

$\overrightarrow{MN} = \vec{N} - \vec{M} = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right) - \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$ usando que N y M son puntos medios

Haciendo la resta de vectores:

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(c_1 - a_1, c_2 - a_2)$ (I)

Hacemos lo mismo con OP

$$\overrightarrow{OP} = \vec{P} - \vec{O} = \left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) - \left(\frac{c_1+d_1}{2}, \frac{c_2+d_2}{2}\right)$$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(a_1 - c_1, a_2 - c_2)$ (II)

De (I) y (II):

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OP} \rightarrow \overline{MN} \backslash\backslash \overline{OP}$ y tienen la misma longitud. Por lo tanto MNOP es un paralelogramo.

La construcción de esta situación se inspira en la construcción euclidiana del paralelogramo que se presenta así: "*Los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo".*

Esta situación inicia con la fase de acción, en donde los estudiantes deben realizar la exploración de la construcción que está compuesta por un cuadrilátero ABCD y la unión de sus puntos medios MNOP, determinando que puntos pueden arrastrar (A, B, C y D) además explicar el comportamiento de dichos puntos cuando son sometidos al arrastre. Al realizar el arrastre se darán cuenta de las modificaciones que se dan en la figura ABCD y MNOP, descubriendo que ABCD se deforma con respecto a MNOP. El tipo de arrastre usado en toda la situación es *Wandering dragging*.

Durante esta misma fase se espera que los estudiantes concluyan que la figura MNOP es un paralelogramo, sin embargo algunos estudiantes podrían concluir que el tipo de cuadrilátero que se forma es un cuadrado, esto podría suceder si no se tiene claro la definición de cuadrado, de igual modo podrían concluir que es un rectángulo.

Con la fase de formulación se busca que los estudiantes descubran las invariantes que existen al realizar el arrastre y también busque la razón del porque existen esas invariantes.

Algunos estudiantes llegarán a la conclusión de que MNOP no deja de ser un paralelogramo porque está construido con los puntos medios del cuadrilátero ABCD, que es la conclusión a la que se pretende llegar.

Sin embargo los estudiantes que han respondido que MNOP es un cuadrado o un rectángulo, podrían decir que la figura no cambia porque sus propiedades, es decir que tengan lados paralelos, no se lo permite.

**Situación 1**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

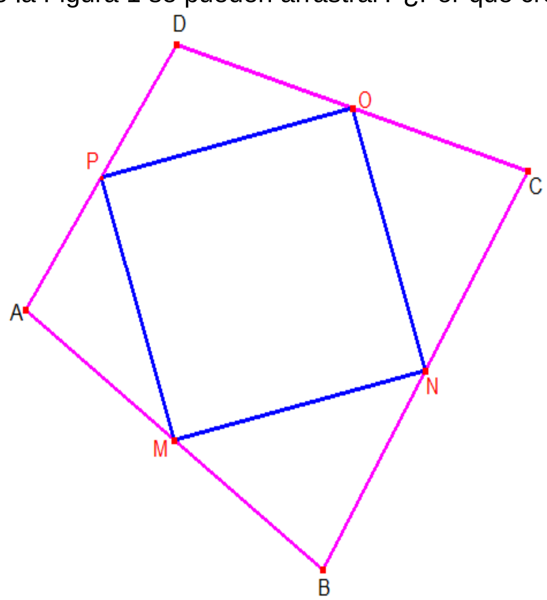



Figura 1

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cuando se mueven los puntos B y C?
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.

FASE DE VALIDACIÓN

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Figura 8. *Situación 1*

Durante la fase de validación se espera que los estudiantes lleguen a una afirmación (conjetura) con relación a lo que ocurre con el paralelogramo MNOP, este cuadrilátero por ser puntos medios de ABCD siempre será un paralelogramo. En esta fase se espera que los estudiantes utilicen un empirismo ingenuo perceptivo, es decir que solo se base en lo observado de la figura para hacer su justificación.

Podría suceder que algunos estudiantes formulen que siempre que un paralelogramo se forme con los puntos medios de un cuadrilátero no se podrá deformar. Por otra parte los estudiantes que hayan respondido que la figura MNOP es un rectángulo o un cuadrado podrían plantear que siempre que se trace una figura dentro de un cuadrilátero, la figura será un cuadrado o un rectángulo.

La situación está diseñada para que el estudiante se base en la figura y lo que observa de ella. Es difícil que los estudiantes en esta primera situación tomen elementos teóricos y realicen su justificación a partir de estos, sin embargo podría suceder.

En la fase de institucionalización, el docente investigador luego de escuchar la socialización que se hace a partir de la situación uno, formaliza el problema abierto planteado en este caso: Los puntos medios de cualquier cuadrilátero siempre será un paralelogramo.

| Tipo de prueba privilegiada | Problema abierto propuesto | Mediación semiótica del arrastre |
|---|---|---|
| Empirismo ingenuo perceptivo. | Dado un cuadrilátero cualquiera ABCD, los puntos medios de este MNOP siempre serán un paralelogramo. | El arrastre de los vértices del cuadrilátero permite observar que MNOP nunca se deforma y es un paralelogramo. |

Tabla 3. Síntesis del análisis *a priori* situación 1

### 3.3.2 Análisis a priori situación 2

El teorema al cual se alude en esta situación es: *Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.*

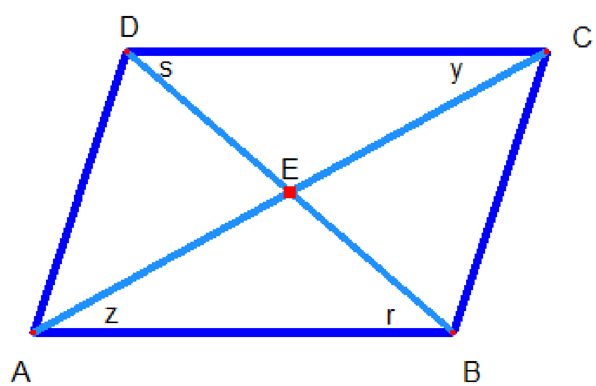



**Figura 9. Teorema de situación dos 1**

Hipótesis: Paralelogramo ABCD con las diagonales interceptándose en E.

Conclusión: $\overline{AC}\ y\ \overline{BD}$ se bisecan mutuamente.

Demostración

| **PROPOSICIONES** | **RAZONES** |
|---|---|
| 1. ABCD es un paralelogramo | 1. Hipótesis |
| 2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ | 2. Definición de paralelogramo |
| 3. $\angle z \cong \angle y, \angle r \cong \angle s$ | 3. Por teorema: Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. |
| 4. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ | 4. Por teorema: los lados opuestos y los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. |
| 5. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ | 5. Criterio Angulo Lado Angulo (ALA) |
| 6. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ $y$ $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ | 6. Los lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. |
| 7. $\overline{AE}$ $y$ $\overline{BD}$ se bisecan mutuamente | 7. Definición de bisectriz. |

En la fase de acción los estudiantes deben realizar la exploración de la construcción que es dada a los estudiantes, que son dos segmentos IK y LJ interceptados. La exploración la realizan por medio del arrastre (*Wandering dragging*) de los distintos puntos que tiene la figura I, K, L y J teniendo en cuenta que sucede cuando se arrastran unos puntos en particular (L y J), se pretende que observen la relación de dependencia entre los segmentos dados.

En la fase de formulación se espera que los estudiantes describan lo que sucede al arrastrar los puntos de la construcción dada, los segmentos interceptados IK y LJ. Los estudiantes podrían llegar a la conclusión que el segmento IK depende del segmento LJ y que estos segmentos se bisecan entre sí, esta es la conclusión que se considera correcta.

Sin embargo algunos estudiantes pueden llegar a la conclusión de la dependencia del segmento IK con el segmento LJ y no tener en cuenta que los segmentos se bisecan entre sí.

Durante esta misma fase en el punto tres, los estudiantes deberán trazar un paralelogramo con vértices IJKL y se darán cuenta que los segmentos IK y LJ son las diagonales del paralelogramo IJKL y que estas se bisecan entre sí, llegando a la afirmación que las diagonales de todo paralelogramo se bisecan entre sí, que es la afirmación que se cree correcta y se espera. El arrastre usado en esta parte de la secuencia es *Dragging test.*

Por el contrario si algunos estudiantes no han observado que estos segmentos se bisecan, puede ser que se facilite notarlo cuando el paralelogramo IJKL se trace.

**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

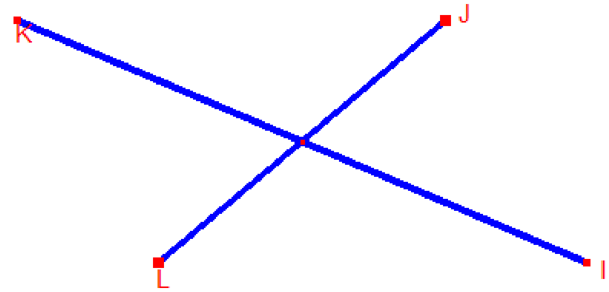


Figura 2

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento IL cuando los puntos del segmento KJ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos LJIK. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?
4. KJ y IL son las diagonales del cuadrilátero KIJL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?

5. FASE DE VALIDACIÓN

6. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

7. FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Figura 9. Situación 2.

En la fase de validación se espera que para argumentar su afirmación de que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, use el experimento crucial analítico dado que en esta situación primero, se usa un paralelogramo genérico, es decir que para cualquier tipo de paralelogramo se cumple esta propiedad y segundo los estudiantes puedan usar algunos elementos teóricos teniendo en cuenta las relaciones que se dan entre las diagonales.

No obstante, existen tres tipos de experimento crucial: basado en el ejemplo cuando los estudiantes creen solo en ese ejemplo como único y no piensan que puede cumplirse para toda figura de la cual se está hablando en este caso el paralelogramo, constructivo cuando el estudiante se basa en la construcción para la argumentación de su afirmación, analítico cuando la argumentación se basa en las relaciones y propiedades encontradas en la figura.

Sin embargo la situación 2 está diseñada para que se use un experimento crucial basado en el ejemplo o experimento crucial analítico, el experimento crucial constructivo no porque el estudiante no hace construcción de una figura dadas unas condiciones.

| **Tipo de prueba privilegiada** | **Problema abierto propuesto** | **Mediación semiótica del arrastre** |
|---|---|---|
| Empirismo ingenuo analítico. | Las diagonales de todo paralelogramo se bisecan entre sí. | El arrastre permite ver la dependencia que existe entre el segmento IK y LJ, que se da porque los segmentos se bisecan entre sí.<br><br>Cuando es trazado el paralelogramo IJKL por medio del arrastre el estudiante se observa que IK y LJ son diagonales de un paralelogramo y este no se deforma. |

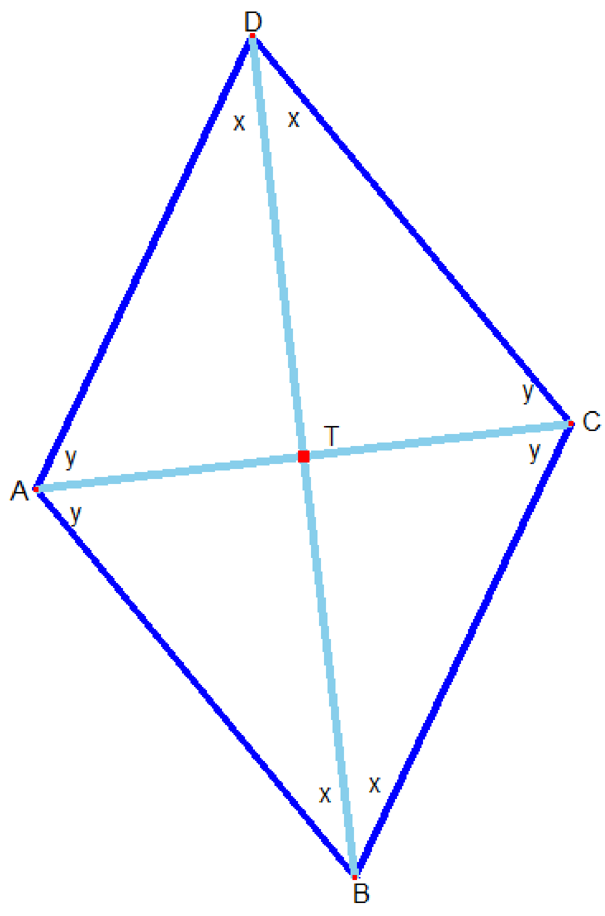
Tabla 4. Síntesis del análisis *a priori* situación 2.

Se espera encontrar las argumentaciones de la situación 2 en cualquiera de estas dos categorías del experimento crucial, teniendo en cuenta que el diseño privilegia al experimento crucial analítico; porque se cree que los estudiantes con elementos teóricos de la situación uno en este caso la definición de punto medio pueden relacionar las situaciones 1 y 2 pues las dos involucran este término.

Durante la fase de institucionalización el docente investigador recogiendo los aportes que han realizado los estudiantes formaliza el problema abierto, en la situación dos será: Las diagonales de todo paralelogramo se bisecan entre sí.

### 3.3.3 Análisis a priori situación 3

El teorema implícito en esta situación es: *Las diagonales de un rombo son mutuamente perpendiculares.*




Hipótesis: ABCD es un rombo.

Conclusión: las diagonales del rombo son perpendiculares.

| **PROPOSICIONES** | **RAZONES** |
| --- | --- |
| 1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | 1. Definición de paralelogramo |
| 2. $\angle ADB \cong \angle DBC$ y $\angle DAC \cong \angle ACD$ | 2. Por teorema: si dos rectas paralelas se cortan mediante una trasversal, los ángulos alternos internos son congruentes. |
| 3. $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}\ y\ \overline{AB}, son\ congruentes.$ | 3. Definición de Rombo. |
| 4. $\triangle BAD, \triangle BDC$ son triángulos isósceles. | 4. Definición de triangulo isósceles. |
| 5. $2y + 2x = 180°$<br>$2(y + x) = 180°$<br>$x + y = 90$ | 5. Teorema: la suma de los ángulos internos de un triangulo es 180°<br>Factor común<br>Propiedad uniforme e inverso multiplicativo. |
| 6. $\angle DAC + \angle BDA = 90°$<br>$\angle DAC + \angle BDA + \angle ATD = 180°$<br>$90° + \angle ATD = 180°$<br>$\angle ATD = 180° - 90°$<br>$\angle ATD = 90°$ | 6. Teorema: la suma de los ángulos internos de un triangulo es 180°<br>Propiedad uniforme e inverso aditivo. |

En la fase de acción los estudiantes explorarán dosconstrucciones que contiene la situación 3, la primera son dos segmentos TR y QS interceptados en un punto X, la segunda son también dos segmentos MO y PN interceptados en el punto Y, el punto X no se puede arrastrar por el contrario Y si se puede.

Se espera que los estudiantes noten a través del arrastre (*Wandering dragging*) la relación de perpendicularidad existente entre los segmentos TR y QS y PN con MO. Además puedan por medio del arrastre observar la diferencia entre los puntos X y Y de las construcciones.

En la fase de acción se da un arrastre *Wandering dragging* iniciando, luego se le indica al estudiante que puntos debe arrastrar para que puedan establecer las relaciones a las cuales se quiere que llegue el estudiante.

Si los estudiantes con el arrastre guiado no logran establecer la relación de perpendicularidad de los segmentos, no podrán continuar con la fase de formulación pues es necesario tener en cuenta las relaciones observadas para llegar a una afirmación (conjetura) en la fase de formulación.

En la fase de formulación se quiere que los estudiantes tracen dos polígonos QRST y MNOP. También que puedan visualizar la relación entre las diagonales y el polígono, el polígono QRST es un rombo cuyas diagonales son perpendiculares y se bisecan, pero el polígono MNOP como el punto de intersección Y se puede mover el polígono se deforma.

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

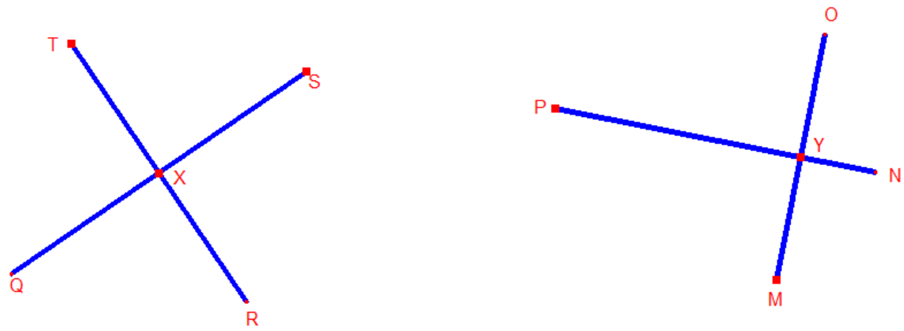



Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes?

5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué?

6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

FASE DE VALIDACIÓN

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

9. Escriban una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Figura 10. Situación 3

Los estudiantes no podrán realizar la fase de validación sino encuentran las similitudes y diferencia entre los polígonos QRST y MNOP y la relación entre sus diagonales, pues en esta fase se pretende que los estudiantes realicen un conjetura con respecto a la diagonales del rombo y teniendo en cuenta la conjetura de la situación 2. Debido a que el rombo es un paralelogramo y las diagonales de un paralelogramo se bisecan, pues esta situación está diseñada para conjeturar lo siguiente: las diagonales del rombo se bisecan y son perpendiculares.

En esta fase no se tiene en cuenta al polígono MNOP, dado que era una figura que debía ser comparada con QRST para llegar a la conjetura.

Si alguna pareja de estudiantes tienen en cuenta en su conjetura a la figura MNOP es porque no tiene claro la definición de un paralelogramo.

Para la argumentación de su afirmación se pretende que los estudiantes usen una clase de prueba pragmática como lo es el ejemplo genérico, pues en esta situación se ha tomado el rombo como una figura representativa de una clase de paralelogramo en la cual el estudiante debe apoyarse para realizar su justificación de la afirmación realizada.

En la fase de institucionalización el docente investigador tomando en cuenta las socializaciones hechas en la clase, formalizará el problema abierto así: las diagonales de un rombo se bisecan y son perpendiculares entre sí.

| Tipo de prueba privilegiada | Problema abierto propuesto | Mediación semiótica del arrastre |
|---|---|---|
| Ejemplo genérico. | Las diagonales de un rombo QRST, se bisecan y son perpendiculares entre sí. | Por medio del arrastre se comparan dos figuras QRST y MNOP, teniendo en cuenta cuál de las figuras conserva las invariantes previamente identificadas. |

Tabla 5. Síntesis del análisis *a priori* situación 3.

**Conclusión**

Con esta SD se quiere que los estudiantes de séptimo grado a quienes está dirigido, usen los distintos tipos de prueba pragmática a través de las propiedades de los cuadriláteros, en especial los paralelogramos en un AGD.

# CAPÍTULO IV

## ANÁLISIS A POSTERIORI

## Y EVALUACIÓN DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En este capítulo se hará una descripción de la experimentación con la secuencia didáctica, también se realizará una descripción de los estudiantes a quienes se fue aplicada la secuencia y la Institución educativa Normal Superior Farallones de Cali. También se mostrará los resultados obtenidos con la secuencia didáctica y la relación entre los análisis *a priori* y los análisis a *posteriori.*

### 4.1 Descripción de la experimentación

La SD se realizó los días 17, 18 y 19 de agosto de 2011 a estudiantes entre 12 y 14 años pertenecientes a un grado séptimo de la jornada de la tarde.

La Institución cuenta con varias salas de sistemas la sala donde se desarrolló la experimentación, que tiene disponible 7 computadores de escritorio y 10 computadores portátiles con Cabrí II plus. Las situaciones fueron aplicadas en parejas y grupos de 3, dado que los computadores no eran suficientes para trabajar en parejas todo el grupo.

El grupo séptimo con quien se implementó laSD no había experimentado con un AGD, por lo que al inicio de la situación 1 se explicó brevemente las características de Cabrí II plus y cómo se iba a usar en las tres sesiones de clase, esta explicación se realizó dentro del salón de clase a continuación el grupo se dirigió a la sala de sistemas donde se organizaron en parejas y tríos con ayuda del profesor de matemáticas de la institución.

Cuando el grupo se organizó en los computadores a cada pareja y trio de estudiantes se le entregó una hoja donde estaba las preguntas correspondientes a la situación 1 luego, se dijo a los estudiantes que identificarán el archivo que se llamaba macroconstrución situa_1 y lo abrieran, se explicó que era y como se usaba el arrastre y que durante toda la clase solo se iba a usar el cursor.

Para la aplicación de la situación 2 los estudiantes se organizaron del mismo modo como se había trabajó el día anterior, se entregó las preguntas correspondientes a la situación dos, cuando los estudiantes llegaron a la pregunta número 3, se explicó qué herramienta de Cabrí debían usar para realizar el trazo de un polígono.

En la aplicación de la situación 3 la organización fue la misma y el orden de la clase del mismo modo, no hubo necesidad de especificar alguna herramienta de Cabrí II plus, sin embargo al inicio de la clase se recordó las clases de paralelogramos.

Durante la aplicación de las situaciones los profesores del área de matemáticas de estos grados supervisaban en algunos momentos la disciplina del grupo. Durante la situación 1 y 2 hubo un acompañamiento del profesor que le correspondía esas horas de clase.

Durante los tres días de aplicación se contabilizó un tiempo de 90 min. Este tiempo fue bueno para la aplicación total de la secuencia didáctica.

## 4.2 Análisis *a posteriori* de la experimentación

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la experimentación de la SD. De manera que para cada situación se presentará una descripción de resultados obtenidos y en una tabla se presenta la comparación de los análisis *a priori* y *posteriori.*

### 4.2.1 Análisis a posteriori situación 1

El requisito para la aplicación de la secuencia en el grado séptimo era que los estudiantes tuvieran conocimiento acerca de los cuadriláteros, en especial los paralelogramos.

En esta primera situación se pretende que los estudiantes conjeturen que los puntos medios de un cuadrilátero siempre será un paralelogramo, para ello se inició con la fase de acción.

Para algunos estudiantes la exploración en un AGD era una experiencia nueva, por lo cual se realizó una pequeña introducción de lo que era Cabri II plus y el manejo que se iba a dar durante toda la semana a través de una serie de situaciones.

Como la herramienta que más se iba a usar durante las situaciones era la del arrastre se les enunció a los estudiantes que no fueran a dar clic en una herramienta distinta a la del cursor. Durante el desarrollo de la situación 1 la norma fue respetada y acatada.

La situación 1 se compone de 7 tareas las cuales se dividen en las fases. La fase de acción tiene una tarea, la fase de formulación 3 tareas, la fase de validación 2 tareas y la fase de institucionalización 1 tarea.

Para la fase de acción se inicia con una tarea que invita al estudiante a explorar la figura dada y dice así: *¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?*

Pocos estudiantes se limitaron a escribir el nombre de los puntos que se podían mover sin justificación y la mayoría de estudiantes respondieron que esos puntos se podían mover porque eran parte de la figura principal, aunque lo dijeron de varias formas las respuestas coinciden en lo mismo. A continuación una fotografía de una figura:

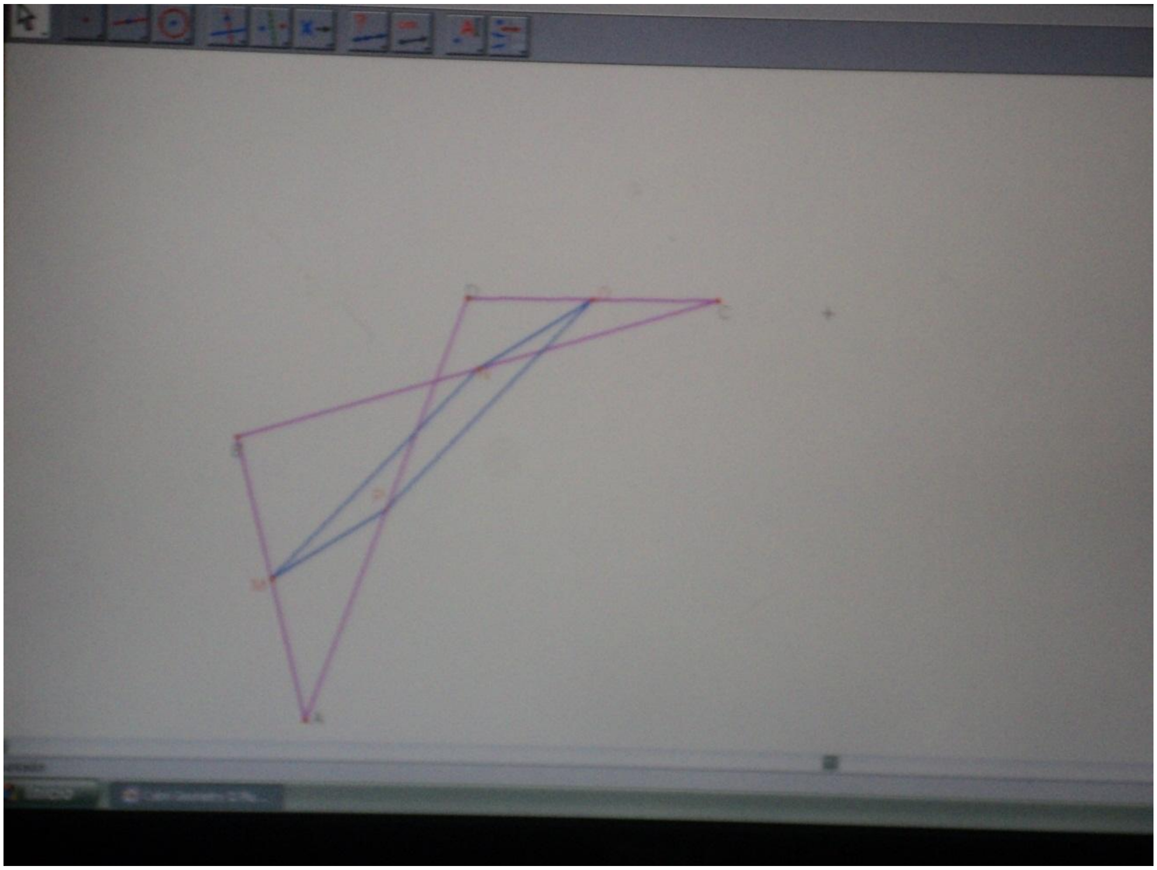


Foto 1. Exploración de la construcción de la situación 1.

En la fase de formulación, que es la fase donde después de explorar la figura se proponen tareas encaminadas a la conjetura, es decir a que concluyan con la propiedad a la cual se quiere llegar, esta fase inicia con la tarea: *¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?*

En las respuestas a esta tarea se pudo evidenciar, como lo muestra la figura 11, 12 y 13 la falta de elementos teóricos sobre los cuadriláteros por parte de los estudiantes, una gran mayoría respondieron que MNOP era un cuadrado debido a que tenía cuatro lados iguales, esta respuesta pudo ser dada ya que el estudiante simplemente tenia presente al cuadrado como una figura de cuatro lados sin tener en cuenta otras propiedades de esta figura como lo es que sus lados deben ser iguales y tiene cuatro lados rectos. También esta clasificación se pudo dar por el número de vértices de la figura como se muestra a continuación.

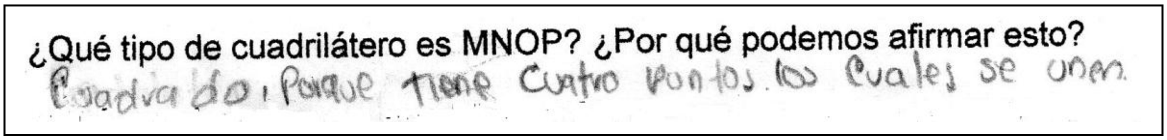

¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
Cuadrado, Porque tiene Cuatro puntos los Cuales se unen.

Figura 11. Respuesta de tipo de figura MNOP (por el número de vértices).

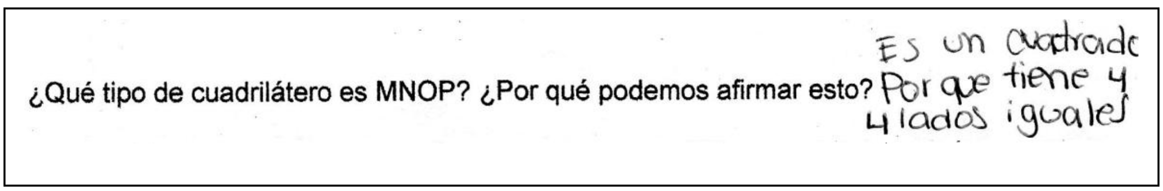

¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto? Es un cuadrado Porque tiene 4 4 lados iguales

Figura 12. Respuesta de tipo de figura MNOP (por lados iguales)

Una de las respuestas era que MNOP era un cuadro, esto lo pudo haber respondido un estudiante que tiene una definición pobre en cuanto a lo que es un cuadrado, pues puede que la representación dentro de su entorno sea la que el cuadro es igual a un cuadrado además dentro de la geometría Euclidiana no está contemplado lo que es un cuadro.

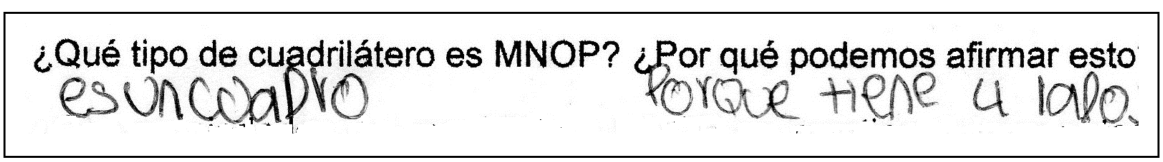

¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto
es un cuadro Porque tiene 4 lado.

Figura 13. Respuesta MNOP es un cuadro

La tarea que continuaba era: *¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cuando se mueven los puntos B y C?,* en esta tarease tuvo que explicar para todos los estudiantes que significaba la palabra invariante en el contexto en el cual estábamos. El profesor investigador uso un lenguaje claro diciendo: *"la palabra invariantes usada en la pregunta número 3, alude a* *que elementos no cambian cuando se hace el arrastre en la figura que estamos trabajando*".

Las distintas respuestas para esta tarea no fueron muy variadas, la mayoría de los estudiantes respondían a esta tarea nombrando los puntos de la figura que no cambiaban (figura 14), es decir que puntos no se podían mover cuando ellos realizaban el arrastre, lo cual se puede asociar con la definición dada, la mayoría coincidió describiendo que MNOP eran puntos que no cambiaban. Este tipo de respuestas se dio porque la mayoría de los estudiantes no estaban relacionados con la palabra invariante y pensaron en los puntos que no cambiaban cuando se realizaba el arrastre.

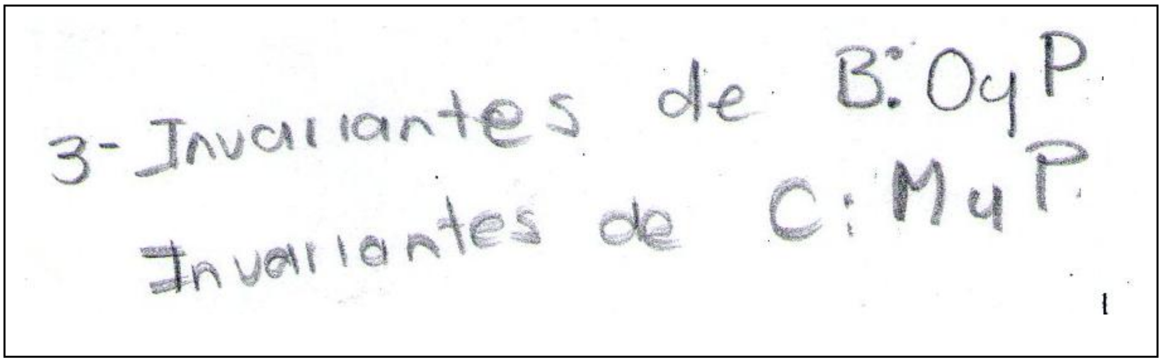



Figura 14. Respuesta propiedades invariantes en MNOP

A la siguiente tarea: *¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.* Tarea que fue diseñada para indagar que elementos teóricos o visuales tenían para decir por qué sucedía lo anterior. Las respuestas variaron, se pudo notar que la gran mayoría no tenía elementos teóricos para sustentar la justificación, aunque la situación estaba diseñada para justificar de acuerdo a lo explorado en la figura, las respuestas no fueron muy claras. Tales respuestas fueron: la figura MNOP no cambia porque está unida a la figura ABCD, es tipo de respuesta deja ver que los estudiantes pudieron ver la relación entre la figura MNOP y ABCD, por lo menos queda claro que para ellos existían una dependencia o al menos una relación entre estas. Otro tipo de respuesta es que la figura MNOP no cambia porque es un cuadrilátero, este tipo de respuesta deja claro que el estudiante por lo menos identificó que MNOP era un cuadrilátero y con ello está implícito que el cuadrilátero no cambia de forma a pesar de los arrastres que se realicen, quizás pudo referirse al paralelismo que se puede ver por medio del arrastre de la figura.

¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación

Por que siempre va a ser un cuadrilactero
de cualquiel forma

Figura 15. Un cuadrilátero no varía en su forma.

En la tarea de inicio de esta fase dice: *Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la figura 1.*Para dar solución a esta tarea se tuvo que aclarar el término afirmación y conjetura, para lo cual el profesor investigador enunció: *“una proposición es un enunciado, que usted puede decir que es falso o verdadero, por ejemplo: decir el cielo está nublado entonces va a llover, usted puede decir si es falso o verdadero. En matemáticas lo que nosotros creemos que es verdadero pero no lo hemos demostrado formalmente se llama conjetura, entonces lo que ustedes deben hacer es plantear una afirmación de acuerdo a lo observado y trabajado en la clase.”*

A pesar de la aclaración que se hizo entre afirmación y conjetura, para la mayoría de estudiantes no fue claro pudiéndose observar en las respuestas (figura 16), este tipo de respuesta deja claro que el estudiante no sabe la diferencia que existe entre un rectángulo y un cuadrado, en este caso lo llama como un cuadro, además la identificación que tiene del rectángulo es que es una figura de tres lados. Por lo tanto faltan los suficientes elementos teóricos en cuanto los objetos geométricos tratados y no sabe formular una afirmación o conjetura.

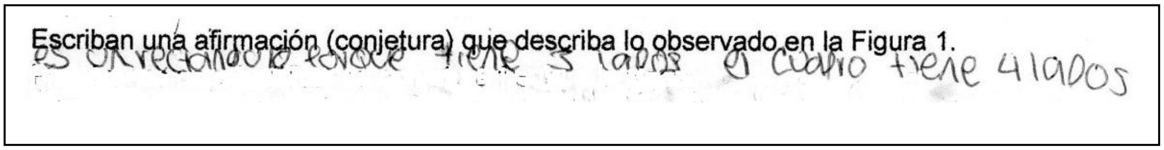

Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
es un rectangulo porque tiene 5 lados el cuadro tiene 4lados

Figura 16. Formulación confusa de una conjetura.

Sin embargo hubo algunas aproximaciones (figura 17) del planteamiento de una conjetura. En esta respuesta se puede inferir de que a pesar de no ser una afirmación los estudiantes describen lo que observan en la construcción dada y no están tan lejos de lo que se pretendía con esta tarea, pues se esperaba que los estudiantes pudieran ver que la figura MNOP formada por los puntos medios de ABCD no iba a cambiar después del arrastre.

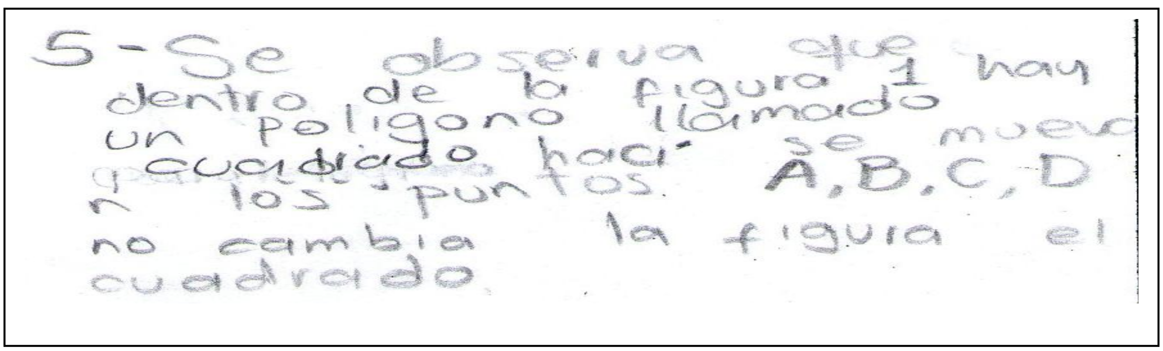

5- Se observa que dentro de la figura 1 hay un poligono llamado cuadrado hacer se mueve los puntos A,B,C,D no cambia la figura el cuadrado.

Figura 17. Aproximación a la afirmación de MNOP.

Para la formulación y justificación de una conjetura se necesita nombrar los puntos, segmentos y demás elementos que componen la figura, durante la fase de validación de la presente situación se evidenció que la mayoría de estudiantes tenían dificultad para formular y justificar una afirmación y hacer uso del lenguaje para nombrar puntos o segmentos (figura 18 y 19). Sin embargo, en las justificaciones a continuación se puede identificar un empirismo ingenuo perceptivo dado que escriben pensando en el arrastre que hacen con la figura.

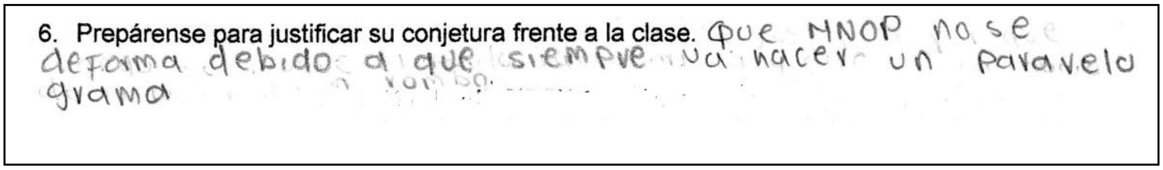

6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase. Que MNOP no se deforma debido a que siempre va hacer un paralelograma

Figura 18. Una aproximación hacia la justificación

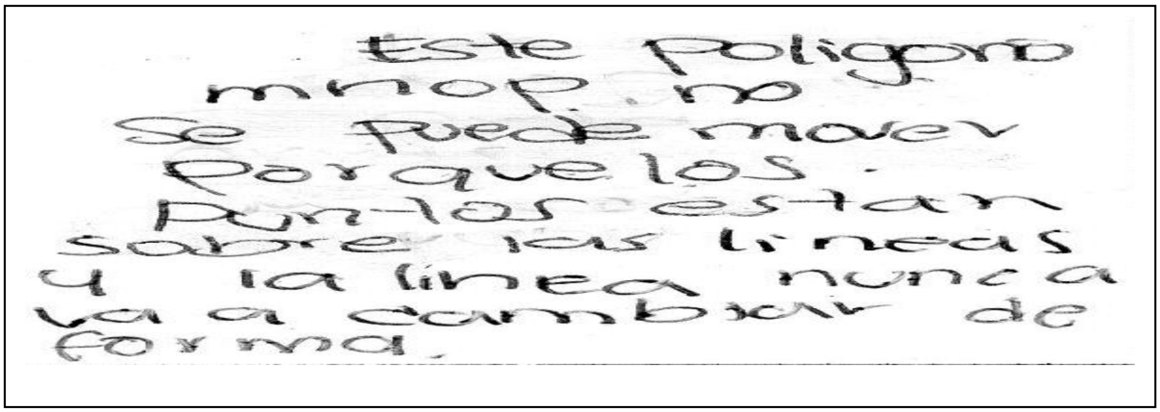

este poligono mnop. no se puede mover porque los puntos estan sobre las lineas y la linea nunca va a cambiar de forma.

Figura 19. Descripción de la figura luego del arrastre

En la fase de institucionalización el profesor investigador para concluir escucha algunas intervenciones de los estudiantes a cerca de la conjetura planteada una de ellas es: *“los puntos MNOP así se muevan de diferentes forma siempre va a quedar igual la figura en este caso pues un cuadrilátero”*

Para concluir el profesor investigador dice*: “… la figura ABCD es un cuadrilátero es cuadrilátero porque tiene 4 lados… MNOP no se deforma porque P es el punto medio de AD, O es el punto medio de DC,* N *es el punto medio de CB y M es el punto medio de AB… podemos concluir que MNOP no se deforma porque son los puntos medios de ABCD”*

A manera de conclusión se puede inferir que en los estudiantes de nivel séptimo hay dificultad para la justificación pues generalmente solo hasta grado noveno se realiza este énfasis según los estándares de competencia en matemáticas. Aun sabiendo que existe tipos de pruebas pragmáticas que se pueden usar con propiedades tan sencillas como las expuestas en esta situación, donde se privilegia el empirismo ingenuo perceptivo.

### 4.2.2 Análisis a posteriori situación 2

Para el inicio de esta situación 2, en la fase de acción se propuso un arrastre libre (*wandernig draggging*) para que los estudiantes se dieran cuenta que puntos podían mover y porque sucedía que algunos puntos se podían mover y otros no. La tarea decía: *¿Qué puntos de la figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?* La mayoría de estudiantes coincidieron que los puntos que se podían arrastrar eran L y J, pero para explicar por qué sucedía esto las respuestas no variaron mucho pues decían (Figura 20): J y L se pueden mover porque son los únicos puntos movibles, J y L se pueden mover porque son los únicos que se pueden arrastrar, este tipo de razón para explicar un suceso se da porque el estudiante solo se enfoca en lo que observa y no en toda las relaciones e invariantes que puede tener la figura dada. Con la tarea uno se esperaba que los estudiantes notaran la dependencia del segmento IK con LJ, sin embargo la más aproximada decía (Figura 21): J y L se pueden mover porque con ellos se mueve toda la figura.

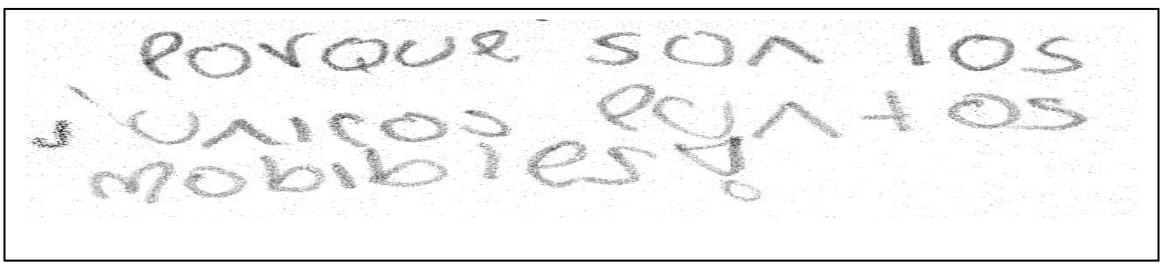



Figura 20. Puntos que se pueden arrastrar en la figura 2.

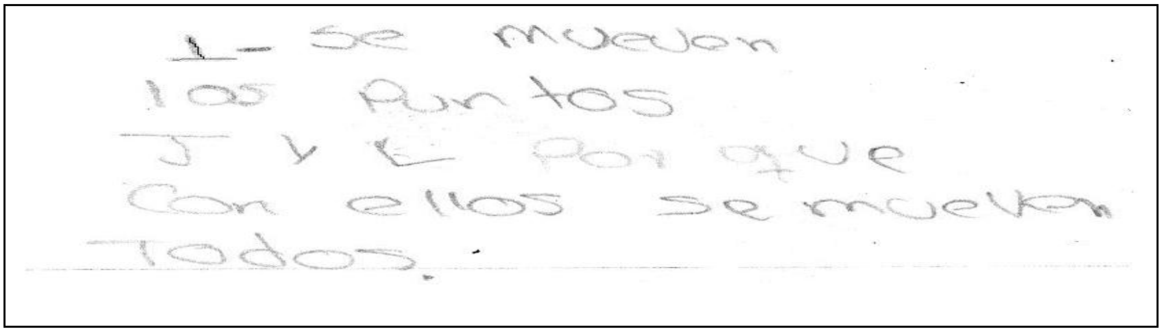



Figura 21. Dependencia del segmento JL con IK.

En la fase de formulación se inicia con la siguiente tarea: *¿Qué ocurre con el segmento IK cuando los puntos LJ se arrastran?*, se esperaba que los estudiantes notaran que además que había una dependencia entre IK y LJ en el punto donde se interceptaban, se dividían en segmentos iguales. Con esta tarea se logró que la mayoría de estudiantes describieran la dependencia entre estos dos segmentos (Figura 22) sin embargo ninguno notó que los segmentos se bisecaban. Al hacer la descripción de la dependencia de los segmentos demuestra que los estudiantes analizaron la construcción aunque faltó describir lo que sucedía con el punto de intercesión el cual era clave para la formulación de la conjetura.

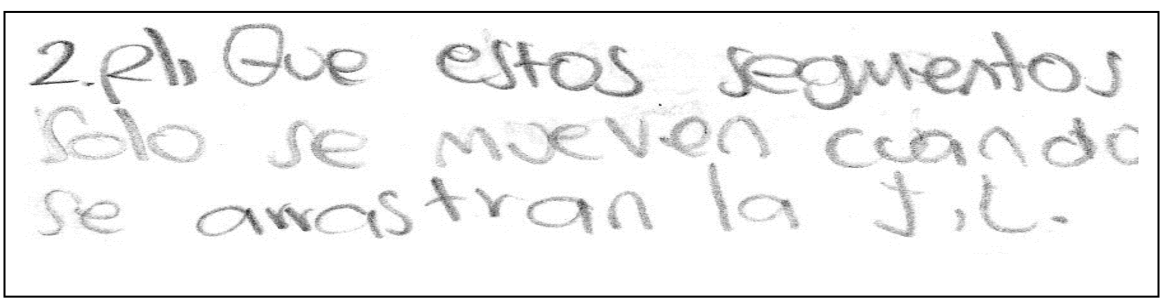



Figura 22. Relación de segmentos IK y JL.

Antes de dar inicio a la tarea*: Tracen un cuadrilátero que pasen por los puntos IJKL, ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?*El profesor investigador realizó una intervención de cómo hacer un polígono en

Cabrí: *“ Van a buscar este cuadrito ( dibuja en el tablero el botón de Cabri donde se encuentra una línea sobre un punto) dan clic en polígono y con el mouse dan clic aquí, aquí, aquí y aquí (los segmentos IK y LJ han sido dibujados en el tablero, “aquí” se refiere a cada punto de la figura para trazar el polígono) y ya construyen el polígono, pero tienen que pasar por los puntos que le están diciendo”*

Luego de esta intervención los estudiantes trazaron el polígono, pero algunos tuvieron la dificultad de no pasar por los puntos IJKL sino que hacían un nuevo punto, por tanto se explicaba a la pareja o trio que tenían esa dificultad.

En la respuesta a qué clase de cuadrilátero es IJKL, se notó que los estudiantes no tenían claro las definiciones o propiedades de algunos cuadriláteros, pues la mayoría respondió que IJKL era un cuadrado porque tenía cuatro lados (Figura 23) estos estudiantes tenía la noción de cuadrado como cualquier figura de cuatro lados sin tener en cuenta las propiedades  del cuadrado; otra respuesta fue que IJKL era un rectángulo porque tenían un par de lados congruentes (Figura 24) aunque es una características de los rectángulos la figura IJKL no cumplía con todas las características de un rectángulo. Esta clase de respuestas demuestra que los estudiantes no tienen claro el concepto de cuadrilátero en especial de paralelogramo.

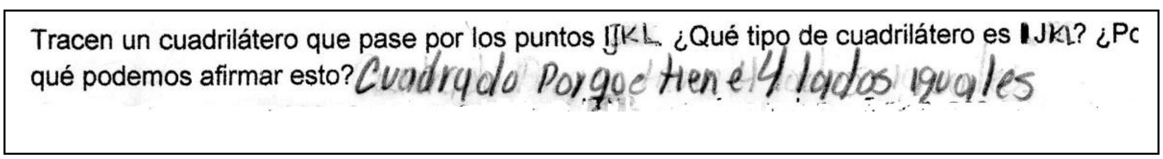

Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Po
qué podemos afirmar esto? Cuadrado Porque tiene 4 lados iguales

Figura 23.  IJKL es un cuadrado.

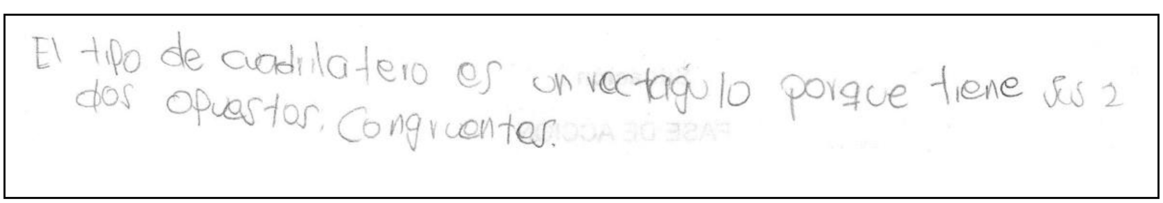

El tipo de cuadrilatero es un rectágulo porque tiene sus 2
dos opuestos. Congruentes.

Figura 24.IJKL es un rectángulo.

Solo tres parejas de estudiantes respondieron que la figura IJKL era un paralelogramo, la primera justificación (Figura 25) dice que IJKL es un paralelogramo porque dos lados son iguales a los otros dos, a lo que querían referirse los estudiantes es que los paralelogramos tienen sus lados congruentes.

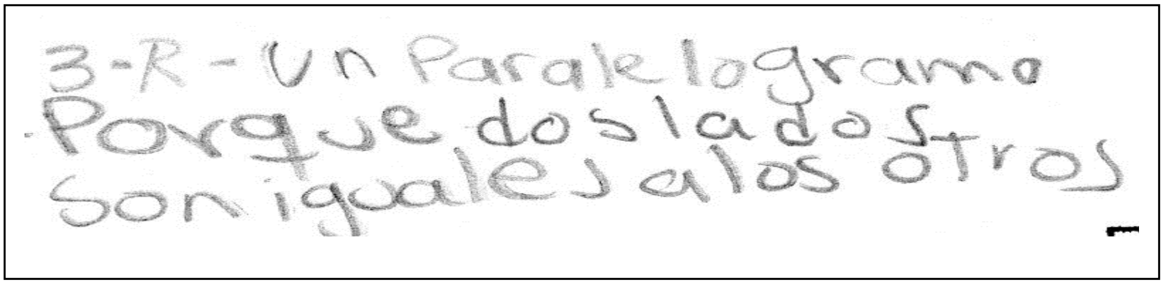

3-R- Un Paralelogramo
Porque dos lados
son iguales a los otros

Figura 25.IJKL es un paralelogramo.

La otra justificación (Figura 26) menciona que IJKL es un paralelogramo porque sus lados son paralelos, lo cual es cierto porque es propio de la definición de paralelogramo sin embargo a los estudiantes les falto nombrar los segmentos que eran paralelos y congruentes.

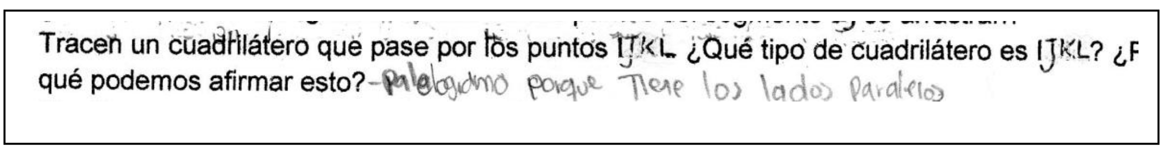

Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿P
qué podemos afirmar esto?- Paralelogramo porque Tiene los lados Paralelos

Figura 26. IJKL es un paralelogramo.

Para terminar la fase de formulación se plantea la siguiente tarea: *LJ y IK son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿Qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?* Con esta tarea se esperaba guiar a los estudiantes a plantear su afirmación, en las respuestas se pudo notar que una mayoría de estudiantes afirmaban que IK dependía de LJ(Figura 27) y que estas diagonales tenían un punto de encuentro (Figura 28), los estudiantes tuvieron en cuenta las respuestas de los puntos anteriores, los estudiantes tuvieron en cuenta las respuestas de los puntos anteriores y también el punto de intercesión de la figura IJKL eso demuestra el avance de la visualización de la figura por medio del arrastre.

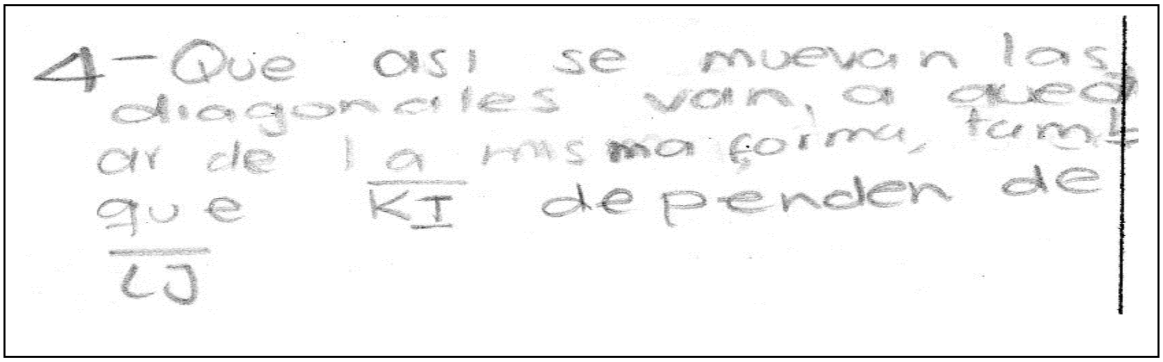



Figura 27. Dependencia de las diagonales

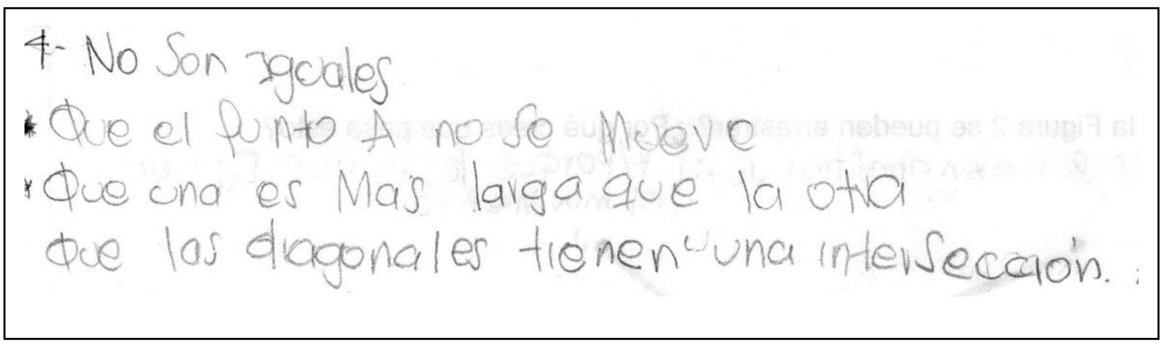



Figura 28. Afirmaciones de las diagonales.

Una afirmación muy aproximada a la que se esperaba, es que los estudiantes llamaron A al punto de intersección de las diagonales y escribieron lo siguiente:

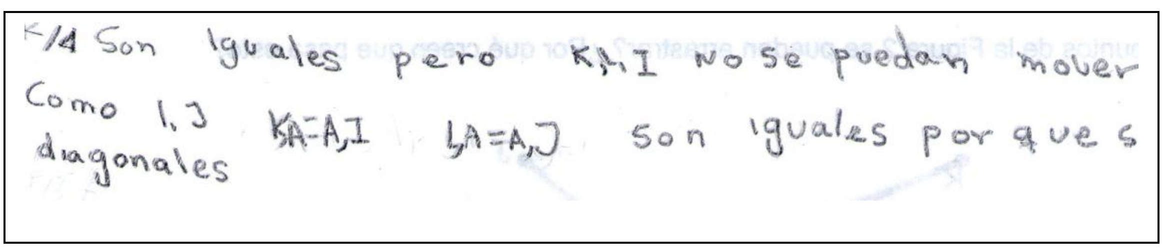



Figura 29. El punto de intersección A forma segmentos congruentes.

En esta afirmación demuestra que los estudiantes ya conocían esta propiedad porque nombran los cuatro segmentos que se forman a partir del punto de intersección y afirman que son iguales por ser segmentos de diagonales.

Para la fase de validación, se pide al estudiante que plantee la conjetura,al igual que la situación 1 se percibió la dificultad para la formulación de una conjetura la noción de dependencia entre los segmentos fue la más notable en este punto. A continuación se puede observar en la figura 30 se muestra que los estudiantes formularon que el punto de intersección divide a las diagonales en segmentos congruentes, esto se debe a que en su análisis de la figura tuvieron en cuenta a los segmentos y al punto de intersección.

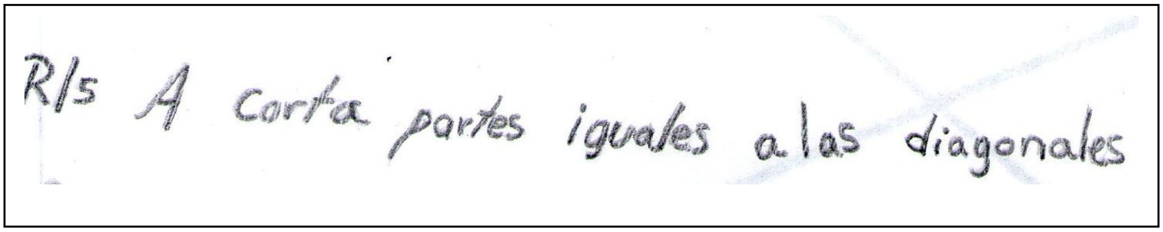

R/s A corta partes iguales a las diagonales

Figura 30. Conjetura sobre diagonales.

Para la justificación de la conjetura ningún estudiante uso elementos teóricos que habían visto en clases anteriores con el profesor correspondiente de matemáticas. Por tanto en ningún estudiante se identificó el empirismo ingenuo analítico. Durante la socialización realizada el estudiante al plantear su conjetura no dijo por qué sucedía lo que afirmaba. A continuación un fragmento de la socialización:

*Profesor: estudiante Y te escuchamos ¿cuál fue tu conjetura?*

*Estudiante: … KI no se puede mover como LJ,KA es igual a AI LA es igual a AJ son iguales porque son diagonales. A corta en partes iguales a las diagonales.*

*Profesor: Muy bien y ¿cómo justificaste o qué puedes decir acerca de lo que dijiste? o ¿porqué decís que es verdadero?, ¿qué creen ustedes? (pregunta a los compañeros del equipo del estudiante)*

*Estudiantes: no respondieron.*

*Profesor: está bien, siéntense.*

En la figura 31 se puede ver una corta justificación que se relaciona con el arrastre realizado a la figura y lo que de ella pudieron concluir, se podría identificar con un empirismo ingenuo perceptivo, por que se apoya en la figura. Aunque es una justificación que no es clara para la conjetura planteada (Figura 30).

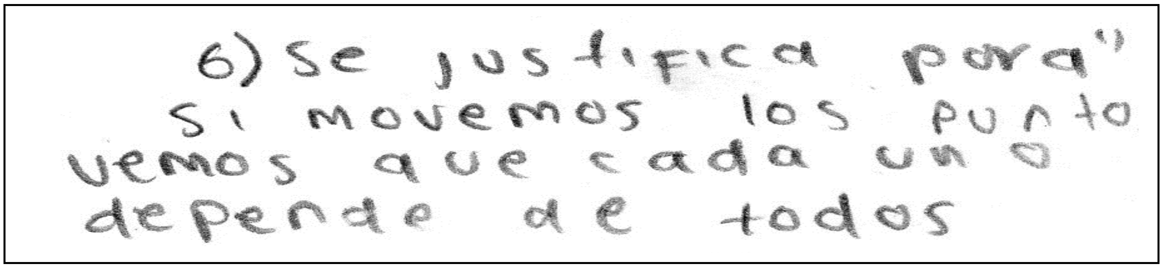

6) se justifica para" si movemos los punto vemos que cada uno depende de todos

Figura 31.Empirismo ingenuo.

En la fase de institucionalización el profesor investigador enuncia: *"… El punto A es un punto de intercesión que divide a las diagonales en segmentos iguales…"*

**Reflexión**

Es probable que el arrastre ayude a plantear y formular afirmaciones acerca de una figura, dado que pueden darse muchas variaciones de esta pero es importante que desde el aula de clase se realice la socialización de lo visto en clases pues podría ayudar a los estudiantes a mejorar el uso de la argumentación.

Para esta situación se clasifica las respuestas de los estudiantes en empirismo ingenuo dado que, usan ejemplos escogidos para su justificación sin ningún criterio específico.

### 4.2.3 Análisis a posteriori situación 3

Para el inicio de la situación tres en la fase de acción se propuso un arrastre libre (wandering dragging) para que los estudiantes pudieran explorar las figuras libremente. La diferencia entre esta situación y las anteriores es que la situación tres está compuesta de dos figuras que se diferencian por su punto de intersección. Para que los estudiantes pudieran ver esta diferencia se propuso la tarea así: *¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?* La mayoría de estudiantes coincidieron que R, S, T, M, N, O y X eran puntos que se podían arrastrar (Figura 32), era lo que se esperaba.

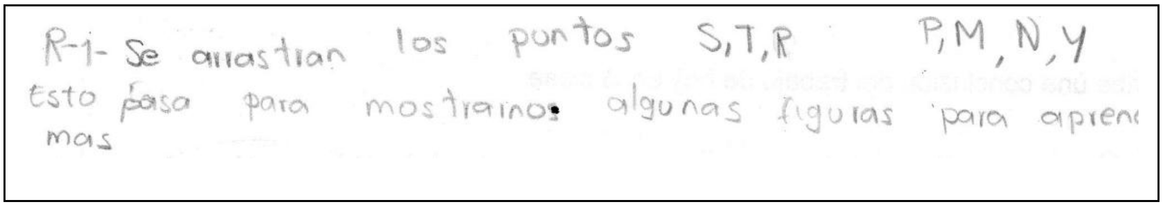

R-1- Se arrastian los puntos S,T,R P,M,N,Y
Esto pasa para mostrainos algunas figuras para aprend
mas

Figura 32. Puntos que se pueden arrastrar de la figura 3.

Sin embargo algunos estudiantes, probablemente por no hacer una buena exploración de la figura, escribieron otros puntos que no correspondían con la respuesta (Figura 33).

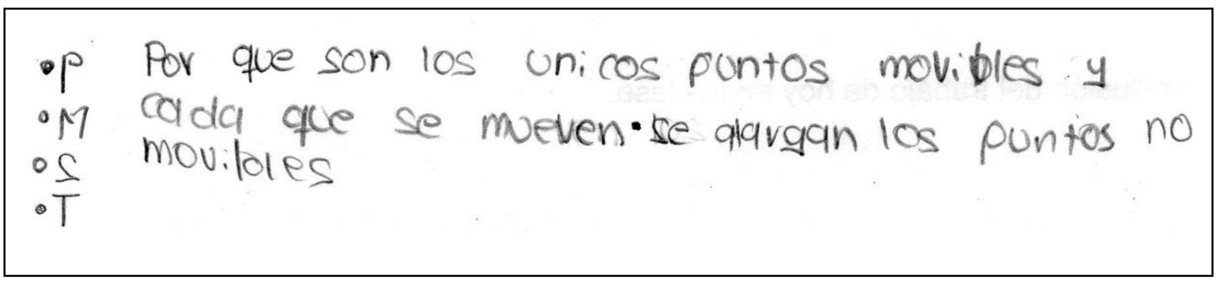

•P •M •S •T
Por que son los unicos puntos movibles y cada que se mueven se alargan los puntos no movibles

Figura 33. Puntos movibles

Para las tareas 2 y 3 de la misma fase se propuso un arrastre guiado, pues se decía que puntos debían arrastrarse y que relación se podía describir con respecto a los segmentos. La tarea dos decía: *Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?* El punto X es un punto de intersección fijo, es decir que no se puede mover, la relación dada entre los segmentos QS y TR es que son perpendiculares y X es un punto que los biseca. Algunos estudiantes notaron esta relación de perpendicularidad (Figura 34).

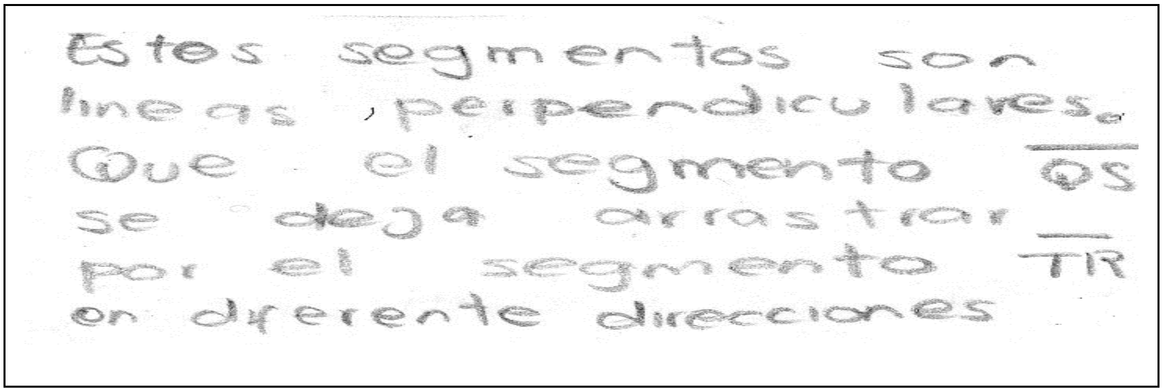



Figura 34. Relación de los segmentos QS y TR

Sin embargo algunos describieron lo que sucedía al arrastrar algunos puntos (Figura 35). En esta respuesta que los estudiantes describen el movimiento que hacen los segmentos es porque no reconocieron la relación de perpendicularidad existente entre los segmentos, esto se pudo haber dado porque no tienen clara la noción de perpendicularidad.

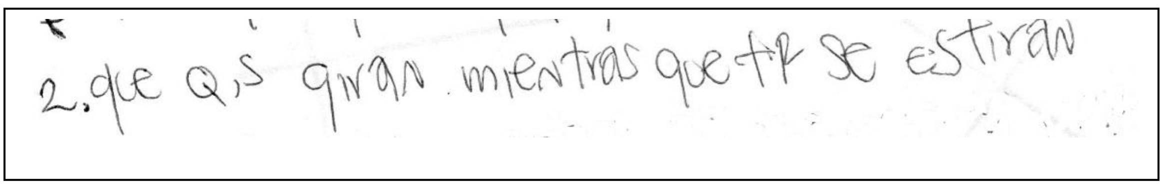



Figura 35. Descripción de los segmentos QS y TR.

La tarea 3*: Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento* $\overline{OM}$ *con respecto al segmento* $\overline{PN}$*?*En primer lugar los estudiantes deben ver que $\overline{OM}$ y $\overline{PN}$ son segmentos perpendiculares y que Y es un punto de intersección que se puede arrastrar. Algunos estudiantes escribieron sobre la perpendicularidad de los segmentos OM y PN (Figura 36), afirmando que como estos segmentos no son paralelos entonces son perpendiculares, de lo cual se puede inferir que para estos estudiantes solo puede existir dos relaciones: que sean paralelos o perpendiculares y que estas relaciones no se pueden dar a la vez.

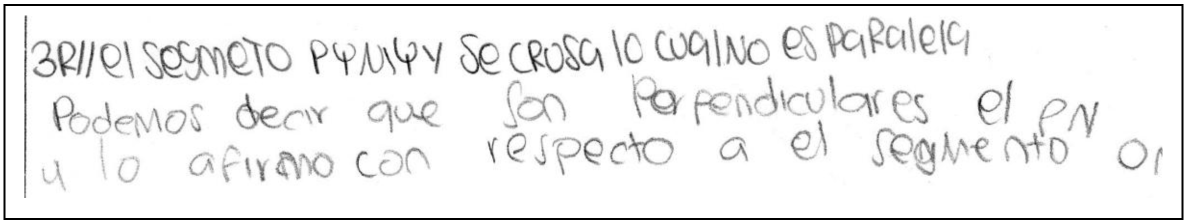

3R//el segmeto PYNyY se crosa lo cualno es paralela
Podemos decir que son Perpendiculares el PN
y lo afirmo con respecto a el segmento O

Figura 36. Relación de perpendicularidad entre los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{PN}$

Por otro lado, algunos estudiantes solo describieron los que sucedía cuando arrastraban los puntos M, P y Y (Figura 37), puede ser que la noción sobre las relaciones que pueden darse entre dos segmentos no sea clara pues no reconocen la perpendicularidad o el paralelismo y pues los estudiantes optan por describir lo que sucede cuando se hace el arrastre aunque en su descripción no nombran al punto Y.

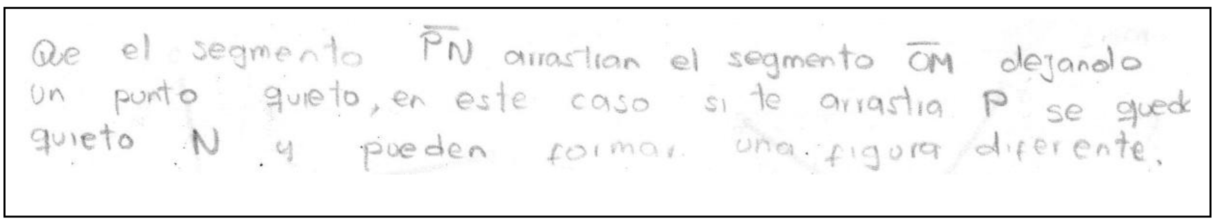

Que el segmento $\overline{PN}$ arrastran el segmento $\overline{OM}$ dejandolo
un punto quieto, en este caso si te arrastra P se qued
quieto N y pueden formar una figura diferente.

Figura 37. Descripción de los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{PN}$

En la fase de formulación se indica el trazo de los polígonos y que se identifiquen las invariantes que se dan también que se escriban las diferencias entre estos polígonos. Durante esta fase se quería caracterizar al rombo y sus diagonales.

La tarea 4: *Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿Por qué creen que son invariantes?* La mayoría de estudiantes coincidieron en que el polígono que se forma es un rombo (Figura 38), la respuesta que se muestra en la figura 38 es de unos estudiantes que identifican al rombo como una figura con lados paralelos y tuvieron en cuenta la relación entre sus diagonales, es decir que les aportó la exploración realizada en las otras tareas.

Estos estudiantes entienden invariante como los puntos que no cambian cuando se arrastrar unos determinados puntos.

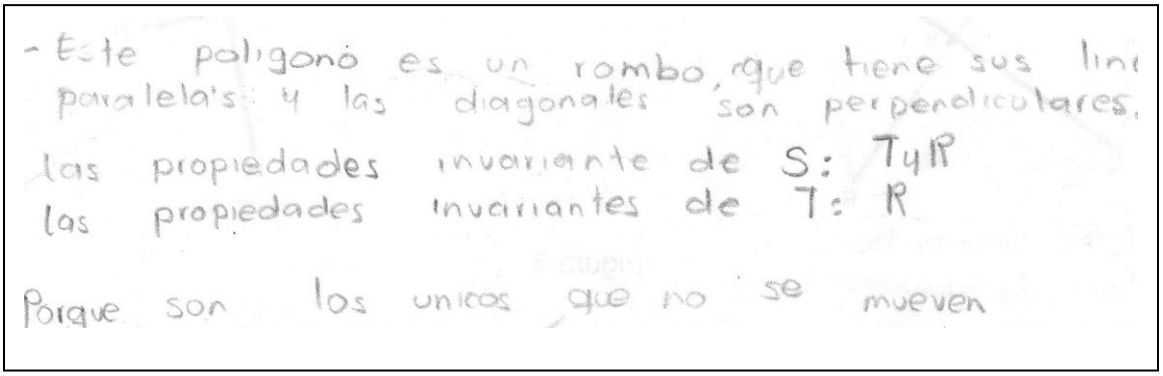

-Este poligonó es un rombo, que tiene sus lini
paralela's y las diagonales son perpendiculares.
las propiedades invariante de S: TyR
las propiedades invariantes de T: R
Porque son los unicos que no se mueven

Figura 38. QRST es un rombo.

Sin embargo otros sin estar equivocados respondieron que era un paralelogramo (figura 39)el rombo es un paralelogramo, pero un rombo se identifica porque todos sus lados son congruentes, las invariantes las identificaron como puntos que podían moverse.

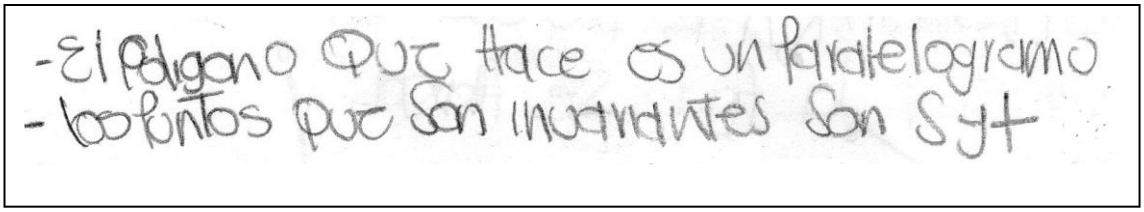

-El Poligono Que Hace es un Paralelogramo
-loo Puntos Que Son invariantes Son Syt

Figura 39. QRST es un paralelogramo.

Solo una pareja de trabajo respondió que era un cuadrado (Figura 40), con lo cual es claro que los estudiantes hicieron una caracterización del cuadrado que no es clara pues el cuadrado tiene 4 ángulos rectos, por el contrario el rombo no. A pesar que comparten la característica de que todos sus lados son iguales.

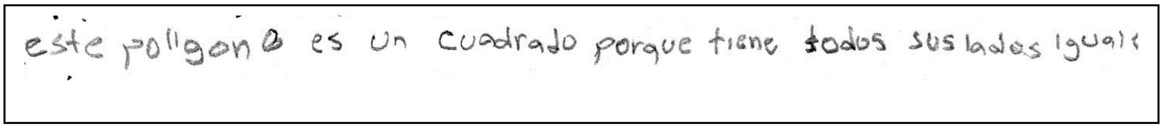

este poligono es un cuadrado porque tiene todos sus lados iguals

Figura 40.  QRST es un cuadrado.

La tarea 5: *Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿Por qué?* La diferencia entre QRST y MNOP, es que este último no conserva su forma dado que Y no es un punto fijo, algunos estudiantes teniendo en cuenta que la figura MNOP se deformaba respondieron que era un cuadrilátero (Figura 41) lo cual es verdadero dado que la figura no dejará de ser un cuadrilátero a si se deforme.

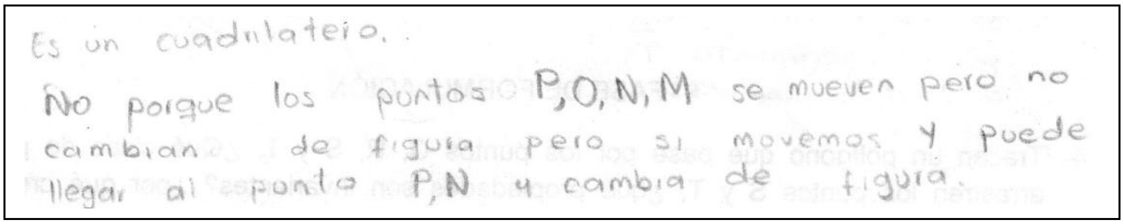

Es un cuadrilatero.
No porque los puntos P,O,N,M se mueven pero no cambian de figura pero si movemos Y puede llegar al punto P,N y cambia de figura.

Figura 41. MNOP es un cuadrilátero.

Otros estudiantes que clasificaron a MNOP como un paralelogramo como se observa en la figura 42 no tuvieron en cuenta la característica principal de los paralelogramos, que todos sus lados son paralelos al deformarse la figura los lados dejan de ser paralelos, sin embargo cuando dicen que la figura no cambia su aspecto se refieren a que la figura no deja de tener sus cuatro lados.

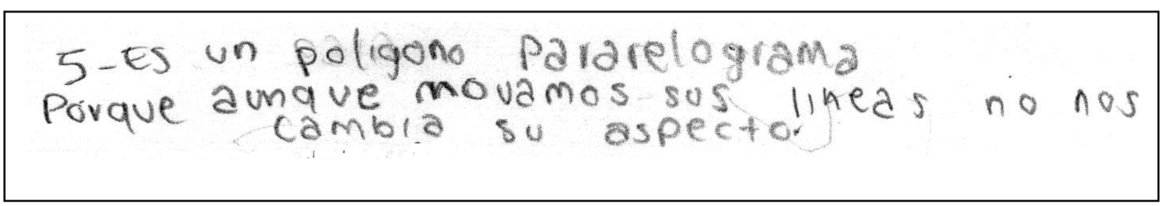

5-Es un poligono Pararelograma
Porque aunque movamos sus lineas no nos cambia su aspecto.

Figura 42. Polígono paralelogramo.

Los que respondieron que MNOP era un rombo como en la figura 43, al parecer relacionaron la figura MNOP con el dibujo del rombo.

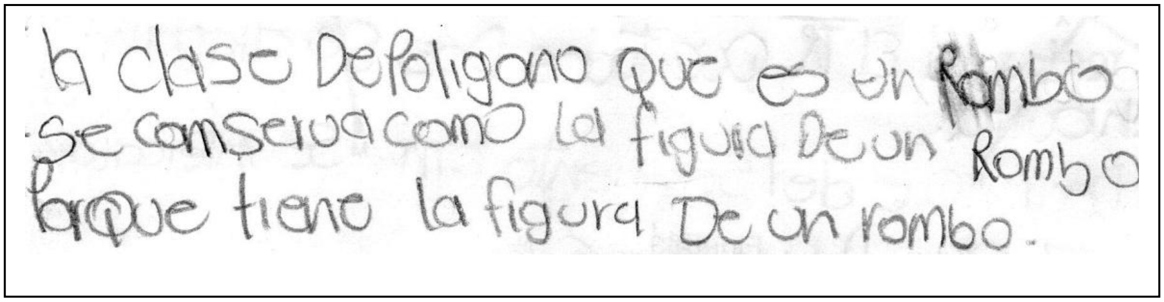

la clase De poligono que es un Rombo
se comserva como la figura De un Rombo
porque tiene la figura De un rombo.

Figura 43. Figura MNOP con el dibujo del rombo

La tarea 6: *¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta .*Esta tarea es propuesta para indagar si los estudiantes han tenido en cuenta los puntos de intersección de las diagonales de los polígonos, además esta tarea guía al estudiante para el planteamiento de la conjetura.

Una de las respuestas a esta tarea fue acerca de lo que diferenciaba a QRST de MNOP lo que respondieron fue que la primera era un rombo y la segunda un paralelogramo. En la escritura de la respuesta se puede ver que los estudiantes no manejan correctamente la simbología usada en geometría y que no tienen claro las propiedades de los paralelogramos.

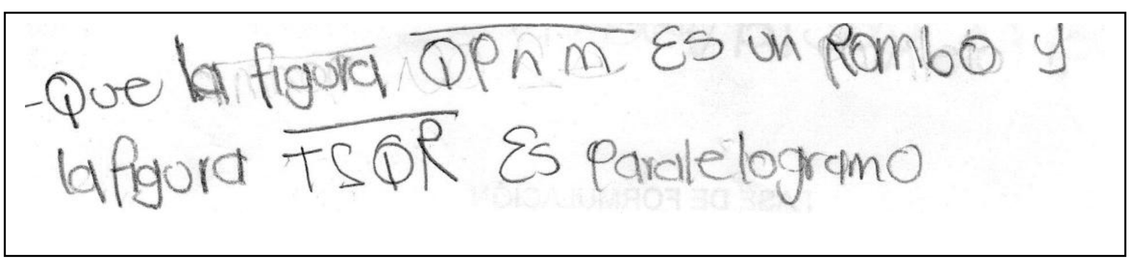
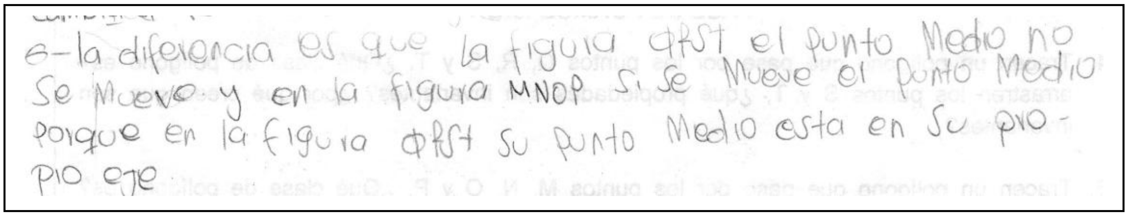

-Que la figura $\overline{QPnm}$ Es un Rombo y
lafigora $\overline{TSQR}$ Es paralelogramo

Figura 44. Diferencia entre QRTS y MNOP.

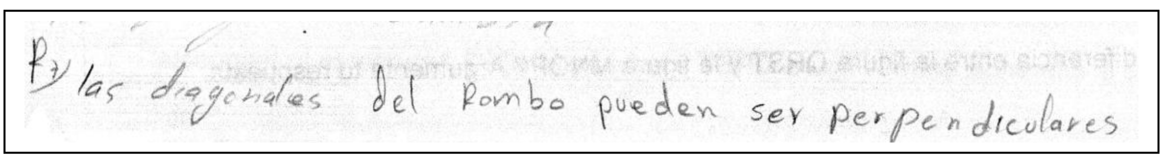
Otra de las respuestas como se observa en la figura 45 es que las dos figuras se diferenciaban porque el punto medio en la primera es fijo y en la segunda se puede mover. Lo cual es cierto y además demuestra que han tomado en cuenta la información de las anteriores situaciones.



6- la diferencia es que la figura QRST el punto Medio no Se Mueve y en la figura MNOP si se Mueve el punto Medio porque en la figura QRST su punto Medio esta en su pro-pio eje

Figura 45. Los puntos medios de las diagonales.

Para el planteamiento de la conjetura algunos de los estudiantes coincidieron en la perpendicularidad de las diagonales y tomaron en cuenta el tipo de figura que se formaba con estas diagonales, en este caso QRST. En la Figura 46 se puede leer que los estudiantes plantearon que las diagonales del rombo pueden ser perpendiculares, esta afirmación se acerca mucho a lo que se esperaba, los estudiantes probablemente hicieron una buena diferenciación entre las figuras QRST y MNOP e identificaron las invariantes de las figuras, sin embargo les faltó retomar lo visto en la situación anterior y es que el punto de intersección también divide a las diagonales en dos partes iguales.



R/ las diagonales del Rombo pueden ser perpendiculares

Figura 46. Conjetura sobre las diagonales del Rombo.

Otros estudiantes no tuvieron en cuenta a las diagonales sino que escribieron sobre el tipo de polígono como se aprecia en la figura 47, lo cual demuestra que estos estudiantes se enfocaron en la forma de la figura y la invariantes que estas presentaba, mas no en las invariantes que se presentaban en las figuras con respecto a las diagonales.

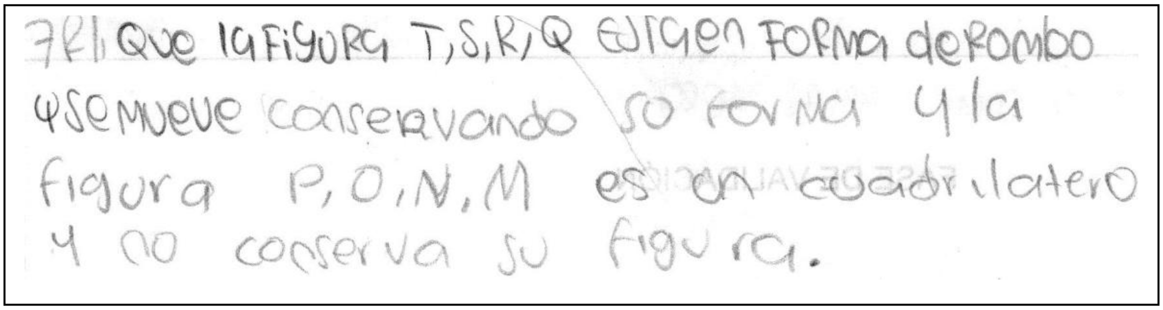

7R/ Que lafigura T,S,R,Q esigen forma derombo yse mueve conservando su forma y la figura P,O,N,M es un cuadrilatero y no conserva su figura.

Figura 47. Conjetura con relación a la forma de la figura.

En esta parte de la justificación es decir la fase de validación no se evidenció ningún tipo de prueba pragmática, se realizó la socialización de las conjeturas y cuando se preguntaba por una justificación los estudiantes no daban respuesta.

*Profesor: lee la conjetura que planteaste, haber, silencio por favor.*

*Estudiante Y: Que las diagonales del rombo QRST son perpendiculares porque son líneas de 90 grados.*

*Profesor: bueno es válido tienes algún argumento en decir porque.*

*Estudiante Y: no*

*El profesor investigador después de escuchar otras intervenciones concluyen así: las diagonales del rombo se bisecan y son perpendiculares, bisecan quiere decir que se parte en dos partes iguales.*

A manera de reflexión podría decir que desde el inicio de las situaciones se evidenciaba que los estudiantes no manejaban muy bien la simbología para nombrar algunos elementos de la geometría, en esta última se puede decir que algunos estudiantes mejoraron en cuanto al uso de esta simbología. A pesar que en esta última situación los estudiantes no usaron la prueba pragmática para su justificación el planteamiento de la conjetura mejoró.

### 4.3 Reflexiones finales del análisis *a posteriori*

Los estudiantes con que se aplicó la SD no habían experimentado en un AGD por lo cual fue una experiencia nueva para ellos poder manipular por medio del cursor algunos objetos geométricos y poder describir lo que sucedía con estos cuando se aplicaba el arrastre.

La SD estaba diseñada para que a través de las propiedades de los cuadriláteros se conjeturara y para que la justificación de esta se hiciera con los distintos tipos de prueba pragmática.

Durante la SD el tipo de prueba que más se usaba fue la prueba pragmática de tipo experimento crucial basado en el ejemplo, pues al escribir las justificaciones los estudiantes describían lo que sucedía con la figura cuando realizaba el arrastre y poco a poco fue mejorando la escritura de la simbología en geometría por ejemplo los puntos y segmentos.

# CAPITULO V

## CONCLUSIONES

Este trabajo de grado considera como conclusiones que el diseño que una SD con problemas abiertos en un AGD ayuda a los estudiantes a mejorar el uso de las pruebas pragmáticas, pues los estudiantes la mayoría de veces necesitan basarse en la figura para hacer el planteamiento de la conjetura y justificación de esta.

El Estado del arte fue una recopilación de trabajos a nivel internacional que sirvieron de guía para la construcción del presente trabajo, en cuanto al tema de la enseñanza de la prueba en el contexto escolar.

Con respecto a la pregunta planteada en este trabajo de grado, sobre lo que caracteriza una SD en grado séptimo; se puede decir que los problemas abiertos en un AGD caracterizan la SD en grado séptimo para el uso de las pruebas pragmáticas por medio de las propiedades de paralelogramos.

La SD se fundamentó desde una perspectiva de las matemáticas experimentales porque es importante el uso de la computadora con Cabri II plus para la exploración de la figura propuesta en cada situación y poner a prueba las conjeturas que se puedan llegar a plantear. Es decir que la SD tenía como objetivo la enseñanza de un proceso en este caso el uso de las pruebas pragmáticas y no la enseñanza de la noción de paralelogramos.

Las situaciones de la SD permitieron que los estudiantes usaran los distintos el arrastre para la formulación y validación de la conjetura así como los distintos tipos de prueba pragmática.

Aunque en la mayoría de las justificaciones cuando se hacía uso de prueba pragmática se identificaba casi siempre el empirismo ingenuo basado en el ejemplo, cabe resaltar que para la realización de la justificación los estudiantes se apoyaron en el arrastre de la construcción dada en cada situación.

A lo largo de la experimentación de la SD se pudo notar que los estudiantes tenían falencias en la identificación de los cuadriláteros en especial los paralelogramos, sin embargo en los análisis a posteriori en especial en la situación 2 y 3 se pudo notar que algunos de los estudiantes mejoraron la noción de los paralelogramos y también la escritura de algunos elementos de geometría, como lo son los puntos o vértices, los segmentos entre otros.

Esta SD reconoce la importancia de un AGD dado que durante las situaciones que la componen en especial la situación 3 los estudiantes debían reconocer las invariantes de las figuras y en especial la diferencia entre el dibujo y la figura. Con lo cual es posible que los estudiantes mejoren en el uso de la prueba pragmática al seguir realizando este tipo de situaciones en un AGD donde el estudiante experimente, a través del arrastre.

## BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 61-68). Bogotá, Colombia: ASOCOLME. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Alcolea, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. *Revista interdisciplinar de filosofía*, (7), 15-34.

Alvarado, A., & González, M. (2009). La implicacionlógica en el proceso de la demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las ciencias*, *28(1)*, 73-84.

Ángulo, F. (2009*).* De la geometría de Euclides a la geometría “a la Euclides”: procesos demostrativos mediados por Cabri Géomètre. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques*, *vol 8, no 3*, pp. 267-312.

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: una empresa docente.

Baccaglini-Frank, A &Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. (15), 225–253.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemticas. (P. Goméz, Trans.) Bogotá: Universidad de los Andes.

Barroso, R. (2003). Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. Una justificación. E. Castro, Investigación en Educación Matemática: séptimo simposio de la sociedad española de investigación en Educación Matemática (pp. 139-152). Granada: Universidad de Granada.

Bkouche, R., & Soufflet, M. (1983). Axiomatique, formalisme et théorie.Lille: IREM de Lille.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (D. Fregona, Trans.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Castrillón, G., & Delgado, C. (2006). Fundamentos metodológicos para la investigación en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30.

De Villiers, M. (1995).An alternative introduction to proof in dynamic Geometry. *Micromath*, 11 (1), 14-19.

De Villiers, M. (1997): The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections. En: King, J. &Schattschneider, D. (Eds.) *Geometry Turned On*! *Dynamic software in learning, teaching and research*. (pp. 15-24). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America (MAA) Service Center. MAA Notes 41

Fiallo, E., &Gutiérrez, A. (2007). *Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander Investigación en educación matemática XI* (pp. 355-368).San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9no. Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM*. Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado en: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof.*For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 42-50.

Hemmerling, E. (2002). *Geometría elemental*. México: Limusa. Ed. Noriega.

Hoyles, C. y Jones, K. (1998). Proof in dynamic Geometry Contexts. En: *Perspectivesontheteaching of geometryforthe 21st century. An ICMI Study*. (Eds.) Mammana C. &Villani, V. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 121-127. En la Web: http://eprints.soton.ac.uk/41227/1/Hoyles_Jones_proof_DGS_1998.pdf

Ibáñez, M. (2002). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de la trigonometría en Bachillerato (texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo durante el 6º Simposio de la SEIEM). En la web: www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf

Jones, K. (1998). Deductive and Intuitiveapproachestosolvinggeometricalproblems. En: *Perspective sontheteaching of geometry forthe 21st century. An ICMI Study.* (Eds.) Mammana C. &Villani, V. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 78-84. En la Web:

http://eprints.soton.ac.uk/41226/1/Jones_deductive_intuitive_approaches_1998.pdf

Laborde, C. (1998) Cabri geómetra o una nueva relación con la geometría. Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática. Una empresa docente. 33-44

Lang, S., & Murrow, G. (1988).Geometry a high school course. 2da ediciónNueva York: Springer-Verlag.

Larios, V. (2003). Si no demuestro...¿enseño matemática?.*Educación matemática*, 15 (002), 163-178.

Larios, V. (2005). Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria. *Educación Matemática*, 17(003), 77-104.

Larios, V. (2006). La influencia de la computadora como mediadora semiótica entre el conocimiento y el alumno: El caso de la Geometría. México, D.F: En Memorias del XXII Simposio Internacional de Computación en la Educación.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime 9 (003)*, 361-382.

Larios, V., & González, N. (2001). El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría. *Revista electrónica de Didácticas de las Matemáticas*(2), 10-17.

Lima, I. y Orjuela, C. P. (2006). Actividades para el reconocimiento del paralelogramo. *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri Ibero Cabri*. Bogotá: Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS_2006/Reportes/OrjuelaLima_R21.pdf

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 173–204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. (M. Acosta, & J. Fiallo, Trans.) Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, UIS.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá. Schmidt Q.

Perrin, M. (2009). Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas Para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de matemáticas en las clases normales**.** *Revista Internacional Magisterio educación y pedagogía, No. 39.*

Quintero, G. (2010) De la conjetura a la demostración deductiva con la medición de un ambiente de geometría dinámica. Tesis de maestría. Instituto de Educación y Pedagogía. Cali: Universidad del Valle

Samper, C. (2008). Geometría enseñanza en secundaria 2. Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática, 21(1),*pp. 5-27.

Vygotsky, L.S. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.

# ANEXOS

# LISTA DE ANEXOS

- Fotos.
- Producciones de los estudiantes.

# FOTOS

**Foto 1. Los estudiantes en la sala de sistemas resolviendo la SD.**

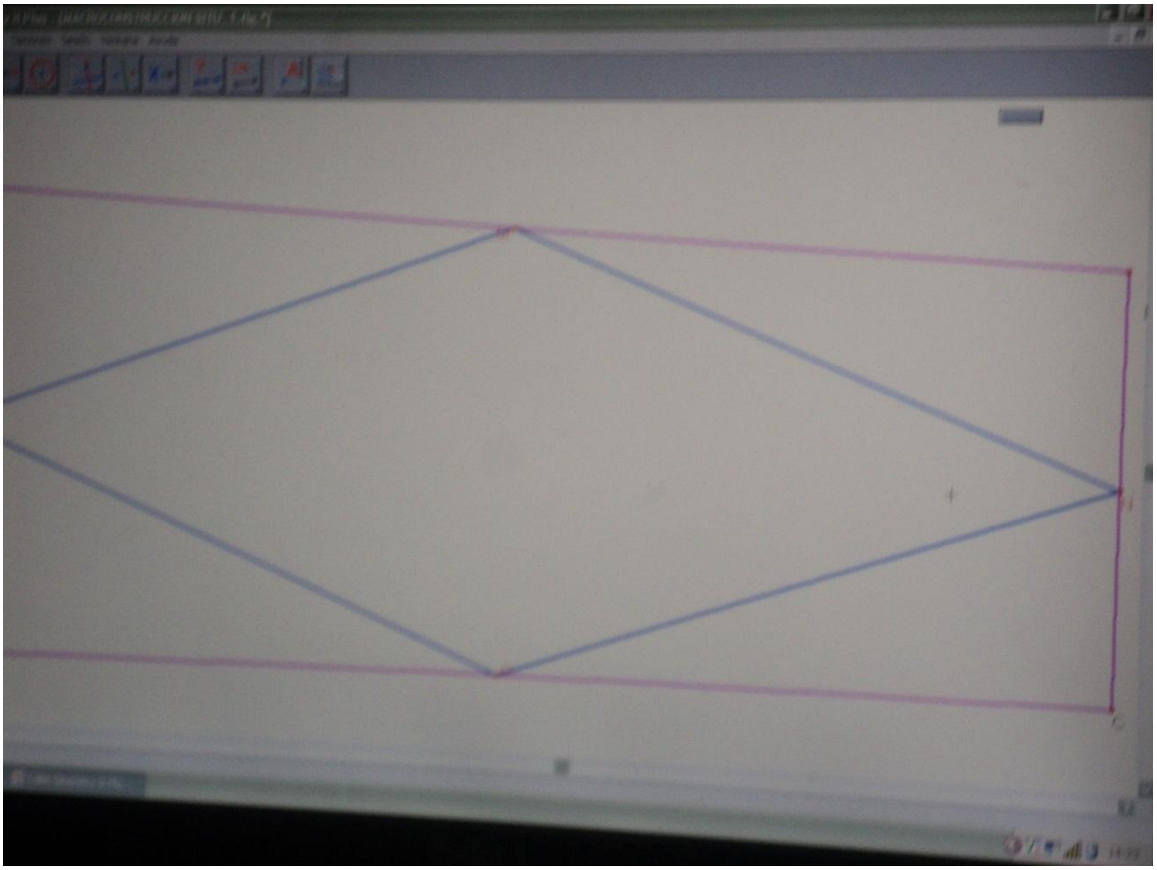


**Foto 2. Una de las figuras formada a través del arrastre por los estudiantes.**

**Foto 3. Estudiantes en el desarrollo de la SD.**

## PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

NOMBRES: carolina rivera, victor montero, adrian ramires
EDAD: 14, 14, 13.

**Situación 1**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

·A
·B
·C
·D

porque son los unicos puntos movibles

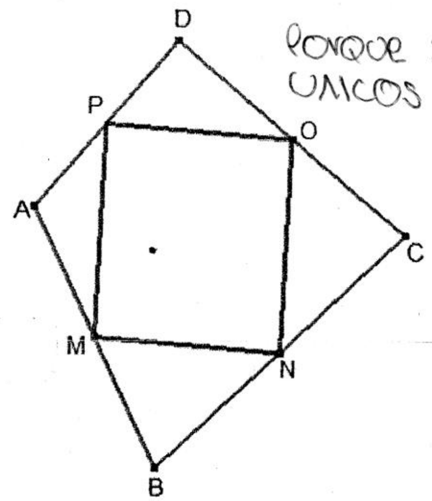



Figura 1

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
es un cuadro porque tiene 4 lados
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cùando se mueven los puntos B y C? =porque sigue tenendo 4 lados. pero una vez se buelve retangul
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.
porque sola mente se mueben B y C.

FASE DE VALIDACIÓN

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
es un rectangulo porque tiene 3 lados el cuadro tiene 4 lados
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.
Por que los unicos Puntos movibles sa a. b. c y son los que nos dan los figuras

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 1.**

NOMBRES: Stefany Gonzalez londoño y Camila Murillo Orolañes
EDAD: 13

**Situación 1**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

los Puntos que se pueden arrastrar son:
1).d
2). b
3). C
4) a

Porque eso son los que Hacen la figura, o lo mas importantes en el Poligono

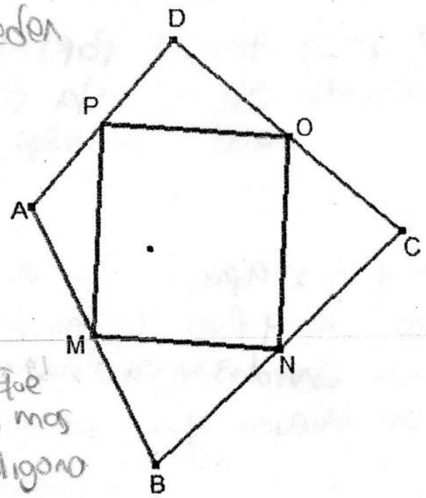



Figura 1

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
= Cuadrado, Porque tiene Cuatro Puntos los Cuales se unen.
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cùando se mueven los puntos B y C? Son M,N,O,P son las Propiedades que no se mueve
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.
Porque apesar de Mover el Poligono, no se mueve el Cuadrado creo que porque es una union Recta.

FASE DE VALIDACIÓN

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 2.**

NOMBRES: Evelyn Garcia, Margie carbajal, Vanessa perdomo
EDAD: 12, 12, 12

**Situación 1**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

Los Puntos Son A, B, C, D.

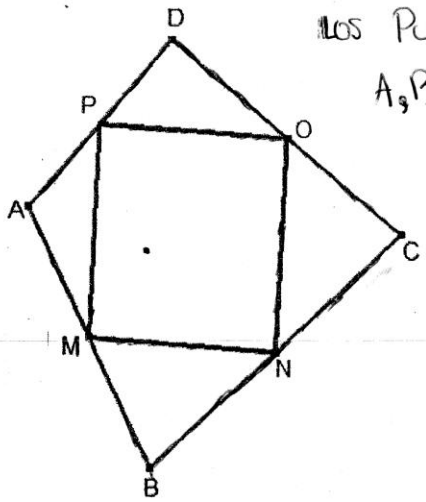



Figura 1

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto? Es un cuadrado Por que tiene 4 4 lados iguales.
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cuando se mueven los puntos B y C? Los Puntos A, D, D
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.
Por que siempre va a ser un cuadrilactero de cualquier forma

FASE DE VALIDACIÓN

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1 Este poligono mnop no Se puede mover Porque los Puntos estan sobre las lineas y la linea nunca va a cambiar de forma.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Que no importa de que forma lo movamos siempre sera un Poligono

**Producción 3.**

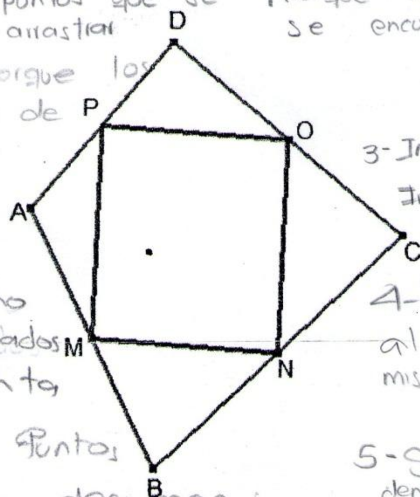
*NOMBRES:* Claudia Patricia Osorio y Nicol Vanessa Caicedo
*EDAD:* 12 y 13 años.

**Situación 1**

**FASE DE ACCIÓN**

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

1- A, B, C, D son los puntos que se pueden arrastrar | Porque son los puntos que se encuentran en las esquinas




2- Un cuadrado porque los cuatro lados son de igual tamaño

3- Invariantes de B: O y P
Invariantes de C: M y P.

6- Porque cuando movimos el Poligono Para todos los lados nos dimos cuenta
- Que por los Puntos M, P, O, N no se deforman por que son los puntos medios de D, A, C, B

4- Porque no pertenece al punto B y lo mismo con el punto C

5- Se observa que dentro de la figura 1 hay un Poligono llamado cuadrado hacia se mueven los puntos A, B, C, D no cambia la figura el cuadrado

Figura 1

**FASE DE FORMULACIÓN**

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cuando se mueven los puntos B y C?
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.

**FASE DE VALIDACIÓN**

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

A la conclusión que llegamos hoy Fue de como Podemos aprender de la geometria utilizando otros metodos.

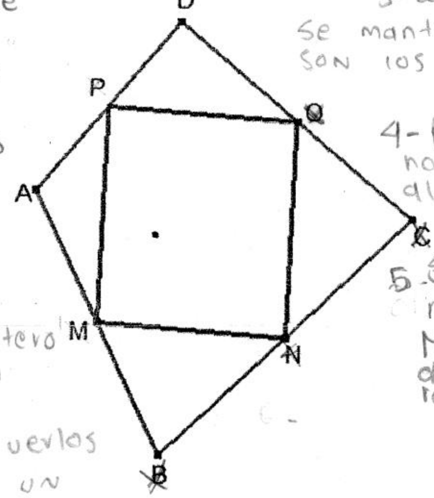
**Producción 4**

## FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 1 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?

1. Pueden arrastraise son: A, B, C, D
Por que son los que unen la figura.
* Porque uniendo los puntos se da la figura requerida.

2- El tipo de cuadrilatero que se forma es un trapecio.
* Porque sus lados al verlos de tal forma se da un trapecio.




3- Las propiedades que se mantienen invariantes son los puntos A, B.

4- Por que es algo que no cambia al aplicarle al conjunto de trasformaciones.

5. Se pueden crear diferentes figuras con el MNOP gracias a los demas puntos como rombos triangulos etc.

Figura 1

## FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero es MNOP? ¿Por qué podemos afirmar esto?
3. ¿Qué propiedades del cuadrilátero MNOP se mantienen invariantes cùando se mueven los puntos B y C?
4. ¿Por qué creen que estás propiedades son invariantes? Justifica tu afirmación.

## FASE DE VALIDACIÓN

5. Escriban una afirmación (conjetura) que describa lo observado en la Figura 1.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase. Que MNOP no se deforma debido a que siempre va hacer un paravelograma

## FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Me parecio que es buena por que nos ayuda a practicar mas figuras que no sabemos y como crear.

**Producción 5**

NOMBRES: EVELYN GARCÍA, MARGIE CARVAJAL, VANESSA PERDOMO 7-3

**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

R/ J y L son los pnts. que se pueden arrastrar

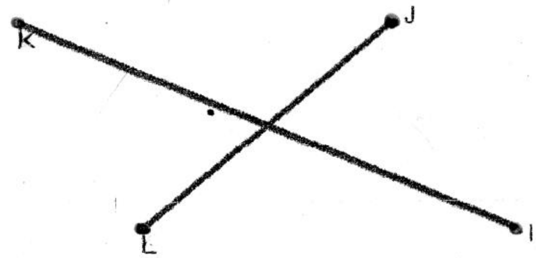



Figura 2

FASE DE FORMULACIÓN

Toman diferente forma de cuadrilátero.

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto? Cuadrado porque tiene 4 lados iguales
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales? que siempre van a tener un punto fijo lo unico es que cambia de lugar.

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.

cuando muevo K siempre I va a estar firme y si muevo I → K siempre va a estar firme

6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban ⊥ conclusión del trabajo de hoy en la clase.

El Punto A divide a las diagonales nos parece interesante porque retomamos el tema.

**Producción 6**

*NOMBRES:* Karen Andrea Herrera
Victor Montero
Carolina isaza 7-3

**Situación 2**

**FASE DE ACCIÓN**

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

• J
• I

Porque son los únicos puntos mobibles

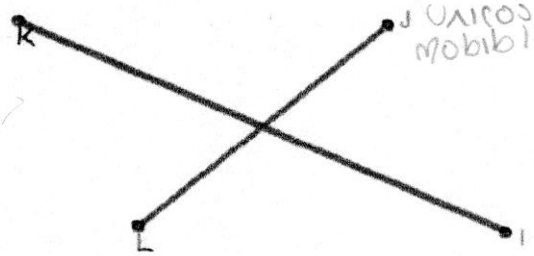



Figura 2

**FASE DE FORMULACIÓN**

los puntos KL se alargan

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto? es un cuadrado
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales? yo afirmo de estas diagonales que son desiguales por que. unas son mas largas que otras

**FASE DE VALIDACIÓN**

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 7**

NOMBRES: Claudia Patricia osorio Y Nicol Vanesa caicedo

**Situación 2**

**FASE DE ACCIÓN**

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

1- se mueven los puntos J y L por que con ellos se mueven todos.

2- Siguen el mismo movimiento de J y K

3. Es un Cuadrado son congruentes.

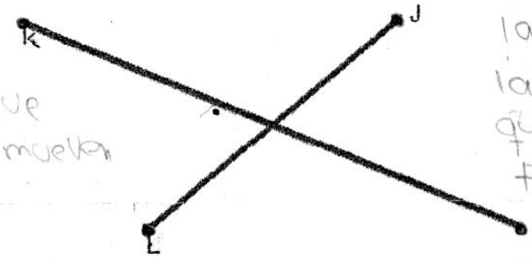



Figura 2

4 - que si movemos la Figura 2 la diagonales quedan de un tamaño diferente

5- que asi la Figura se mueve las diagonales quedaran de diferente tamaño

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 8**

NOMBRES: Manuela Valencia, Camila Arias Mera.

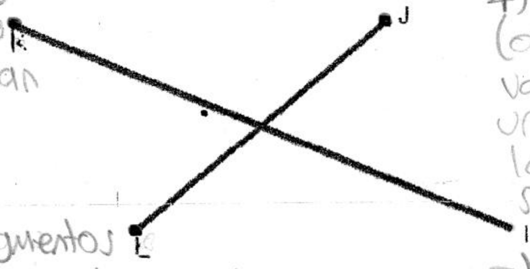
**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

1. R/ los puntos q'' se mueven son: el punto K, J, L Por q'' trazan un segmento

4) Si movemos los puntos J, K vamos a ver q'' una depende de la otra porq'' si no no se hace el poligono




2. R/ Que estos segmentos solo se mueven cuando se arrastran la J, L.

5) Que los puntos de esta figura dependen entre ellos mismos para q'' se forme el poligono

Figura 2

3) R/ Es un cuadrado porq'' todos sus lados tienen igual medida

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL, ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

6) R/ Se justifica porque si movemos los puntos vemos q'' cada uno depende de todos

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

7) R/ lo visto hoy en clase trata de los poligonos y sus segmentos.

**Producción 9**

NOMBRES: Victoria Eugenia Trujillo, Angelica Maria Arias

**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

R/ los Puntos J, y $\overline{K}$
-Porque movimos dos y esos son los únicos

2
- R-Con en el segmento IK: se mueven I, K y A
- Con el segmento J: se mueven I, K y A

3-R - Un Paralelogramo
-Porque dos lados son iguales a los otros

4- Que así se muevan las diagonales van, a quedar de la misma forma, también que $\overline{KI}$ dependen de $\overline{LJ}$

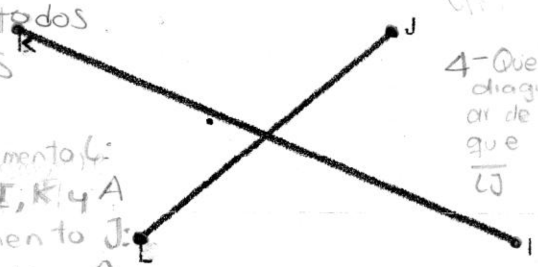


Figura 2

5- Que $\overline{KI}$ dependen de $\overline{LJ}$ porque así se muevan $\overline{KI}$ $\overline{LJ}$ se queda quieto

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL, ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 10**

1) se muebe la J y la L R// porque el J y L Tiene pontos indicado para poderce mober,

2) que los pontos J y L se mueven donde se y los pontos K, y I se estan estables en su lugar.

3) es un cuadrilatero diagonal.

4) que estas diagonales tienen un ponto de encuentro que es la A y la A.J con la K son iguales de largo L y I son mas largas que J y K.

5) que con la J y K son iguales de largo l y I son mas largas que y y k

6) la conclucion de Hoy es de que una aprende mas

el ponto biceta las diagonales en cementos iguales

**Producción 11**

Solución

1R// el punto J y el punto L

2R// Cuando los puntos J y L se arrastran, los puntos I y K se mueven

3R// es un trapecio porque tiene los lados son iguales

4R// que son paralelos, porque no se tocan

5R//

7R// Qué el punto A biseta las diagonales, es decir, divide a las diagonales en puntos iguales

**Producción 12**

2-Ocurre que los puntos JK tambien se Mueven pero no cambia forma.

3-El tipo de cuadrilatero es un rectágulo porque tiene sus 2 lados opuestos, Congruentes.

4- No Son iguales
* Que el punto A no se Mueve
* Que una es Mas larga que la otra
* que las diagonales tienen una interseccion. A

5-No son iguales los puntos JL, KI porque una es Más larga que la otra.

* que el punto A no se Mueve - porque es un punto de encuentro.

t-Conclusion:
En estas diagonales KI JK no son iguales ya que JL es mas corta que KI.
a diagonal KA y AI Son iguales porque tienen la Misma Medida
- EL Punto A divide las diagonales en segmentos iguales.

**Producción 13**

NOMBRES: Victoria Eugenia Trujillo, Angelica Maria Arias

**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

R/ los Puntos J, y K
- Porque movitodos y esos son los únicos

2 - R- Con en el segmento IK: se mueven I, K y A
- Con el segmento J: se mueven I, K y A

3- R- Un Paralelogramo
- Porque dos lados son iguales a los otros

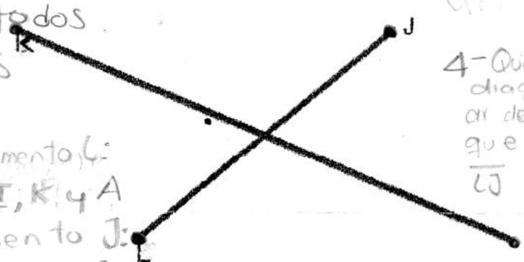



Figura 2

4- Que así se muevan las diagonales van, a quedar de la misma forma, tambien que KI dependen de LJ

5- Que KI dependen de LJ porque así se muevan KI LJ se queda quieto

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL, ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto?
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 14**

lo que pasa con el Segmento es que cuando
el punto J,L se Arrastra pasa que los puntos
J, y se Alargan mas

es un paralelogramo por que hay solo dos
lados Iguales por diagonales.
Yo creeo que esta diagonales es un
Rectangulo pero creo que es un paralelogr

**Producción 15**

*NOMBRES:* Stefany Gonzalez - Camila Murillo
Stefany Gonzalez - Maria Camila Morillo . . .

**Situación 2**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 2 se pueden arrastrar? ¿Por qué creen que pasa esto?

J, L
Porque son los que forman la Figura

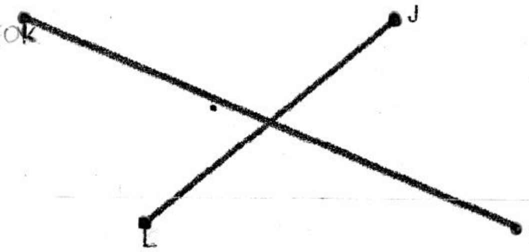



Figura 2

FASE DE FORMULACIÓN

2. ¿Qué ocurre con el segmento $\overline{IK}$ cuando los puntos del segmento $\overline{LJ}$ se arrastran?
   no se Mueven porque los puntos IK son los que representan la Figura
3. Tracen un cuadrilátero que pase por los puntos IJKL. ¿Qué tipo de cuadrilátero es IJKL? ¿Por qué podemos afirmar esto? - Paralelogramo porque Tiene los lados paralelos
4. $\overline{LJ}$ y $\overline{IK}$ son las diagonales del cuadrilátero IJKL, ¿qué pueden afirmar acerca de estas diagonales?
   las diagonales LJ y IK son las que forman el paralelogramo porque son rectas y unidas.

FASE DE VALIDACIÓN

5. Planteen una conjetura con su afirmación realizada en la pregunta cuatro y argumente con algunos elementos teóricos vistos en clase.
6. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

7. Escriban 1 conclusión del trabajo de hoy en la clase.

**Producción 16**

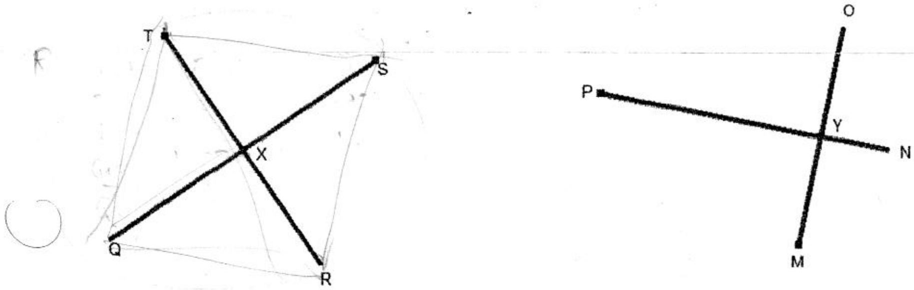
NOMBRES: Nicol Vanessa Caicedo, Claudia Patricia Osorio.
EDAD:

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

R-1- Se arrastran los puntos S,T,R P,M,N,Y
esto pasa para mostrarnos algunas figuras para aprender mas




R-2- Estos segmentos son lineas perpendiculares. Que el segmento $\overline{QS}$ se deja arrastrar por el segmento $\overline{TR}$ en diferente direcciones

Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes?
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué?
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

**Producción 17**

*NOMBRES:* Nicol Vanessa Caicedo, Claudia Patricia Osorio Rodrigue
*EDAD:*

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

3- R- Qe el segmento $\overline{PN}$ arrastian el segmento $\overline{OM}$ dejando un punto queto, en este caso si te arrastia P se queda quieto N y pueden formar una figura diferente.

4- Este poligonó es un rombo, que tiene sus lineas paralela's y las diagonales son perpendiculares.
- las propiedades invariante de S: TyR
las propiedades invariantes de T: R
- Porque son los unicos que no se mueven

5- R- Es un cuadrilateio.
- No porque los puntos P,O,N,M se mueven pero no cambian de figura pero si movemos y puede llegar al punto P,N y cambia de figura.

6- Diferencias que el poligono T,S,R,Q,X es un rombo y el poligono Y,P,O,N,M es un cuadrilatero
- El punto X no se mueve y el punto Y si.
* Semejanzas. Que tienen las diagonales perpendiculares.

7- Que las diagonales del rombo QRST son perpendiculares porque son lineas de 90°.

9- las diagonales del rombos se disecan y son perpendiculares.

**Producción 18**

*NOMBRES:*
*EDAD:*

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

1, todos se pueden mover, porque toda la figura no está inerte
6. que QyS giran y RyN se estiran
2. que Q,S giran mientras que T,R se estiran
3. que TNO giran mientras PN se estira para dnd uno quiera
4. es un rombo, si arrastro T es invariante R y si arrastro S es R y T, porque tiene un punto Fijo
5. es un paralelogramo, no porque cuando se arrastran esos puntos cambia
9. que aprendimos más sobre la geometría haciendo cosas cheveres

**Producción 19**

*NOMBRES:*
*EDAD:*

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

R1) los que se pueden mover son: M, N, P. y dela otra figura son: T, S, X, R. Por que así no se daña las lineas perpendiculares

R2) pues el segmeto TR los dos se pueden arrastran en cambio los puntos Q, S solo se puede arrastrar s

R3) pues se puede decir que en el segmento O, M solo se puede arrastrar el punto M en cabio en el segmento PN los dos puntos se puedan mover.

R4) es un Rombo, las propiedades que son ~~variantes~~ son las diagonales son invariantes por que así no se daña la figura

R5) es un Cuadrado - si porque

R6) pues que así los dos sean lineas perpendiculares la figura cambia

R7) las diagonales del Rombo pueden ser perpendiculares

R8) pues que así las lineas perpendiculares se muevan. la figura no varia

R9) los diagonales del rombo se disecan y son perpendiculares

**Producción 20**

NOMBRES: Victor Montero · Andrea Herrera
EDAD: · 13 - 13

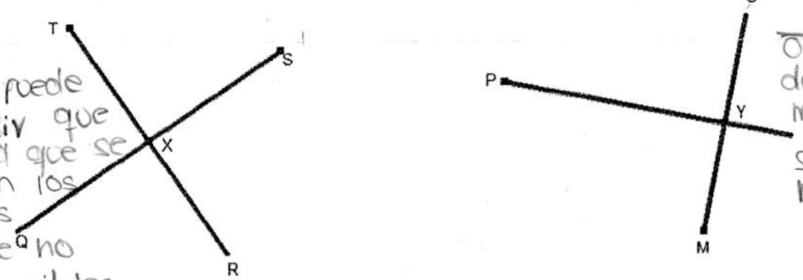
**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

1 · P Por que son los unicos puntos movibles y
· M cada que se mueven · se alargan los puntos no
· S movibles
· T

2 se puede decir que cada que se mueven los puntos RQ que no son movibles



3. del segmento OM podemos decir que al mover este el segmento PN no se mueven

Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes? · es un Rombo, · las propiedades son variantes porque son
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué? · es un cuadrado
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

las

**Producción 21**

NOMBRES:
EDAD:

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

1) T, R, S, P, n, m, y ) R/ POR q' los Puntos iniciales los acen moteR donde cea.

2) que el PuNTO T uno lo aRRastRa. y el PunT R se estaestable en su lugaR) R/ y si usted muede el PUNTO S el PuNTO Q se muebe con el.

3) que el m baria la lio y el P baRia la m y o. menos baria la n.

4) R/ es un Ronbo ) R/ si cambiande figura R/ porque las figuras cambian de forma y cambian de tamaño.

5) es el poligono cuadrilatero la figura si se conserba porque los puntos por mas q se mueban no cambian de forma

6) que la figura 1. que el punto t se muebe y cuando se muebe muebe S y Q pero menos R

7) que las diagonales son igoales y no cambian de forma una cambia de forma pero la otras dos no ocea que x ceria un punto central un punto

8) ya nos preparamos

9) entendimos q las figuRas que bimos en el dia de hoy, cancian y no canbian de forma.

las diagonales de ronbo se ciercan y son perpendiculares.

diagonal lineas prepeculares

**Producción 22**

***NOMBRES:*** Marhcilla Valencia Camila Ariaz Mera
***EDAD:***

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Zolución

1R// los Puntos que sepuede Arrastrar son: T, S, R, Dela primera figura Dela segunda, Son: P, Q, M, N, Porq" esto pasa con esta figura es Paralela

2R//S, a lineas Perpendiculares, y se mueve o se Arrastranlos Dos Puntos al a misma vez. T, R se mueve en forma vertical y solo se mueve el punto T y el punto R se queda sin movimiento

3R//el segmeto P y N y Q y se crosa lo cual no es paralela Podemos decir que son Perpendiculares el PN y lo afirmo con respecto a el segmento OM

4R//, Es un rombo las Propiedades invariantes son los puntos R, X porque al mover los puntos S, T estos punto R, X no presentan movimientos.

5)R//, Es un cuadrilatero la figura no se conserva porque al mover sus puntos o segmentos se daña la figura.

6 R// la diferencia entre M, N, O y P y la figura Q, R, S, y T son q" uno es cuadrilatero y el otro es un rombo y 1 de estas figuras conserva su forma

**Producción 23**

7R// Que la figura T,S,R,Q esta en forma de rombo y se mueve conservando su forma y la figura P,O,N,M es un cuadrilatero y no conserva su figura.

8R// se justifica porque al mover los puntos de la figura 1 ninguno de sus lados cambia y la 2 figura al moverse sus puntos esta figura se deforma

9R// el trabajo hoy en clase se trato de la lineas perpedicolares y de nuevo los polignos las diagonales del rombo se disecan y perpendiculares.

**Producción 24**

*NOMBRES:*
*EDAD:*

### FASE DE VALIDACIÓN

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

### FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Solución

1- Se pueden Mover los puntos P, N, M, Y.. S, T, R porque los puntos iniciales tienen Movimiento. ~~T~~ depende de el as
2- Podemos decir que el segmento T que esta unido porque
3- Podemos decir del segmento OM que aunque se mueva sigue en su misma forma. tambien podemos decir del segmento PN que cuando se mueve P o N uno de ellos se queda en un solo sitio Cuando no lo movemos.
4- La clase de poligono es rombo. las propiedades invariantes es que T se arrastra y S queda en su misma forma, No se mueve queda en su mismo eje porque T se mueve y S no
5- la Clase de poligono es Cuadrilatero - No se conserva porque Cambia de forma
6- la diferencia es que la figura QRST el punto Medio no se mueve y en la figura MNOP si se mueve el punto Medio porque en la figura QRST su punto Medio esta en su propio eje
7- Las diagonales son iguales.
* Todas las diagonales son perpendiculares.
* Todas 2 estan unidas.

8- Conclusion:
las diagonale del rombo se viseta, son perpendicular..

**Producción 25**

*NOMBRES:* Valentina Reyes, Stephany Sepulveda
*EDAD:* 12 13,

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

1 los Puntos De la figura 3 que se puede Arrastrar son los puntos Y,T,S,P,m,R,n. Porque cuando uno lo va a Arrastrar la figura Se Alarga.

2-del segmento $\overline{QS}$ que cuando los movemos ellos Siempre son rectos y El $\overline{TR}$ que todos Dos Se alargan O Se Achiquita.

3 Podemo Decir que del Segmento $\overline{OM}$ Se intercalan y Del $\overline{PN}$ Que Da vectores

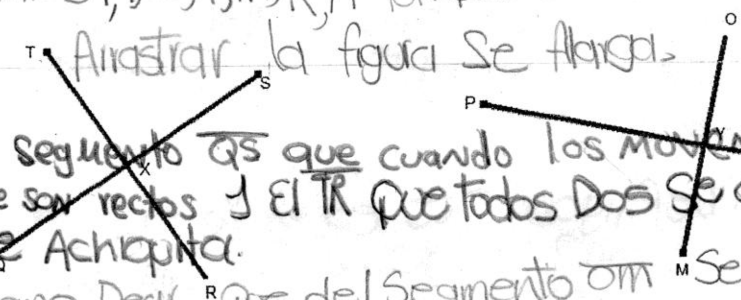


Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes?
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué?
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

**Producción 26**

*NOMBRES:* Valentina Reeyes– Stephany Sepulveda
*EDAD:* 12 13

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

4-El Poligono Que Hace es un paralelogramo
-los puntos que son invariantes son S y T por
Que Hacen el poligono De un Rombo.

5 la clase De Poligono que es un Rombo
-se conserva como la figura De un Rombo.
porque tiene la figura De un rombo.

6-Que la figura $\overline{QPNM}$ Es un Rombo y
la figura $\overline{TSQR}$ Es paralelogramo

8-mi conclusion del trabajo De hoy me parecio
super chevere porque uno Aprende muchas
cosas sobre el poligono.

**Producción 27**

*NOMBRES:* Caterine Cristian Perez
*EDAD:*

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto? E t y R y el P,N Porque ellos son los que dan ancho y la forma igual que los demas
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$? Que ellos son del mismo largo
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$? Que si los movemos bamos a ver que ellos tienen lineas perpendiculares

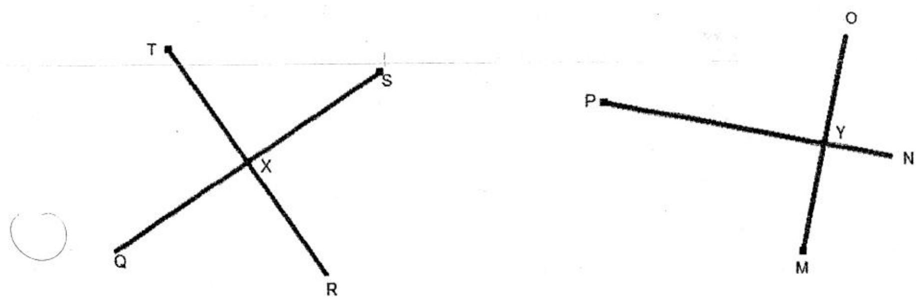



Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes? este poligono es un cuadrado porque tiene todos sus lados iguales
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué? Es ~~perpendicular~~ un rombo la figura ~~no~~ se conserba porque si se mueve el segmento O,M o la mitad cambia
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.
la diferencia esque en la figura MNOP no se puede alargar los puntos M,O y en la figura QRST se pueden alargar

**Producción 28**

*NOMBRES:*
*EDAD:*

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase. siempre ban a tener sus lados iguales porque son lineas perpendiculares con esta figura QRSt tiene sus diagonales perpendiculares poreso sus lados son iguales
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase. Una cometa porque la cometa siempre tiene lineas perpendiculares para poder bolar

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

Las diagonales del rombo se discar y son perpendiculares

**Producción 29**

*NOMBRES:* Victoria eugenia Trujillo, Angelica maria Arias
*EDAD:* 12 y 13

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

1- los que se pueden mover son T, S y la R, P, N, Y m.

2- Cuando ~~lo~~ movemos ~~lo~~ el punto T el segmento QS se queda quieto por que es el centro de la figura

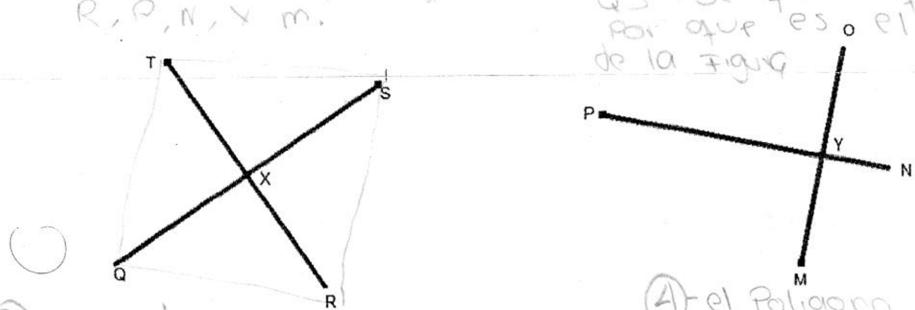



Figura 3

3 que el segmento om se queda en el lugar donde esta

4- el poligono es un rombo, la propiedad invariante es el punto x por que es el del centro y el que ~~tiene~~ une a los dos segmentos.

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes?
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué?
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

5- poligono es un rombo, la figura si se conserva por que no arrastramos el punto medio

**Producción 30**

*NOMBRES:*
*EDAD:*

**FASE DE VALIDACIÓN**

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

**FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN**

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

6- Una de las diferencias es que sus lados son de diferente tamaño
- el Punto centro de la figura Q R S T no se mueve.
- los segmentos son de diferente tamaño.
- el Poligono trazado es de diferente tamaño.

Semejansas
- las dos Tienen Punto medio
- las dos son Cuadrilateros
- Tienen dos segmentos
- son paralelogramos.

7- que las diagonales del rombo siempre son Perpendiculares Por que los segmentos forman angulos de 90°

9- la diagonales del rombo se disecan y son Perpendiculares.

**Producción 31**

*NOMBRES:* Laura Rosero, Ingrid Pinto.
*EDAD:* 12 13

**Situación 3**

FASE DE ACCIÓN

1. ¿Qué puntos de la Figura 3 se pueden arrastrar? ¿Por qué crees que pasa esto?
2. Arrastren los puntos S, T y X de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{QS}$ con respecto al segmento $\overline{TR}$?
3. Arrastren los puntos M, P y Y de la figura 3. ¿Qué podemos decir del segmento $\overline{OM}$ con respecto al segmento $\overline{PN}$?

1) Se pueden arrastrar de la primera: T, R y la segunda: P, N
- Por que la figura se presta para esos movimientos.

2) Se puede decir que cuando se mueve el segmento S el segmento Q se abre de igual forma

3) Se puede decir que al moverse el segmento N el segmento O se da de igual forma. El segmento P solo se mueve su parte.

4) Es un Paralelogramo rombo
- El segmento Q y la T solo sirven para mover la figura.
- Por que se abren con otros segmentos.

5- Es un poligono Paralelograma
- Porque aunque movamos sus lineas no nos cambia su aspecto.

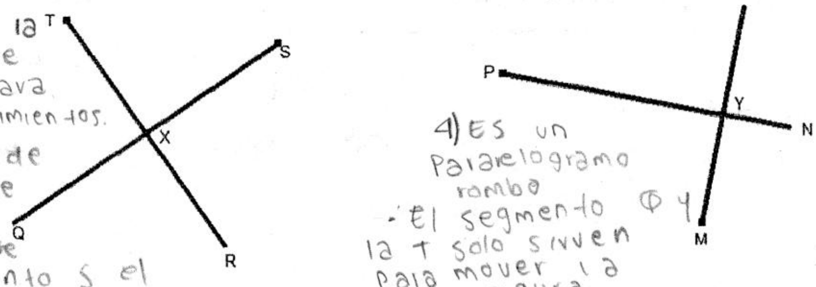


Figura 3

FASE DE FORMULACIÓN

4. Tracen un polígono que pase por los puntos Q, R, S y T. ¿Qué clase de polígono es? arrastren los puntos S y T, ¿qué propiedades son invariantes? ¿por qué creen que son invariantes?
5. Tracen un polígono que pase por los puntos M, N, O y P. ¿Qué clase de polígono es? Arrastren los puntos M, Y y P, ¿la figura se conserva? ¿por qué?
6. ¿Cuál es la diferencia entre la figura QRST y la figura MNOP? Argumenta tu respuesta.

6. Que en la Figura QRST hay más probabilidades de formar más poligonos que en la Figura MNOP.

**Producción 32**

*NOMBRES:* Laura Rosero Ingrid Pinto
*EDAD:* 12 13

FASE DE VALIDACIÓN

7. Planteen una conjetura acerca de la relación existente de la figura QRST y sus diagonales, argumenta con elementos teóricos vistos en clase.
8. Prepárense para justificar su conjetura frente a la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

9. Escribe una conclusión del trabajo de hoy en la clase.

7- La velación que existe en esta figura es que sus lados no se juntan por ser paralelogramos y sus lados iguales.

9- La Conclusion

**Producción 33**