ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO RUTINARIOS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN: UNA APROXIMACIÓN A LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

ANA MARIA PALACIOS ROJAS
SANDRA LICETH SOLARTE ALVEAR

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI
2013

ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO RUTINARIOS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN: UNA APROXIMACIÓN A LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

ANA MARIA PALACIOS ROJAS
0838488

SANDRA LICETH SOLARTE ALVEAR
0842440

DIRECTOR:
OCTAVIO AUGUSTO PABÓN RAMIREZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI
2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO RUTINARIOS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN: UNA APROXIMACIÓN A LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS						
Se trata de:	Proyecto [ ]			Informe Final [X]			
Director:	Octavio Augusto Pabón Ramírez						
1er Evaluador:	Maritza Pedreros Puente						
2do Evaluador:	Wildebrando Miranda						
Fecha y Hora	Año:	2013	Mes:	09	Día:	12	Hora: 7:30 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Ana Maria Palacios Rojas	0838488	3469
Sandra Liceth Solarte Alvear	0842440	3469

EVALUACIÓN

Aprobado		Meritorio	x	Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

	Maritza Pedreros P	Wildebrando M.
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

OBSERVACIONES:		RECOMENDACIONES:		RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Los evaluadores consideran, que este trabajo puede es calificado como MERITORIO a partir de las siguientes consideraciones:

1. Es un trabajo que aborda una problemática de interés de la formación de docentes de matemáticas, a saber la formación en estrategias heurísticas, a partir de una conceptualización y un diseño metodológico novedosos.

2. Este trabajo sistematiza las experiencias acumuladas durante varios años de un modelo de formación en el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas en relación con el enfoque de Resolución de Problemas matemáticos , enriqueciendo escenarios, como la practica profesional y el laboratorio de educación matemática donde sus avances y resultados han sido socializados.

3. Este trabajo también cumple con las exigencias de escritos académicos en términos de su fluidez conceptual y la calidad en la escritura.

4. Este trabajo de grado en su versión final, tiene altas posibilidades de proyección en la comunidad académica en eventos nacionales y regionales, habida cuenta que muchos de sus resultados preliminares se socializaron en eventos como Encuentro Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME y el XXI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, y hacen parte de las memorias académicas de estos encuentros.

	Monika Pedreros P	Wilderbrando M
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Estudio de la resolución de problemas matematicos no rutinarios de docentes de matematicas en formación: Una aproximacion a las estrategias heuristicas

Autores:

Nombre: Octavio Augusto Pabón Ramirez
Firma:
C.C. 6385.825

Nombre: Ana María Palacios Rojas
Firma: Ana Maria Palacios R.
C.C. 1130.617.857

Nombre: Sandra Liceth Solarte Alvear.
Firma: Sandra L Solarte A.
C.C. 1.059.063.952

Fecha: ____________

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

Resumen analítico

Título:	Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: Una aproximación a las estrategias heurísticas
Investigadores:	Ana María Palacios Rojas y Sandra Liceth Solarte Alvear.
Director trabajo de grado:	Octavio Augusto Pabón Ramírez.
Evaluadores:	Maritza Pedreros, Wildebrando Miranda
Palabras claves:	Resolución de problemas, estrategias heurísticas, didáctica de las matemáticas, formación de docentes, problemas no rutinarios.
Objetivos:	**General** Analizar los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación en *el enfoque de resolución de problemas matemáticos*, en la emergencia y apropiación de estrategias heurísticas por parte de los profesores de matemáticas en formación. **Específicos** Identificar los modelos de resolución de problemas matemáticos y las alternativas que proponen algunos de los profesores de matemáticas en formación para el trabajo con *estrategias heurísticas*. Estudiar las *estrategias heurísticas* que emergen cuando los profesores de matemáticas en formación se involucran en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios en el marco de su formación profesional.
Metodología	Esta es una investigación cualitativa que desde una perspectiva descriptiva e interpretativa busca dar cuenta de aspectos asociados a la emergencia y uso de estrategias heurísticas de profesores de matemáticas en formación.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN
Introducción ... 13
1.1. Justificación y contextualización del problema ... 19
1.2. Objetivos ... 26

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO
Introducción ... 29
2.1 La resolución de problemas como proceso matemático ... 29
2.2 Modelos de resolución de problemas matemáticos ... 32
2.2.1. Modelo de resolución de problemas según Polya ... 32
2.2.2. Modelo de resolución de problemas según Schoenfeld ... 33
2.2.3. Modelo de resolución de problemas según Santos Trigo: ... 35
2.2.4. Modelo I.D.E.A.L de Bransford y Stein para la resolución de problemas ... 36
2.3 Resolución de problemas: concepciones y creencias ... 39
2.4 La resolución de problemas y la formación de docentes ... 41
2.5 La resolución de problemas como metodología de enseñanza: el lugar de las estrategias heurísticas ... 43
2.6 Estrategias heurísticas y resolución de problemas ... 47
2.6.1. Dibuje un Diagrama ... 48
2.6.2. Construya una tabla ... 51
2.6.3. Ensayo y Error ... 52
2.6.4. Problemas más simples y/o relacionados ... 54
2.6.5. Trabajar hacia atrás ... 55

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA
Introducción ... 61
3.1. Definición de criterios y diseño de los problemas ... 62
3.1.1. Estrategias de solución de los problemas planteados ... 62
3.2. El Contexto ... 71
3.3. Participantes en el estudio. ... 71
3.4. Momentos de la investigación ... 72
3.5. Categorías de análisis ... 74

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
Introducción ... 85
4.1. Análisis de las Tareas ... 87

CONCLUSIONES ... 128
BIBLIOGRAFÍA ... 131
ANEXOS ... 133

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Linealidad	37
Figura 2. Triangulo equilatero	54
Figura 3. Tablero de forma $n \times n$	55
Figura 4. Apretón de manos.	65
Figura 5. Solución gráfica del apretón de manos.	66
Figura 6. Sacos que cargan la mula y el burro.	67
Figura 7. Solución gráfica del problema de la longitud del pescado.	69
Figura 8. Configuración de cuadrados.	71
Figura 9. Solución gráfica del problema de áreas minimas de dos cuadrados.	72
Figura 10. Solución geométrica del problema de areas minimas de dos cuadrado.	73
Figura 11. Peso de las gallinas.	76
Figura 12. Solución del problema N°1, por parte de G2.	90
Figura 13. Solución del problema N°1, por parte de G3.	91
Figura 14. Solución del problema N°1, por parte de G4.	91
Figura 15. Solución del problema N°1, por parte de G5.	92
Figura 16. Solución del problema N°1, por parte de G6.	92
Figura 17. Solución del problema N°1, por parte de G7.	93
Figura 18. Solución del problema N°1, por parte de G8.	93
Figura 19. Solución del problema N°1, por parte de G9.	94
Figura 20. Solución del problema N°2, por parte de G1.	95
Figura 21. Solución del problema N°2, por parte de G2.	95
Figura 22. Solución del problema N°2, por parte de G3.	96
Figura 23. Solución del problema N°2, por parte de G4.	97
Figura 24. Solución del problema N°2, por parte de G5.	97
Figura 25. Solución del problema N°2, por parte de G6.	98
Figura 26. Solución del problema N°2, por parte de G7.	98
Figura 27. Solución del problema N°2, por parte de G9.	99
Figura 28. Solución del problema N°3, por parte de G1.	100
Figura 29. Solución del problema N°3, por parte de G2.	101
Figura 30. Solución del problema N°3, por parte de G3.	102
Figura 31. Solución del problema N°3, por parte de G5.	103
Figura 32. Solución del problema N°3, por parte de G6.	103
Figura 33. Solución del problema N°3, por parte de G7.	104

Figura 34. Solución del problema N°3, por parte de G8.	*105*
Figura 35. Solución del problema N°3, por parte de G9.	*105*
Figura 36. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G1.	*106*
Figura 37. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G2.	*107*
Figura 38. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G3.	*107*
Figura 39. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G4.	*108*
Figura 40. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G5.	*108*
Figura 41. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G6.	*109*
Figura 42. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G7.	*110*
Figura 43. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G8.	*110*
Figura 44. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G9.	*111*
Figura 45. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G1.	*112*
Figura 46. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G2.	*113*
Figura 47. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G3.	*114*
Figura 48. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G4.	*114*
Figura 49. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G4.	*115*
Figura 50. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G5.	*115*
Figura 51. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G6	*116*
Figura 52. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G8	*116*
Figura 53. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G9.	*117*
Figura 54. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G1	*118*
Figura 55. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G2	*119*
Figura 56. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G2.	*120*
Figura 57. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G3.	*121*
Figura 58. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G4	*122*
Figura 59. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G4	*122*
Figura 60. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G5.	*123*
Figura 61. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G6.	*124*
Figura 62. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G7.	*125*
Figura 63. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G7.	*125*
Figura 64. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G8.	*126*

	Página
Figura 65. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G9.	*126*
Figura 66. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G1.	*127*
Figura 67. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G1.	*128*

Figura 68. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G2.	*128*
Figura 69. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G2.	*129*
Figura 70. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G3.	*130*
Figura 71. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G4.	*130*
Figura 72. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G4.	*131*

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Modelos de resolución de problemas	*41*
Tabla 2.Definiciones de heurística	*48*
Tabla 3. Ensayo y error fortuito	*57*
Tabla 4. Ensayo y error sistemático	*57*
Tabla 5 Ensayo y error dirigido	*57*
Tabla 6. Representación tabular del apreton de manos	*66*
Tabla 7. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema del apreton de manos.	*67*
Tabla 8. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema de la mula y el burro.	*69*
Tabla 9. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema de la longitud del pescado.	*70*
Tabla 10. Representación tabular del problema del area minima de dos cuadrados	*73*
Tabla 11.Estrategias heurisicas que soluciónan el problema de areas minimas de dos cuadrados.	*73*
Tabla 12. Rejilla para el análisis de la actividad N°1	*78*
Tabla 13. Rejilla para el análisis de la actividad N°2	*79*
Tabla 14. Rejilla para el análisis de la actividad N°3	*83*
Tablas 15. Rejilla de la actividad N°1	*139*
Tablas 16. Rejillas actividad N°2	*142*
Tablas 17. Rejilla de análisis actividad N °3	*145*

Resumen

En este trabajo se pretende ofrecer una mirada panorámica sobre las estrategias alcances, posibilidades y limitaciones heurísticas que emergen cuando los profesores de matemáticas, en formación, hacen uso de los de la resolución de problemas no rutinarios en su formación, basada en unos problemas clásicos del curso de **Resolución de problemas Matemáticos**. Se ofrecerá una descripción teórica de los problemas y se estudiarán varias formas de obtener una solución a la luz del uso de las heurísticas.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la Línea de Investigación Didáctica de las Matemáticas del Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle.

Se propone estudiar los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación en el *enfoque de resolución de problemas matemáticos* y aportar a la comprensión y conocimiento de algunas de las *estrategias heurísticas* que emergen cuando los profesores de matemáticas en formación del Programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle son expuestos a elementos teóricos y metodológicos del denominado *enfoque de resolución de problemas* y cuando se involucran en la resolución de *problemas matemáticos no rutinarios* en el marco de esta formación profesional.

Las investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos son un asunto central en la didáctica de las matemáticas y se reconocen como un campo abierto a nuevas miradas teóricas, particularmente aquellas que vinculan la resolución de problemas con los procesos de formación y cualificación de docentes de matemáticas

Se considera que una formación en el proceso de la resolución de problemas matemáticos demanda mucho tiempo para estudiantes y profesores y que en ocasiones los resultados tardan en llegar. Más aun, no existe un consenso definitivo sobre el impacto de una formación en *el enfoque de resolución de problemas matemáticos* sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y los de formación de docentes.

Al respecto es importante señalar que ciertos estudios sostienen que la enseñanza de *pautas, estrategias y técnicas* aporta más al desarrollo de habilidades y competencias en la resolución de problemas que el trabajo excesivo de resolución de problemas o la mera práctica espontánea de resolver problemas que aparecen en los libros de texto. Estos últimos problemas son regularmente simples *ejercicios* que favorecen preferentemente la rutina y la práctica reiterada de algoritmos y fórmulas, dejando en un segundo plano, el trabajo con *problemas matemáticos no rutinarios*, los cuales se consideran como uno de los aspectos más relevantes y productivos del *enfoque de resolución de problemas.*

Sin embargo, en Santos Trigo (2007), se especifica sobre algunas revisiones literarias relacionada con el uso de las estrategias y pautas, en estas se señala que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no habían sido exitosos. Schoenfeld (1992; citado por Santos Trigo, 2007) explica que una razón para esta falta de éxito podría ser que las heurísticas de Polya representaban nombres de una categoría larga o extensa de procesos que incluían otras sub-estrategias que los estudiantes no reconocían o accedían en sus intentos de resolución de problemas.

Por otro lado, se considera que en el estudio de las matemáticas en el ámbito escolar, es fundamental que los estudiantes aprendan a formular preguntas y a buscar distintos caminos que le permitan encontrar soluciones o respuestas a las mismas. De hecho, propuestas recientes reconocen que el estudio de la disciplina debería ir más allá de la memorización de ciertas reglas o fórmulas para resolver determinados problemas. En particular, se resalta la importancia de que los estudiantes participen en los procesos de formulación de preguntas, propongan conjeturas, empleen distintas representaciones, presenten argumentos matemáticos y comuniquen resultados. (NCTM, 2000, citado por Santos Trigo, 2007)

Se considera así, que la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas (siguiendo un algoritmo), sino habituándose y tomando partido por un amplio espectro de decisiones y técnicas de resolución, conocidas como *estrategias heurísticas*, aunado al esfuerzo de los profesores para ayudar a sus estudiantes a ganar *confianza* para abordar y resolver problemas.

En este orden de ideas, se requiere una formación fundamentada en este enfoque, en particular en cuanto se refiere a las *estrategias heurísticas*, como un factor determinante en el trabajo de los docentes. Esta formación podría contribuir a mejorar las condiciones de tiempo y continuidad en las clases de matemáticas y a permitir que los profesores promuevan y estimulen en sus estudiantes el desarrollo de habilidades y competencias para la resolución de problemas.

El interés de este trabajo es precisamente estudiar los aspectos de este enfoque relativos a las *estrategias heurísticas*, en el marco de los procesos de formación y cualificación de docentes de matemáticas y eventualmente proponer algunas alternativas metodológicas para su mejoramiento y promoción.

Esta investigación se organiza de la siguiente manera:

CAPITULO I: En este se dan a conocer los aspectos generales de la investigación que la justifican y la contextualizan, así como la revisión algunos de los antecedentes relacionados con el problema de interés. Intentando mostrar cómo a partir de estas consideraciones surge y se estructura la problemática que se aborda en este trabajo de grado.

CAPITULO II: En este se estructura el marco teórico de la investigación a partir del estudio de algunas de las dimensiones vinculadas al *enfoque de resolución de problemas matemáticos* y los procesos de formación de docentes de matemáticas, que incluyen entre otras a las dimensiones histórica, matemática, cognitiva y didáctica.

CAPITULO III: En este se muestra la metodología utilizada, los distintos momentos de la investigación, así como las diferentes estrategias e instrumentos que se emplearon en diferentes momentos de la investigación para sistematizar y analizar las producciones de los docentes de matemáticas en formación participantes de la investigación.

CAPITULO IV: En este se presenta el análisis, en relación con los referentes teóricos adoptados en la investigación, de aspectos relevantes del proceso de emergencia y apropiación de *estrategias heurísticas* por parte de los profesores de matemáticas en formación que emergen cuando se involucran en la resolución de *problemas matemáticos no rutinarios*.

Finalmente se presentan las conclusiones generales de la investigación.

CAPITULO 1

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Justificación y contextualización del problema

En las investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en los últimos años se reconoce un interés creciente por continuar y ampliar el espectro de temáticas de investigación sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos (Santos Trigo, 2007).

Algunas de estas investigaciones abordan asuntos centrales del proceso de formación de docentes de matemáticas en el *enfoque de resolución de problemas*, entre los que se incluyen el estudio de las concepciones y creencias sobre la resolución de problemas y el trabajo con *estrategias heurísticas*.

En el primer caso, el estudio de las creencias y concepciones sobre la resolución de problemas, se considera un campo de indagación que podría permitir establecer las bases sobre las que los *profesores en formación* deben empezar a construir su conocimiento didáctico en relación a la resolución de problemas y permitir que la resolución de problemas se inscriba dentro de las propuestas curriculares para el área de matemáticas (Blanco, 1997).

En cuanto concierne a la formación de los docentes de matemáticas en *estrategias heurísticas* puede señalarse que es uno de los asuntos de mayor interés en la investigación reciente en didáctica de las matemáticas y que va más allá de la *formación explicita* en tales estrategias que fue la impronta desde la década de 1990 y que no siempre se tradujo en buenos desempeños académicos de los estudiantes.

De manera general, se considera que el renovado interés sobre estos dos asuntos, que los investigadores han mostrado están estrechamente vinculados (Schoenfeld, 1985), se corresponde con importantes y variados cambios que ha experimentado la educación matemática en las últimas décadas, que incluyen desde nuevas propuestas curriculares, nuevos modelos y estrategias para la formación de los profesores, hasta investigaciones novedosas sobre los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y extraescolares.

En cuanto se refiere a la formación de docentes, los cambios más significativos reconocidos desde la década de 1990, se relacionan con la importancia que adquirió, de una parte la discusión sobre los diferentes roles y concepciones de los profesores en el aula, la necesidad de conectar la teoría y la práctica docente, y de otra parte las investigaciones sobre la formación de los profesores que hacen referencia al conocimiento básico para la enseñanza de las matemáticas y aquellas que ponen de manifiesto las dificultades que los profesores en formación tienen para aprender a enseñar Matemáticas (Blanco, 1997)

Ya desde finales del siglo XX se formulaba un marco curricular para la formación de profesores, y se señalaba otro conocimiento base para la formación del profesorado de matemática que determinaría un nuevo concepto de enseñanza y aprendizaje en educación matemática: *aprender a enseñar matemáticas*. De ahí que para algunas escuelas en *didáctica de las matemáticas*, el principal objetivo de los profesores en formación sea el de "aprender a enseñar matemáticas", contemplando la necesidad de:

a) Analizar los conocimientos, creencias y actitudes de los estudiantes para profesores sobre matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje en los niveles de educación básica primaria, clarificando y haciendo visible el diagnóstico anterior para hacerles explícitas sus concepciones. A este respecto, se tendría que considerar el análisis desde sus concepciones teóricas y desde la realidad de las prácticas docentes.

b) Analizar las propuestas sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, a partir de las nuevas propuestas curriculares que señalan nuevos contenidos y metodología para la enseñanza básica primaria. Por ello, deberíamos contrastar los puntos de vista de los estudiantes para profesores con las nuevas propuestas, para relacionar las concepciones nuevas y las existentes.

c) Adquirir y desarrollar la capacidad de poder trasladar al aula toda esa nueva enculturación matemática que queremos comunicar desde una perspectiva de renovación. En este sentido, hay que recordar que esta cultura matemática, implícita en las propuestas curriculares, es en la mayoría de los casos, contraria a la vivencia que han desarrollado a lo largo de su participación en la enseñanza obligatoria. En definitiva, adquirir la capacidad de razonamiento pedagógico y conseguir esquemas cognitivos que les permita analizar contextos concretos de enseñanza. (Blanco, 1997)

Las orientaciones profesionales sugerían la creación de ambientes para que los estudiantes pudieran explorar ideas matemáticas. Así, los futuros profesores deberían ser enseñados de forma parecida a como ellos habrán de enseñar - explorando, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando y todo lo demás. Por consiguiente, muchos centros de formación adoptaron sus programas de formación a la luz de estos criterios curriculares y de evaluación (NCTM, 1991, citados por Blanco, 1997).

No obstante, estas actividades, si bien fueron consideradas como necesarias, no fueron valoradas como condiciones suficientes para que los futuros profesores de matemáticas adquirieran el conocimiento didáctico necesario para el eficaz desenvolvimiento en las aulas de la enseñanza Primaria" (Blanco, 1997).

En general, las investigaciones señalan que los profesores de matemáticas en formación encuentran diferentes dificultades para asumir las propuestas curriculares, así como para trasladar al aula aquellos conocimientos de didáctica de las matemáticas que han adquirido en los centros de formación inicial.

El análisis de estas dificultades, así como la necesidad de establecer el conocimiento base para la formación inicial, ha llevado a algunas investigaciones a analizar el conocimiento de los profesores, realizando una descripción del mismo en base a dos componentes diferenciadas, aunque estrechamente relacionadas entre sí: *Componente Estática* y *Componente Dinámica* (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995; Blanco, 1995).

Entre otras cuestiones se señala que el estudio de las propias concepciones, creencias y actitudes sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, cobra una especial importancia, como un primer paso para generar unas nuevas concepciones y prácticas más adecuadas. Es pues necesario un "conocimiento de sí mismo" en relación con cada uno de los aspectos anteriores, que les permita ser conscientes de sus teorías explícitas o implícitas, tanto en relación a perspectivas teóricas que pudieran mantener, como en su relación con la práctica docente. (Blanco, 1997)

En cuanto se refiere al desarrollo y construcción del *conocimiento didáctico de contenido* sobre la resolución de problemas matemáticos, se reconoce que cuando los profesores en formación (o estudiantes para profesor, EPPS) acceden a los centros de formación inicial o institutos y facultades de educación, traen una experiencia escolar de muchos años. Y todo esto hace que tengan concepciones y creencias preestablecidas sobre las Matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas derivadas de su experiencia discente.

Se considera que poseen conceptos previos sobre buena parte de los contenidos de matemáticas, de psicopedagogía y didáctica de las matemáticas que forman la ***componente estática***; concepciones que en la mayoría de los casos son muy tradicionales y contradictorias entre sí, y que recuperan, de forma consciente o inconsciente, durante las prácticas de enseñanza como profesores en formación y posteriormente como profesores novatos.

De esta manera, se considera que es necesario tener en cuenta estos conocimientos, *creencias y actitudes* sobre las Matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas porque "el aprendizaje implica una interacción entre las concepciones nuevas y las existentes, y el resultado alcanzado depende de la naturaleza de la interacción" (Hewson y Hewson, 1989; Blanco, 1997).

A finales del siglo XX, si bien los investigadores reconocían la importancia de los nuevos contenidos, objetivos y metodología sobre la educación matemática que venían indicados en las propuestas curriculares (por ejemplo, NCTM, 1991 en Estados Unidos y MEC, 1992, en España), llamaban la atención sobre la necesidad de considerar las viejas concepciones que sobre matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje manifiestan los profesores de matemáticas en formación y sobre ellas construir su conocimiento didáctico.

Tal conocimiento estaría relacionado, además, con la capacidad de razonamiento pedagógico, con la capacidad de recoger información útil para la enseñanza y aprendizaje en el contexto del aula, con la capacidad de predecir, analizar, gestionar, un ambiente de clase que se intenta que sea participativo, dinámico, que puede generar situaciones imprevistas, problemas de disciplina.

El interés sobre la resolución de problemas matemáticos a finales del siglo XX y a inicios del siglo XXI va a continuar vinculado a los esfuerzos por promover propuestas curriculares para ayudar a insertar la resolución de problemas dentro del currículo de matemáticas de la educación básica. Algunos autores consideraban que “la formación de profesores será el terreno que va a decidir la suerte de la resolución de problemas en el futuro de la enseñanza" (Ponte y Canavarro, 1994, p. 205, citados por Blanco, 1997).

Además del especial valor que se otorgó al estudio de las concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de los futuros docentes de matemáticas en función de las propuestas curriculares vigentes, la investigación sobre la resolución de problemas encontró en el estudio de las *estrategias heurísticas* un prometedor campo de investigación.

Así, según Santos Trigo (2007) una idea fundamental de la resolución de problemas es pensar que el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, los estudiantes tienen que problematizar el estudio de la disciplina. En esta perspectiva, es esencial que los estudiantes formulen preguntas al intentar resolver problemas o comprender ideas matemáticas; es en esta medida que el término *problema* se vincula no solamente a situaciones específicas rutinarias o no rutinarias donde el estudiante intenta encontrar la solución o soluciones, sino también incluye tener que aprender algún concepto matemático. Es decir, tanto al resolver un problema o al aprender un contenido, el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas, y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entender esa situación problema.

No obstante, en educación matemática, el término “problema” es probablemente uno de los más comúnmente usados. A pesar del gran numero de investigaciones en esta área, muchos investigadores que tratan con problemas matemáticos han usado el término de formas bastante diferentes.

Se señala entonces que no todos los problemas son iguales; están por un lado los que permiten construir y dar significado a nuevos recursos matemáticos, otros que permiten la reinversión de los conocimientos en otros contextos, favoreciendo la resignificación, incluyendo también los que permiten controlar su adquisición y finalmente los que son de búsqueda libre, en los cuales no se conoce a priori un procedimiento estándar de resolución; este es el caso de los llamados ***problemas matemáticos no rutinarios*** en donde los datos del enunciado que lo determinan no especifican en sí, un posible desarrollo en su resolución, muchas veces los datos no están puestos en el orden en el que el resolutor debe operar con ellos.

Además, se requieren de otros pasos para su resolución, del uso de diversos algoritmos, de tal forma que se hace imposible resolverlos a través de uno solo. Este tipo de problemas matemáticos están planteados en situaciones hipotéticas o no rutinarias para el resolutor, es decir, situaciones que no son las típicas en el trabajo de determinados conceptos matemáticos en la escuela. Por tanto, su resolución implica la combinación de estrategias de los diferentes dominios de la matemática.

En Avcu (2010), se hace una especificacion sobre las clases de problemas que podemos encontrar, según los diversos enfoques, unos son problemas de rutina y los otros son problemas no rutinarios.

Según Polya (1957, citado por Avcu, 2010), los problemas de rutina se resuelven sin necesidad de añadir cosas nuevas, sino aplicando únicamente un algoritmo conocido paso a paso.

De manera similar Altun (2002, citado por Avcu, 2010) señala que, en el desarrollo de habilidades de cálculo, la solución de ***problemas rutinarios*** juega un papel importante. Los problemas de rutina pueden ser resueltos mediante el uso de un algoritmo y se pueden resolver en uno, dos o más pasos (Holmes, 1995, citado por Avcu, 2010). Por lo tanto, en los problemas de rutina, el resolutor conoce el camino para encontrar la solución correcta, además sabe que camino es adecuado para llegar a la solución de ese problema.

Aunque los problemas de rutina pueden ser resueltos mediante el uso de sólo las habilidades de cálculo y por fórmulas aplicables, no sucede lo mismo con el caso de los ***problemas no rutinarios***, pues, estos problemas requieren la organización de los datos dados, la clasificación de la información dada y de la pedida, hacer relaciones entre los datos, además de las habilidades de cálculo. Asimismo, un problema no rutinario existe cuando el resolutor del problema no sabe cómo resolver el problema y no puede ver la solución, ya que no es obvia.

De manera análoga, el concepto de ***problema no rutinario*** y su relevancia educativa han sido relacionados sobre todo con las *heurísticas* que pueden ser útiles para la búsqueda de una solución una vez formulado el problema e identificado el contexto (Abrantes, 2002).

Sin embargo, la resolución de problemas solo se refiere a problemas ya perfectamente formulados en contextos muy precisos. A menudo, el proceso implica exploración del contexto más allá de lo que explicita el enunciado, la creación de formulaciones alternativas o la interpretación y clarificación de lo que se proporciona. De este modo, la resolución de problemas surge asociada a actividades tales como la exploración de los contextos y la formulación de problemas, haciendo emerger la noción de “situación problema” (Borasi, 1986, citado por Abrantes, 2002).

De otra parte, en recientes investigaciones realizadas en didáctica de las matemáticas es posible reconocer un interés por el estudio de la resolución de problemas como proceso matemático y metodología de enseñanza. Este interés se explica en buena parte por la puesta en escena de procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

Se reconoce que la enseñanza y el aprendizaje por resolución de problemas son asuntos centrales en la escuela, debido a que se fundamentan en la manipulación de objetos matemáticos, que ejercitan la creatividad del estudiante, haciendo que reflexionen sobre su propio proceso de pensamiento, transfiriendo conocimientos a otros aspectos de su trabajo mental, adquiriendo así confianza en sí mismo y preparándose para los nuevos retos de la ciencia y la tecnología (OEI, 2000).

El interés por ofrecer alternativas para la enseñanza a través de resolución de problemas reside en el reconocimiento de la existencia de dificultades complejas de diversa índole (didácticas, cognitivas, curriculares entre otras) que se reflejan en los limitados niveles de desempeño matemático de los estudiantes cuando abordan tareas[1] y situaciones problemas.

En algunas ocasiones estas dificultades son originadas en el tipo particular de intervención de los docentes como el uso reiterado de métodos estandarizados y un uso extensivo pero sin fundamento de materiales manipulativos en las clases.

Existen estudios recientes que abordan el análisis del proceso de resolución de problemas matemáticos en el ámbito universitario y de manera particular, en los profesores de matemáticas en formación; que se centran en el estudio de las *estrategias heurísticas*.

Es el caso de los estudios realizados por Crespo (2003) y Chapman (2005) (citado por Rodríguez y Villafañe, 2009), se desarrolló una investigación que exploró los cambios en las estrategias al presentar problemas a los integrantes de un grupo de futuros maestros de nivel elemental. De manera similar, Chapman (2005) realizó un estudio cualitativo para determinar el conocimiento que poseían los futuros maestros de matemáticas sobre la resolución de problemas y el rol que tenía el incorporar un proceso de reflexión y de indagación para mejorar este conocimiento.

Investigadores como Leikin (2003) (citado por Rodríguez y Villafañe, 2009) han adelantado estudios, explorando los factores que afectan las preferencias de los maestros en los procesos de resolver problemas; en dicha investigación participaron 170 maestros de matemáticas de escuela superior. Como resultado Leikin pudo observar tres factores que están interrelacionados y que afectan las preferencias de los maestros:

[1] En este trabajo asumimos el argumento de Herbst (2012), quien señala que las alteraciones que el maestro inflige a las tareas obedecen a necesidades en la gestión de los procesos de instrucción; en particular a la necesidad de encontrar un entorno de trabajo viable y a la necesidad de darle un valor al trabajo hecho. Una ***tarea matemática*** puede representar el quehacer matemático, además de hacer uso de objetos y procedimientos matemáticos. En ese sentido, una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales. Tareas que involucran a los estudiantes en calcular, definir, conjeturar, representar, y demostrar son importantes, porque proveen a los estudiantes acceso a experiencias personales en el quehacer matemático. Pero precisamente porque la realización de las tareas depende de las acciones de los estudiantes, la medida en que ellas vayan a proporcionar experiencias personales en el quehacer matemático depende de si el trabajo conjunto ha representado legítimamente aquel quehacer. Así, las tareas matemáticas no sólo ofrecen oportunidades individuales de crecimiento (cognitivo o emocional), también (y por lo menos con aquél propósito) crean reproducciones públicas de las prácticas matemáticas. De ahí que la tarea del maestro, como responsable de la gestión de la instrucción, y a propósito de las tareas, incluye no solamente involucrar a los estudiantes en el trabajo sino también darle un valor a ese trabajo, como mínimo en términos de sus cualidades matemáticas.

1. Dos patrones de comportamiento de los maestros: la tendencia a utilizar soluciones estereotipadas y la tendencia a actuar de acuerdo a sus creencias respecto a la solución de problemas,
2. La forma en la cual los maestros caracterizaron las estrategias para la solución y
3. La familiaridad con una estrategia particular o el contenido matemático al cual pertenece el problema.

Rodríguez y Villafañe (2009), presentan los resultados de un *estudio fenomenológico* realizado a ocho estudiantes de educación, sobre la solución de problemas matemáticos; en dicho estudio los investigadores realizaron entrevistas extensas con el objetivo de determinar sus creencias (las que tienen los profesores en formación) sobre los problemas matemáticos y la forma como los resuelven; en dicha investigación también se describen y analizan los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes al resolver los problemas presentados.

De igual manera, existen investigaciones dirigidas al análisis de un grupo particular de profesores de matemáticas en formación, tales casos pueden ser vistos en algunos artículos de revistas matemáticas como *Educación Matemática*. Uno de tales artículos, *Representaciones y resolución de problemas geométricos por profesores de matemáticas en formación*, (1997) muestra la diversidad de representaciones que llegan a considerar un determinado grupo de profesores de matemáticas en formación, ante un enunciado de un problema geométrico rutinario, dando a conocer las estrategias empleadas, que permiten movilizar los conocimientos geométricos elementales en relación con algunas figuras básicas, como lo son el triángulo y el cuadrado; para los cuales se consideran sus transformaciones, lugares geométricos, etc.

En Coriat *et. al.*, (1989) se puede encontrar una lista de heurísticas que han aparecido en problemas diversos con el cuadrado. Entre las estrategias que se logran identificar en esta investigación se encuentran los procesos de pensamiento o heurísticos que son caracterizados por Polya (1945), Schoenfeld (1985) o Puig (1992/93) en el contexto de la resolución de problemas.

Las investigaciones adelantadas por Rodríguez (2002) dan cuenta algunos de los esfuerzos de las últimas décadas, realizados para comprender los procesos presentes en la resolución de problemas matemáticos, en un grado de escolaridad determinado; al tiempo que resaltan la variedad de temas que han sido objeto de estudio en este mismo campo, tales como; el uso de estrategias (Fisher, 1988; Ghatala, 1986; Gick, 1986; citados por Rodríguez, 2002); la forma como resuelven los problemas los novatos contrastándola con los expertos (Schoenfeld, 1985; Schoenfeld y Herrmann, 1982; Silver y Marshall, 1990; citados por Rodríguez, 2002); la Metacognición en la resolución de problemas (Garofalo y Lester, 1985; Schoenfeld; citados por Rodríguez, 2002).

También Santos Trigo (1995, citado por Rodríguez, 2002) en sus investigaciones ha tratado de determinar cómo la cognición y la metacognición interactúan en el momento en que el estudiante se enfrenta a un problema matemático. Rodríguez

(2002) también llevó a cabo investigaciones cuyo propósito era describir los *procesos cognoscitivos y metacognoscitivos* que exhibe un grupo de estudiantes universitarios de Puerto Rico, cuando resuelven problemas matemáticos no típicos.

La especificidad de esta investigación adelantada por Rodríguez (2002), radica principalmente en determinar las creencias que tiene los estudiantes sobre la resolución de problemas, las representaciones externas que utilizan cuando se enfrentan a un problema matemático no típico, y las estrategias de autorregulación que exhiben durante una sesión de solución de problemas.

En el plano local, algunos estudios dan cuenta de aspectos relacionados con la formación y cualificación de docentes en *resolución de problemas matemáticos*, tanto como proceso matemático y metodología de enseñanza e investigación. Se enfatiza en la exploración de distintas aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y se aportan elementos desde la dimensión histórica de este enfoque tanto a nivel internacional como nacional (Pabón, 2007)

A partir de estas consideraciones, formulamos el siguiente problema de investigación,

¿Cuáles son las estrategias heurísticas que utilizan los futuros profesores de matemáticas, cuando se involucran en la resolución de problemas no rutinarios, en el contexto de su formación académica como estudiantes regulares del curso de resolución de problemas?

En esta misma medida se presentan los siguientes objetivos sobre los cuales se sustenta y afianza el interrogante de la investigación:

1.2. Objetivos

General

Analizar los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación en *el enfoque de resolución de problemas matemáticos,* en la emergencia y apropiación de estrategias heurísticas por parte de los profesores de matemáticas en formación.

Específicos

Identificar los modelos de resolución de problemas matemáticos y las alternativas que proponen algunos de los profesores de matemáticas en formación para el trabajo con *estrategias heurísticas*.

Estudiar las *estrategias heurísticas* que emergen cuando los profesores de matemáticas en formación se involucran en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios en el marco de su formación profesional.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

Introducción

Nuestro interés es estudiar los alcances, limitaciones y posibilidades de una formación en el enfoque de resolución de problemas, para tal propósito adoptamos referentes teóricos que emergen del estudio de la resolución de problemas como proceso matemático y metodología de enseñanza.

En este sentido, se inicia con la caracterización de la resolución de problemas como el centro de la actividad matemática y se presenta una aproximación a la formación de docentes de matemáticas.

Se continua, con la búsqueda de la caracterización de las estrategias heurísticas, concepto que se espera emerja cuando los futuros docentes estén en el proceso de resolver un problema matemático no rutinario.

2.1 La resolución de problemas como proceso matemático

Un análisis desde la didáctica de las matemáticas al proceso matemático de la resolución de problemas matemáticos se revela como potencialmente útil para identificar y caracterizar una serie de fenómenos relativos a su aprendizaje y enseñanza en contextos escolares. Desde su vinculación con algunos obstáculos didácticos y con errores y limitaciones de los estudiantes en términos de su aprendizaje y de los profesores en su enseñanza, el panorama del estudio de la resolución de problemas se muestra amplio y complejo.

Un principio fundamental, al considerar la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, es aceptar que la actividad de aprender no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la solución de problemas: es una perspectiva en la que existe una conceptualización dinámica de las matemáticas y en la cual es importantes identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los estudiantes.

Al respecto, se considera que el aprendizaje de las matemáticas va más allá del aprendizaje de los conceptos, los procedimientos y sus aplicaciones. También incluye desarrollar una disposición hacia las matemáticas y ver las matemáticas como un poderoso medio de mirar las situaciones. La disposición se refiere no simplemente a las actitudes sino a una tendencia a pensar y actuar de manera positiva. Las disposiciones matemáticas de los estudiantes están manifestadas en la manera en que ellos se acercan a las tareas ya sea con confianza, buena voluntad para explorar las alternativas, la perseverancia o el interés y en su tendencia a reflejarlo sobre su propio pensamiento. (NCTM 1989, p. 233, citado por Pabón 2007).

En esta medida, se considera la resolución de problemas como una forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas. Es decir, los estudiantes tienen que problematizar el estudio de la disciplina. En esta perspectiva, es esencial que los estudiantes formulen preguntas al intentar resolver problemas matemáticos no rutinarios o comprender ideas matemáticas.

Polya (1962) (citado por Avcu, 2010) define la resolución de problemas como el tratar de encontrar una acción apropiada para alcanzar el punto deseado, pero al no llegar al final esperado la resolución de problemas es un objetivo primordial que debe desarrollarse. Además, la resolución de problemas como proceso de enseñanza requiere pensar matemáticamente. El NCTM (1989) hace hincapié en la importancia de la resolución de problemas en la educación matemática tanto que, define las matemáticas como la resolución de problemas.

Por tanto, la resolución de problemas resultaría ser un tipo de proceso que se utiliza para resolver situaciones no algorítmicas. Dado que la resolución de problemas incluye la coordinación del conocimiento, el pensamiento intuitivo y crítico. La idea de la resolución de problemas no es llegar a una solución de un problema matemático aplicando solo procedimientos o reglas, sino que significa aplicar proceso mucho más complejos.

En la actualidad la resolución de problemas es considerada la parte esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencialidad y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

Desde la perspectiva presentada, la definición adecuada de un problema matemático va a depender, por un lado, de la disponibilidad de una amplia gama de estrategias que podemos aplicar en diversos contextos y, por otro, de la capacidad de reconocer que la estructura del problema que tenemos que resolver es similar a la de otros que hemos resueltos previamente (Alonso, 1991, citado por Ortiz., 2005); para ello, será necesario que podamos distinguir los datos relevantes de aquéllos que no lo son y, que seamos capaces de observar que los datos relevantes de un determinado problema coinciden con los de otro que hemos resulto anteriormente.

En definitiva, la resolución está implicada no solo con la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también la "autoevaluación" que la persona hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito. (Garafolo y Lester, 1985) (citado por Ortiz., 2005).

No obstante, múltiples investigaciones han mostrado que la construcción y utilización pertinente de una estrategia compleja para abordar con eficacia una tarea matemática no rutinaria es muy difícil para la inmensa mayoría de los estudiantes (Kilpatrick, 1967; Landa, 1972; Bell, 1976; Lesh y Landau, 1983; Schoenfeld, 1985; Gascón, 1989). La dificultad no disminuye significativamente aunque la tarea matemática sea "elemental" en relación a la formación matemática de los estudiantes (Roa, 2000) ni, tampoco, por el hecho de que se haya comprobado experimentalmente que los estudiantes dominan efectivamente las técnicas "simples" que coordinadas adecuadamente permitirían construir la estrategia compleja en cuestión (Landa, 1972)[2].

De otra parte, las diversas categorías que puede tener un enfoque de enseñanza en la resolución de problemas, necesariamente remite a la visualización de los problemas matemáticos como una actividad mental en la que se encuentran relacionadas con las distintas operaciones básicas del pensamiento: análisis, síntesis, generalización, la abstracción y la comparación. Cada una de estas se condensa e interactúan entre ellas para dar como resultado la óptima solución a un problema.

El análisis por su parte, reúne mentalmente todos los conocimientos previos que tiene los el objeto de estudio, en nuestro caso el problema. La síntesis, reúne creando una relación más íntima con los elementos del problema; en la generalización se logra distinguir las diferentes propiedades que conforman el problema, así la abstracción juega un papel muy importante pues, es en este momento cuando por primera vez se separan las distintas propiedades que conforman el problema. Y finalmente, es la contraposición de diferentes elementos que conforman el problema y así establecer sus propiedades generales y particulares.

En este sentido, Polya (1968, citado por Pabón 2007) alude, que el pensamiento matemático es un proceso para comprender fenómenos a través de la exploración, la experimentación, la formulación de conjeturas, la construcción y prueba de hipótesis, la obtención y análisis de datos. En este proceso el pensamiento matemático recorre a dos procesos: la búsqueda de patrones y principios consistentes (inducción) y la construcción de cadenas de inferencias para respaldar los argumentos. ‘en matemáticas existen asuntos que son estructuralmente centrales y otros que no lo son, los cuales son periféricos o variables. Ver, comprender, materializar lo que es estructuralmente central y lo que no lo es, el pensamiento matemático. Comúnmente la matemáticas son asociadas con la certeza, comprender, ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente. Estas suposiciones culturales son modeladas por la experiencia escolar, en la cual hacer matemáticas significa seguir las reglas establecidas por el profesor; *saber matemáticas* significa recordar y aplicar la respuesta correcta cuando el profesor haga una pregunta; y la *verdad matemática* es determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias acerca de cómo hacer matemáticas y lo que significa saberlas en la escuela son adquiridas a través de años de observar, escuchar y practicar``.

De igual manera, existen diferentes enfoques en la enseñanza de resolución de problemas matemáticos. Según Hatfield (1978, citado por Avcu, 2010) hay tres enfoques básicos para la enseñanza de la resolución de problemas:

---

[2] N. L. Landa llevó a cabo una investigación sobre la resolución de problemas de demostración geométrica en la puso de manifiesto que el conocimiento de las propiedades geométricas que se necesitan para realizar las demostraciones *es absolutamente insuficiente* para que los estudiantes construyan efectivamente las estrategias complejas de demostración geométrica (Landa, 1972, pp. 103-122).

1. La enseñanza a través de la resolución de problemas,
2. La enseñanza para la resolución de problemas y
3. Enseñando acerca de la resolución de problemas.

En la enseñanza a través de la resolución de problemas, los temas de matemáticas se introducen con un problema. Es decir, los problemas son los vehículos a introducir y estudiar en una tarea matemática. (Manuel, 1998) (Citado por Avcu, 2010); además los problemas son valorados como medio principal de hacer matemáticas. En la enseñanza para la resolución de problemas, los estudiantes aplican el conocimiento que se aprende en las clases de matemáticas. En otras palabras, las matemáticas se enseñan con el fin de enseñar problemas. Los estudiantes deben resolver ambos problemas rutinarios y no rutinarios durante el aprendizaje de las matemáticas. Al enseñar acerca de la resolución de problemas, las estrategias y los procesos de resolución de problemas se les enseña. En esta misma medida el maestro que enseña acerca de la resolución de problemas destaca la serie de cuatro fases expuestas por Polya que se utilizan para resolver problemas. Estas fases son "comprender problema", "la elaboración de un problema", "llevar a cabo el plan "y" solución del plan". Además, "heurística" o "estrategias" utilizado en la elaboración de un plan de fase se imparten en enseñanza sobre la resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989, citado por Avcu, 2010).

De esta manera, se resalta la existencia de muchos modelos de resolución de problemas, que van desde los clásicos propuestos por Schoenfeld, Polya y Santos Trigo en el lado más matemático y más próximo a la heurística. Estos modelos son presentados a continuación.

2.2 Modelos de resolución de problemas matemático

2.2.1. Modelo de resolución de problemas según Polya

Polya (1945) a través del libro "*How to solve it*", introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso (Polya, 1965, p. 102).

Aunque la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo. Podemos entender la heurística o las heurísticas como las acciones que pueden resultar de utilidad para resolver problemas. En este sentido, recomendaba, por ejemplo, hacer dibujos para ilustrar los datos, condiciones y relaciones de la situación problemática. Según Polya para resolver un problema se necesita:

1. Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones?;
2. Concebir un plan: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿Ha empleado todos los datos?;
3. Ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos, ¿puede usted ver que el paso es correcto?;
4. Visión retrospectiva: verificar el resultado.

Con el fin de profundizar y aclarar las ventajas que ofrece el método propuesto por Polya conviene tomar en cuenta el señalamiento que hace Schoenfeld acerca de que las heurísticas, tal como las propone el referido autor, pueden ser muy generales y que prácticamente cada problema podría requerir ciertas heurísticas específicas (Barrantes, 2006).

2.2.2. Modelo de resolución de problemas según Schoenfeld

Schoenfeld (1985, 1992) además de las heurísticas, propone tomar en cuenta otros factores tales como:

1. ***Recursos***: son los conocimientos previos que posee la persona, se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentar un problema. Un elemento clave a tener presente es el de ver si el estudiante tiene ciertos estereotipos o recursos defectuosos o mal aprendidos.

2. ***Control***: que el alumno controle su proceso entendiendo de qué trata el problema, considere varias formas de solución, seleccione una específica, monitoreo de su proceso para verificar su utilidad y revise que sea la estrategia adecuada.

3. ***Sistema de creencias***: las creencias van a afectar la forma en la que el alumno se enfrenta a un problema matemático. En relación con el sistema de creencias, Schoenfeld (1985) descubre la existencia de una serie de creencias sobre la matemática que tienen los estudiantes y que pueden interferir en los procesos de resolución, entre ellas incluye:

- Los problemas matemáticos tienen una y sólo una respuesta correcta.
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase.
- Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender las matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Creencia que puede estar muy difundida.
- La matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay nada de trabajo en grupo.

- Las matemáticas aprendidas en la escuela tiene poco o nada que ver con el mundo real (Barrantes, 2006).

En una mirada más amplia, lo primero que Schoenfeld señala es la categoría de los recursos. En cuanto a estos, uno de los aspectos importantes es que el profesor debe estar claro sobre cuáles son las herramientas con las que cuenta el sujeto que aprende; en este sentido se destaca que los problemas propuestos para el análisis no movilizan un mismo concepto matemático, en algunos de estos se hace necesario que los estudiantes tengan nociones de solución de sistemas de ecuaciones, combinatorias y permutaciones. Esto es así porque si a la hora de resolver un determinado problema el individuo no cuenta con las herramientas necesarias para encontrar la solución, entonces, no va a funcionar.

También Schoenfeld cita algo que él llama un *inventario de recursos*, donde el profesor debe conocer cómo accede el estudiante a los conceptos que tiene. Alguien puede tener una serie de conocimientos y no puede acceder a ellos de ninguna manera. El otro asunto es el de las circunstancias estereotípicas, que Schoenfeld dice que provocan respuestas estereotípicas. Por ejemplo, a alguien le ponen a resolver el siguiente problema, cómo encontrar un punto máximo; entonces, quien lo trata de resolver simplemente dice: aquí tengo que encontrar una función de alguna forma, derivar, ver dónde se hace cero la derivada, y analizar dicho punto; esa sería una respuesta estereotípica ante un problema de máximos. Ahora bien, llegar a esa fórmula no es necesariamente fácil, la función que hay que derivar puede ser compleja, etc., pero el procedimiento de resolución se da de manera casi automática.

Otra cuestión son los *recursos defectuosos*. El estudiante tiene un almacén de recursos, pero algunos pueden ser defectuosos; por ejemplo, alguna fórmula o procedimiento mal aprendido o que él cree que se usan en alguna situación pero resulta que no es así. Algo muy importante es que muchas veces el profesor pone un problema y dice que es muy fácil, lo dice porque tiene años de manejar el tema y pierde la perspectiva de la dificultad que, tal vez, incluso para él, tuvo en alguna ocasión anterior. Hay que tener claro que lo que para unos es fácil, no necesariamente lo es para todos. Otro aspecto; es que un gran número de errores en procedimientos simples puede ser el resultado de un aprendizaje erróneo. Lo anterior está relacionado con la forma en que el estudiante accede a la información y, también se refiere a la forma en que él la tiene estructurada; es decir, ante una situación alguien puede pensar una cadena de conceptos alrededor de ésta, aunque no necesariamente estén bien ligados.

Por ejemplo, el alumno tiende a extrapolar propiedades tal como la linealidad; dado que:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, (a.b)^n \text{ es } a^n.b^n, \text{entonces, ¿porqué } \sqrt{a+b} \text{ no va a ser } \sqrt{a} + \sqrt{b}\,?$$

Figura 1. Linealidad

Así mismo, dentro de esta dimensión Schoenfeld (1992), engloba tanto los conocimientos de base que posee el individuo, como el acceso que tiene a ellos y cómo los utiliza. De esta manera, los expertos en la resolución de problemas matemáticos no sólo se caracterizan por la cantidad de conocimientos que poseen, sino también por cómo organizan su almacenamiento, lo que les permite tener un fácil acceso a ellos cuando la tarea lo requiere. En los conocimientos de base se incluyen los conocimientos formales e informales sobre hechos, definiciones y procedimientos matemáticos. Todos ellos juegan un papel crucial en la fase de representación del problema, pero no sólo intervienen en esta fase. Esto, al menos según Schoenfeld, es lo que defiende Mayer (1991), quien asocia distintos tipos de conocimientos con cada una de las fases de la resolución de problemas matemáticos. En concreto, en la fase de identificación y definición del problema se encontrarían implicados:

- el *conocimiento lingüístico* o conocimiento del idioma en que está expresado el enunciado;
- el *conocimiento semántico* o conocimiento sobre los hechos del mundo representados en las palabras del enunciado y;
- el *conocimiento esquemático* o conocimiento del tipo de problema al que pertenece el enunciado. Este conocimiento no sólo interviene en la comprensión del problema, sino que facilita su solución al proporcionar pistas para la actuación ante el problema (Zorroza y Sánchez-Cánovas, 1995).

En la fase de ejecución del plan participaría el *conocimiento ¨procedimental¨* o conocimiento sobre cómo ejecutar una secuencia de operaciones, como por ejemplo, sumar quebrados.

Montague (1992) añade una categoría adicional, el *conocimiento condicional*, que se refiere a aquel conocimiento que permite al alumno seleccionar y aplicar las estrategias apropiadas y ajustar su conducta a las demandas cambiantes de la tarea. Sería un conocimiento estratégico, dependiente de la tarea y del contexto en que ésta se realiza.

2.2.3. Modelo de resolución de problemas según Santos Trigo:

Santos Trigo (1996, citado en Valle, Juárez y Guzmán, 2007) realiza una buena síntesis de varios de los factores revisados, la cual resulta pertinente para un trabajo empírico de análisis de estrategias. Este autor toma en cuenta:

- La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos, el "saber qué hacer".
- El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos, el "¿cómo hacerlo?"

- El papel del monitoreo o autoevaluación del procedimiento utilizado al resolver un problema. ¿Es correcto lo que hice?, ¿existe otra vía?
- La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema (Valle et al, 2007, p.3).

Las estrategias de resolución de problemas o estrategias heurísticas son "principios para el éxito en la resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a avanzar hacia su solución" (Schoenfeld, 1985). Ellas son "heurísticas" en tanto son útiles para "mejorar la resolución de problemas".

2.2.4. Modelo I.D.E.A.L de Bransford y Stein para la resolución de problemas

Es un modelo mucho más psicológico, el método ideal pretende por su parte ayudar a identificar las diferentes partes que deben tenerse en cuenta en la resolución de un problema. Las siglas IDEAL significan: I: Identificación del problema, D: Definición y representación del problema, E: Exploración de posibles estrategias, A: Actuación, fundada en una estrategia, L: Logros.

Se resalta que muchos de los análisis que han hecho investigadores en el campo de los modelos anteriormente expuestos, ha tenido siempre como telón de fondo las edades de los resolutores, las características de su pensamiento y sus capacidades cognitivas, así como los objetivos de tipo matemático que se persiguen en la Educación preescolar, Básica Primaria y Media. En esta medida, también ha interesado, buscar soluciones al constatado fracaso escolar en la resolución de problemas en la Educación, por eso, se ha prestado atención a factores que se tienen poco en cuenta en la resolución clásica que se hace en matemáticas.

En esta investigación se ha destacado los modelos propuestos por Polya y Schoenfeld por considerarlos adecuados para el tratamiento de resolución de problemas, si bien consideramos que los profesores deben conocer su existencia y efectuar lecturas complementarias de sus textos. Estos y otros modelos tienen, de alguna manera, el defecto de considerar la actividad de resolución de problemas como algo lineal en la que unas fases suceden a otras; las investigaciones nos dicen, sin embargo, que varios procesos intervienen simultáneamente, interactuando entre ellos a efectos de mejorar nuestra comprensión y encaminamos a la resolución, y que, además, el método de resolución tiene que tener en cuenta la especificidad de cada problema, por lo que es difícil diseñar un método único de actuación.

Ortiz (2005) ha sintetizado algunos de los modelos que se han elaborado en el marco de la resolución de problemas; algunos de los cuales guardan similitud con el propuesto por Polya. (Tabla 1)

Tabla 1. Modelos de resolución de problemas

	Primera fase	**Segunda fase**	**Tercera fase**	**Cuarta fase**
Polya (1945)	Comprensión del problema	Planificación	Ejecución del plan	Supervisión
Dunlap y Mcknight (1980)	• Compresión de símbolos escritos. • Decodificación de símbolos escritos. • Formulación del significado general de las operaciones. • Traducción del mensaje general en un mensaje matemático.	• Determinación de lo que hay que buscar. • Examen de datos relevantes. • Análisis de las relaciones entre los datos. • Elección de las operaciones matemáticas. • Estimación de las respuestas.	• Formulación de los datos mediante la notación matemática. • Ejecución de los cálculos matemáticos. • Decodificación de los resultados para que tengan sentido técnico. • Formulación de los resultados técnicos como respuesta a las cuestiones iniciales.	• Verificación de las respuestas.
Montague (1988)	• Lectura del problema. • Paráfrasis. • Visualización. • Enunciado del problema.	• Hipótesis. • Estimación.	• Cálculo.	• Verificación.
Schoenfeld (1979)	• Análisis. • Exploración.	• Diseño.	• Implementación.	• Verificación.
Uprichard, Philips & Soriano (1984)	• Lectura. • Análisis	• Estimación. • Traducción.	• Cálculo.	• Verificación.
Mayer (1991)	• Representación. • Traducción. • Integración.	• Planificación.	• Monitorización. • Ejecución.	• Verificación.
Garafalo y Lester (1985)	• Orientación.	• Organización.	• Ejecución.	• Verificación.
Glass y Holyak (1986)	• Comprensión o representación del problema.	• Planificación.	• Ejecución del plan.	• Evaluación de los resultados.
Brandsford y Stein (1984)	• Identificación. • Definición.	• Exploración.	• Actuación.	• Observación. • Aprendizaje.

Las dificultades más frecuentes en relación con esta dimensión de acuerdo con Ortiz., (2005) son:

- El alumno traduce literalmente el enunciado y sigue el orden en que están expresadas las frases contenidas en el mismo (Pérez, 1987).
- El alumno ha comprendido el enunciado pero se equivoca a la hora de elegir las operaciones a aplicar (Tomás, 1990) porque ha seleccionado dichas operaciones a partir de un análisis superficial del enunciado (Simon, 1978, citado por Pérez, 1994).
- El alumno no sabe cuándo aplicar los conocimientos que posee, como consecuencia de cómo los aprendió, o generaliza de manera incorrecta los procedimientos que ya domina (Enright y Choate, 1993).
- El alumno no es capaz de agrupar los problemas matemáticos en función de su estructura profunda (lo que le facilitaría la generalización de las estrategias de resolución), al carecer de los esquemas cognitivos adecuados. En su lugar, agrupa los problemas en función de su estructura superficial (contenido, tipo de pregunta, etc.) (Garofalo y Lester, 1985).
- El alumno no utiliza los conocimientos que posee a la hora de interpretar las respuestas que da a las situaciones problemáticas, por ejemplo, cuando obtiene que la altura de un trampolín es de 1.325 metros y no se da cuenta de que debe haber cometido un error (Macnab y Cummine, 1992)
- El alumno domina unos determinados recursos matemáticos pero sólo los emplea en problemas que los demandan explícitamente. Realmente no es capaz de apreciar la utilidad de dichos recursos ni sabe aplicarlos fuera del marco escolar (Schoenfeld, 1992).
- El alumno tiene dificultades para comprender los enunciados de los problemas matemáticos debido a un deficiente conocimiento lingüístico y semántico (Mayer, 1991) o una deficiente comprensión lectora de dichos textos, que difieren de los de humanidades en cuanto a su estructura y exigencias de comprensión (Callejo, 1987). Según Macnab y Cummine (1992), las dificultades que puede presentar la lectura de los enunciados matemáticos incluyen: «1. Dificultades debidas a la complejidad sintáctica del castellano utilizado, 2. Dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico, 3. Dificultades causadas por la utilización de notación matemática y, 4. Dificultades debidas a la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto» (Macnab y Cummine, 1992, p.119).
- El alumno tiene dificultades relativas a su conocimiento del procedimiento, es decir, conocimiento de cómo ejecutar una secuencia de operaciones (Mayer, 1991), tales como dividir números decimales, o como multiplicar un entero y un decimal. En ocasiones se producen interferencias entre los procedimientos adquiridos previamente y los nuevos procedimientos que se aprenden, por ejemplo, cuando al alumno que sabía sumar decimales se le enseña a

multiplicarlos, tras el nuevo aprendizaje separa en la suma total tantos decimales como tienen los sumandos (Callejo, 1987).

2.3 Resolución de problemas: concepciones y creencias

Dado que, hoy día la resolución de problemas es uno de los mayores influyentes en materia del desarrollo de habilidades matemáticas y es visto como un método adquisitivo de conocimientos, actitudes y destrezas; es en este sentido que la resolución de problemas; se convierte en una herramienta esencial para el análisis de investigaciones de tipo matemático. En particular, en las que se toman casos característicos; como el de observar un grupo de profesores en formación a la hora de resolver problemas no rutinarios; partiendo de supuestos tales como, que tienen los conocimientos y destrezas necesarios para ello.

En esta medida, se indaga sobre las concepciones y creencias que poseen los docentes en formación frente a la resolución de problemas matemáticos no rutinarios. En (Ortiz., 2005) se especifica que las creencias relativas a la resolución de problemas matemáticos hacen referencia al conocimiento subjetivo que tiene el alumno sobre la naturaleza de las Matemáticas y de la resolución de problemas matemáticos, sobre sí mismo, sobre la enseñanza de las Matemáticas y sobre el contexto en el que transcurre su enseñanza. Gran parte de estas creencias entrarían dentro de lo que Ortiz., (2005) ha denominado "metaconocimiento", especialmente las creencias relativas a sí mismo como ´´solucionador de problemas matemáticos´´ y a la naturaleza de la resolución de problemas matemáticos. En este mismo sentido resaltan que las creencias pueden influir tanto en la motivación con la que los alumnos se enfrentan a las Matemáticas (McLeod, 1992) como en el rendimiento matemático (Garofalo, 1989) e incluso en la elección de las estrategias de resolución que se aplican al resolver un problema. (Mayer, 1991).

De manera similar, Rodríguez (2002) hace alusión al impacto que tienen las creencias en la forma en las que se desempeñan los estudiantes en una tarea. Así, pues se considera que los estudiantes desarrollan concepciones que no necesariamente son ciertas pero que tiene un gran impacto en su ejecución, las cuales surgen como resultado de la instrucción y de las otras interacciones que se llevan a cabo en la escuela.

En 1986, M.L. Frank (citado por Soria, 2010) realizó un estudio con la intencion de encontrar respuestas a cuestiones que trataban sobre que era para los estudiantes la resolución de problemas; entre las creencias que los estudiantes daban acerca de esta cuestión se destaca:

1. **Las matemáticas son calculos**. Las matemáticas, para los estudiantes sobre los que se hizo el estudio, eran lo que ellos llamaban " las cuatro operaciones". Estas operaciones implicaban la memorizacion de hechos y algoritmos matemáticos. Para generalidad de los estudiantes encuetados,

“hacer matemáticas signifia seguir reglas” y, “ hacer matemáticas es, sobre todo, memorizar”.

2. **Los problemas de las matemáticas deben resolverse rapidamente y con unos cuantos pasos**. Estos estudiantes daban por supuesto que los problema matemáticos son tareas rutinarias a las que deben aplicarse algoritmos artimeticos o algebraicos conocidos. Por el contrario, las tareas no rutinarias eran consideradas por la mayor parte de los encuestados como algo marginal a la vía de las matemáticas: “no son verdaderas matemática”, decian. Estaban convencidos de que algo funcionaba mal si al resolver un problema se tardaban demaciado tiempo en encontrar la solución (más de cinco o diez minutos).
3. **Las matemáticas tienen como objetivo obtener respuestas correctas.** Los estudiantes tendían a ver las matemáticas según la dicotomía bien hecho / mal hecho. Se concentraban casi exclusivamente en las respuestas, y si dichas respuestas eran correctas o incorrectas. La mayor parte de ellos creían que sólo el profesor podía decirles si una respuesta era acertada o equivocada, y si la respuesta obtenida era errónea parecían tener la sensación de haber perdido el tiempo.
4. **El papel del estudiante de matemáticas es recibir conocimientos matemáticos, y demostrar que los ha recibido.** Las matemáticas (conjunto de hechos, reglas, procedimientos y actitudes) es un “paquete” que hay que recibir. En las entrevistas, los estudiantes explicaban que esa recepción se lleva a cabo prestando atención en clase, leyendo el libro de texto (en particular la “letra gorda”), y haciendo, si es posible con el profesor u otro adulto, las tareas propuestas para casa. A partir de ahí el alumno demuestra que ha recibido el "paquete de matemáticas" dando respuesta correcta a los problemas presentados. Si da la respuesta correcta, es que lo ha comprendido, si la respuesta no es correcta, se le supone que no.
5. **El papel del profesor de matemáticas es transmitir los conocimientos matemáticos y comprobar que los estudiantes los han recibido.** La mayoría de estudiantes supone que el papel del profesor es emplear la hora de clase en “cubrir” el programa señalado en el libro de texto. Si un profesor desarrolla bien el programa, los estudiantes serán capaces de dar rápidamente las respuestas a las tareas propuestas en clase, en casa y en los exámenes.

Sin embargo en (Soria , 2010) cuando un educador matemático habla o escribe sobre la resolución de problemas, probablemente tiene en mente una definición similar a la de Wheatley: “*Resolver un problema es lo que haces cuando no sabes lo que hay que hacer*”. ***The National Council of Teachers of Mathematics*** de Estados Unidos recomienda que las matemáticas, especialmente en los niveles de Primaria y Secundaria, estén enfocadas a la resolución de problemas.

En esta medida, el investigador enfatiza que los estudiantes cuyas creencias sean similares a las comentadas anteriormente, ni siquiera aceptan que la resolución de problemas sea matemática. Para ellos, en matemáticas, nunca se supone que puedan estar en una situación en la que no sabes qué es lo que hay que hacer. Si el profesor ha hecho bien su trabajo y los alumnos han hecho el suyo bien, siempre sabrán aplicar un hecho, una regla o un procedimiento a un problema para obtener rápidamente la respuesta adecuada.

Así Gascón (2004), señala que la investigación en esta línea de desarrollo se interesa, como ya hemos indicado, por la actividad que realiza los profesores en formación cuando se enfrenta a la resolución de un problema concreto y relativamente no rutinario. Se quiere evitar que el sujeto conozca el tipo al que pertenece el problema matemático en cuestión.

En otros términos, la actividad de resolución de problemas no se sitúa en un entorno matemático delimitado de antemano, puesto que se supone implícitamente que la detección del tipo de problemas al que pertenece el problema en cuestión forma parte del trabajo de resolución de éste. En este marco, el problema de Polya se reformula como un problema básicamente cognitivo y se descompone en un conjunto de cuestiones que, naturalmente, se expresan en términos de la incidencia potencial de los diferentes aspectos de la cognición sobre la capacidad de construir y utilizar adecuadamente estrategias complejas para resolver problemas matemáticos no rutinarios.

Ahora bien, el centro de interés de esta investigación se enfoca en dar cuenta de la naturaleza y desarrollo de algunas de las estrategias heurísticas de los profesores de matemáticas en formación. En tal sentido adoptamos algunos de los referentes del modelo teórico propuesto por Nunokawa (2000, 2005) para el estudio de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos y su proyección a los procesos de formación de estudiantes en las clases de matemáticas.

2.4 La resolución de problemas y la formación de docentes

Los investigadores en el campo de la resolución de problemas consideran que la *formacion de profesores* es el marco fundamental que determinara la suerte de la educacion matemática, por tanto se deben crear las condiciones y contextos adecuados que permitan a los futuros profesores de matemáticas desarrollar su *conocimiento didáctico* teniendo encuenta los nuevos marcos curriculares y la caracterizacion que diferentes investigaciones han realizado sobre el conocimiento de los profesores.

Así, Pabon (2007), especifica que la orientación en la formación de los licenciados debe responder a la mision del ser del educador desde los aspectos disciplinares y pedagogicos, y asi dotar a los futuro profesores de suficiencia congnitiva en la disciplina que enseña y de dominio de competecias pedagógicas necesarias para el desempeño profesional con calidad. En esta misma medida, especifica que el aspecto disciplinar, esta relacionado con el conocimiento disciplinar y que la solidez de este conocimiento es garantia de excelencia para ejercer la docencia. En esta corriente se cree que los academicos que realizan investigacion en las fronteras del conocimiento disciplinar son por definicion los mejores profesores. Esto se asume y se acepta como una verdad absoluta axiomatica. De igual forma, especifica que el conocimiento pedagogico se construye al igual que los otros tipos de conocimiento, y por tanto, se requiere de procesos permanentes de formación en los aspectos propios de la pedagogia y la didactica.

Según Blanco, se plantea la necesidad de dos lineas de accion. En primer lugar, mejorar la capacidad de los profesores de matemáticas en formación como resolutores de problemas de matemáticas y profundizar en sus conocimientos y concepciones sobre la resolución de problemas. En segundo lugar, ayudar a que su formación docente les permita analizar su practica presente y futura y transferir los conocimientos aprendidos a las aulas de clase.

De igual manera, de acuerdo con Blanco (1997) y Pabon (2007), es central en este proceso el analisis del conocimiento y concepciones de los estudiantes para profesor sobre la resolución de problemas. Por tanto, se considera que los procesos de enseñanza aprendizaje deben posibilitar la construción de su propio conocimiento didáctico en los estudiantes para profesores. En tal sentido, el inicio del trabajo didáctico de los formadores de docentes intenta:

> (…) en primer lugar, describir y analizar sus conocimientos y concepciones sobre la materia objeto de estudio, asi como analizar sus comportamientos como resoluctores de problemas de matemática. Ello nos permiten conocer sus habilidades y establecer la situacion de partida. Cuando los estudiantes para profesores acceden a los centros de formacion inicial han generado, como concecuencia de su experiencia disciente, un cuerpo de conocimientos y concepciones sobre el contenido matemático escolar, sobre los objetivos de enseñanza de las matemáticas, el curriculum matemático, sobre la naturaleza de la propia actividad matemática, el tipo de tareas que caracterizan dicha actividad, la naturaleza de las interacciones entre el profesor y el alumno, la naturaleza del aprendizaje matemático, la forma en que considera el papel de los errores en el aprendizaje de las nociones matemáticas, la organización y gestión del trabajo en el aula. (Llinares, 1992, p. 308, citado por Pabon, 2007).

El estudiante para profesor debe conocer la teoría de Polya, resolver problemas con operaciones fundamentales y con procesos lógicos (disponer de recursos).

Así pues, el conocimiento del profesor debe abarcar la manipulación de teorías, procedimientos, tipologías de problemas, heurísticas y metodologías para resolver problemas.

Ya que, en la línea de las matemáticas la resolución de problemas se trabaja por medio de la aplicación de los conceptos y conocimientos adquiridos anteriormente. La resolución de problemas se ve como la aplicación de los conocimientos previos a situaciones nuevas. (Carl, 1989) En este sentido, es importante que se impartan primero los contenidos matemáticos por parte del profesor para que después los estudiantes desarrollen un razonamiento que les permita solucionar una situación problema con el fin de evidenciar el nivel de aprendizaje. De esta manera, para el profesor en formación el proceso de planteamiento y/o resolución de un problema se basa en el aprendizaje de conceptos, la ejercitación de procedimientos, resolver problemas con aplicación de los conceptos previos y por último resolver problemas con un grado de dificultad mayor que los anteriores.

2.5 La resolución de problemas como metodología de enseñanza: el lugar de las estrategias heurísticas

Un tema relevante en los programas de investigación y en las prácticas de instrucción ha sido el documentar el empleo de estrategias heurísticas (Polya, 1945; Krulik & Reys, 1980) en el desarrollo de competencias de resolución de problemas en los estudiantes.

Las revisiones de la literatura relacionada con el uso de las heurísticas, (Begle, 1979; Silver, 1985; Schoenfeld, 1992) reportan que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no había sido exitoso. Schoenfeld (1992) explica que una razón para esta falta de éxito podría ser que las heurísticas de Polya representaban nombres de una categoría larga o extensa de procesos que incluían otras sub-estrategias que los estudiantes no reconocían o accedían en sus intentos de resolución de problemas. Schoenfeld propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso. En particular sugiere:

(a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas,

(b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y

(c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

Se afirma que a pesar o quizás debido a este esfuerzo, el debate teórico en los últimos cuarenta años, acerca del rol de las heurísticas en la resolución de problemas matemáticos aún continúa. Se reconoce la necesidad de precisar las distintas acepciones y aproximaciones al término de estrategias heurísticas. Por ejemplo, se señala que es:

> Una aproximación sistemática a la representación, análisis y transformación de problemas matemáticos escolásticos que los resolutores reales (o potenciales) de esos problemas usan (o pueden usar) en la planeación y monitoreo de sus soluciones. Algunas heurísticas se limitan a un dominio específico (por ejemplo, “reduzca primero la fracción”), mientras que otras son universales y transversales a muchos dominios de resolución de problemas (por ejemplo, descomponer un problema en segmentos manejables). En la actual resolución de problemas, una heurística particular puede llegar como una duradera o transitoria forma de pensamiento, la cual controla el proceso total de construcción de una solución o provoca solamente un pequeño paso de resolución del problema. Cuando se expresa verbalmente, como una recomendación a los resolutores de problemas o como una unidad en el análisis del comportamiento de la resolución de problemas de alguien, la heurística es una afirmación que refleja una pieza generalizada y descontextualizada de la experiencia de los resolutores de problemas. Las heurísticas generalmente pueden ser vistas como una herramienta cognitiva usada para aproximarse al problema, en donde la eficacia de la misma nunca es conocida por anticipado. (Koichu, Berman & Moore, 2006, citados por Pabón, 2007)

Como subraya Pabón (2007) estas aproximaciones están estrechamente asociadas a preguntas prácticas que incluyen: ¿Cómo deberían ser enseñadas estas estrategias heurísticas? ¿Deben ellas recibir una atención explícita en las aulas de matemáticas? y ¿Cómo podrían ser integradas al currículo de matemáticas?

Ante este panorama, algunos investigadores sugieren abordar la compleja relación entre el desarrollo de una alfabetización heurística y los cambios en los logros matemáticos de los estudiantes en distintos niveles de escolaridad. Por alfabetización heurística se refieren a: Una capacidad individual para usar vocabulario heurístico en el discurso de la resolución de problemas y para aproximarse escolásticamente a la resolución de problemas matemáticos usando una variedad de heurísticas. (Koichu, Berman & Moore, 2006, citados por Pabón, 2007)

En este tipo de aproximaciones, se reconoce una hipótesis subyacente, reportada en variados estudios, a saber, que los experimentos de clase que tratan con la enseñanza de estrategias tienen efectos significativamente pequeños o moderados, en términos de medidas estandarizadas (Hembree, 1992; Schoenfeld, 1992, citado por Pabón, 2007). Surge así, un interrogante central: ¿Cómo puede promoverse el alfabetismo heurístico mientras se enseñan los tópicos tradicionales de matemáticas propuestos en el currículo? En general, las estrategias han sido abordadas desde distintos campos, como la cognición, la pedagogía y la inteligencia artificial entre otras.

A continuación se presenta la siguiente tabla, que resalta las distintas definiciones de heurística abordadas por algunos autores desde su campo de análisis:

Tabla 2. Definiciones de heurística.

Autor	Definición
Polya (1945/1973)	Las heurísticas son formuladas como preguntas que los buenos resolutores de problemas deben hacerse a sí mismos en diferentes etapas de la resolución de un problema o como un consejo general (iniciado y concluido por marcas de exclamación ¡!) a los resolutores de problemas. Las preguntas heurísticas incluyen "¿Qué es lo desconocido?!", "¿¡Cuáles son los datos? !", "¿¡Ha visto usted tal problema antes o tal vez en una forma ligeramente diferente?!" El consejo heurístico incluye "¡dibuje una figura sí es posible!" "¡encuentre la conexión entre lo dado y lo desconocido!"
Newell y Simon (1972)	Las heurísticas son tratadas como estrategias que hacen la resolución de problemas más eficiente que aleatoria. Ejemplos de heurísticas incluyen "análisis de medios – objetivos" "cadenas de atrás para adelante".
Perkins (1981)	La estrategia heurística es una regla a seguir que a menudo ayuda a resolver una cierta clase de problemas, pero que no ofrece ninguna garantía.
De Bono (1984)	"[La idea de heurísticas] incluye todos esos aspectos de pensamiento que no pueden ser proporcionadas en las formulaciones matemáticas" (p. 10).
Schoenfeld (1985)	"Las estrategias heurísticas son principios generales para la resolución exitosa de problemas, sugerencias generales que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o hacer progresos hacia la solución" (p. 23). Ejemplos de heurísticas incluyen "dibuje una figura", "argumente por contradicción", "considere un problema general", "intente establecer sub objetivos".
Martínez (s.f)	"La [heurística] es una estrategia que es poderosa y general, pero no tiene garantía absoluta de que funcione. Las heurísticas son cruciales porque ellas son las herramientas a través de las cuales los problemas son resueltos" (p. 606).
Goldin (1998)	"[El proceso heurístico es] la más útil unidad organizativa y constructo culminante, en un sistema [representacional] de planificación, observación y control ejecutivo. Tal proceso incluye "ensayo y error", "pensar en un problema más simple", "explorar casos especiales", "Dibujar un diagrama", etc., (p. 153).

Fuente: Koichu, Berman & Moore, 2006 (Citados por Pabón, 2007)

Koichu, Berman y Moore (2006, citados por Pabón, 2007), a través del estudio de la literatura especializada señalan que las heurísticas son tratadas como:

(ii) Reglas generales o recomendaciones para los resolutores de problemas (Larson, 1983; Polya, 1945/1973; Perkins, 1981; Schoenfeld, 1985)

(iii) Unidades útiles en la descripción y análisis de las formas de pensamiento matemático (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Newell & Simon, 1972) y

(iv) Herramientas cognitivas / metacognitivas en la real resolución de problemas matemáticos (De Bono, 1984; Goldin, 1998; Martínez, 1998; Newell & Simon, 1972; Verschaffel, 1999).

Ahora bien, se reconoce como un campo abierto a la investigación el aspecto anteriormente señalado de proponer diseños a través de la formación en estrategias heurísticas que permitan mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

Como lo ha señalado el investigador Kazuhiko Nunokawa (2000), el efecto de la formación en estrategias en resolución de problemas matemáticos parece presentar controversia a pesar de que los profesores usan frecuentemente estrategias heurísticas en sus propios procesos de resolución.

Así, se considera necesario examinar los pros y contras de la formación en estrategias para extraer los aspectos relevantes en relación con este tópico. Se busca fundamentalmente abordar las estrategias heurísticas como ayuda para la exploración y resolución de situaciones problemáticas. En este sentido, pretendemos mostrar la heurística como una propuesta libre y sencilla de fácil aplicación en el contexto educativo; en donde el educando se verá obligado a la construcción, exploración y utilización de fuentes conocidas para resolver eficazmente un problema.

Asumiendo que no hay una relación determinista entre el conocimiento de tales estrategias y el desempeño matemático de los estudiantes, es posible promover un proceso que permita restituir la naturaleza histórica de las estrategias heurísticas y dar sentido entre otras cosas, a la resolución de problemas tanto en el ambiente de lápiz y papel como en los nuevos ambientes informáticos y computacionales.

Es decir, que la resolución de problemas se adapta fácilmente a cualquier contexto pues, la implementación de las nuevas tecnologías brindan diversos puntos de vista acerca de lo que es un problema matemático en este contexto y las actividades que se pueden implementar en clase, las cuales provocan en los estudiantes diversas actitudes o conductas favorables, dado que se sale de la rutina de los libros y el empleo de procesos algorítmicos que en ocasiones tienden hacer muy mecánicos; y logrando así una nueva perspectiva sobre las matemáticas en los educandos quienes ven a los problemas como una obligación en su aprendizaje y un obstáculo en su proceso educativo.

El trabajo de Nunokawa (2000) presenta algunos ejemplos para mostrar cómo las estrategias heurísticas típicas facilitan la resolución de actividades y ayudan a los resolutores a identificar nueva información acerca de las situaciones problemas. Su estudio analiza algunos de los hallazgos de la investigación sobre diversas estrategias heurísticas, que incluyen entre otras: Dibuje un Diagrama, Construya una tabla, Ensayo y Error, Usar problemas más simples y/o relacionados, Trabajar hacia atrás.

Ahora bien, por la complejidad involucrada en el estudio de este proceso se considera útil estudiar ciertos asuntos de especial vigencia tanto para estudiantes como para profesores; es el caso de las estrategias heurísticas que se ven involucradas en el proceso de resolución de un problema.

2.6 Estrategias heurísticas y resolución de problemas

Algunos investigadores en didáctica de las matemáticas reconocen la importancia de enseñar estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos como medio para mejorar el desempeño matemático de los estudiantes (Lester, 1994; Mayer, 1992, citados por Nunokawa, 2000); según Begle (1979), en este sentido la resolución de problemas debe ser el objetivo principal de la educación matemática.

De esta manera, se han orientado los esfuerzos a encontrar cuales heurísticas están involucradas en la resolución exitosa de problemas y cómo esos conocimientos pueden ser usados a favor de diferentes categorías de estudiantes (por ejemplo, Schoenfeld, 1992).

De manera particular, se reconoce que uno de los aspectos más importantes en el trabajo con estrategias heurísticas durante la formación y actualización de docentes de matemáticas, es el conocimiento del desarrollo histórico de tales estrategias en el contexto del proceso de resolución de problemas. Sin embargo, se suele señalar que en nuestro contexto cultural, el conocimiento de las estrategias heurísticas por parte de los profesores de matemáticas en ejercicio y en formación, es extremadamente limitado. Más aun, cuando no suele vincularse este desconocimiento a las limitaciones que cotidianamente se reconocen en la formación matemática y geométrica de los estudiantes y de los mismos profesores.

En esta medida cabe resaltar la importancia de las estrategias heurísticas implicadas en la de resolución de problemas matemáticos, se especifica que estas son carentes de contenido matemático específico, no aseguran llegar a la solución pero aumentan las posibilidades de alcanzar la solución de un problema (De Corte, 1993) (citado por Ortiz., 2005).

Puig-Cerdán (1988, citado en Nortes, 1992) defiende que apropiarse de un heurístico implica:

- saber cuándo hay que usarlo
- saber cómo se relaciona con otros heurísticos
- saber todas sus variantes y sus aplicaciones
- saber qué puede esperarse del heurístico

Los heurísticos recibieron una atención importante tras la publicación del libro de Polya, (*how to solve it*), en 1945 y, en especial, en la década de los años ochenta del siglo XX. Posteriormente, se les ha criticado por considerar que la caracterización que hizo Polya de los heurísticos era más descriptiva que «prescriptiva», es decir, el listado de Polya servía para identificar las estrategias cuando éstas eran utilizadas, pero no ofrecía orientaciones para que, aquéllos que no estaban familiarizados con la técnica, la emplearan con éxito (Schoenfeld, 1992). Posteriormente, y gracias a trabajos como los desarrollados por Schoenfeld se ha podido demostrar que los heurísticos son ¨entrenables¨.

Se esclarece que a diferencia de los algoritmos, las estrategias heurísticas no garantizan que el resolutor resolverá el problema propuesto. Lo cual, implica que las estrategias heurísticas deben estar basadas en su naturaleza, ser útiles para resolver problemas con que sean confrontadas, pero no deberían garantizar la solución a esos problemas, aún sí ellas son implementadas exitosamente. Según Nunokawa (2000), lo anterior puede estar relacionado con una concepción de la resolución de problemas matemáticos: el resolutor no tiene manera de resolver el problema inmediatamente, pero el problema puede ser resuelto con el conocimiento que el resolutor tiene.

A partir de algunas de estas consideraciones Nunokawa (2000), propone un marco teórico para considerar las funciones de las estrategias heurísticas, lo cual se considera de especial importancia al momento de plantear problemas a los estudiantes. Las consideraciones siguientes son retomadas sin mayores cambios, para propósitos expositivos del trabajo de Nunokawa (2000)

2.6.1. Dibuje un Diagrama

Van Essen & Hamaker (1990) distinguieron dos corrientes de investigación en el uso de dibujos en la resolución de problemas. Una aproximación es enseñar a los estudiantes tipos específicos de diagramas, y otro es instruir a los estudiantes a que hagan dibujos por si mismos. Esta última aproximación parece compatible con el uso flexible de dibujos sugerido por Nunokawa. Van Essen & Hamaker mostraron que ese uso de esos dibujos autogenerados permite a los estudiantes analizar y explorar el problema más completamente

Nunokawa (1990) y otros investigadores (Wheatley, 1997) reconocen "una naturaleza recursiva en el uso de diagramas en que una se forma una imagen y un dibujo es realizado, y este dibujo entonces hace posible una nueva imagen, la cual es a menudo simbolizada en un nuevo y elaborado dibujo". En muchos problemas, los diagramas no mostraron inmediatamente la respuesta pero sugirieron información importante sobre la situación problema.

Tal función de los diagramas se ha observado en otras investigaciones. López-Real & Veloo (1993) pidieron a los estudiantes que dibujaran diagramas y resolvieran los problemas de nuevo, después de observar sus errores. Analizando los diagramas que los estudiantes dibujaron, también señalaron que en el proceso de empezar a dibujar el propio cuadro fue suficiente para permitirles establecer la correspondencia entre los elementos. Ellos señalaron una función de los diagramas para "actuar como forma alternativa de 'expresar el problemas en sus propias palabras'".

Desde este punto de vista, las maneras en que un resolutor ve una situación problema pueden cambiar, es natural que los diagramas como su representación externa también puedan cambiar durante el proceso de resolución de problemas. De igual manera, otros investigadores han señalado que los resolutores entendieron las situaciones problema más profundamente durante el acto de dibujar primero los diagramas y dibujarlas nuevamente reflejar sus nuevas comprensiones. En otras palabras, desde un principio, los resolutores no tienen que dibujar los diagramas que reflejen las relaciones esenciales o las estructuras del problema. Debe permitirse que los resolutores mejoren sus diagramas primitivos hacia más sofisticados durante el proceso de resolución de problemas.

Se señala igualmente que los diagramas bosquejan situaciones que los resolutores podrían recordar de las operaciones en cierto tipo de situaciones (por ejemplo, cómo compartir cosas en situaciones cotidianas), y que las operaciones influyen en su pensamiento. Los estudiantes en ocasiones obtienen sus respuestas no a través de la implementación de esas operaciones concretamente, sino a través de la escritura de expresiones numéricas que reflejen esas operaciones. Esto significa que los diagramas pueden hacer claro un cierto aspecto de la situación problema y sugieren una manera de asociar el conocimiento matemático de los estudiantes con esa situación. Similarmente, los diagramas o las actividades de dibujo tienen una función de recordar a los resolutores algunos aspectos de los que resolutores no eran conscientes antes de realizar los diagramas. (Kikuchi, 1996)

Larkin & Simon (1987) asociaron la utilidad de los diagramas con las inferencias perceptuales y llamaron a los datos, incluyendo la información obtenida perceptualmente, "datos perceptualmente enriquecidos". Nunokawa (1994) al preguntarse cómo podría emerger tal información, da cuenta de otra función de los diagramas: integrar algunos elementos en los problemas y generar elementos nuevos naturalmente.

Se acepta que los dibujos pueden proporcionar nueva información al resolutor sobre situaciones problema que los resolutores no notaron antes. Tal información no garantiza necesariamente las soluciones de los problemas, pero puede dar luz a algunos aspectos de las situaciones problema y puede aumentar "la probabilidad de que se pueda tener acceso a conocimiento pertinente" (van Essen & Hamaker, 1990). Por su parte, Nunokawa (1997d) mostró que los modelos físicos y los manipulativos podrían jugar un papel similar en la resolución de problemas matemáticos.

Ejemplo 1 (Tomado de Nieto, s.f.)

Estrategia 1. ***Siempre que sea posible dibuje una figura.***

La importancia de este principio es obvia cuando se trata de resolver un problema de geometría. Pero hay muchos problemas que sin ser de geometría admiten una interpretación geométrica, lo cual amplia mucho el verdadero alcance de esta estrategia. El siguiente ejemplo ilustra lo mencionado.

Problema 2.1 (Olimpiada Bolivariana 2000)

Sean $a1$, $A1$, $a2$, $A2$, $a3$, $A3$ números reales positivos tales que $ai + Ai = k$, donde k es una constante dada.

a) Demostrar que a

$$a1A2 + a2\,A3 + a3A1 < k^2$$

b) Sean $a1$, $A1$, $a2$, $A2$, $a3$, $A3$, $a4$, $A4$ reales positivos tales que $ai + Ai = k$, donde k es una constante dada. Si $ai \geq Ai$, demostrar que

$$a1A2 + a2\,A3 + a3A4 + a4A1 \leq k^2$$

Y determinar cuando se tiene la igualdad

Solución. Cada igualdad $ai + Ai = k$ puede representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes ai y Ai. Con estos tres segmentos podemos construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:

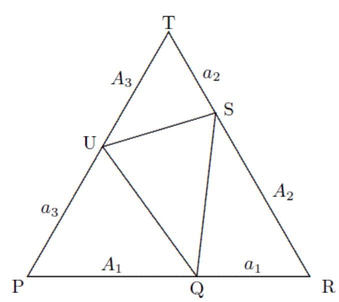


Figura 2. Triángulo Equilatero

El producto $a1A2$ está relacionado con el área del triángulo QRS, que denotaremos QRS. De hecho como el ángulo QRS = 60º se tiene que $QRS = a1A2\sqrt{3}/4$.
Del mismo modo $STU = a2A3\sqrt{3}/4$ y $UPQ = a3A1\sqrt{3}/4$, mientras que $PRT = k^2\sqrt{3}/4$.
Observando la figura es obvio que

$QRS + STU + UPQ < PRT;$
y multiplicando por $4/\sqrt{3}$ resulta la desigualdad de la parte (a).

La parte (b) es tal vez más fácil: basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad.

2.6.2. Construya una tabla

Importantes investigadores (Meira, 1995) han analizado cuidadosamente los procesos en los cuales los estudiantes gradualmente han construido tablas en la resolución de problemas. En esos procesos, el "conocimiento de las representaciones matemáticas no es simplemente recordado y aplicado donde parezca relevante". El significado de las inscripciones en sus tablas, cambiaron y evolucionaron a través del tiempo y ellas fueran transformadas en "armonía con las circunstancias locales y los objetivos emergentes. Esto también implica la construcción gradual de tablas.

Cuando se usan las tablas en la resolución de problemas matemáticos, el centro de las actividades tiende a ser alternado entre encontrar un patrón en esas tablas y buscar las respuestas usando este patrón.

En la investigación previa sobre las estrategias heurísticas, esta función de las tablas ha sido frecuentemente destacada. Mientras que esta alternancia debería permitirse como una aproximación legitima, el hallazgo de patrones también puede tener que ver con la producción de sentido de la situación problema a través de la búsqueda de la razón de ese patrón en la situación.

Leinhardt & Schwartz (1997) consideran que en algunos casos, la introducción de la representación de la tabla puede "alterar sutilmente la naturaleza del problema". Esta disposición parece estar relacionada con otros hallazgos según los cuales las tablas pueden desarrollar una "vida" en sí mismas y llevar información matemática aceptable y transformar la actividad de alguien, "proporcionando las bases materiales para las cantidades implicadas y las inferencias a ser realizadas".

En este sentido, parece natural preguntar en matemáticas: ¿por qué tal patrón apareció? o si ¿puede mantenerse? y entonces buscar una cierta clase de prueba cuyo propósito es entenderlo.

Buscar la razón del patrón en la tabla podría llevar a explorar la situación, permitiendo al alumno enfocarse en las relaciones (por ejemplo, que hace ese valor menor que otro valor) o los cambios relativos a ese patrón (por ejemplo, que podría pasar si se agrega un nivel más). También en este sentido, la estrategia de construcción de una tabla puede facilitar a los resolutores la exploración de situaciones problema.

Ejemplo 2 (Tomado de Nieto, s.f.)

Estrategia 2. *Estudie lo que sucede para los primeros valores de n hasta ver si emerge algún patrón característico, entonces formule una conjetura y trate de probarla.*

El siguiente problema es un buen ejemplo para aplicar esta estrategia.

Problema 2.4 (Olimpiada Bolivariana 2000).

Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de $n \times n$, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna sea igual a 3 y en cada fila y en cada columna solo haya uno o dos números diferentes de cero.

Solución. Es fácil ver que para $n = 1$ hay una sola forma (3) y para $n = 2$ hay cuatro formas, a saber:

$$\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Figura 3. Tablero de forma ($n \times n$)

Para $n = 3$ hay 6 formas usando tres 3, 18 formas usando un 3, un 2 y un 1 y 12 formas usando tres 2 y tres 1, para un total de 36. Esto nos lleva a conjeturar que para n cualquiera el número de formas es $(n!)^2$. Lo bueno de esta conjetura es que sugiere su propia demostración: como el número de permutaciones de los números del 1 al n es $n!$, si logramos mostrar que cualquier forma de llenar el tablero proviene de la elección, de manera independiente, de dos de estas permutaciones, no habrá mas nada que hacer. Pues bien, sean ai y bi ($i = 1\dots n$) dos permutaciones de los números del 1 al n y coloquemos en la fila i del tablero un 1 en la columna ai y un 2 en la bi si $ai \neq bi$, o un 3 en la columna ai si $ai = bi$, rellenando el resto de la fila con ceros. Es fácil ver que la matriz obtenida cumple la condición del problema, y que así pueden obtenerse todas las formas validas de llenar el tablero.

2.6.3. Ensayo y Error

La investigación sobre el ensayo y error muestra que esta estrategia ayuda al estudiante a aprehender las relaciones matemáticas involucradas en el problema" Aquí tal aproximación es reconocida no solo como "un paso del proceso de aproximación progresiva a la solución" sino que también significa "hacer explicita alguna relación involucrada en la situación problema" (Ferrari, 1992). Se dice que la función de la aproximación de ensayo y error es ayudar al resolutor a explorar la situación problema.

En ciertos problemas, que los estudiantes asuman valores tentativos, puede permitirles operar con esos valores de acuerdo a las condiciones del problema y producir resultados tentativos. Esto hace fácil explorar la situación problema concretamente o explícitamente para encontrar relaciones entre datos y resultados. Asumir valores puede hacer posible investigar entre los cambios en los datos y aquellos de los resultados.

Santos Trigo (1996) reportó que los estudiantes pensaron en los métodos de ensayo y error solo como último recurso o camino largo. Como en los ejemplos mostrados, sin embargo, esta aproximación de ensayo y error puede ser también considerada útil para explorar situaciones problemas. En (Perez, 2007) se consideran los siguientes tipos de ensayo y error:

- **Ensayo y error fortuito:** realizado sin pautas o al azar.
- **Ensayo y error sistemático:** los valores no se eligen a la ventura, sino de manera ordenada, de forma que eliminemos las posibles repeticiones de ensayo agotando las soluciones posibles hasta encontrar lo que buscamos.
- **Ensayo y error dirigido:** en él contrastamos cada respuesta para ver si estamos más cerca o más lejos del objetivo buscado.

De esta manera, también, se presentan los siguientes ejemplos que ilustran cada uno de los casos de ensayo y error.

Ejemplo 3. Judith y Teodoro fueron de visita a la granja de su abuelo. Durante su estancia vieron un corral con cerdos y gallinas. Teodoro dijo haber contado 18 animales en total. Judit afirma haber contado un total de 50 patas ¿Cuántos cerdos había? (sin utilizar ecuaciones).

Solución: Ensayo y error fortuito. Damos valores al azar

Cerdos	Gallinas	Patas
14	4	64
12	6	60
10	8	
Etc.		

Tabla 3. Ensayo y error fortuito.

- De forma sistemática. Se van dando valores de forma sistemática 1, 2,3, etc.

Cerdos	Gallinas	Patas
1	17	38
2	16	40
3	15	

Tabla 4. Ensayo y error sistemático.

- De forma dirigida

Cerdos	Gallinas	Patas
10	8	56 (nos hemos pasado) sobran cerdos
9	9	54 (nos hemos pasado) sobran cerdos
8	10	52 (nos hemos pasado) sobran cerdos
7	11	50 es la solución

Tabla 5. Ensayo y error dirigido.

2.6.4. Problemas más simples y/o relacionados

Nunokawa (2000) analizó los procesos de resolución de problemas donde se observó el uso espontáneo de problemas más simples relacionados. A partir de sus observaciones señala que la solución del problema más simple sugiere la dirección de la exploración o los elementos a tener en cuenta en esa exploración, más que mostrar la plantilla a ser usada en la interpretación de la solución del problema más simple hacia la situación problema original.

De acuerdo a Catrambone (1995), cuando los resolutores extraen de los problemas relacionados el flujo global de las soluciones (por ejemplo, los propósitos de cada una de las partes de la solución) en lugar de los pasos, es probable que ellos los transfieran a las nuevas situaciones problema.

De acuerdo a Newell (1983), muchos de los problemas auxiliares usados en los ejemplos de Polya son subproblemas inexplorados, es decir, su uso en el problema principal aun es un problema, incluso después de que ellos son resueltos. Ellos pueden soportar cualquiera de un número amplio de relaciones débiles al problema principal. Newell (1983) mostró que, si una aproximación apropiada para relacionar un problema resuelto relacionado a un problema principal fuera identificada anticipadamente, su uso en el problema principal puede explorarse por un análisis de medios - fines.

Las investigaciones también reportan que aun si tal aproximación no puede encontrarse anticipadamente, los problemas relacionados pueden sugerir información sobre las situaciones problema a un resolutor. Aunque esa información no necesariamente garantice soluciones elegantes, puede promover las actividades del resolutor presentando información útil para la exploración posterior de situaciones problema.

En algunos casos un *ejemplo genérico* puede iluminar relaciones críticas en la situación y servir como un modelo en la exploración del caso general, mostrando cómo explorar la situación problema. Se espera aquí que la substitución concrete la situación y haga más fácil para los resolutores explorar la situación problema.

Mientras Santos Trigo (1996) informó que los estudiantes fallaron en usar problemas más simples como medio para resolver los problemas. Ishida (1990) informó que “en contraste con estudiantes de nivel bajo, algunos estudiantes de nivel medio u alto nivel fueron observados para probar casos especiales para conseguir un sentido de problemas”. Nunokawa sugiere que esto también muestra la posibilidad que el uso no controlado de esta estrategia, puede ser útil en la construcción de sentido de las situaciones problema.

2.6.5. Trabajar hacia atrás

Algunos investigadores distinguen dos tipos de la estrategia de trabajar hacia atrás, es decir, trabajar hacia atrás acerca de las operaciones y trabajar hacia atrás acerca del pensamiento (Okamoto, 1997; citado por Nunokawa, 2000)

Se propone por ejemplo, el siguiente problema: "Había algunas manzanas, Mark se comió la mitad de ellas, luego Jane se comió la mitad del resto. Hay tres manzanas ahora. ¿Cuántas manzanas había al principio?”. Puede pensarse de la siguiente manera: “puesto que Jane comió la mitad, duplicando el número de tres manzanas, se obtiene el número de manzanas antes que ella comiera” es el primer tipo (tomar la mitad y duplicar son inversas a cada otra). También puede pensarse de la siguiente manera “para conocer el número de manzanas al principio yo necesito conocer el número después de que Mark se las comiera” se tiene el segundo tipo. Dado que el primer tipo fue frecuentemente observado en los programas de resolución de problemas y tiende a ser tratado de manera algorítmica (Nunokawa, 2000), el último tipo parece como una aproximación al establecimiento de subpropósitos, los cuales son frecuentemente mencionados como heurísticas. Este tipo puede ser usado en la resolución de problemas donde las operaciones (y sus inversas) no son explícitamente identificadas. Vye *et al*. (1997) sugirieron como una característica de las soluciones exitosas, la condición que los objetivos reconocidos por el resolutor convoquen en adelante el razonamiento legítimo y los cálculos exactos. Podría ser uno de tales flujos efectivos, el reconocer sub-objetivos seguido de intentos para lograrlos, o razonando sobre ellos, lo cual a su vez, genera nuevos sub-objetivos. En tal investigación previa, sin embargo, los sub-objetivos son identificados anticipadamente y usados para describir los avances del proceso de resolución de los resolutores. Su atención debe prestarse a los roles de los sub-objetivos generados por los mismos resolutores.

No obstante, en esta investigación el rastreo de las diferentes heurísticas empleadas para la solución de cada problema funciona como técnica de investigación y tiene como finalidad esencial, recoger información sobre las opiniones y eventos en un contexto educativo. En este sentido, se hará uso de esta técnica, para facilitar la recolección de información sobre las maneras de resolver problemas que tienen los profesores en formación pertenecientes al curso de resolución de problemas matemáticos.

Se espera entonces, que en el proceso de resolución de problemas los estudiantes de dicho curso potencialicen el uso de estrategias heurísticas y desarrollen un pensamiento lógico matemático a través del intercambio de ideas y de la ejercitación permanente de los conocimientos adquiridos, que puedan evidenciarse como se sigue a continuación.

El uso permanente de las estrategias heurísticas emerge como una solución a un problema ya sea de tipo matemático o geométrico; con lo cual se logra potencializar cada vez más el uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas no rutinarios que son llevados al aula de clases; Hatfield, Edwards, Amargo y Morrow (2007) (citados por Avcu, 2010) enfatizan que, las estrategias heurísticas ayudan a los estudiantes a avanzar en la solución de problemas más difícil y duros. Estas estrategias potencian el razonamiento lógico, dan la posibilidad de explorar sobre las conjetura, hacer pruebas sobre la valides o invalides de los argumentos, sin hacer operaciones algebraicas, los resolutores de problemas utilizan su razonamiento para encontrar la respuesta y lo hacen, no pierda el tiempo en hacer operaciones; más bien tratan de verificar los procesos.

En un caso particular si se desea resolver un problema de tipo algebraico, ayuda que los resolutores vean todas las posibles estrategias heurísticas que pueden dar solución al mismo. La aplicación de una estrategia heurística diferente implica que el resolutor está pensando en el problema desde otra perspectiva. Una estrategia visual como hacer un dibujo estaría representando todas las figuras o formas geométricas que guardan relación con el problema para así ver las conexiones en el problema fácilmente; la organización de los datos dados o hacer una tabla es una forma de ver la información del problema más clara.

Además de estas estrategias, hay otras estrategias como; el trabajando hacia atrás, encontrar un patrón y solucionar un problemas más simple y/o análogo. Para solucionar el problema empleando la estrategia hacia atrás se hace necesario que el objetivo sea único, ya que hay muchos posibles puntos de partida; encontrar un patrón incluye la determinación de un patrón o extendiéndolo a descubrir la respuesta a la pregunta. Un patrón es la repetición sistemática y previsible de los datos numéricos, visuales o de comportamiento. Solucionar un problema más simple y/o análogo implica que el problema original, se puede resolver, solucionando primero un problema más fácil o similar para conseguir la información necesaria y así resolver el problema original.

En esta medida, Bingham (1998) (citado por Avcu, 2010) pone de relieve la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, ya que, un problema puede ser resuelto en diferentes maneras, también es importante, saber cómo y cuándo usar estas estrategias (Polya, 1957). Chapman (2005), afirma que la resolución de problemas tiene un papel importante en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Cuando pensamos en el tipo de problemas que se les deben proponer a los estudiantes. Si aceptamos la resolución de problemas como base de enseñanza de las matemáticas, los estudiantes para profesores de matemáticas deberán entender la resolución de problemas desde una perspectiva más amplia. Puesto que los profesores somos un componente importante en el proceso de resolución de problemas, a sabiendas de la comprensión de los profesores en la resolución de problemas; por esta razón es importante hacer un rastreo de las estrategias heurísticas que utilizan en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios los estudiantes para profesor; ya que, un aprendizaje significativo en este tema ayudará a los educadores en el desarrollo de futuros programas de formación.

A su vez, la implementación de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas en el aula de clase desarrolla diferentes niveles de desempeño matemático; es decir que el educando logra consolidar su pensamiento matemático en la medida que da solución a un problema. Lo cual prueba que el uso permanente de estrategias heurísticas direccionan el proceso de búsqueda de una o varias soluciones a la situación problema hasta llegar a una particularización y experimentación.

Según (Madruga, 2002), a menudo se ha destacado que el funcionamiento cognoscitivo humano es más heurístico que algorítmico, que nuestro sistema cognoscitivo se adapta mejor a los métodos rápidos – aunque sean inseguros- que a los que resultan lentos y pesados, aunque estos conduzcan siempre a la solución. De esta manera, para asegurar la consecución de la solución de muchos problemas, durante su periodo de aprendizaje el ser humano debe adquirir un conjunto de algoritmos de amplia utilización que, como es el caso de los cálculos aritméticos, le serán imprescindibles; ya sea por la inexistencia de los algoritmos o por su carácter demasiado lento; así se considera entonces que lo más útil es la adquisición de estrategias heurísticas, que resultan por lo general falibles, pero que aplicadas con cuidado y control conducen de forma económica a la solución. Se resalta entonces que una persona experta en un campo determinado tiene un conocimiento conceptual organizado y jerarquizado que por lo regular le permite comprender la naturaleza exacta del problema que se le plantee y, al mismo tiempo esta persona también posee los procedimientos y las estrategias que debe aplicar para su resolución.

Finalmente para comprender los alcances de la metodología consideramos oportuno ampliar algunas consideraciones en relación con las tareas matemáticas

Herbst (2006) ha propuesto algunas distinciones de vocabulario que permiten examinar los fenómenos que ocurren en la instrucción a propósito de las tareas. Así señala que usa el término ***problema*** para referirme a la pregunta matemática cuya respuesta requiere el desarrollo o la utilización de una idea matemática. Este uso se basa en Brousseau (1997), que define un problema como es una pregunta cuya respuesta depende de una teoría matemática la cual justifica un concepto, fórmula o método con los cuales se puede responder a la pregunta. Así un problema es, fundamentalmente, una representación de un conocimiento: el problema apunta al conocimiento que ayuda a resolverlo tal como el significante apunta al referente en una representación.

De igual manera, Herbst (2006) siguiendo a Doyle (1988), usa ***tarea*** para referirse a las *unidades de significado* que se pueden determinar en la observación del trabajo matemático en la clase. Una tarea consiste en las acciones e interacciones orientadas a un objetivo particular; una tarea constituye así un contexto práctico en el que los estudiantes pueden llegar a pensar acerca de las ideas matemáticas en juego en un problema. Una tarea es el desarrollo temporal de un sistema de interacciones entre un agente cognoscente y un problema. La tarea puede ser modelada al identificar su *producto* o *meta* (cuyo logro marca el final de la tarea), sus *recursos* (las representaciones simbólicas y materiales y las herramientas disponibles, como por ejemplo el registro utilizado para plantear el problema) y sus *operaciones* (las maneras de hacer que están disponibles). Así, una tarea le da una vida posible a un problema.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

Introducción

La metodología adoptada para estudiar las concepciones y producciones de los profesores de matemáticas en formación es de tipo cualitativo de corte descriptivo-interpretativo de cada una de las estrategias que despliegan y usan en la resolución de un problema matemático no rutinario.

Para este propósito se plantea un análisis de las estrategias heurísticas involucradas en la resolución problemas no rutinarios, que permita formular descripciones interesantes de tipo instantáneo y estáticas sobre las realizaciones observables de los estudiantes, en un momento determinado de su desarrollo, o en diferentes niveles del desarrollo, al resolver tareas específicas propias de los temas del curso de resolución de problemas[3].

De manera particular la metodología se desarrolló en tres momentos que contemplaron:

Momento 1. Al comienzo del curso de resolución de problemas, mediante entrevistas y cuestionarios se buscó analizar algunas de las concepciones, creencias y actitudes de los profesores de matemáticas en formación sobre la resolución de problemas para conocer sus ideas y conocimientos previos. Estas fueron transcritas por los propios participantes y los resultados obtenidos fueron analizados en grupo para que los profesores en formación sean conscientes de sus propias concepciones.

Momento 2. En este momento se tienen en cuenta las conclusiones de la etapa anterior, y se trabaja sobre los diversos aspectos relacionados con la resolución de problemas y las estrategias heurísticas involucradas en dicho proceso, a la luz de la consideración que los estudiantes ya han sido expuestos a una formación explicita sobre la resolución de problemas matemáticos (conocen el modelo presentado por Polya y otros sobre el planteamiento y resolución de problemas matemáticos). Esto último se asocia a la idea que existe una correspondencia entre la enseñanza recibida por los profesores de matemáticas en formación y los objetivos que se quieren desarrollar en el marco del curso de resolución de problemas del Área de Educación Matemática.

Momento 3. Finalmente, una vez que los profesores de matemáticas en formación del curso de resolución de problemas, conocen algunas de las estrategias heurísticas más usadas para la resolución de problemas, se espera poder evidenciar, que la utilización de las mismas ha servido, o bien sea para resolver exitosamente el problema, o para tener una comprensión más clara y amplia de la situación problematizada.

Tras elegir y adaptar algunas de las cuestiones a los requisitos de la investigación se configura un esquema de interpretación se sigue de la identificación de características comunes y patrones de comportamiento en el desempeño de los alumnos. Se utiliza para agrupar las respuestas y así facilitar una clasificación de la información en

[3] Ver anexos. Programa del curso de resolución de problemas matemáticos.

categorías descriptivas. Llegados a este punto, se procede a analizar los resultados obtenidos a partir de instrumentos que permitan hacer inferencias y obtener conclusiones de la investigación.

1.1. Definición de criterios y diseño de los problemas

Se resolverán cada uno de los problemas planteados durante el curso como se esperaría que los estudiantes los hayan resuelto, teniendo en cuenta todas las heurísticas que dan solución al problema. Lo que queremos destacar es la importancia que tiene el uso de las estrategias heurísticas para la consecución de la resolución de problemas ya que, al contrario de los métodos algorítmicos estas me garantizan una comprensión profunda del problema, a partir de los conceptos adquiridos significativamente en el aula, puesto que, el resolutor puede encontrar la estrategia adecuada para su resolución.

1.1.1. Estrategias de solución de los problemas planteados

Se espera, que en el proceso de resolución de problemas, los estudiantes de dicho curso, hayan interiorizado el uso de las estrategias heurísticas y que estas se evidencien de la siguiente manera:

Resolución del problema N° 1

En una reunión hay veinte personas y todas ellas se saludad dándose un apretón de manos. ¿Cuantos apretones se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado? ¿Y si hubiese *n* personas?

Figura 4. Apretón de manos.

Estrategia Nº 1: Resolver primero uno más sencillo

Esta estrategia se usa a menudo ligadas a otras, como hacer una tabla y buscar un patrón; una aproximación útil a la resolución de este problema es plantearse el problema con dos, tres o cuatro personas; es decir particularizar (**Estrategia N° 2**).

Estrategia N° 3 Usar un gráfico; esta estrategia facilita encontrar la solución.

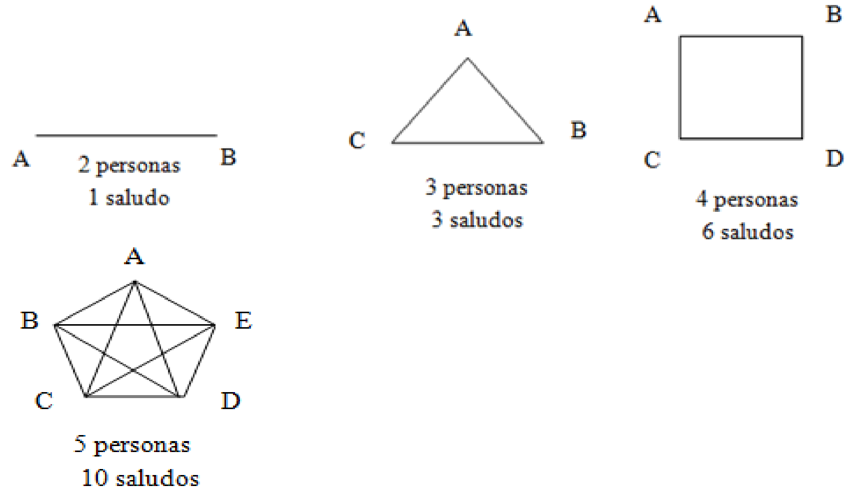


Figura 5. Soluciòn grafica del apretòn de manos.

Estrategia Nº 4: hacer una tabla a partir de los gráficos, para ver si encontramos una pauta o patrón.

Personas	2	3	4	5
Saludos	1	3	6	10

Tabla 6. Representación tabular del apretón de manos

Estrategia Nº 5: generalización; observemos que el número de apretones de manos va creciendo, de modo que primero se suman 2, luego 3. Supongo entonces que para 5 personas el número de apretones de manos será de 10 (6+4).

Se espera que los resolutores logren razonar de la siguiente manera:

- Cada persona aprieta la mano de todos excepto la suya

- Habiendo 3 personas, si cada uno aprieta la mano de los otros dos, habrá seis apretones de manos.
- ¡Un momento! Esto no coincide con los cálculos del principio y representados en el dibujo. ¡Ah!, ya se. He contado 2 veces el mismo apretón de manos, de A con B y de B con A. Para que esto no suceda tenemos que dividir por 2.

Para 3 personas seria

$$3 \times 2 / 2 = 3$$

Si son 4 personas

$$4 \times 3 / 2 = 6$$

Cada persona *n* puede saludar a $n - 1$ personas.
La fórmula para *n* personas será $n(n-1)/2$.
La generalización nos permite aprender de este problema para encontrar la ley que solucione otros casos similares al que se trata.

Estrategias heurísticas que dan solución al problema N°1				
Resolver primero uno mas sencillo	Particularizar	Usar un grafico	Hacer una tabla	Generalizar

Tabla 7. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema del apretón de manos.

Resolución del problema Nº 2

Según la leyenda, Euclides (300 a.c) fue el autor de este acertijo: una mula y un burro llevan una carga de sacos. El burro lanzo un gruñido y la mula le dijo: ¿De qué te quejas? El burro respondió: si me dieras un saco tendría el doble de sacos que tú; y si yo te diera dos de mis sacos, nuestras cargas serian iguales; ¿Cuantos sacos lleva cada animal?

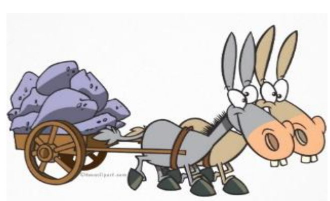


Figura 6. Sacos que cargan la mula y el burro.

Estrategia Nº 1: solución algebraica (planteamiento de ecuaciones); que sea *x* el número de sacos que carga el burro, y sea *y* el número de sacos que carga la mula. A continuación se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 1 = y - 1$$
$$y + 1 = 2\ (x - 1)$$

Al resolver el sistema se tiene que las soluciones son $x = 5$ y = 7.

Estrategia N° 2: solución aritmética; esta solución como un dialogo se presenta en el que un profesor (P), induce respuesta en los estudiantes (E), mientras se da la búsqueda de dos números que cumplan las condiciones establecidas por el problema; algo así como el ensayo y error.

P: ¿por cuanto difieren los números?
E: dos
P: ¿por quê?
E: porque uno más que el más pequeño es uno menos que el más grande
P: ¿puede uno de los números ser impar y el otro par?
E: no. Los dos separados, por lo que son ambos impares o ambos pares
P: ¿pueden ser ambos pares?
E: si
P: ¿estas seguro?
E: no
P: ¿Qué hacemos obtenemos cuando se le añade 1 al mas grande? Es este par o impar?
E: Es este par, este es el doble de un numero
P: ¿Que hacemos cuando no sabemos cual de los dos números es el más grande? El par o el impar?
E: Es el impar
P: ¿son ambos números impares?
E: si
P: ¿estas seguro?
E: si
P: ¿pueden ser esos números grandes?
E: no; cuando tu cambias cada uno de lugar, el grande llega a ser el doble del mas pequeño, así uno de ellos tiene que ser el mas pequeño.

P: Probemos algunos de estos valores. Puede ser 1 y 3?
E: no.
P: ¿3 y 5?
E: no.
P: ¿5 y 7?
E: si.
P: ¿es esta una respuesta?
E: si.

El dialogo conducido es un método de resolución de problemas que enfatiza en diferentes aspectos que ayudan al estudiante a resolver el problema. Dado que, actúa como un ensayo y error conducido, que le proporciona al estudiante hacer y probar conjeturas sobre la situación a resolver.

Estrategias heurísticas que dan solución al problema N°2	
Planteamiento y resolución de ecuaciones	Dialogo inducido.

Tabla 8. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema de la mula y el burro.

Resolución del problema Nº 3
La cabeza de un pescado tiene treinta centímetros de largo; la cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo; y el cuerpo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del pescado?

Estrategia N° 1: hacer un diagrama

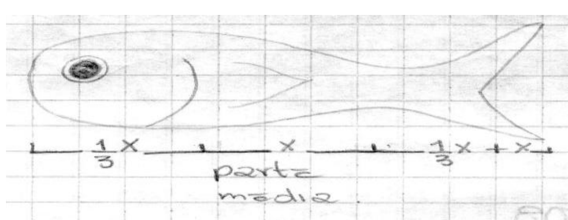


Figura 7. Solución grafica del problema de la longitud del pescado.

Estrategia Nº 2: solución algebraica (planteamiento de ecuaciones)
Denotemos por *x, y* las longitudes del cuerpo y la cola del pescado, respectivamente, expresadas en centímetros.

Sabemos que:

- La cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo:

$$y = 30 + \frac{x}{2} \qquad (1)$$

- El cuerpo es tan largo como la cabeza y la cola juntas:

$$x = y + 30 \qquad (2)$$

Sustituyendo el valor de *y* (1) en (2) y resolviendo la ecuación en *x*:

$$x = 30 + \frac{x}{2} + 30$$
$$x - \frac{x}{2} = 30 + 30$$
$$\frac{2x - x}{2} = 60$$
$$x = 2.60 = 120$$

Reemplazando el valor de *x* en (1) se tiene:

$$y = 30 + \frac{120}{2}$$
$$y = 30 + 60 = 90$$

y la longitud del pescado medida en centímetros, es:

$$30 + x + y = 30 + 120 + 90 = 240$$

Estrategias heurísticas que dan solución al problema N°3	
Hacer un dibujo.	Planteamiento y resolución de ecuaciones.

Tabla 9. Estrategias heuristicas que soluciónan el problema de la longitud del pescado.

Resolución del problema Nº 4

Escoja un punto P en el segmento de línea AB y construya dos cuadrados: un lado de un cuadrado es AP y un lado del otro cuadrado es PB. ¿Dónde se debe ubicar al punto P para satisfacer la condición que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima?

Los cuadrados, pueden tener cualquier configuración[4].

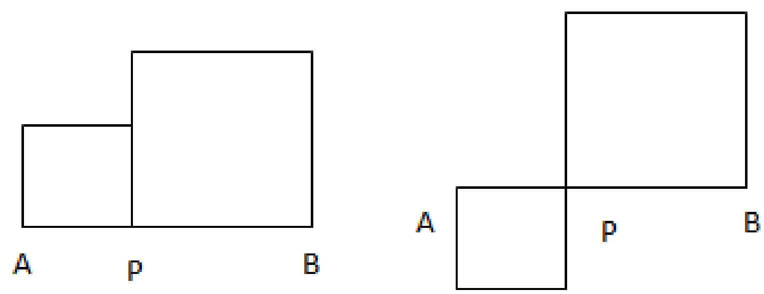


Figura 8. Configuracion de cuadrados.

El problema puede ser resuelto utilizando las siguientes estrategias heurísticas:

Estrategia N° 1*:* Resolver primero uno más sencillo.

Como el problema pide el mínimo de la suma de las áreas de dos cuadrados; entonces se puede considerar que los dos lados del cuadrado se extienden en un bosquejo para formar un cuadrado de longitud AB en cada lado, se forman cuatro regiones:

Los lados del cuadrado $(AP)^2$ y $(PB)^2$

Cada rectángulo AP y PB

El área total de las cuatro regiones es AB^2

Por lo tanto, la suma mínima de los cuadrados $(AP)^2$ y $(PB)^2$ ocurre cuando los dos rectángulos tienen área máxima. Pero, un rectángulo tiene área máxima cuando es un cuadrado o cuando AP = PB.

---

[4] Recuperado en: http://iwilson.coe.uga.edu/EMT725/twosmosquares/TwoSquares.html; Traduccion y adaptacion: Octavio Augusto Pabon, LabMatUV

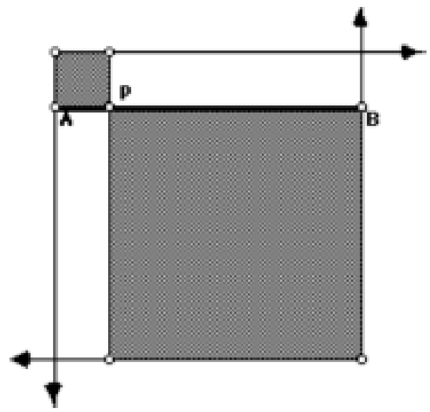


Figura 9. Solución grafica del problema de áreas minimas de dos cuadrados.

Estrategia Nº 2: Reducir el problema a otro conocido; determinado relaciones algebraicas y haciendo variaciones sobre las aproximaciones establecidas.

Las variaciones en la aproximación anterior, incluyen las siguientes:

Sean AB = x y PB = y

Entonces deseamos minimizar $x^2 + y^2$

Por la desigualdad de la media aritmética y la media geométrica $x^2 + y^2 \geq 2xy$**,** con igualdad si y solo si $x = y$.

Por lo tanto, la suma de las áreas de los dos cuadrados es siempre mayor que las áreas combinadas de los dos rectángulos, excepto cuando $x = y$. así el área mínima ocurre cuando P es el punto medio.

Estrategia N° 3: Hacer un esquema; recurriendo a software geométricos, para lograr formular el área de los cuadrados como función de una única variable.

Se formula el área como función de única variable.

Sean AP = x y PB = AB – x

El área es: $f(x) = x^2 + (AB - x)^2 = 2x^2 - 2(AB)\,x + (AB)^2$.

Esto es una parábola como el grafico siguiente

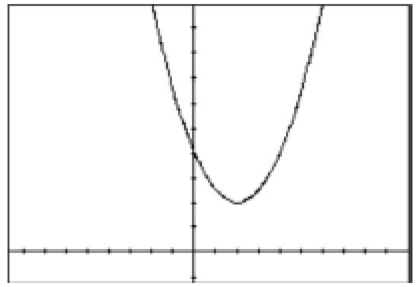


Figura 10. Solución geométrica del problema de áreas minimas de dos cuadrado.

Donde el vértice esta en (AB/2, AB/2)

Estrategia Nº 4: Hacer una tabla*;* en la cual se particulariza la longitud del segmento AB (***Estrategia N°5***; particularización) y se registra una secuencia de los valores para la suma de los cuadrados en la medida que P se coloca en los puntos del segmento de línea.

Sea AB = 10 y *x* = AP. Entonces la tabla siguiente se puede generar rápidamente.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10-x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
suma	100	82	68	58	52	50	52	58	68	82	100

Tabla 10. Representación tabular del problema de áreas minimas de dos cuadrados

Esto proporciona una buena intuición de la ubicación del punto P, éste está en el punto medio de AB

Estrategias heurísticas que dan solución al problema N°4				
Resolver primero uno más sencillo	Reducir el problema a otro conocido	Usar un grafico	Hacer una tabla	Particularizar

Tabla 11.Estrategias heurisicas que soluciónan el problema de áreas minimas de dos cuadrados.

1.2. El Contexto

La presente investigación está enmarcada en el contexto del curso resolución de problemas matemáticos con la principal característica que las clases son de tipo teórico- práctico a cargo del profesor y sus estudiantes.

Los estudiantes cuentan con material impreso que contienen diversos ejercicios, elaborados según las exigencias del curso, donde se da lugar a que el estudiante resuelva problemas en los cuales involucre la formulación, el cuestionamiento y llegue así a una posible respuesta, haciendo uso de las estrategias heurísticas.

La modalidad de la clase propuesta es trabajar en pequeños grupos de pares o tríos, sobre las actividades planteadas. En la modalidad planteada, el grupo funciona como impulsor, es decir, se pretende que los compañeros contribuyan a acelerar los procesos de resolución de problemas ayudando a disipar las dudas mediante exposiciones programadas a lo largo del curso, que van dando cuenta de las estrategias heurísticas que se abordaran a lo largo de este, al tiempo que se debate sobre las diferentes interpretaciones de diversos autores (Polya y Schoenfeld), además, durante la resolución de un problema se daba lugar a una puesta en común en donde se exponen los diversos planteamientos y resoluciones a las situaciones problematizadas que a su vez servían de explicación al grupo en general; quienes son los observadores de los modos de resolución de problemas de sus compañeros. Luego, de esta confrontación, los estudiantes del curso infieren conclusiones y el docente realiza la presentación formal e integrar de los temas.

Es importante destacar que, en cuanto a la resolución de problemas, interesa que el estudiante compruebe que la matemática es una disciplina que ofrece herramientas para resolver ciertos problemas de la realidad. Se fomenta que el alumno piense, afronte y resuelva problemas conociendo de manera explícita las técnicas y los modos de resolver un problema. De esta manera, la resolución de problemas está considerada como una metodología de enseñanza y no como un contenido a enseñar (ver en anexos, el programa del curso).

En general, el estudio del material recolectado se ha enfocado en rastrear la utilización de estrategias heurísticas empleadas en la resolución de problemas.

1.3. Participantes en el estudio.

Para el desarrollo del análisis de esta investigación fue necesaria la asistencia al curso de resolución de problemas de la Universidad del Valle en el periodo académico agosto-diciembre del año 2012 (cabe mencionar que contamos con las producciones de semestres anteriores).

Este curso contó con una asistencia masiva, debido a que resulta ser una asignatura obligatoria para los estudiantes en formación de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas dictada por la Universidad del Valle. El curso de resolución de problemas matemáticos, se desarrolló en un encuentro semanal de tres horas, en un horario de 6: 00 pm a 9: 00 pm los días martes.

Siendo un curso heterogéneo en cuanto a la edad y la experiencia formativa, está conformado en buena parte por alumnos que cursan sexto semestre en adelante, y quienes vieron en la propuesta curricular la oportunidad de realizar una preparación profesional que desarrolle sus competencias y habilidades matemáticas en el campo de la resolución de problemas, para afrontar las necesidades actuales de la educación.

Particularmente en lo referido a la formación matemática, la mayoría de los estudiantes cuentan con las herramientas cognitivas necesarias para afrontar con éxito las distintas situaciones problematizadas, debido a que muchos ya han cursado las asignaturas correspondientes a la línea de formación matemática.

1.4. Momentos de la investigación

La descripción de las realizaciones de los estudiantes se articula mediante la identificación y categorización de algunos comportamientos y competencias en los que se presta atención a las concepciones, creencias y estrategias de solución de problemas que se desprenden de sus respuestas.

Así mismo, esta investigación se planteó en tres momentos estratégicos:

Momento1: Exploración de las concepciones y creencias frente a las matemáticas y la resolución de problemas.

En este momento se presenta la siguiente actividad.

Actividad Nº1: se da la siguiente ilustración y se pide a cada uno de los estudiantes participantes de la investigación que respondan las siguientes preguntas:

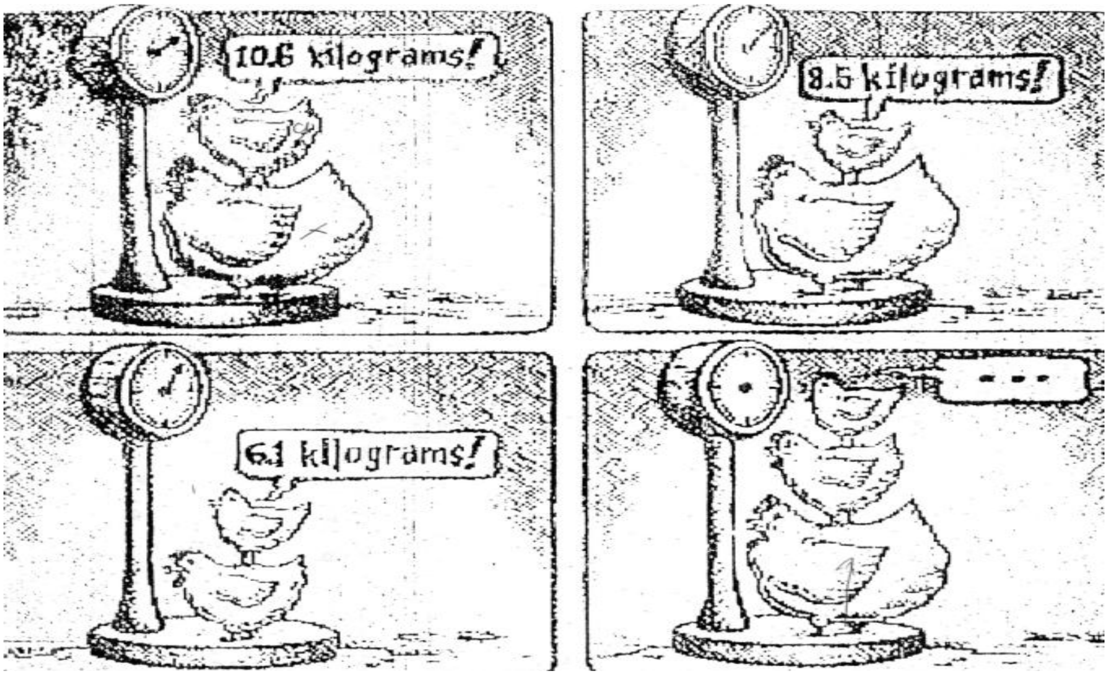


Figura 11. Peso de las gallinas.

1. ¿Por qué es un problema matemático?
2. Escribe un enunciado al problema
3. ¿Este enunciado hace parte de las matemáticas experimentales?
4. ¿Consideras que todo problema matemático, requiere de un enunciado?

Momento 2: Resolución de problemas matemáticos no rutinarios, empleando el modelo de resolución de problemas expuesto por Polya.

El modelo es conocido por los estudiantes, dado que, en la clase el profesor encargado del curso y algunos estudiantes participantes del mismo, han hecho intervenciones para dar a conocer el modelo.

Actividad N° 2: Resuelva los siguientes problemas, utilizando el modelo de Resolución de Problemas Matemáticos expuesto por Polya.

1. En una reunión hay veinte personas y todas ellas se saludad dándose un apretón de manos. ¿Cuantos apretones se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado? ¿Y si hubiese n personas?
2. Según la leyenda, Euclides (300 a.c) fue el autor de este acertijo: una mula y un burro llevan una carga de sacos. El burro lanzo un gruñido y la mula le dijo: ¿De qué te quejas? El burro respondió: si me dieras un saco

tendría el doble de sacos que tú; y si yo te diera dos de mis sacos, nuestras cargas serian iguales; ¿Cuantos sacos lleva cada animal?

3. La cabeza de un pescado tiene treinta centímetros de largo; la cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo; y el cuerpo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del pescado?

Momento 3: Se presenta con el fin, de conocer si los estudiantes para profesores, durante el proceso de resolución de problemas no rutinarios, hacen uso de algunas de las estrategias heurísticas vistas durante el curso, para garantizar una comprensión profunda del problema.

Actividad N°3: Resuelve los siguientes problemas[5]

1. En una reunión hay veinte personas y todas ellas se saludad dándose un apretón de manos. ¿Cuantos apretones se habrán dado cuando todas las personas se hayan saludado? ¿Y si hubiese n personas?
2. Según la leyenda, Euclides (300 a.c) fue el autor de este acertijo: una mula y un burro llevan una carga de sacos. El burro lanzo un gruñido y la mula le dijo: ¿De qué te quejas? El burro respondió: si me dieras un saco tendría el doble de sacos que tú; y si yo te diera dos de mis sacos, nuestras cargas serian iguales; ¿Cuantos sacos lleva cada animal?
3. La cabeza de un pescado tiene treinta centímetros de largo; la cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo; y el cuerpo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del pescado?

4. Escoja un punto P en el segmento de línea AB y construya dos cuadrados: un lado de un cuadrado es AP y un lado del otro cuadrado es PB. ¿Dónde se debe ubicar al punto P para satisfacer la condición que la suma de las áreas de los dos cuadrados sea mínima?

1.5. Categorías de análisis

Para la recolección y sistematización de la información se manejan tres rejillas de análisis, una para cada una de las actividades propuestas, en donde se evidencian los aspectos que son analizados.

La rejilla de análisis de la actividad Nº1[6], es diseñada con el fin de explorar las concepciones y creencias que presentan los estudiantes para profesor frente a la

[5] Los estudiantes trabajaron en grupos de dos y tres personas.

resolución de problemas matemáticos no rutinarios, en este mismo sentido se establece una tendencia frente a los argumentos que dan cada uno de los grupos participantes. Por esta misma razón los criterios a valorar dentro de la rejilla son:

Preguntas	Argumentos	Tendencia
Cada una de las situaciones que se intentan problematizar, con el fin de obtener una información determinada.	Hacen parte de las consideraciones que presentan cada uno de los grupos que son expuestos a una serie de preguntas.	Es presentada en cada pregunta, y recoge en si, los argumentos que son tendencia, frente a la discusión establecida por cada uno de los grupos para una pregunta específica.

Tabla 12. Rejilla para el análisis de la actividad N°1

La rejilla de análisis de la actividad Nº2, es diseñada con el fin de explorar los niveles de apropiación del modelo de Polya para resolver problemas, por parte de los estudiantes para profesor, en este mismo sentido se establecen tres rejillas idénticas, una para cada problema, las cuales dan cuenta de cada una de las fases que sigue el modelo, así como también los recursos que poseen los resolutores y si llegan o no a la solución del problema.

Se espera que la rejilla sea útil en la medida, en que se argumente que tanto influyen los modelos de resolución de problemas y los recursos a la hora de encontrar una solución al problema.

[6] Ver en Anexos el análisis de rejilla para la actividad N°1.

	Fases de modelo de resolución de problemas de Polya: Está comprendido par cada una de las fases que presenta Polya como un modelo de resolución de problemas.				**Recursos:** se asocian a cada uno de los conceptos, nociones y procedimiento algorítmicos o algebraicos y algún tipo de cálculo matemático que se utilice para dar fuerza a la utilización de la estrategia heurística.		**Encuentra la solución:** indica si el resolutor encontró o no la respuesta al problema.	
Grupos: cada uno de los grupos que participan en la resolución de problemas (los grupos se denotan con G, y van desde G1 hasta G9)	**Comprensión del problema:** El resolutor en esta fase debe intentar sacar todo el mensaje contenido en el enunciado mirando el problema pausadamente y con tranquilidad para saber claramente cuál es la situación de partida, cuál la de llegada y lo que hay que lograr.	**Concebir el plan:** El resolutor debe tratar de acumular distintas formas de abordar el problema. Se trata de que fluyan de la mente muchas ideas, aunque en principio puedan parecer descabelladas, en ocasiones las más estrafalarias pueden resultar las mejores. Para facilitar el flujo de ideas posibles, nos podemos ejercitar en la práctica de unas cuantas normas generales, que permiten construir diversas estrategias	**Ejecución del plan:** es el momento de juzgar entre todas las estrategias que han surgido, aquella o aquellas que tengan más probabilidad de éxito. Después de elegir una la llevamos adelante con decisión y si no nos condujera a la solución volveríamos a la fase anterior de búsqueda de estrategias hasta conseguir dar con la o las	**Visión retrospectiva:** ya se ha decidido finalizar el trabajo sobre la resolución del problema que nos ocupa, no importa mucho que se haya resuelto o no; a veces se aprende más de los problemas intentados con interés y tesón y no resueltos, que de los que se resuelven casi a primera vista.	**Suficientes:** aquellos conceptos matemáticos que sea utilizados adecuada y oportunamente .	**Insuficientes:** aquellos que se utilicen indebidamente y con no vengan al caso en el procesos de resolución.	**Si**	**No**

		en la resolución de problemas. En esta fase se evidencia la utilización de las estrategias heurísticas.	adecuadas que nos conduzcan a la solución.					
	Fases de modelo de resolución de problemas de Polya: está comprendido par cada una de las fases que presenta Polya como un modelo de resolución de problemas.				**Suficientes:**	**insuficientes:**	**Si**	**No**
	Planteamiento de ecuaciones: exponer una duda a través de una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas.	**Hacer una tabla:** se entiende por cualquier organización organizada de los datos en una tabla, el centro de los problemas que se resoluciones empleando la estrategia heurística, tiende a ser alternado entre encontrar un patrón en esas tablas y buscar las respuestas usando este patrón. En la investigación previa sobre las estrategias	**Hacer un gráfico:** se asociadas a la organización de la información del problema por medio de croquis, gráficos, figuras, diagramas y esquemas. Estos símbolos o dibujos no se reservan al uso exclusivo de la Geometría; una figura o gráfico puede ayudar considerablemente en todo tipo	**Particularizar:** Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a considerar un conjunto más pequeño (o incluso un solo objeto) contenido en el conjunto dado. Particularizar, significa simplificar el problema haciéndolo más concreto y específico, hasta que sea posible hacer algún progreso.				

		heurísticas, esta función de las tablas ha sido frecuentemente destacada.	de problemas, que nada tienen de geométrico, ya que las figuras trazadas sobre el papel son fáciles de hacer, fáciles de conocer y fáciles de recordar.					

Tabla 13. Rejilla para el análisis de la actividad N°2

La rejilla de análisis de la actividad Nº 3, fue diseñada con el fin de explorar que tanto se han apropiado de las estrategias heurísticas los estudiantes para profesor cuando resuelven problemas matemáticos no rutinarios, en este mismo sentido se establecen cuatro rejillas, una para cada problema, dado que, en cada problema se utiliza un tipo de heurística especifico, asimismo es importante determinar si hay o no una apropiación adecuada de la heurística, como también el contar con los recursos necesarios para garantizar la consecución de una solución al problema.

En este orden de ideas lo que se intenta determinar es que la solución de un problemas matemático no rutinario está dada gracias a un apropiada utilización de la heurística así como también el hecho de contar con los recursos matemáticos necesarios para llevar a cabo el plan de solución del problema.

Grupos de estudiantes: cada uno de los grupos que participan en la resolución de problemas (los grupos se denotan con G, y van desde G1 hasta G9)	**Problema Nº:** se asocia al problema que se va a solucionar									
	Estrategias heurísticas que solucionan el problema									
	Ensayo y error: los estudiantes asumen valores tentativos, que pueden permitirles operar con esos valores de acuerdo a las condiciones del problema y producir resultados tentativos. Esto hace fácil explorar la situación problema concretamente o explícitamente para encontrar relaciones entre datos y resultados.	**Utilización adecuada de la heurística**	**Planteamiento de ecuaciones:** exponer una duda a través de una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas.	**Utilización adecuada de la heurística**	**Dialogo inducido:** funciona como un ensayo y error dirigido	**Utilización adecuada de la heurística**	**Hacer una tabla:** se entiende por cualquier organización organizada de los datos en una tabla, el centro de los problemas que se resoluciones empleando la estrategia heurística, tiende a ser alternado entre encontrar un patrón en esas tablas y buscar las respuestas usando este patrón. En la investigación previa sobre las estrategias heurísticas, esta función de las tablas ha sido frecuentemente destacada.	**Utilización adecuada de la heurística**	**Recurso:** se asocian a cada uno de los conceptos, nociones y procedimiento algorítmicos o algebraicos y algún tipo de cálculo matemático que se utilice para dar fuerza a la utilización de la estrategia heurística.	**Encuentra la solución:** indica si el resolutor encontró o no la respuesta al problema.

	Si	No		Si	No		Si	No		Si	No	**Suficientes:** aquellos conceptos matemáticos que sea utilizados adecuada y oportunamente.	**Insuficientes:** aquellos que se utilicen indebidamente y con no vengan al caso en el procesos de resolución.	Si	No

Tabla 14. Rejilla para el análisis de la actividad N°3

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en cada una de las actividades que se realizaron con los estudiantes para profesor, donde fue posible evidenciar un análisis de los procesos de resolución de problemas; se señala que los estudiantes con altos desempeños mostraron más ``generación de una nueva información`` y ``extensión de la situación problema``. Estos estudiantes ``usaron procesos de resolución más largos, durante la actividad`` y se movieron ``más allá de la información proporcionada por el problema``. Se evidencia que tales actividades (la 2 y la 3) facilitaron el acceso al conocimiento base (ver hallazgos,).

De manera similar, ``los procesos de resoluciones más largos, sugieren que en los problemas más difíciles los estudiantes se nutren de la información recientemente generada y se proveen así mismo con múltiples oportunidades para identificar el conocimiento relevante ``siguiente al resultado de sus análisis los estudiantes presentan posibilidades que permiten comprender sus propias esquemas de base y señalan que, en problemas complejos, ``una representación del problema o es un estado que evoluciona lentamente o está constituido de un numero de representaciones locales basadas alrededor de un teorema o procedimiento en particular``.

Adicionalmente, cuando los estudiantes hacen uso de un modelo de resolución de problemas, este proceso refina el significado del problema y permite reconocer la necesidad de las fases del problema. Como en el caso, del significado del problema o la comprensión de la situación problema; las cuales no son necesarias comprender al principio del proceso de resolución. Más bien, en la medida que el proceso de resolución avanza y la información sobre la situación problema es reunida las fases normalmente cambian, mientras consiguen incluir nuevos elementos, relaciones, sentidos y otras posibilidades o casos.

Para casos en los cuales, el proceso de resolución no fue éxitos, se evidencian los siguiente dos puntos, (De Corte et al., 1996; Schoenfeld, 1992; citado por Pabón, 2007): (i) los estudiantes son a menudo incapaces de decidir que método disponible es apropiado para el problema;(ii) las descripciones de las heurísticas no son suficientemente detalladas todavía para permitir a los estudiantes familiarizarse con ellas para implementar las estrategias. A lo largo de este proceso también llama la atención factores, como las creencias, los recursos de los que disponen y las culturas del salón de clase.

Cabe resaltar que cuando se está en el proceso de resolución de un problema, el llegar a la solución resulta ser el paso más importante para los resolutores, aunque, es necesario tener presente que la solución requiere de múltiples conceptos y habilidades que estos deben desarrollar durante dicho proceso.

En esta misma medida según Saleh (s.f.) la falta de compromiso frente a la resolución de problemas por parte de los resolutores se relaciona con estos tres factores:

1. No hay un interés por parte de los mismos, en hacer conciencia sobre el proceso de resolución;
2. Los conceptos matemáticos puestos en juego durante el proceso de resolución no fueron adquiridos;
3. Y la falta de habilidades básicas, (utilización de estrategias heurísticas).

Por tanto, se hace necesario que los estudiantes entiendan el problema y el concepto involucrado, así como comprender ciertas habilidades. Se resalta además que en estudios anteriores algunos de los estudiantes que no utilizan las heurísticas en sus procesos de resolución de problemas han manifestado que es debido a razones, tales como: las debilidades de los estudiantes en el campo de formación, el tiempo a la hora de resolver problemas matemáticos es limitado y que el método no es necesario para dar solución al problema.

No obstante, la existencia de una gran variedad de estrategias heurísticas presentes en la resolución de un problema, hace necesario una reflexión por parte del estudiante que le permita identificar el potencial que estas puedan ofrecerle durante sus experiencias de aprendizaje. Es decir, el uso efectivo de algunas estrategias demanda que los estudiantes desarrollen recursos y herramientas que les permitan apropiarse del problema y transformarlo en un instrumento que le resulte importante para la comprensión de las matemáticas y para la resolución de problemas.

En este contexto, el empleo de algunas estrategias heurísticas en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solo influye en la manera de representar en interactuar con las ideas de la disciplina, sino también en las formas de razonar, sustentar y representar relaciones o propiedades matemáticas.

A continuación se presenta como los estudiantes para profesores del curso de Resolución de Problemas Matemáticos resuelven un determinado número de problemas, al tiempo que se ilustra la forma en que el empleo de distintas estrategias puede ayudar a los estudiantes a transformar problemas rutinarios en actividades de resolución de problemas. No obstante el diseño de un plan y su implantación puede incluir el uso de métodos algebraicos, descomponer el problema en otros más simples, transformar el problema a otro contexto (geométrico o numérico).

4.1. Análisis de las Tareas

Análisis de la actividad Nº 1

Para un análisis de esta actividad se recurrió a encontrar una tendencia entre los argumentos que presentaron los estudiantes para profesor frente a una problemática planteada. (Ver rejilla de análisis Nº1,)

Análisis de la actividad Nº2

Utilizando el modelo de resolución de problema paleteado por Polya

Análisis del problema N°1.

A pesar de haberles pedido a todos los grupos resolver cada uno de los problemas a través del modelo de resolución de problemas expuesto por Polya, este no fue el camino que la mayoría de los grupos decidió implementar.

Aunque, se deja ver que la utilización de las estrategias heurísticas, en el proceso de resolución fue útil para llegar a la solución de los problemas; algunas de las heurísticas más usadas por los estudiantes para este problema fueron: hacer una tabla y particularizar. También, se resalta que solo un grupo (de nueve en total) llego a la solución correcta, para los otros la solución era vista como fácil y obvia, olvidando que era de gran importancia hacer uso adecuado de los recursos matemáticos de los que disponían, al tiempo que esto les facilitaría desarrollar un razonamiento lógico necesario comprender el problema. Fue entonces aquí, donde al menos más de la mitad de los grupos se quedó y no halló la respuesta correcta.

Hallazgos

- G1 no establece ninguna respuesta a la pregunta planteada.

- G2, ve como solución a este problema el uso del factorial, es decir plantea la resolución como (n -1)!= 19!, sin una previa verificación de lo anterior expuesto.

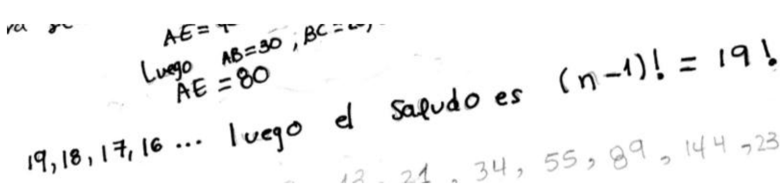


Figura 12. Solución del problema N°1, por parte de G2.

- G2 y G3 respectivamente dieron solución a este problema a través de la aplicación del factorial, y aun que no desarrollan ningún plan, ni utilizan alguna de las estrategia heurística, plantean que la solución correcta al problema es 20!, lo cual no es cierto, así que en esta situación los grupos no logran comprender el problema, tal vez debido a que no hicieron uso de un plan.

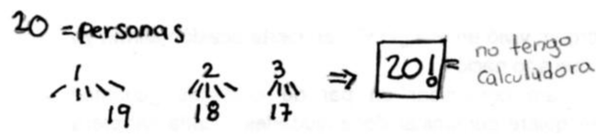


Figura 13. Solución del problema N°1, por parte de G3.

- G4, establece una organización de la información a través de una tabla, la cual le ayuda a establecer una correlación entre la primera persona con las 19 restantes, es decir que cuando la primera persona haya dado todos los apretones de mano, este habrá apretado 19 veces, el segundo a 18, el tercero a 17, pues ya se ha saludado con los dos primeros.

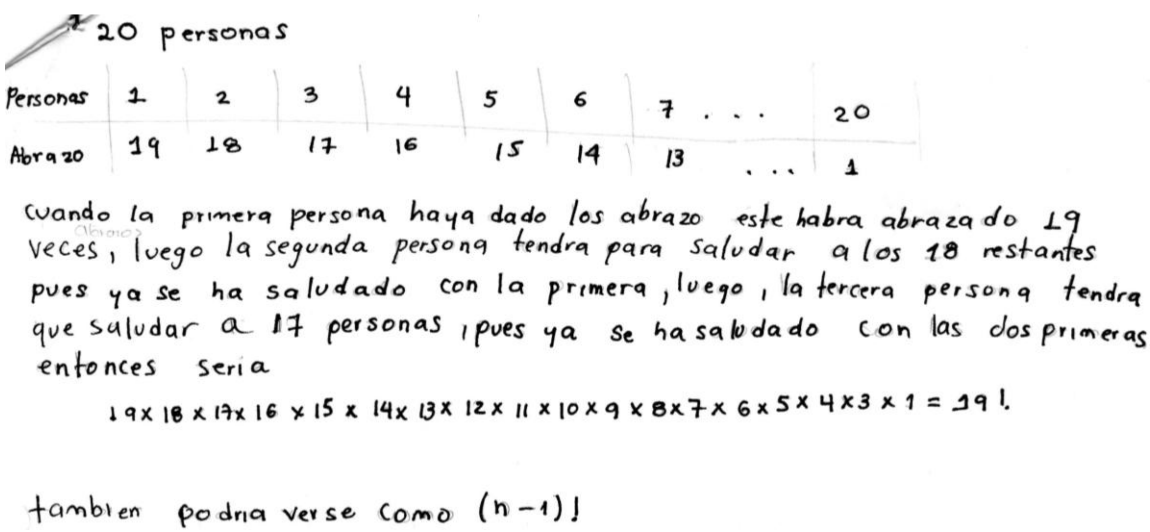


Figura 14. Solución del problema N°1, por parte de G4.

Finalmente, establecen que esta relación está dada por 19! o como (n-1)!; su deducción no está del todo mal, pero no llega a la respuesta correcta, tal vez por solo guiarse por un instinto netamente algorítmico y no seguir la secuencia inicialmente propuesta, es decir no verifican el proceso; según Schoenfeld esta cuestión hace parte de los recursos defectuosos que posee el grupo resolutor.

- G5 aplica tan solo un razonamiento básico matemático, en una deducción simple de “uno no se saluda a uno mismo” así que 20 x 19 = 380 apretones en una reunión de 20 personas.

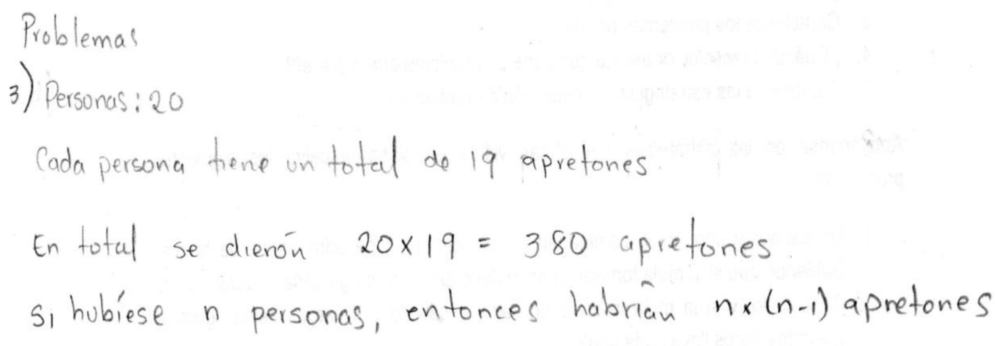


Figura 15. Solución del problema N°1, por parte de G5.

Lo que los llevan a establecer una ecuación simple a partir de “Si hubiese n personas, entonces habría *n* x *(n* - 1) apretones”; lo cual no es cierto.

- G6 intenta establecer una relación entre el número de personas y el número de apretones de manos, esta información la condensa en una tabla sencilla, la cual arroja como resultado que 20 personas se saludan 400 veces.

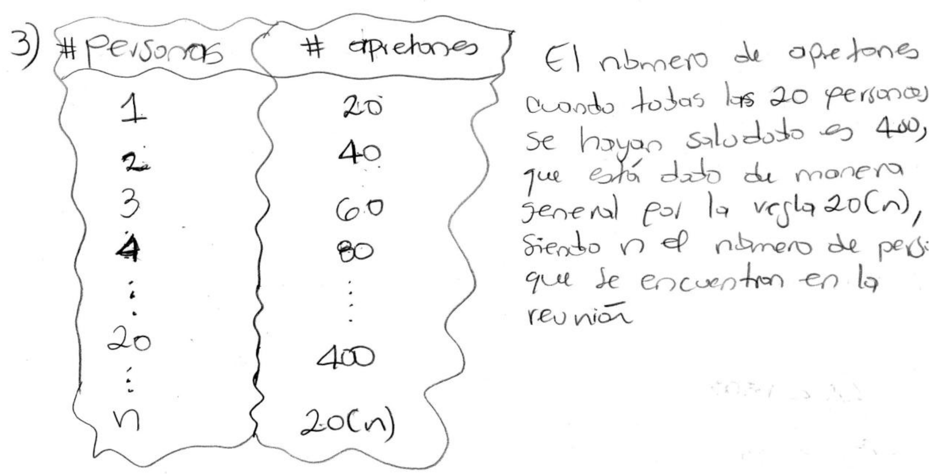


Figura 16. Solución del problema N°1, por parte de G6.

Inicialmente, su interpretación es equivocada pues la tabla comienza con que 1 persona tiene a 20 personas para saludar. Lo cual, lógicamente no es posible. Pues, uno, no se saluda a sí mismo. Por tanto, su respuesta expresada como 20(*n*), donde *n* representa el número total de personas es incorrecta.

- G7 al igual que otros grupos también plantea su resolución a partir de la construcción de una tabla, donde resume toda la información aplicando un razonamiento lógico y deductivo a la vez.

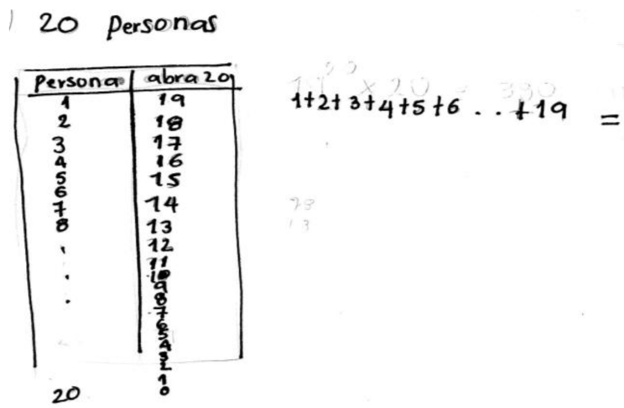


Figura 17. Solución del problema N°1, por parte de G7.

Como se puede apreciar G7, solo plantea una posible solución, sin llegar a una concreta.

- G8 con la ayuda de una tabla, bien definida logra visualizar el patrón que determina el número de apretones que se dan en una reunión donde comparten 20 personas.

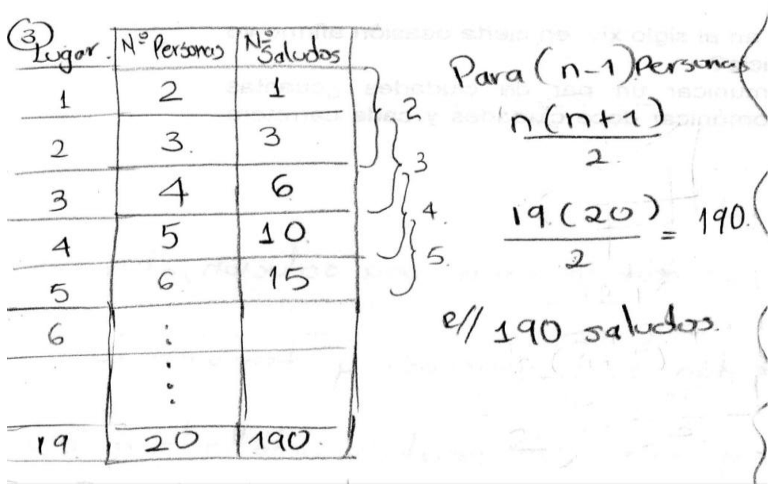


Figura 18. Solución del problema N°1, por parte de G8.

Como, se puede observar sus procesos son tan claros y concisos que le permiten llegar a la respuesta correcta, aun sin haber seguido los pasos de Polya, pero apropiándose a la utilización adecuada de la estrategia heurística.

- G9 por su parte, emplea el uso de dos estrategias diferentes; la primera es la organización de la información en lo que nosotros conocemos como tabla y la segunda la expresión a través de una sumatoria.

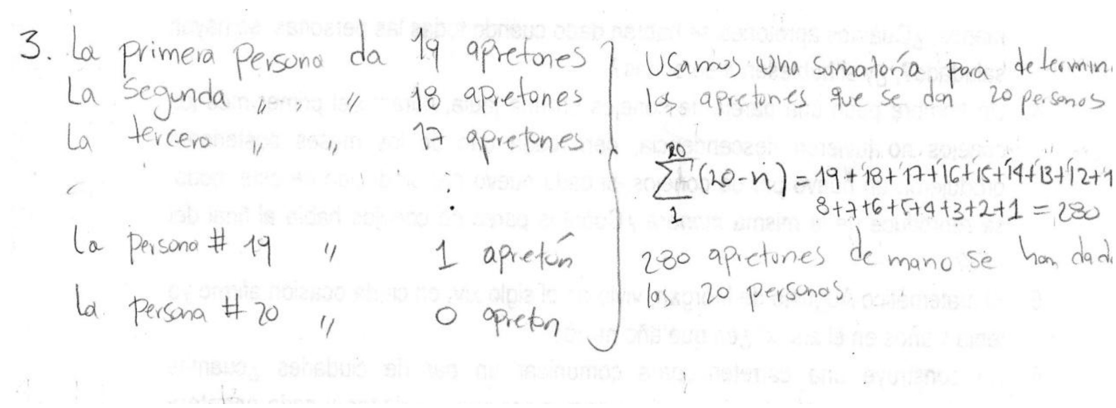


Figura 19. Solución del problema N°1, por parte de G9.

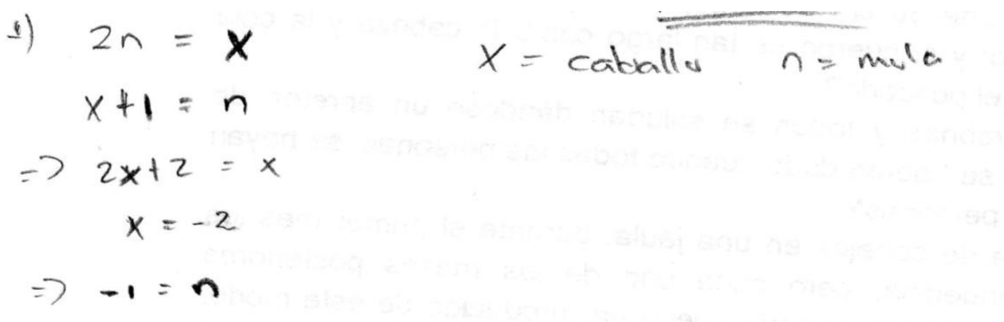
Como consecuencia, y a pesar de haber usado dos tipos de estrategias ambas completamente distintas, G9 no logra llegar a la respuesta correcta. En esta resolución vuelve y se hacen evidentes los recursos defectuosos de los que disponen los resolutores.

Análisis de problema N°2.

En este problema fueron muchos los grupos resolutores que tuvieron éxito, en su proceso de resolución. Aun cuando solo un grupo resolvió el problema a través del modelo de Polya. Para esta situación problema la estrategia más potente fue el planteamiento de ecuaciones. Por no decir que todos o casi todos, los grupos usaron este recurso, a excepción del grupo que resolvió el problema siguiendo los pasos de Polya, que utilizaron como estrategia heurística el *dialogo inducido.*

Hallazgos

- Inicialmente G1 se apoya sobre una estrategia muy común, durante la resolución del problema los resolutores hacen uso de un sistema de ecuaciones de primer grado, donde aplican el método de sustitución, aunque no llega a una respuesta correcta. Pues, es obvio que su razonamiento matemático no era del todo claro, pues sus respuestas no son coherentes con forme a la pregunta planteada por el problema.



1) $2n = X$ $\quad X$ = caballo $\quad n$ = mula

$X + 1 = n$

$\Rightarrow 2x + 2 = x$

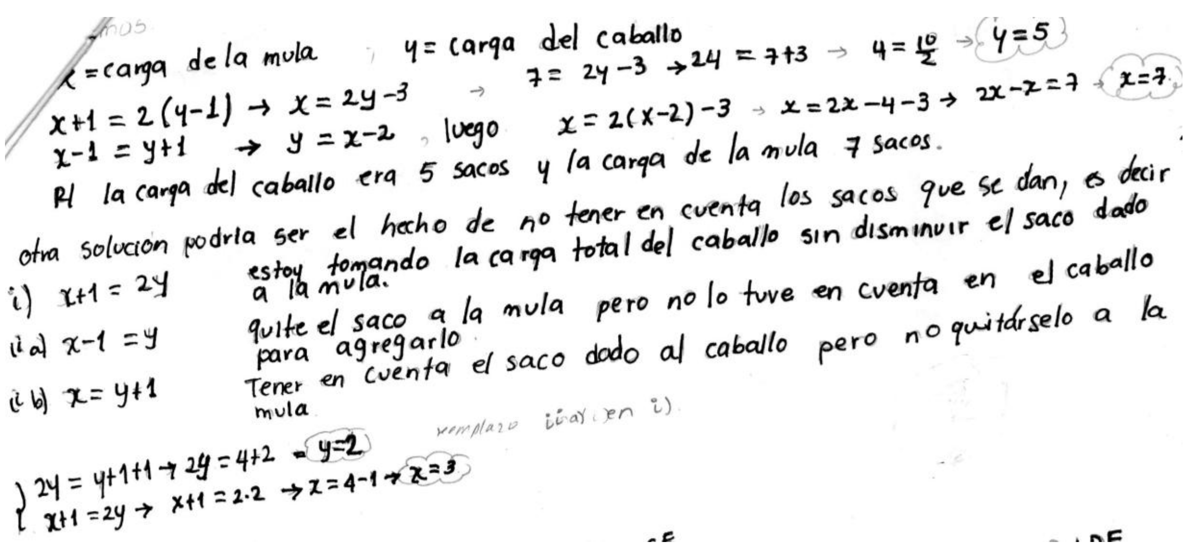
$x = -2$

$\Rightarrow -1 = n$

Figura 20. Solución del problema N°2, por parte de G1.

El sistema planteado da cuenta no solo de un mal razonamiento matemático, sino también de un mal proceso algebraico, con dos posibles respuestas ambas incorrectas, es decir los recursos de los que disponen los resolutores son de alguna manera defectuosos.

- G2, aun sin conocer las diferentes estrategias heurísticas plantean como solución un sistema de ecuaciones donde *x* representa la carga de la mula, mientras que *y* representa la carga del caballo.



x = carga de la mula, y = carga del caballo

$x+1 = 2(y-1) \rightarrow x = 2y-3$

$x-1 = y+1 \rightarrow y = x-2$, luego

$7 = 2y-3 \rightarrow 2y = 7+3 \rightarrow y = \frac{10}{2} \rightarrow y=5$

$x = 2(x-2)-3 \rightarrow x = 2x-4-3 \rightarrow 2x-x=7 \rightarrow x=7$

R/ la carga del caballo era 5 sacos y la carga de la mula 7 sacos.

otra solución podría ser el hecho de no tener en cuenta los sacos que se dan, es decir estoy tomando la carga total del caballo sin disminuir el saco dado a la mula.

i) $x+1 = 2y$

ii a) $x-1 = y$ quite el saco a la mula pero no lo tuve en cuenta en el caballo para agregarlo

ii b) $x = y+1$ Tener en cuenta el saco dado al caballo pero no quitárselo a la mula

remplazo ii a) en i)

$2y = y+1+1 \rightarrow 2y = y+2 \rightarrow y=2$

$x+1 = 2y \rightarrow x+1 = 2\cdot 2 \rightarrow x = 4-1 \rightarrow x=3$

Figura 21. Solución del problema N°2, por parte de G2.

Finalmente, todo el proceso algebraico da como resultado:

Carga total de la mula, *X*= 5 sacos

Carga total del caballo, *Y*= 7 sacos

Es decir, los resolutores realizan un buen razonamiento al problema planteado, pues, tiene en cuenta los sacos dados a cada animal. Así, que sin conocer algún tipo de estrategia pudieron llegar a la solución correcta haciendo un buen uso de sus conocimientos matemáticos previamente adquiridos en su proceso académico.

- G3, realiza un previo análisis del problema, y durante su proceso de resolución utiliza la fase de Polya "desarrollar un plan"; logrando así identificar todos los datos que suministra el problema y posteriormente hacer uso de los recursos matemáticos que dispone para plantear igualdades a partir de:

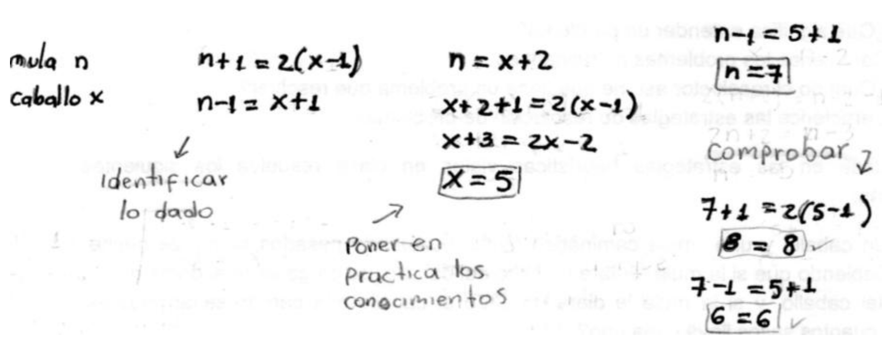


Figura 22. Solución del problema N°2, por parte de G3.

Finalmente, el caballo solo llevaba consigo cinco sacos y mientras que la mula llevaba 7 sacos. Así G3 culmina con su plan probando lo dado y llegando a una respuesta correcta.

- Sin conocer de antemano las diferentes estrategias heurísticas y la utilidad que esta representa a la hora de dar solución a los distintos problemas matemáticos G4 enfoca su solución a un dialogo conducido en donde poco a poco establece conjeturas, tales como:

> "Si la mula tomara uno de los costales de la carga seria el doble de la carga del caballo. Así que la mula es a 8 como el caballo es 4"
>
> "Y si la mula le diera uno de los costales la carga seria la misma, entonces la mula es a 6 como el caballo es 6".

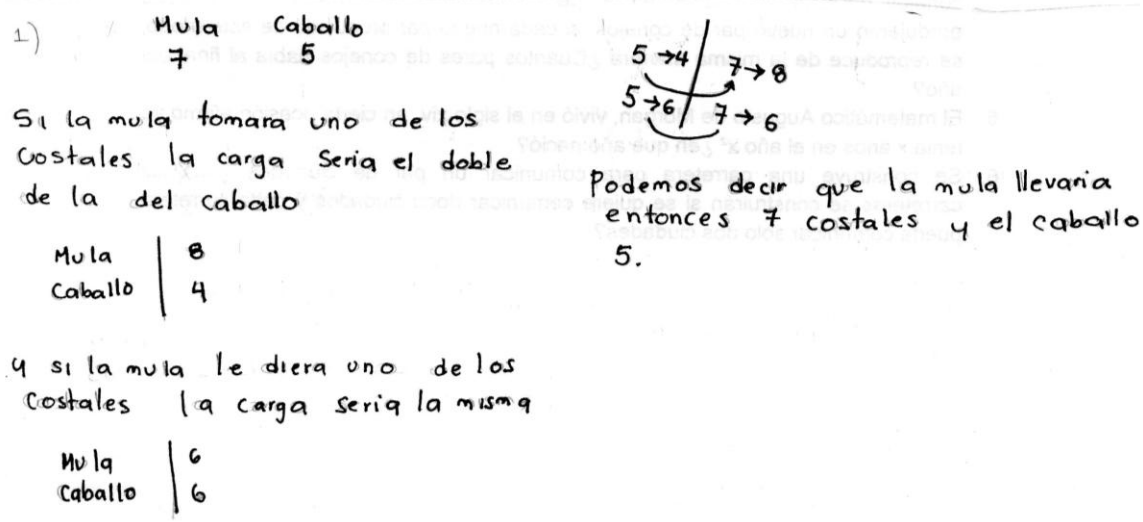


Figura 23. Solución del problema N°2, por parte de G4.

Finalmente, deduce "podemos decir que la mula llevaría entonces 7 costales mientras que el caballo llevaría 5 costales. Dado que, se genera la relación. Por tanto, la mula llevaría en su costado 7 sacos y a su vez el caballo llevaría 5. Luego, los resolutores llegan a la resolución correcta con solo hacer uso de un razonamiento matemático con la ayuda de un dialogo conducido.

- G5 plantea como solución una ecuación a partir de la relación: 2 (mula + 1) = caballo -1, llegando así a una respuesta incorrecta donde el caballo lleva consigo 7 sacos, mientras que la mula lleva consigo 9 sacos.

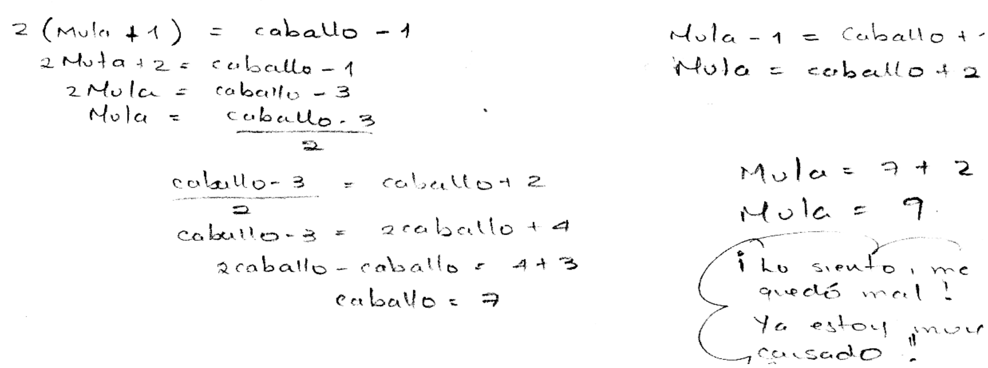


Figura 24. Solución del problema N°2, por parte de G5.

Por último, los resolutores reconocen que su proceso está mal, aunque no lo corrigen. Así que, su razonamiento matemático no es del todo malo, como tampoco su estrategia de ecuación sencilla (aritmética) donde involucra un lenguaje matemático en relación con un lenguaje natural.

- G6 realmente no hace uso de algún recurso para comprender el problema planteado, solo se vale de un proceso matemático para generar la ecuación que para el grupo será la que arroje el resultado correcto.

x= caballo y= mula

Donde establece las siguientes ecuaciones:

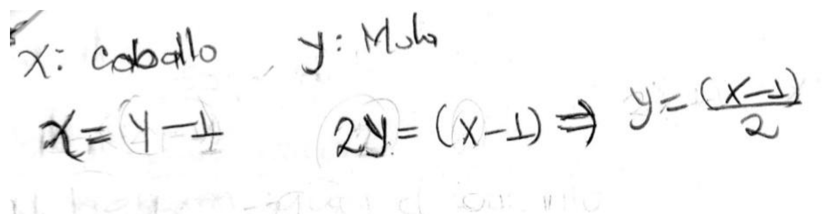


Figura 25. Solución del problema N°2, por parte de G6.

Sin operar o dar un posible resultado como tal.

- G7 logra llegar a una respuesta correcta con tan solo hacer uso del planteamiento de dos ecuaciones, donde:

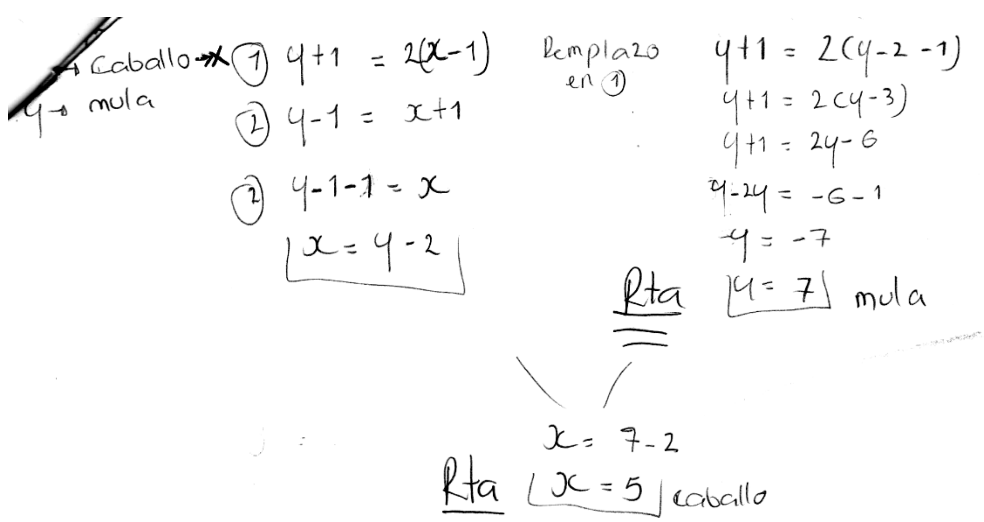


Figura 26. Solución del problema N°2, por parte de G7.

x= Caballo y= Mula

Después, de una reemplazar una ecuación sobre otra, finalmente los resolutores, logran determinar el número de sacos que llevaba la mula equivalentes a 7. Luego, por una operación de una resta simple y siguiendo con el enunciado “sabiendo que si la mula tomara un saco del caballo, su carga seria el doble que la del caballo” establece que 7 – 2 = 5, por tanto, la carga del caballo corresponde a cinco sacos.

- G8, no desarrolla el problema.

- G9 hace uso de dos estrategias heurísticas; en primera instancia hace una tabla y como una segunda opción plantea un sistema de ecuaciones.

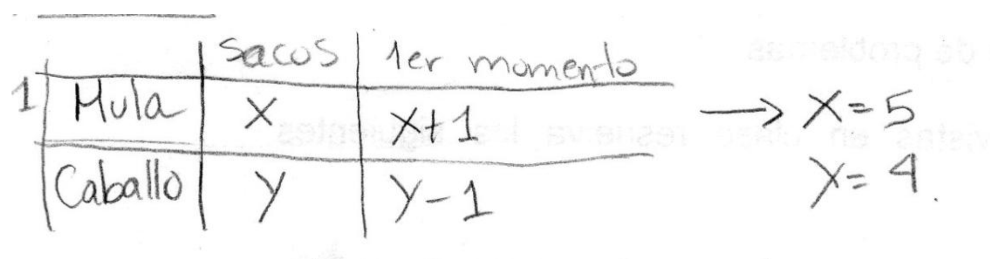


Figura 27. Solución del problema N°2, por parte de G9.

A pesar, de sus múltiples estrategias no se logra ver las operaciones realizadas, pero si arrojan una respuesta que no es la correcta.

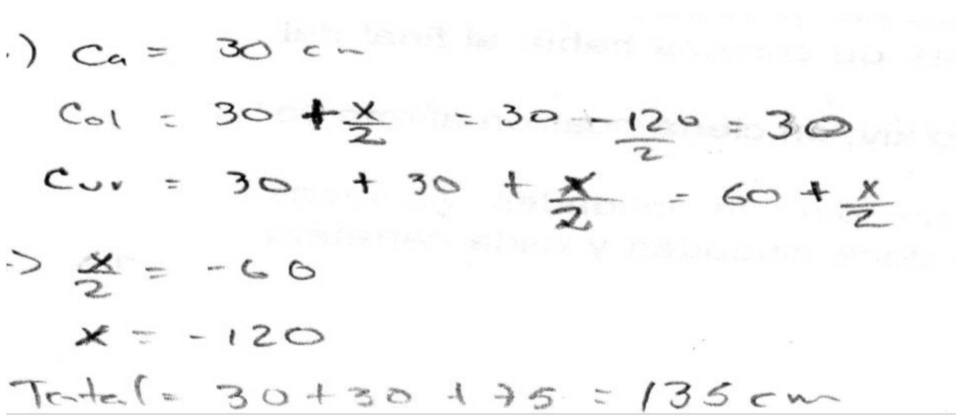
Análisis del problema N°3.

Para esta situación problema fueron dos las estrategias potentes. Como primera medida la realización de una gráfica del pescado, sirvió como punto de referencia para la compresión del mismo y en segunda medida el planteamiento de ecuaciones, que se encuentra lijado a la interpretación del gráfico, ya que, estas representan las partes en que se encentra dividido el pez.

Cabe resaltar, que este no fue un problema exitoso en cuanto a su respuesta se refiere, pero si lo fue si en el uso de estrategias heurísticas. Pues, la mayoría de los grupos se apoyan sobre diferentes estrategias para llegar a la solución. En un fallido intento condensan paso a paso la información suministrada a través de ecuaciones no del todo erradas. Por tanto, se logra visualizar que la mayoría de los grupos comprende el problema.

Hallazgos

- En una clara ausencia de estrategia G1 pretende dar resolución al problema planteado, a través de una expresión algebraica que involucra sistema de ecuaciones, toma como dato inicial la longitud dada que corresponde a la cabeza, luego platea un ecuación para el siguiente enunciado “la cola es tan grande como la cabeza y la mitad del cuerpo ” pero, aunque de nuevo no llega a la solución correcta, si hay cierta coherencia entre los valores establecidos, tal vez existe una confusión en el manejo de los signos pues sugiere valores negativos, aun cuando el problema es claro en su pregunta pues se quiere establecer la longitud total del pescado.



.) $Ca = 30\ cm$

$Col = 30 + \frac{x}{2} = 30 - \frac{120}{2} = 30$

$Cuv = 30 + 30 + \frac{x}{2} = 60 + \frac{x}{2}$

$\rightarrow \frac{x}{2} = -60$

$x = -120$

$Total = 30 + 30 + 75 = 135\ cm$

Figura 28. Solución del problema N°3, por parte de G1.

Finamente, toma valores distintos a los hallados para intentar establecer la longitud total del pescado.

- G2, pretende dar solución al problema con la ayuda de una gráfica, que le sirve para visualizar mejor el problema y así establecer unas longitudes de medidas en un intervalo de A hasta E, donde:

AB = 30 cm (cabeza)

BC = 10 cm

CD = 10 cm

DE = 20 cm y dado que, AB = CE, entonces CE = 30 cm.

Como se puede observar, los resolutores aplican diversas estrategias para llegar a la solución, aunque esta no es del todo correcta; Es visible la necesidad del uso de las estrategias heurísticas.

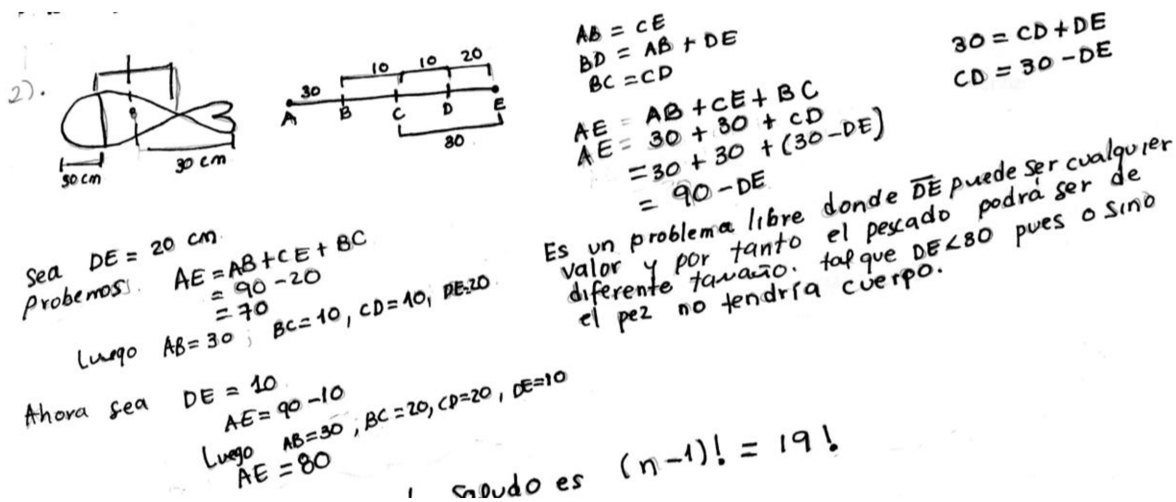


Figura 29. Solución del problema N°3, por parte de G2.

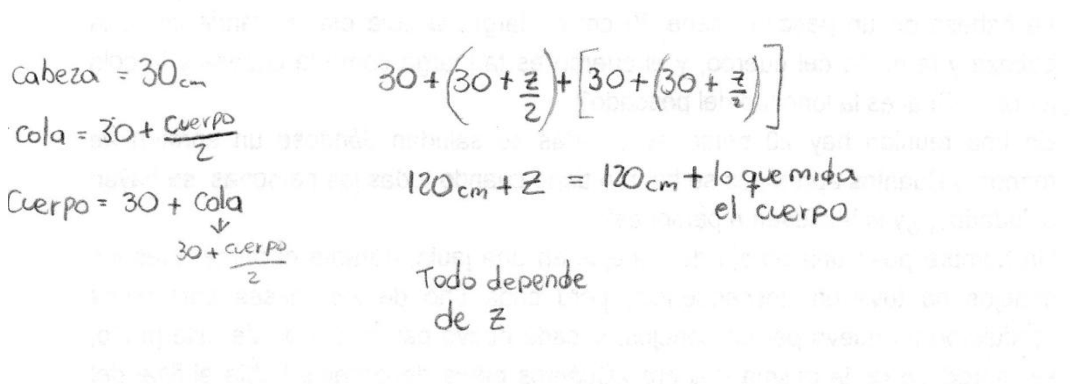
Finalmente, los resolutores plantean que DE puede tener cualquier valor, dado que, el pescado podrá tener diferente tamaño tal que DE < 30, porque si no esté (pescado) no tendrá cuerpo.

- Para este problema G3, realiza una previa identificación de la información dada, luego la plasma a través de una ecuación aritmética, donde suma todos los valores dados.

x= 30 cm cabeza.

y= 30 cm (cola) + (cuerpo)/2

z = 30 cm (cuerpo) + 30 (cola) + (cuerpo)/2



Cabeza = 30 cm

Cola = $30 + \frac{\text{Cuerpo}}{2}$

Cuerpo = 30 + Cola

$30 + \frac{\text{cuerpo}}{2}$

$30 + \left(30 + \frac{z}{2}\right) + \left[30 + \left(30 + \frac{z}{2}\right)\right]$

$120\,cm + z$ = $120\,cm$ + lo que mida el cuerpo

Todo depende de z

Figura 30. Solución del problema N°3, por parte de G3.

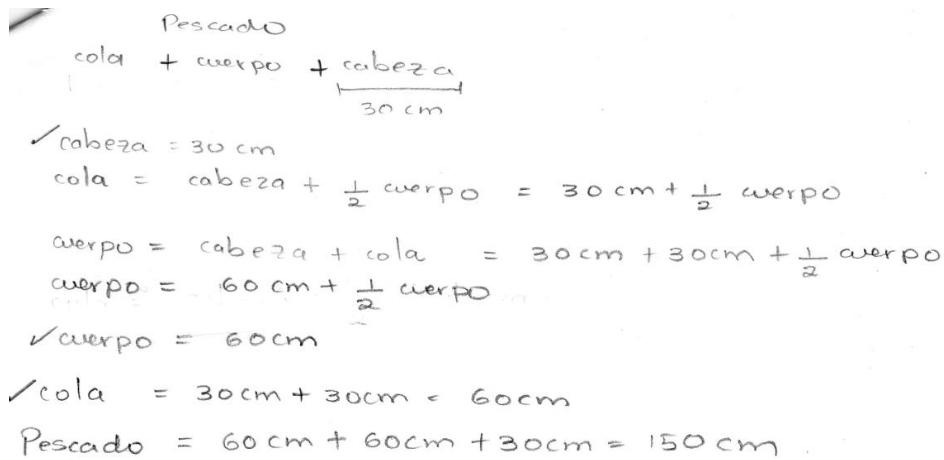
Por tanto, 120 cm + *z*, es decir 120 cm + cuerpo. Así la longitud del pescado depende de la longitud de *z*, en esta medida su razonamiento matemático y el oportuno uso de desarrollar un plan fue fundamental para la compresión del problema aunque su respuesta haya quedado a medias.

- G4, no genera ninguna solución para este problema.

- G5, en su proceso de resolución del problema plantea la idea de hacer un gráfico, aunque, no lo plasma sobre el papel como tal, si establece una relación de orden entre la información de la siguiente manera:

Cola + Cuerpo + Cabeza

? ? 30 cm



Pescado

cola + cuerpo + $\underbrace{\text{cabeza}}_{30\text{ cm}}$

✓cabeza = 30 cm

cola = cabeza + $\frac{1}{2}$ cuerpo = 30 cm + $\frac{1}{2}$ cuerpo

cuerpo = cabeza + cola = 30 cm + 30 cm + $\frac{1}{2}$ cuerpo

cuerpo = 60 cm + $\frac{1}{2}$ cuerpo

✓cuerpo = 60cm

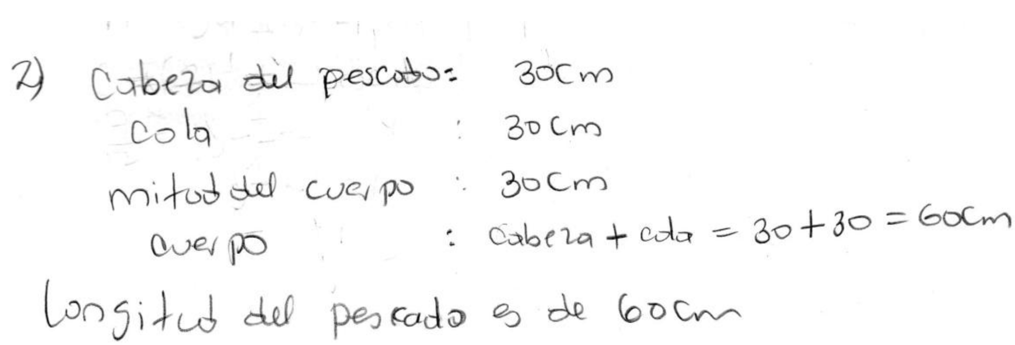
✓cola = 30cm + 30cm = 60cm

Pescado = 60 cm + 60cm + 30cm = 150 cm

Figura 31. Solución del problema N°3, por parte de G5.

Posteriormente, los resolutores, juegan de nuevo con un lenguaje matemático y natural a la vez, logran establecer solo algunos procesos buenos y otros malos; tal vez, lo más importante es que logran identificar la estrategia que les permite la comprensión del problema como tal aunque su respuesta no sea la correcta.

- G6, parte de la información inicialmente dada, la cabeza del pescado mide 30 cm, luego, deduce que la cola mide otros 30 cm y la suma de estos es 60 cm y como el enunciado del problema dice "la cola es tan grande como la cabeza y la mitad de su cuerpo", así que, 30 cm será también la medida de su cuerpo.



2) Cabeza del pescado: 30Cm

cola : 30Cm

mitad del cuerpo : 30Cm

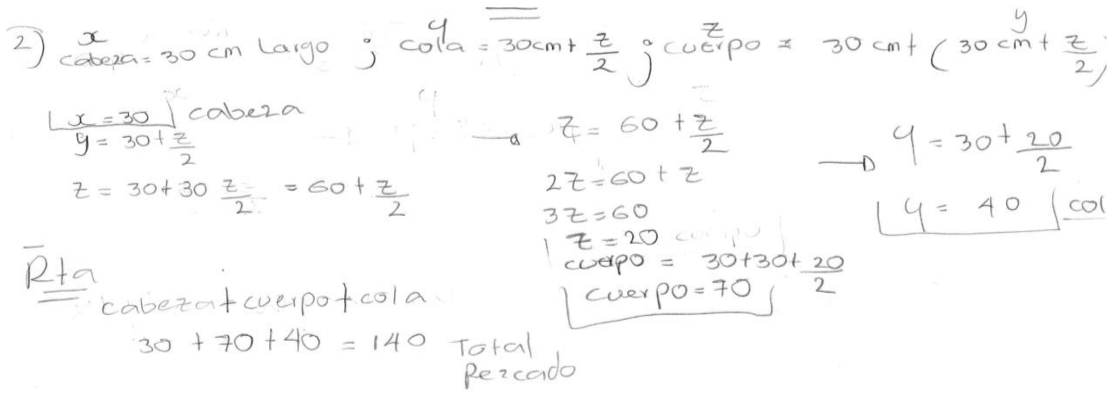
cuerpo : Cabeza + cola = 30 + 30 = 60Cm

longitud del pescado es de 60Cm

Figura 32. Solución del problema N°3, por parte de G6.

Finalmente, y tal vez en un pequeño descuido responde que la longitud total del pescado corresponde a 60 cm. Que obviamente esta apreciación es totalmente errada no solo por sus deducciones sino también por sus cálculos.

- Para este problema G7 también toma como punto de partida el planteamiento de ecuaciones en la medida en la que el problema va suministrando información.



2) cabeza = 30 cm Largo ; cola = 30cm + $\frac{z}{2}$; cuerpo = 30 cm + (30 cm + $\frac{z}{2}$)

$x = 30$ cabeza
$y = 30 + \frac{z}{2}$
$z = 30 + 30 \frac{z}{2} = 60 + \frac{z}{2}$ → $z = 60 + \frac{z}{2}$
$2z = 60 + z$
$3z = 60$
$z = 20$
cuerpo = $30 + 30 + \frac{20}{2}$
cuerpo = 70

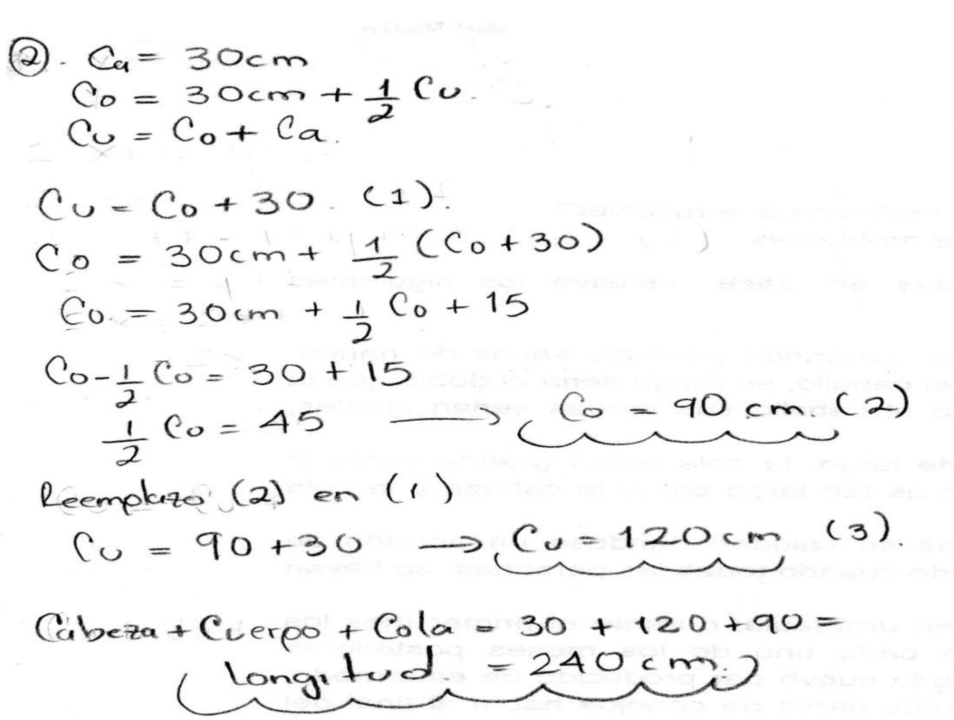
→ $y = 30 + \frac{20}{2}$
$y = 40$ cola

Rta cabeza + cuerpo + cola
30 + 70 + 40 = 140 Total Pescado

Figura 33. Solución del problema N°3, por parte de G7.

Finalmente, y con algunos errores los resolutores no logran hallar la respuesta correcta, aun después de realizar un proceso de ecuaciones y de sustituciones progresivas.

- G8 como muchos otros grupos toma el planteamiento de ecuaciones como la mejor opción para dar solución al problema



②. $Ca = 30cm$
$Co = 30cm + \frac{1}{2} Cu$
$Cu = Co + Ca$

$Cu = Co + 30 \quad (1)$
$Co = 30cm + \frac{1}{2}(Co + 30)$
$Co = 30cm + \frac{1}{2} Co + 15$
$Co - \frac{1}{2} Co = 30 + 15$
$\frac{1}{2} Co = 45 \longrightarrow Co = 90 \text{ cm} \quad (2)$

Reemplazo (2) en (1)
$Cu = 90 + 30 \longrightarrow Cu = 120 \text{ cm} \quad (3)$

Cabeza + Cuerpo + Cola = 30 + 120 + 90 =
longitud = 240 cm

Figura 34. Solución del problema N°3, por parte de G8.

Así que, después de un proceso de solución de ecuaciones y de sustituciones a la vez los resolutores logran llegar a la respuesta correcta de nuevo sin emplear el modelo de resolución de problemas de Polya.

- G9, pone a prueba su habilidad matemática para resolver problemas y en un rápido y hábil razonamiento matemático establece el siguiente proceso:

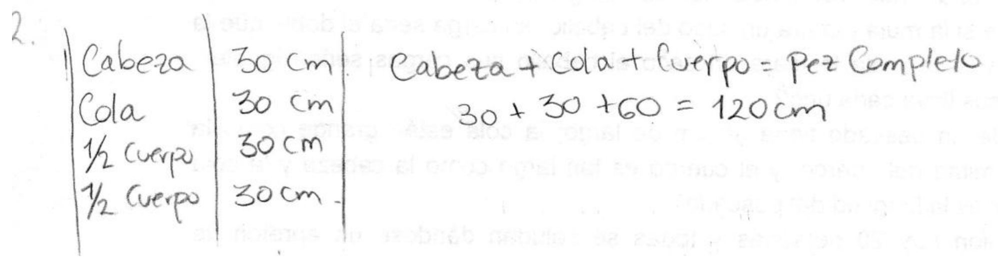


Figura 35. Solución del problema N°3, por parte de G9.

El cual tiene a nuestro criterio como estrategia fundamental el uso de la tabla, a pesar de su ágil y rápida deducción matemática su respuesta no es la correcta.

Análisis de la actividad N° 3

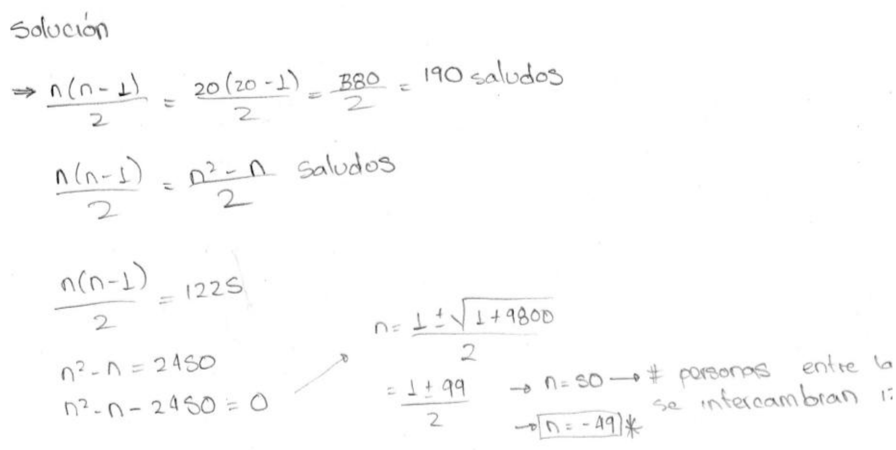
Análisis del problema N°1.

La rejilla de análisis deja ver como tendencia que la mayoría de los grupos que participaron en la resolución del problema utilizaron al menos 2 de las 5 estrategias heurísticas que resolvían el problema (un grupo resolvió el problema utilizando todas la heurísticas que se podían utilizar para dicha resolución), se evidencia que estos grupos se apropiaron de las estrategias y que supieron utilizarlas, algo importante en estos grupos, es que contaban con los recursos matemáticos necesarios que garantizaban la solución del problema.

Se observa también, que en una menor proporción los grupos, dieron solución al problema simplemente haciendo utilización de los recursos matemáticos; por otra parte, se evidencia, que los grupos que no solucionaron el problema, fue debido a que no contaban con recursos matemáticos suficientes y a la falta de utilización de alguna estrategia heurística (ver anexos rejilla de análisis de la actividad N°3, problema N°1).

Hallazgos

- G1 en su proceso de resolución del problema, utiliza el planteamiento de ecuaciones para dar solución al mismo, llegan a la solución y la verifican, se evidencia que los recursos matemáticos de los que disponían eran necesarios para dar solución al problema.


Solución

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{20(20-1)}{2} = \frac{380}{2} = 190$ saludos

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ saludos

$\frac{n(n-1)}{2} = 1225$

$n^2 - n = 2450$

$n^2 - n - 2450 = 0$

$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+9800}}{2} = \frac{1 \pm 99}{2}$ $\rightarrow n = 50 \rightarrow$ # personas entre la se intercambian

$\rightarrow \boxed{n = -49}$ *

Figura 36. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G1.

- G2 en su proceso de resolución del problema, utiliza el planteamiento de ecuaciones para dar solución al problema, después de haber conjeturado sobre lo pedido, pero no verifica el proceso de resolución del problema y la ecuación planteada no soluciona el problema.

1) 1.1 Como son en total 20 personas, sabemos que una de las perso debe saludar a 19.

→ Después multiplicamos los 19 saludos por las 20 personas

$19 \times 20 = 380$

→ En total tenemos 380 saludos.

1.2. → Si hay n personas, podemos hacer un calculo con base en el anterior caso y la multiplicación sería :

$(n-1) \times n =$ ___

y así obtenemos el número de saludos.

1.3 → $(n-1) \times n = 1225$

→ Se considera que debería existir otro dato, que nos permitirá conocer el número de personas.

Figura 37. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G2.

- G3 en su proceso de resolución del problema, utiliza el concepto de combinatoria para dar solución al problema, es decir los recurso matemáticos de los que disponían, fueron necesarios para solucionar el, problema.

1.) Se habran dado 190 apretones de mano.
si hubiesen n personas entonces se habian dado
x apretones tq $x = nC_2$. Si se tiene n personas y
nos dan la cantidad de apretones no podríamos determinar.

Figura 38. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G3.

- G4 en su proceso de resolución del problema, utiliza dos de las estrategias heurísticas que dan solución al problema estas son particularizar y hacer una tabla, también utilizan la noción de sumatoria, logrando llegar a una solución para el problema.

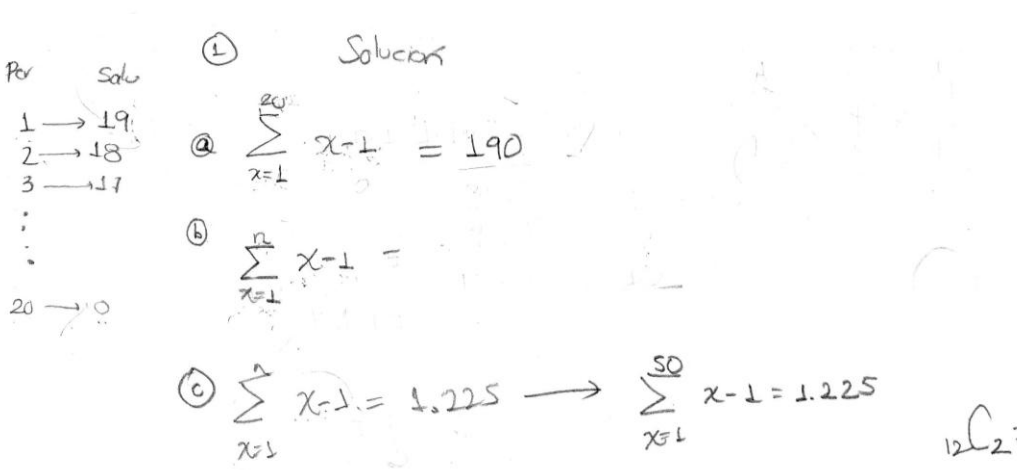


Figura 39. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G4.

- G5 en su proceso de resolución del problema, utiliza la multiplicación para dar solución al problema; aunque, conjeturan sobre lo pedido en el problema los recursos de los que disponía no fueron necesarios para soluciona el problema.

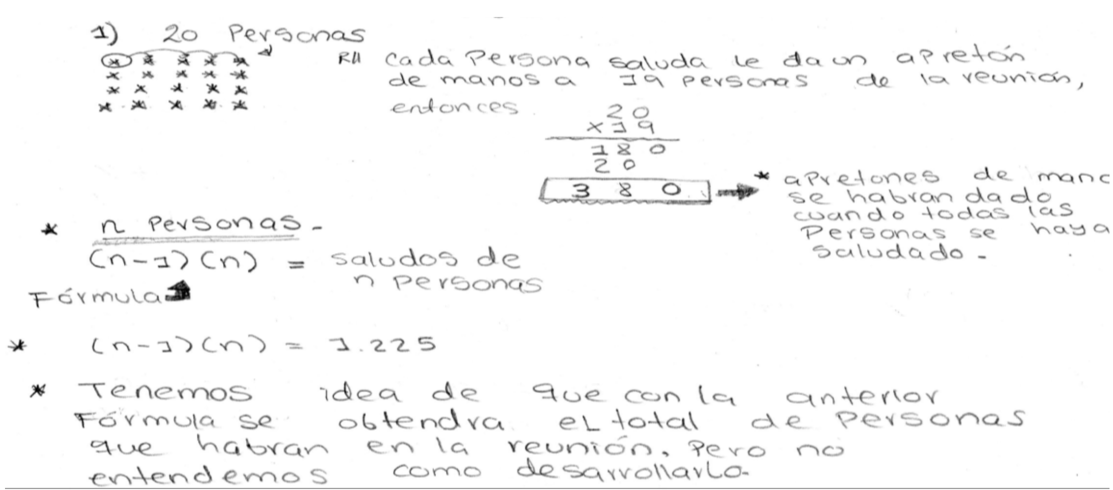


Figura 40. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G5.

- G6 en su proceso de resolución del problema, utiliza dos de las estrategias heurísticas que dan solución al problema estas son particularizar y hacer una tabla, también utilizan el concepto de combinatoria y logran encontrar una respuesta al mismo.

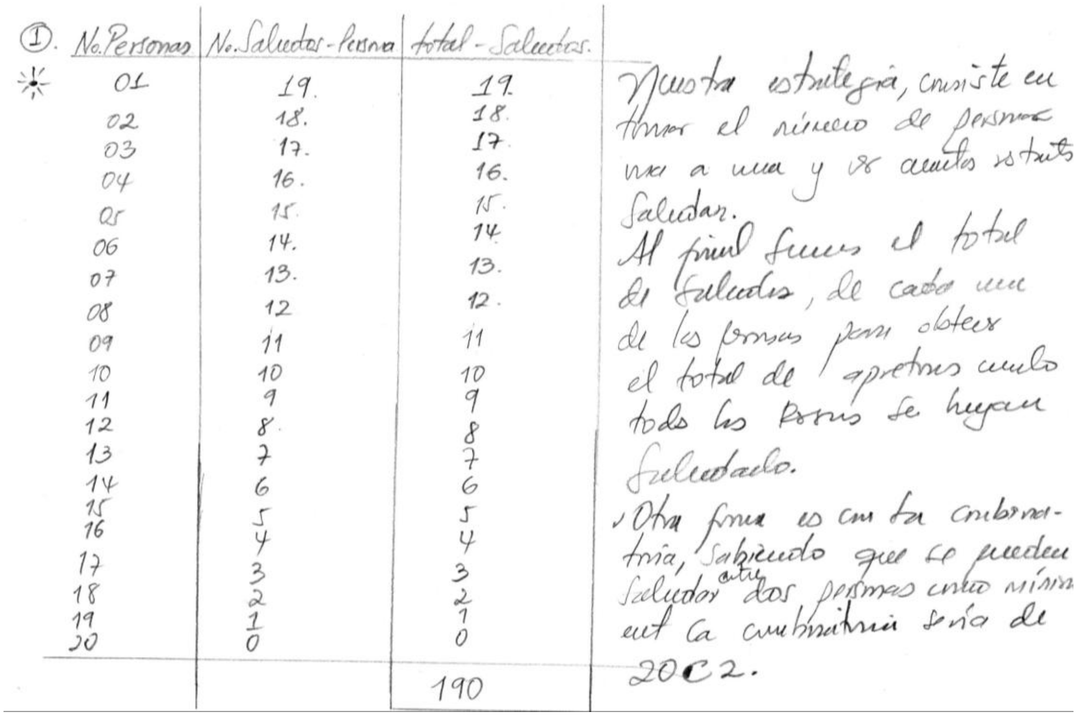


Figura 41. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G6.

- G7 en su proceso de resolución del problema, utiliza dos de las estrategias heurísticas que dan solución al problema estas son particularizar y hacer una tabla, también utilizan la noción de sumatoria, se evidencia claramente que los recursos matemáticos de los que disponían para dar solución al problema fueron suficientes.

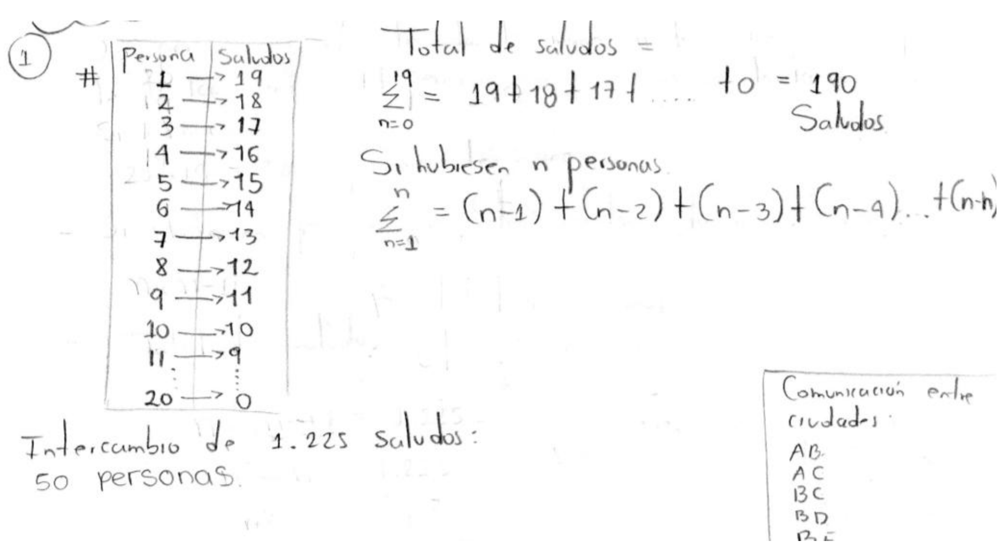


Figura 42. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G7.

- G8 en su proceso de resolución del problema, utiliza todas las estrategias heurísticas que dan solución al problema estas son: resolver un problema más sencillo, particularizar, hacer un gráfico, hacer una tabla y generalizar, la fórmula que encuentra al hacer la tabla es la que garantiza la solución del problema; es decir se deja ver que la utilización de la tabla en la resolución del problema me permitió encontrar la solución.

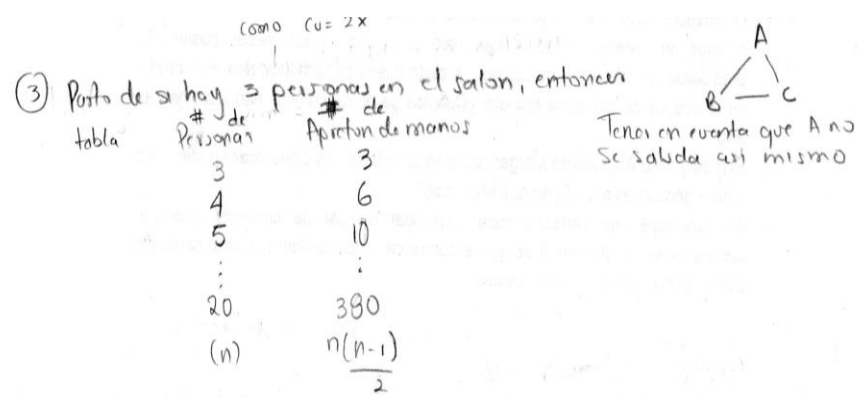


Figura 43. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G8.

- G9 en su proceso de resolución del problema, utiliza la estrategia heurística hacer un diagrama, se evidencia claramente que los recursos matemáticos de los que disponían para dar solución al problema fueron suficientes.

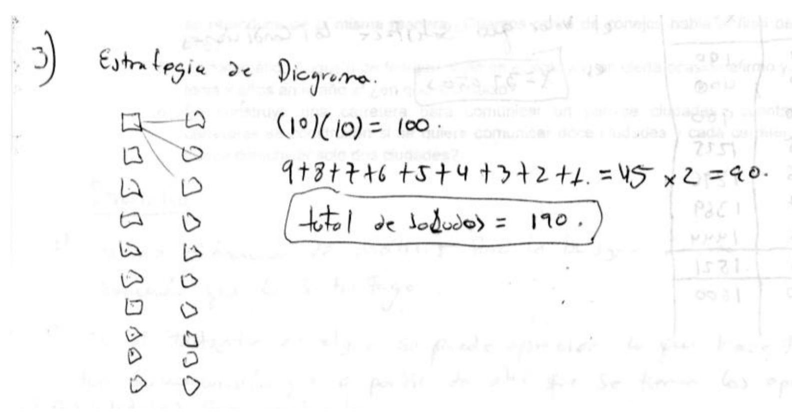


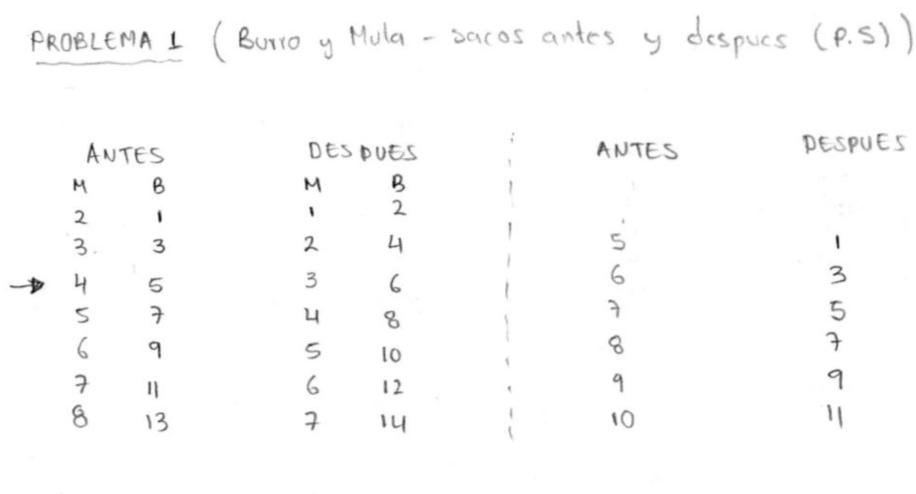
Figura 44. Solución del problema N°1, de la actividad N°3 por parte de G9.

Análisis del problema N°2.

La rejilla de análisis deja ver claramente, que la mayoría de los grupos durante el proceso de resolución del problema utilizaron por lo menos una estrategia heurística, la gran mayoría de los grupos utilizó la estrategia de hacer una tabla, aunque esta no estaba divisada entre las estrategias que daban solución al problema, es posible que los estudiante para profesores hallan contemplado una familiaridad entre el problema y la estrategia vista durante el curso, y por esta razón hallan utilizado la estrategia en dicha resolución. De manera similar, se destaca la aparición de la estrategia heurística ensayo y error, para solucionar el problema, puesto que, esta tampoco se contemplaba como una estrategia que solucionara el problema, pero la adecuada implementación de la misma por parte de los resolutores dejo ver una solución. Se destaca la utilización del planteamiento de ecuaciones como estrategia heurística y por tanto los recursos matemáticos que disponga el estudiante para solucionar las ecuaciones planteadas.

Hallazgos

- G1 en su proceso de resolución de problema, utiliza la estrategia heurística hacer una tabla para dar solución al problema, pero al no verifica el proceso de resolución, la heurística, al no ser utilizada adecuadamente no ayuda a la resolución del problema.

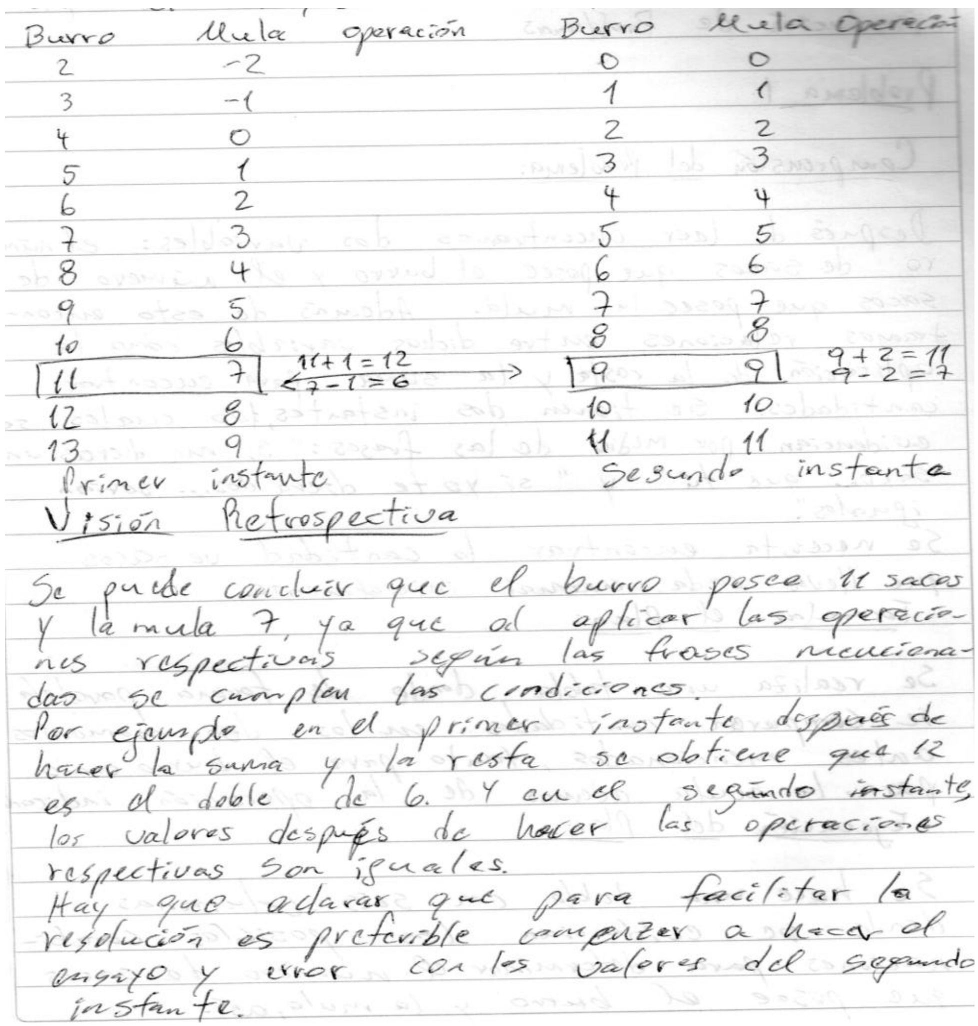


PROBLEMA 1 (Burro y Mula - sacos antes y despues (P.S))

ANTES		DESPUES		ANTES	DESPUES
M	B	M	B		
2	1	1	2		
3	3	2	4	5	1
4	5	3	6	6	3
5	7	4	8	7	5
6	9	5	10	8	7
7	11	6	12	9	9
8	13	7	14	10	11

Figura 45. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G1.

- G2 en su proceso de resolución de problema, utiliza la estrategia heurística hacer una tabla para dar solución al problema, pero al verifica el proceso de resolución, la heurística, no fue utilizada adecuadamente, y al hacer la visión retrospectiva del problema los resolutores no tuvieron en cuenta las condiciones iniciales del problema, por tanto no llegan a la solución.



Burro	Mula	operación	Burro	Mula	Operación
2	-2		0	0	
3	-1		1	1	
4	0		2	2	
5	1		3	3	
6	2		4	4	
7	3		5	5	
8	4		6	6	
9	5		7	7	
10	6		8	8	
$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	11+1=12 7-1=6	$\boxed{9}$	$\boxed{9}$	9+2=11 9-2=7
12	8		10	10	
13	9		11	11	
Primer instante			Segundo instante		

Visión Retrospectiva

Se puede concluir que el burro posee 11 sacos y la mula 7, ya que al aplicar las operaciones respectivas según las frases mencionadas se cumplen las condiciones.
Por ejemplo en el primer instante después de hacer la suma y la resta se obtiene que 12 es el doble de 6. Y en el segundo instante los valores después de hacer las operaciones respectivas son iguales.
Hay que aclarar que para facilitar la resolución es preferible comenzar a hacer el ensayo y error con los valores del segundo instante.

Figura 46. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G2.

- G3 en su proceso de resolución de problema, utiliza la estrategia heurística hacer una tabla para dar solución al problema, al encontrar una solución al problema , los resolutores no verifican los datos encontrados, es decir no hacen una visión retrospectiva al problema, es probable que por esta razón no hayan resuelto correctamente el problema.

R.

Antes		Después		Después	
M	B	M	B	M	B
2	1	1	2		
3	3	2	4	5	1
4	5	3	6	6	3
5	7	4	8	7	5
6	9	5	10	8	7
7	**11**	**6**	**12**	**9**	**9**
8	13	7	14	10	11

Cada animal llevaba 7 y 11 sacos respectivamente.

Figura 47. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G3.

- G4 en su proceso de resolución del problema, utiliza la estrategia heurística hacer una tabla para dar solución al problema, además, de seguir el modelo del Polya, pero su solución resulta ser incorrecta, pues le otorgan demasiada confiabilidad a la tabla, que en la fase comprobación omiten verificar la solución en el enunciado.

Paso No1 Entender el problema:.

En este punto se lee el problema y se empieza identifican-
do lo que se solicita o la pregunta. en este caso hace
alusión a cuántos sacos tiene cada animal al inicio.

Paso No2 plantear un plan:

En este caso se puede plantear una tabla comparativa del
antes y después organizando los datos en un primer momento del
enunciado "Si me dieras un saco tendría el doble de sacos que tú"
y luego otra fila que relaciones el segundo momento del enuncia-
do " y si yo te diera dos de mis sacos nuestras cargas serían igual

Paso No3. Aplicar el plan:.

Figura 48. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G4.

(Antes) (Despues) (Não después)

Antes		Después		Despues	
Mula	Burro	Mula	Burro	Mula	Burro
2	1	1	2		
3	3	2	4	5	1
4	5	3	6	6	3
5	7	4	8	7	5
6	9	5	10	8	7
7	11	6	12	9	9
8	13	7	14	10	11

La Mula tenia 7 y el Burro tenia 11 sacos de carga.

Paso No 4 Comprobación de la Solución.

En este problema se verifica que cumplan las dos condiciones las cuales. Se comprueba en las tablas planteadas en el paso anterior.

Figura 49. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G4.

- G5 en su proceso de resolución del problema, utiliza el planteamiento de ecuaciones para dar solución al mismo, aun que llegan a una solución no hay un comprobación por parte de los mismos que les permita garantizar la respuesta.

1. Lo que el problema nos pide es encontrar el número de sacos de cada uno de los animales de tal manera que si el burro le da dos a la mula tendrían la misma cantidad de saco y si la mula le da uno al burro tendrá el doble de sacos que la mula. Para la solución de este problemas podemos realizar dos ecuaciones con los datos enunciados 2(x-1)=y+1 x+1=y-1
   Al resolverlo llegamos a la conclusión de que x= 5 y Y= 7

Figura 50. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G5.

- G6 en su proceso de resolución del problema, establece una relación entre las cargas del burro y la mulas (se considera una tabla) para dar solución al problema, aunque, la tabla no deja ver de dónde se deduce la respuesta, los resolutores dan una, que resulta ser falsa.

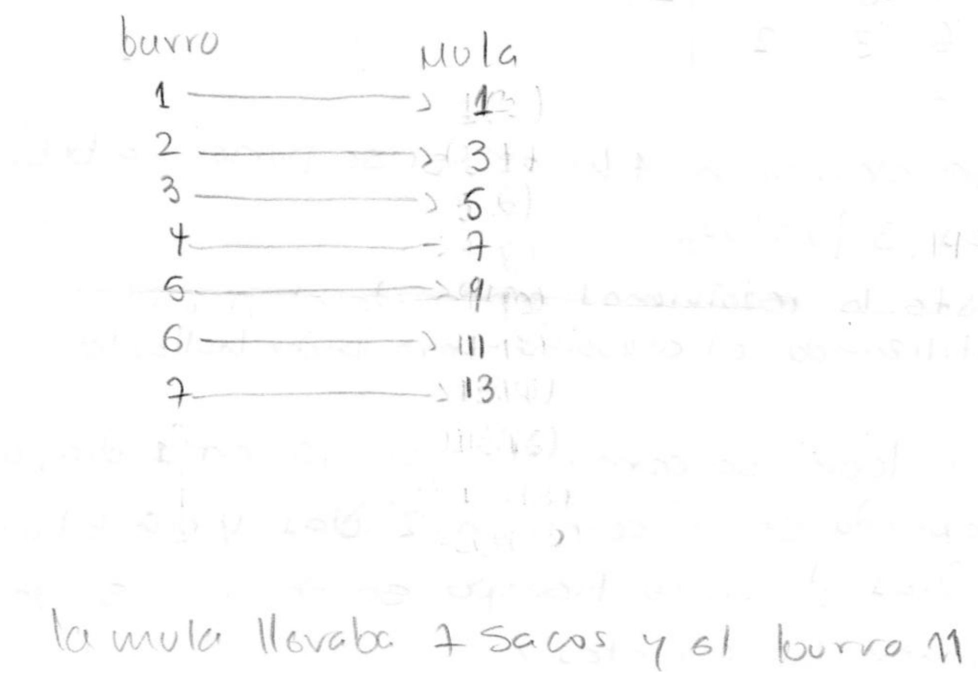


Figura 51. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G6

- G7 no resuelve el problema.

- G8 en su proceso de resolución del problema, utiliza el planteamiento de ecuaciones para dar solución al mismo, aun que llegan a una solución no hay un comprobación por parte de los mismos que les permita garantizar la respuesta.

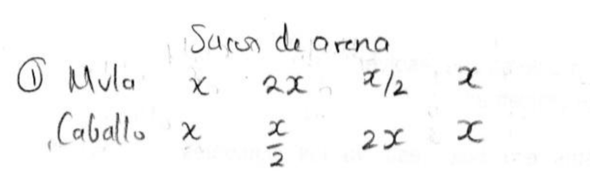
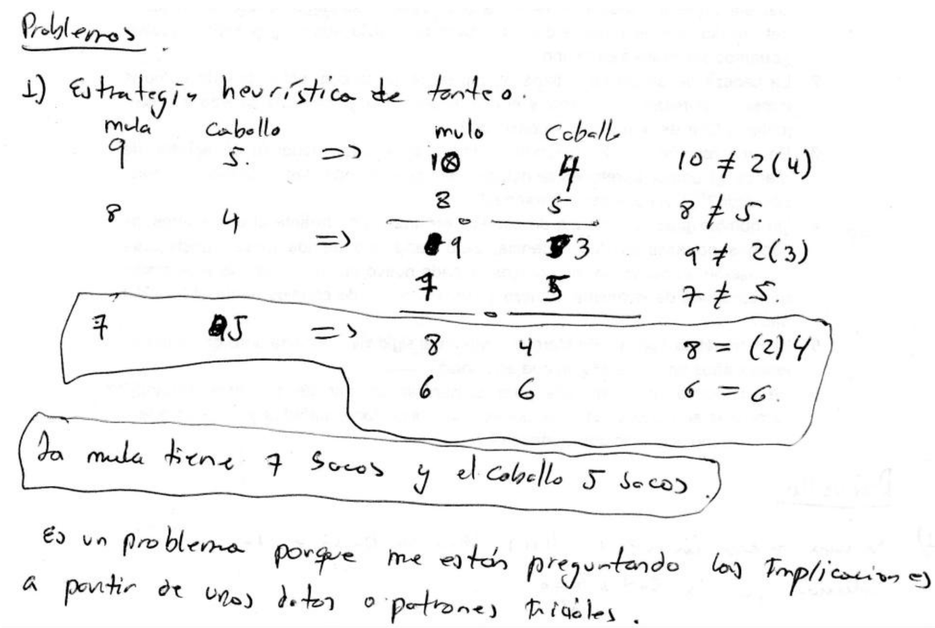


Figura 52. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G8

- G9 en su proceso de resolución del problema, utiliza el tanteo (lo consideramos dentro de la categoría del ensayo y error) para dar solución al mismo, llegan a una solución y hay una comprobación por parte de los mismos que les permita garantizar la respuesta.


Problemas

1) Estrategia heurística de tanteo.

mula caballo => mulo caballo
9 5 => 10 4 $10 \neq 2(4)$
8 5 $8 \neq 5$
8 4 => 9 3 $9 \neq 2(3)$
7 5 $7 \neq 5$
7 5 => 8 4 $8 = (2)4$
6 6 $6 = 6$.

La mula tiene 7 sacos y el caballo 5 sacos.

Es un problema porque me están preguntando las implicaciones a partir de unos datos o patrones triviales.

Figura 53. Solución del problema N°2, de la actividad N°3 por parte de G9.

Análisis del problema N°3.

En la rejilla de análisis se deja ver que todos los estudiantes durante el proceso de resolución del problema utilizaron por lo menos una de las estrategias heurísticas que resolvían el problema, se evidencia que todos usaron el planteamiento de ecuaciones en la resolución y que solo dos de los nueve grupos no encontraron la solución, esta cuestión se asocia a la debilidad presentada en la noción de planteamiento y resolución de ecuaciones, al mismo tiempo se evidencia que las personas que encontraron la solución debieron hacer un gráfico, para mostrar la relación entre la ecuación planteada y la situación problematizada en el enunciado del problema. Finalmente se resalta que ocho de los nueve grupos en su proceso de resolución aplicaron el modelo de Polya, hecho que les llevo a la gran mayoría de estos a encontrar la solución del problema.

Hallazgos

- G1 en su proceso de resolución del problema, utiliza dos de las estrategias heurísticas que resuelven el problema, la realización del gráfico y el planteamiento y resolución de ecuaciones, se resalta que en su proceso de resolución, también, involucra el modelo de Polya, lo cual garantiza la solución del problema, dado que la resolución esta supervisada y los errores se pueden predecir, ya que la resolución esta sujeta a la verificación. Así este grupo logra encontrar la solución al problema.

Problemas: Eduardo Cuaspa

1) a b c

$48 = a + b + c$ (1)

$a = \frac{1}{3} b$ (2)

$c = \left(\frac{1}{3} b + b\right)$ (3)

reemplazando (2) y (3) en (1)

$48 = \left(\frac{1}{3} b\right) + b + \left(\frac{1}{3} b + b\right)$

$= 2\left(\frac{1}{3} b\right) + 2b$

$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) 2b$

$= \left(\frac{4}{3}\right) 2b$

$48 = \frac{8}{3} b$

$18 = b$

Ahora, reemplazamos b en (2)

$a = \left(\frac{1}{3}\right) 18 = 6$

y, b en (3):

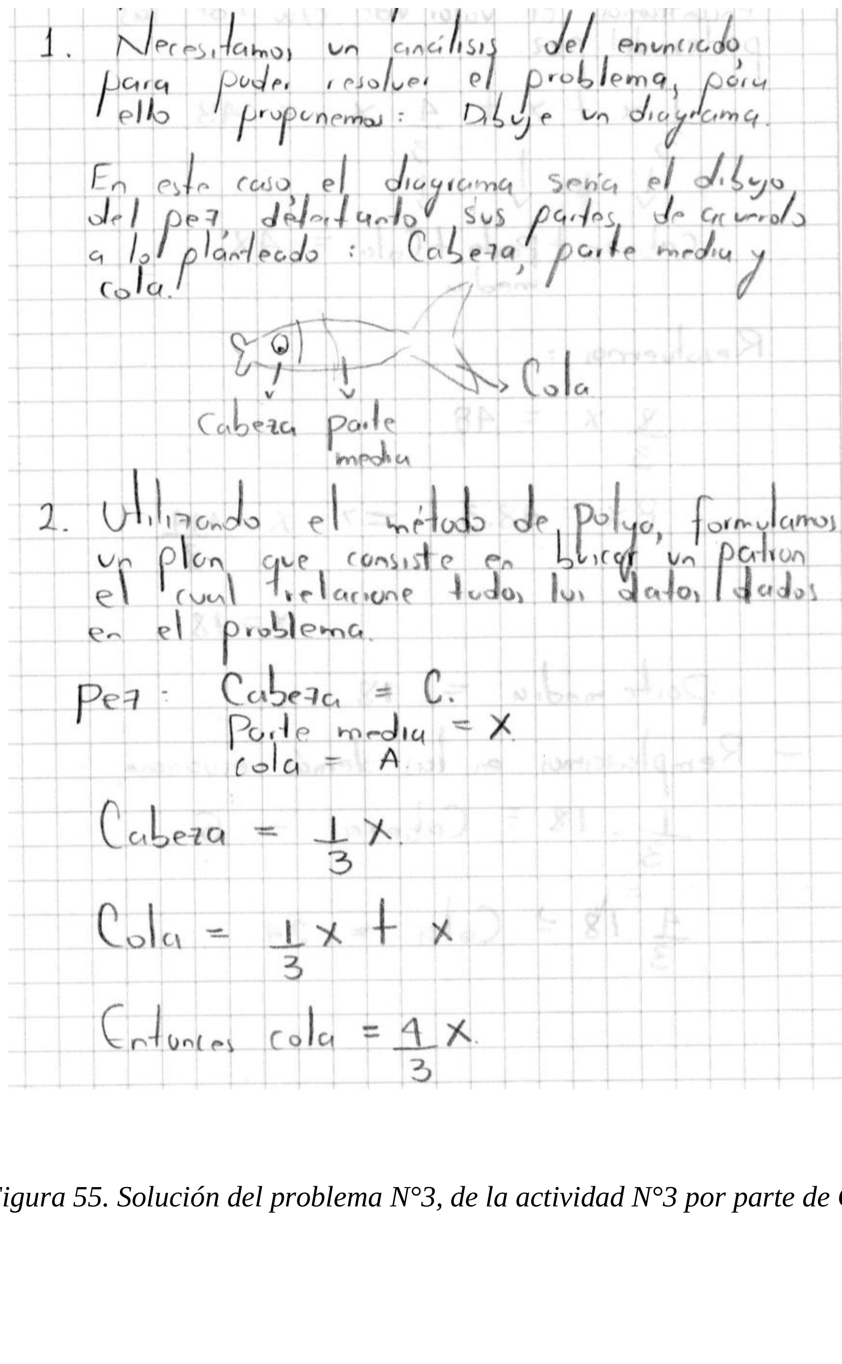
$c = \left(\left(\frac{1}{3}\right)18 + 18\right) = 24$

Estrategias de Resolucion:

- Una de las mas importantes y claras estrategias para la resolucion de un problema es mediante la representación grafica de la situación. Esto permite al estudiante visualizar y ejemplificar el caso de tal manera que pueda utilizar el dibujo como via hacia la comprension de las operaciones que se van a ejecutar. En este caso, se dice que la cabeza de un pez tiene de largo 1/3 de la parte media de éste. Aquí, se puede observar que el estudiante debe de poner la cabeza en funcion de la parte media. (ver dibujo)
- Otra estrategia util es el orden en que el problema esta planteado. Un estudiante puede descomponer el enunciado de tal manera que le resulte mas facil el esquema de resolución. Resulta ser mas facil ver el todo (el pescado entero) primero, para tener una vision y hacia dónde apunta la solución.

Figura 54. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G1

- G2 en su proceso de resolución del problema, utiliza el modelo de Polya, garantizando así, que es importante comprender el problema, para poder determinar la estrategia que ayudaría a la resolución del mismo, en esta mediada los resolutores logran determinar que la estrategia heurística mas adecuada para solucionarlo es la de hacer un diagrama y posteriormente plantear y resolver una ecuación, que solucione el problema.


1. Necesitamos un análisis del enunciado para poder resolver el problema, para ello proponemos: Dibuje un diagrama.

En este caso el diagrama sería el dibujo del pez, detallando sus partes, de acuerdo a lo planteado: Cabeza, parte media y cola.

2. Utilizando el método de polya, formulamos un plan que consiste en buscar un patron el cual relacione todos los datos dados en el problema.

Pez: Cabeza = C.
Parte media = X.
cola = A.

$$\text{Cabeza} = \frac{1}{3}X.$$

$$\text{Cola} = \frac{1}{3}x + x$$

$$\text{Entonces cola} = \frac{4}{3}x.$$

Figura 55. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G2

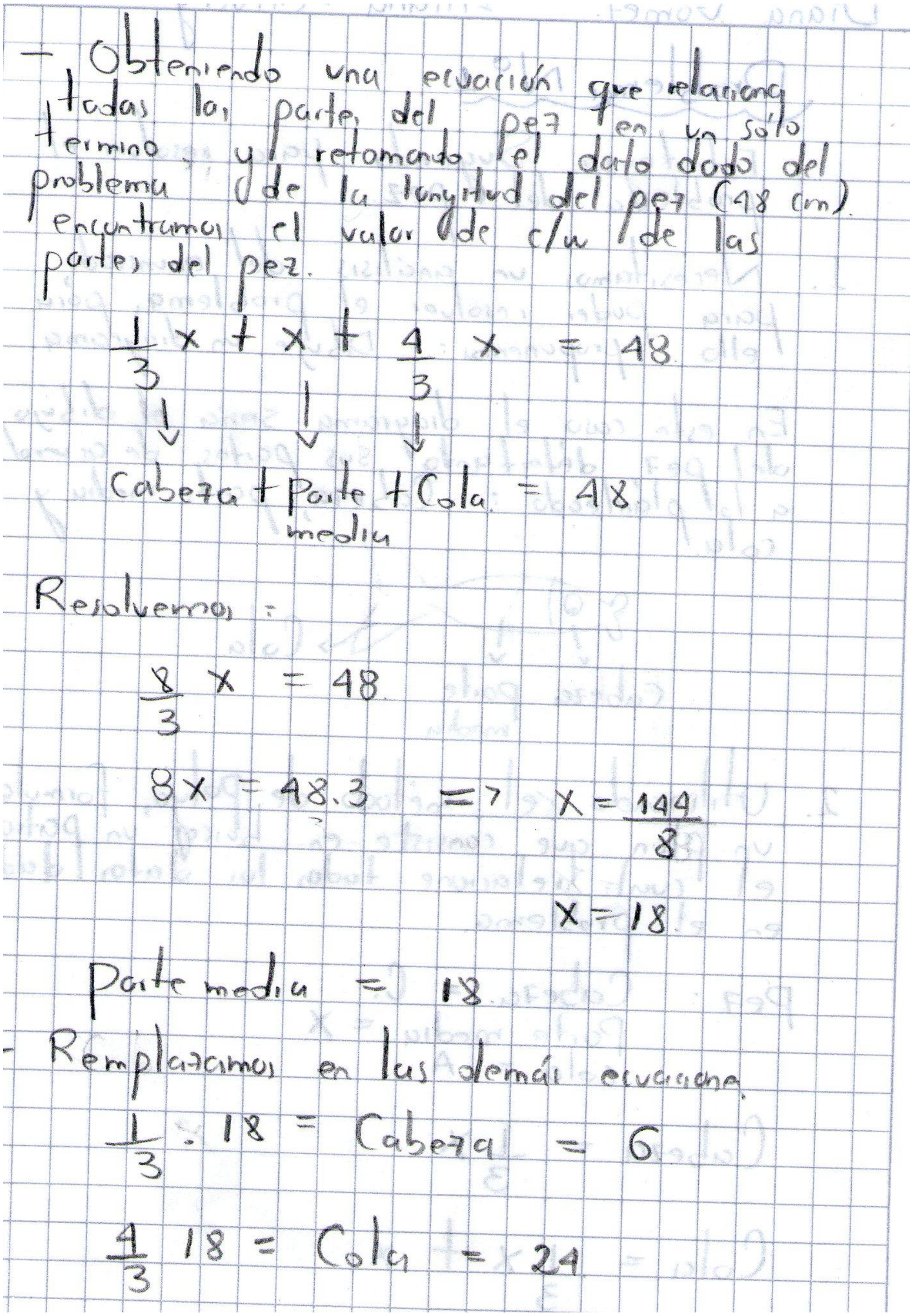
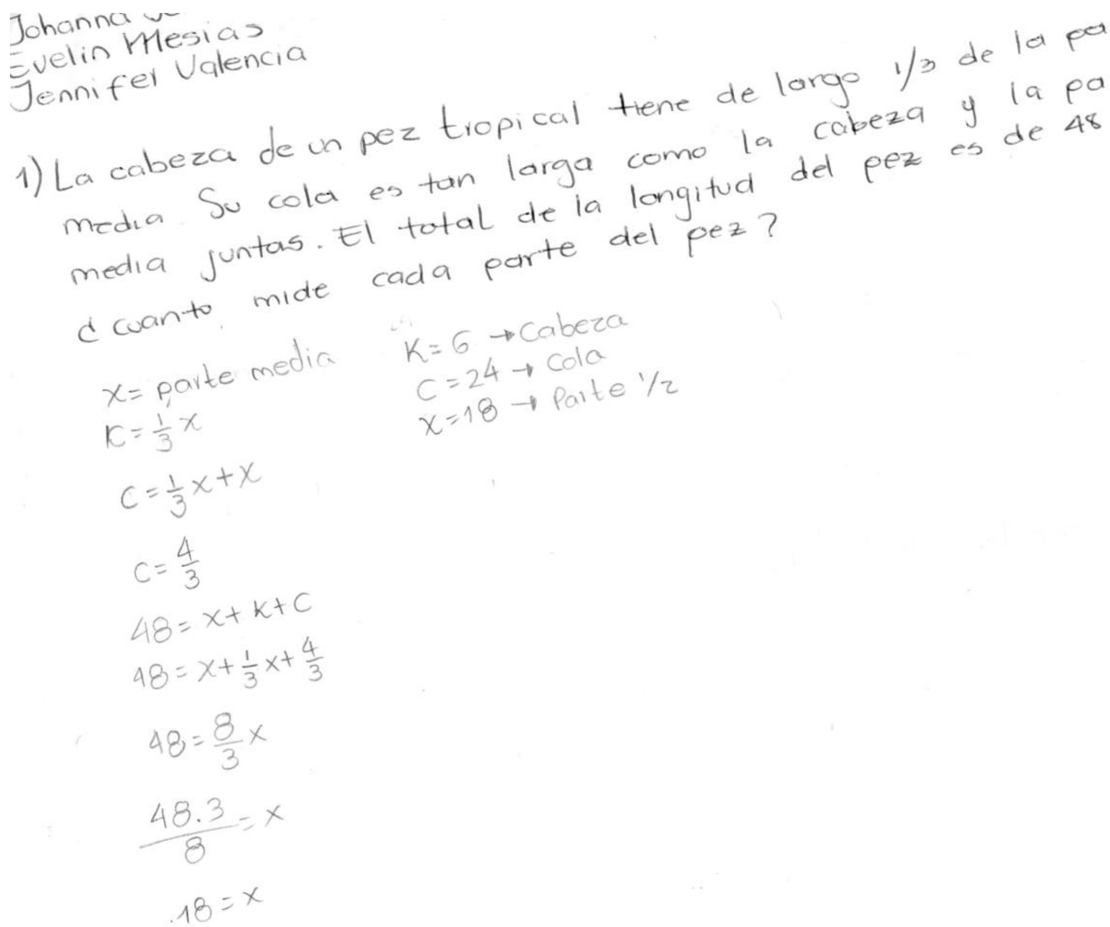


Figura 56. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G2.

- G3 en su proceso de resolución del problema, utiliza, los recursos matemáticos de los que dispone, en este caso hace uso del planteamiento de ecuaciones para poder determinar una solución; los resolutores no logran determinar una respuesta, en la medida en que admiten no conocer una estrategia heurística que solucione el problema.



Johanna ...
Evelin Mesias
Jennifer Valencia

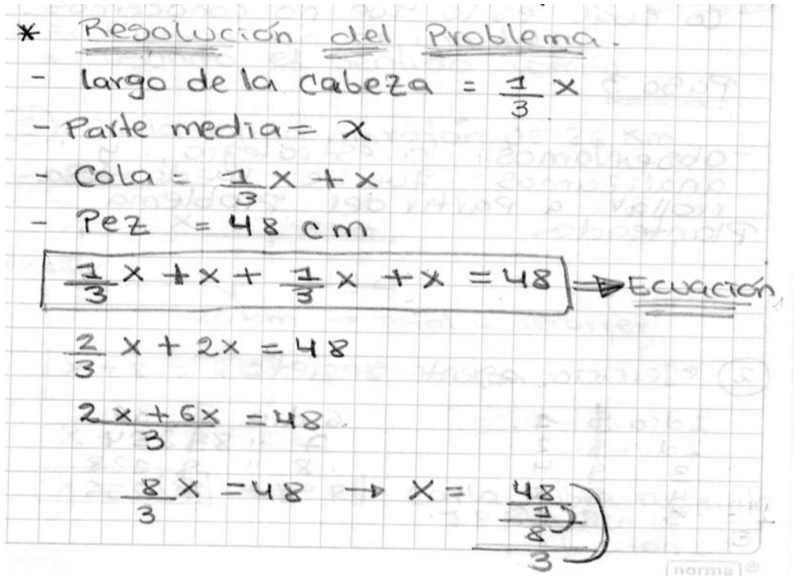
1) La cabeza de un pez tropical tiene de largo 1/3 de la parte media. Su cola es tan larga como la cabeza y la parte media juntas. El total de la longitud del pez es de 48 ¿cuanto mide cada parte del pez?

x= parte media
$K=\frac{1}{3}x$
$C=\frac{1}{3}x+x$
$C=\frac{4}{3}$
$48=x+k+C$
$48=x+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$
$48=\frac{8}{3}x$
$\frac{48.3}{8}=x$
$18=x$

K= 6 → Cabeza
C =24 → Cola
x=18 → Parte 1/2

Figura 57. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G3.

- G4 en su proceso de resolución del problema, utiliza el modelo de Polya, al tiempo que reconocen que para dar solución al problema se hace necesario plantear una ecuación, dado que, hay una incógnita y para ellos la forma más adecuada de determinar el valor de dicha incógnita es resolviendo un serie de ecuaciones que cumplan las condiciones del problema.



* Resolución del Problema.

- largo de la cabeza $= \frac{1}{3}x$
- Parte media $= x$
- Cola $= \frac{1}{3}x + x$
- Pez $= 48$ cm

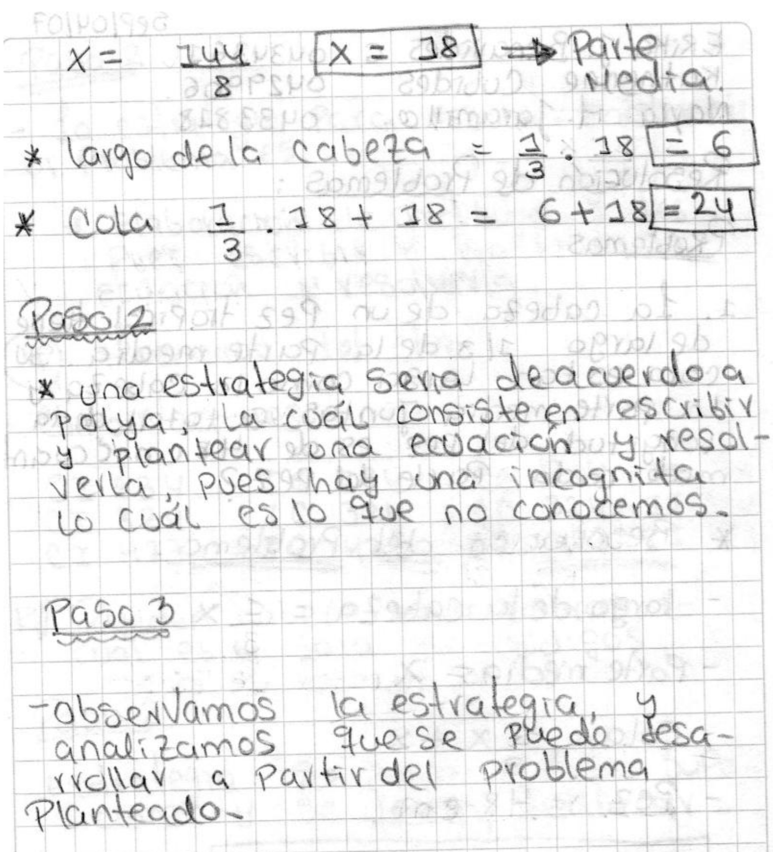
$\boxed{\frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + x = 48}$ ⇒ Ecuación

$\frac{2}{3}x + 2x = 48$

$\frac{2x + 6x}{3} = 48$

$\frac{8}{3}x = 48 \rightarrow x = \frac{\frac{48}{1}}{\frac{8}{3}}$

Figura 58. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G4



$x = \frac{144}{8}$ $\boxed{x = 18}$ ⇒ Parte media.

* largo de la cabeza $= \frac{1}{3} \cdot 18$ $\boxed{= 6}$

* Cola $\frac{1}{3} \cdot 18 + 18 = 6 + 18$ $\boxed{= 24}$

Paso 2

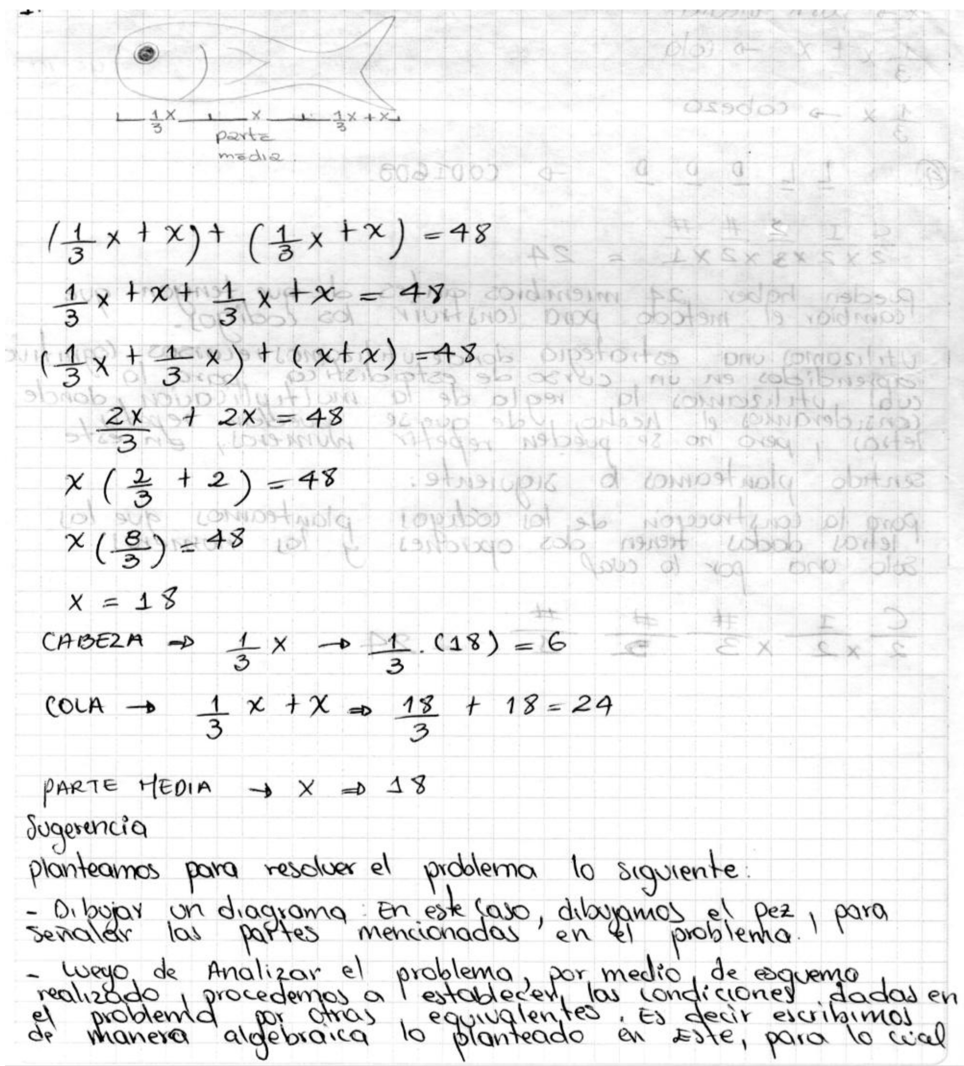
* una estrategia sería de acuerdo a polya, la cuál consiste en escribir y plantear una ecuación y resolverla, pues hay una incognita lo cuál es lo que no conocemos.

Paso 3

- observamos la estrategia, y analizamos que se puede desarrollar a partir del problema planteado.

Figura 59. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G4

- G5 en su proceso de resolución del problema, sugiere hacer un gráfico, para establecer relaciones entre el enunciado del problema y el grafico, al tiempo sugieren que dichas relaciones se expresan en términos de ecuaciones, los resolutores logran determinar la solución del problema y se evidencia claramente que dicha solución estuvo condicionada por las estrategias heurísticas hacer un diagrama y planteara y resolver ecuaciones.



$$\left(\frac{1}{3}x + x\right) + \left(\frac{1}{3}x + x\right) = 48$$

$$\frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + x = 48$$

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x\right) + (x + x) = 48$$

$$\frac{2x}{3} + 2x = 48$$

$$x\left(\frac{2}{3} + 2\right) = 48$$

$$x\left(\frac{8}{3}\right) = 48$$

$$x = 18$$

CABEZA $\rightarrow \frac{1}{3}x \rightarrow \frac{1}{3}.(18) = 6$

COLA $\rightarrow \frac{1}{3}x + x \Rightarrow \frac{18}{3} + 18 = 24$

PARTE MEDIA $\rightarrow x \Rightarrow 18$

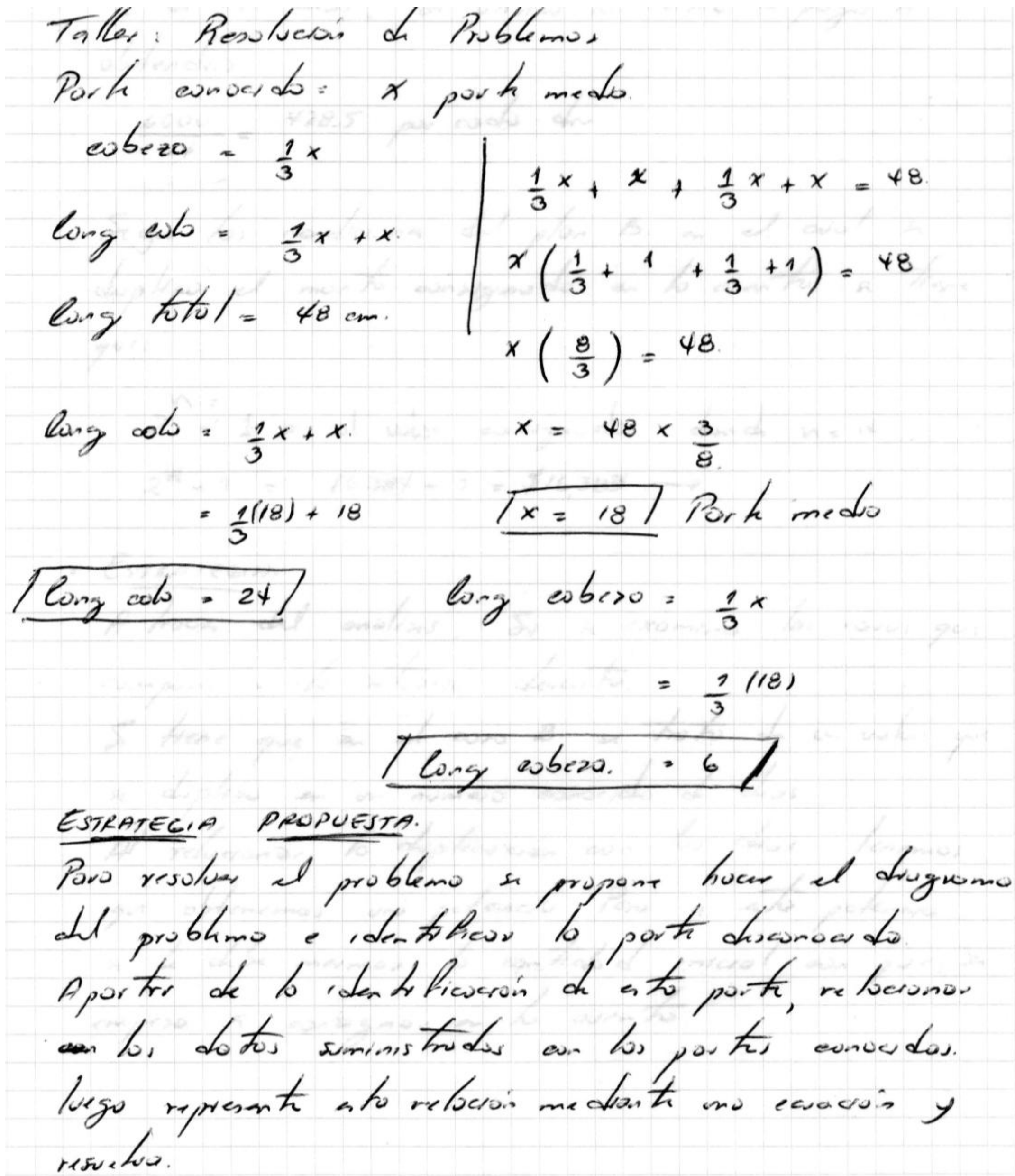
Sugerencia

planteamos para resolver el problema lo siguiente:

- Dibujar un diagrama En este caso, dibujamos el pez, para señalar las partes mencionadas en el problema.
- Luego de Analizar el problema, por medio de esquemo realizado, procedemos a establecer las condiciones dadas en el problema por otras equivalentes. Es decir escribimos de manera algebraica lo planteado en este, para lo cual

Figura 60. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G5.

- G6 en su proceso de resolución del problema, sugiere utilizar la estrategia heurística hacer un diagrama, aunque no lo realizan; garantizan que dicho grafico es importante, debido, a que los datos del enunciado, se relacionan con el mismo, y en esta medida los datos se plantean como ecuaciones que garantizan la solución del problema. Así los resolutores logran determinar la solución del problema.



Taller: Resolución de Problemas

Parte conocida: x parte media

cabeza $= \frac{1}{3}x$

long cola $= \frac{1}{3}x + x$

long total $=$ 48 cm.

$$\frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + x = 48$$

$$x\left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1\right) = 48$$

$$x\left(\frac{8}{3}\right) = 48$$

$$x = 48 \times \frac{3}{8}$$

$\boxed{x = 18}$ Parte media

long cola $= \frac{1}{3}x + x$

$= \frac{1}{3}(18) + 18$

$\boxed{\text{Long cola} = 24}$

long cabeza $= \frac{1}{3}x$

$= \frac{1}{3}(18)$

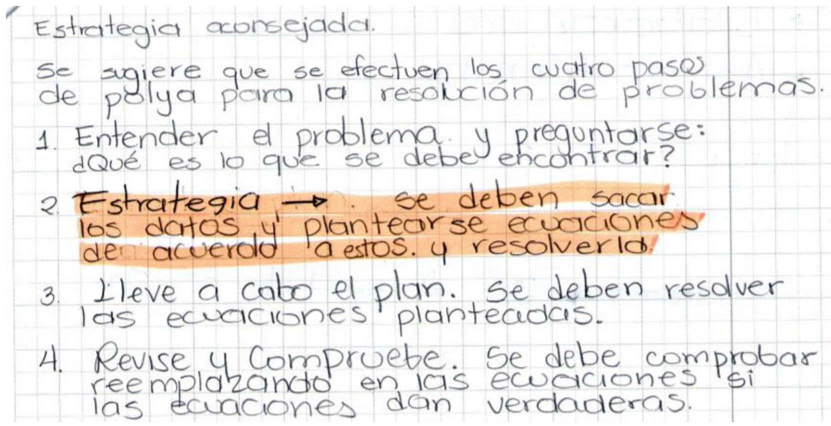
$\boxed{\text{Long cabeza} = 6}$

ESTRATEGIA PROPUESTA.

Para resolver el problema se propone hacer el diagrama del problema e identificar la parte desconocida. A partir de la identificación de esta parte, relacionar con los datos suministrados con las partes conocidas. luego representar esta relación mediante una ecuación y resolverla.

Figura 61. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G6.

- G7 en su proceso de resolución del problema, utiliza el modelo expuesto por Polya, además, garantiza que la estrategia heurística que facilitaría la solución del problema, es el planteamiento de ecuaciones, aunque el planteamiento resulta ser el adecuado, los resolutores no verifican la solución; obviando así el último paso del modelo de Polya.

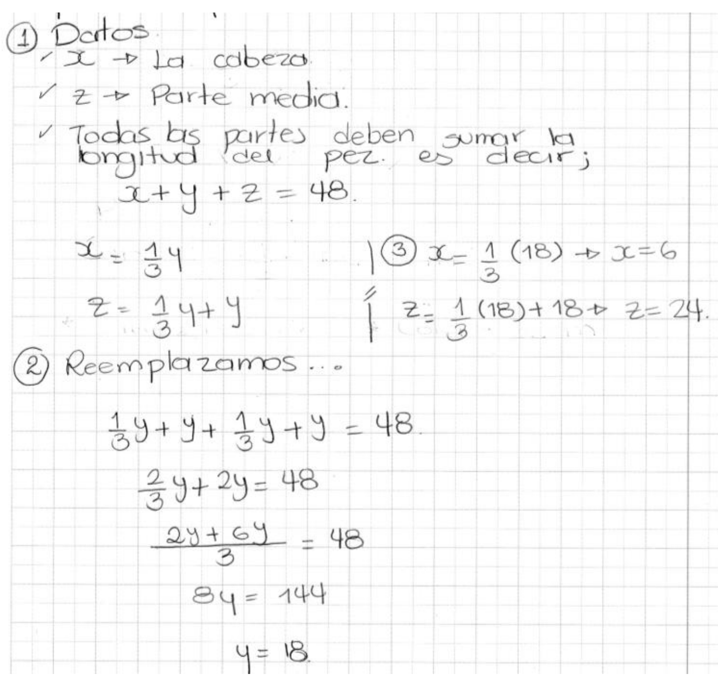


Estrategia aconsejada.

Se sugiere que se efectuen los cuatro pasos de polya para la resolución de problemas.

1. Entender el problema y preguntarse: ¿Qué es lo que se debe encontrar?
2. Estrategia → se deben sacar los datos y plantearse ecuaciones de acuerdo a estos. y resolverla.
3. Lleve a cabo el plan. Se deben resolver las ecuaciones planteadas.
4. Revise y Compruebe. Se debe comprobar reemplazando en las ecuaciones si las ecuaciones dan verdaderas.

Figura 62. solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G7.



(1) Datos.

✓ $x \to$ La cabeza

✓ $z \to$ Parte media.

✓ Todas las partes deben sumar la longitud del pez. es decir;

$x + y + z = 48.$

$x = \frac{1}{3}y$

$z = \frac{1}{3}y + y$

(3) $x = \frac{1}{3}(18) \to x = 6$

$z = \frac{1}{3}(18) + 18 \to z = 24.$

(2) Reemplazamos . . .

$\frac{1}{3}y + y + \frac{1}{3}y + y = 48.$

$\frac{2}{3}y + 2y = 48$

$\frac{2y + 6y}{3} = 48$

$8y = 144$

$y = 18$

Figura 63. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G7.

- G8 en su proceso de resolución del problema, utiliza la estrategia heurística hacer un diagrama y asocia al grafico el planteamiento de ecuaciones, pero dichas ecuaciones, no resultan ser las que solucionan el problema; aunque los resolutores deducen una respuesta esta no es la correcta.

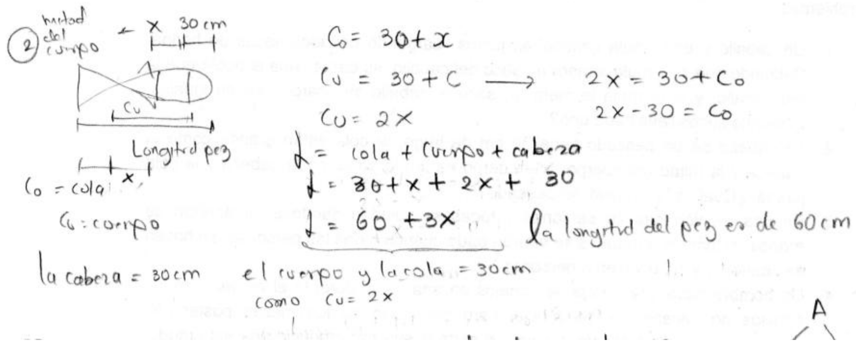


Figura 64. Solución del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G8.

- G9 en su proceso de resolución del problema, utiliza la estrategia heurística hacer un gráfico y utiliza además el planteamiento y solución de ecuaciones; a cada parte del grafico le asocia una ecuación, garantizando una respuesta al problema.

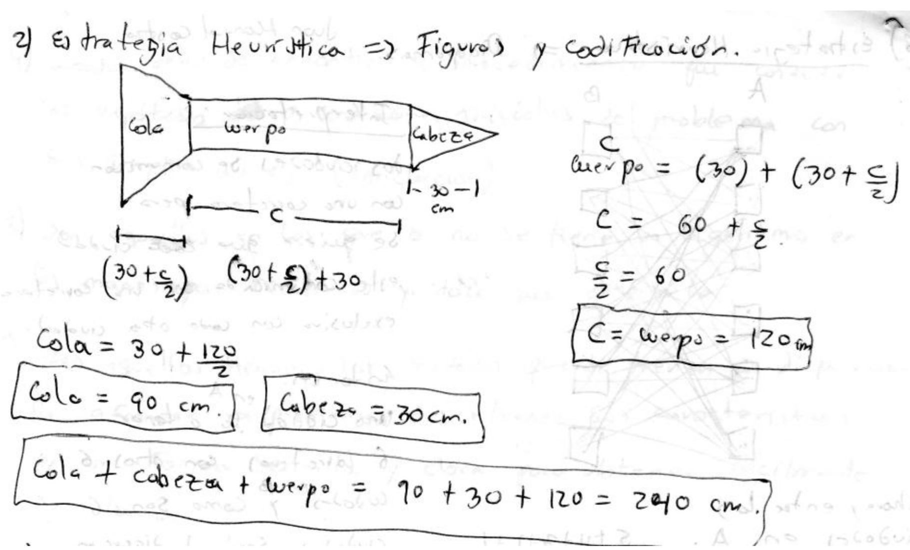


Figura 65. Soluciòn del problema N°3, de la actividad N°3 por parte de G9.

Análisis del problema N°4

La rejilla de análisis deja apreciar, que durante el procesos de resolución del problema, los resolutores emplearon cuatro estrategias heurísticas que ayudaban a encontrar la solución del problema, estas estrategias fueron hacer un gráfico, (todos los grupos resolutores la emplearon durante el procesos de resolución) particularizar (dos de los grupos resolutores la emplearon), resolver un problema más sencillo (un grupo la utiliza) y suponer el problema resuelto; esta estrategia heurística no estaba contemplada entre las estrategia que se podían emplear durante el proceso , pero, resulto que uno de los grupos la utilizo. Se resalta entonces que los resolutores pudieron encontrar la solución del problema sin mayores complicaciones gracias al empleo de algunas estrategias heurísticas y que un problema que se suponía netamente geométrico, fue influenciado por estrategias heurísticas en su proceso de resolución (ver anexos rejilla de análisis de la actividad N°3, problema N°4).

Hallazgos

- G1, durante el proceso de resolución del problema, realiza las diferentes configuraciones que dan lugar al problema, al tiempo que aseguran, que la forma más fácil y clara de ver la solución del problema es realizando tabla, en la cual que condensen los datos analizados en cada una de las gráficas realizadas; es decir durante el proceso de resolución de dicho problema utilizaron la estrategia heurística hacer un diagrama y recomiendan hacer una tabla, finalmente los resolutores dan solución al problema.

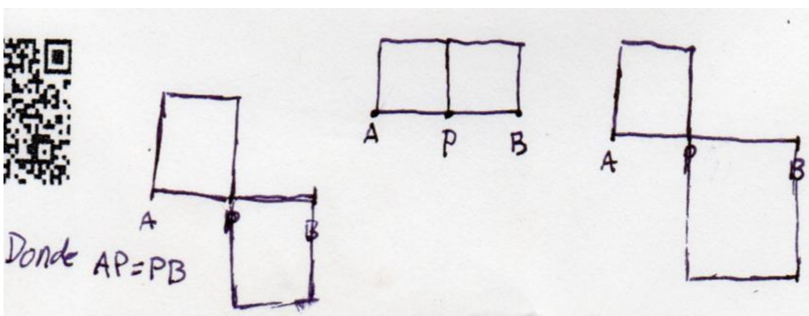


Figura 66. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G1.

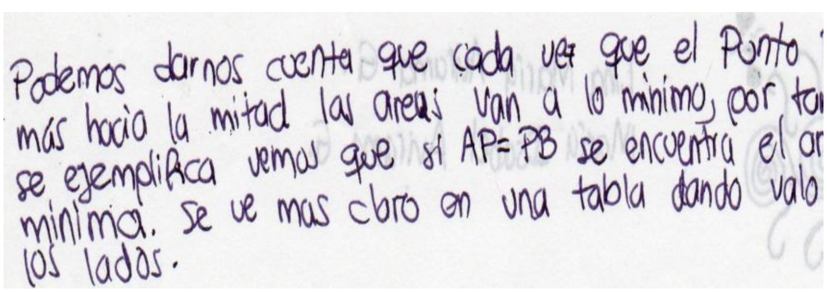


Figura 67. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G1.

- G2, durante el proceso de resolución del problema, utiliza las estrategias heurísticas hacer un diagrama, resolver un problema mas sencillo y tomar casos particulares, logrando así determinar una solución al problema; al mismo tiempo se evidencia una apropiación clara de las heurísticas empleadas.

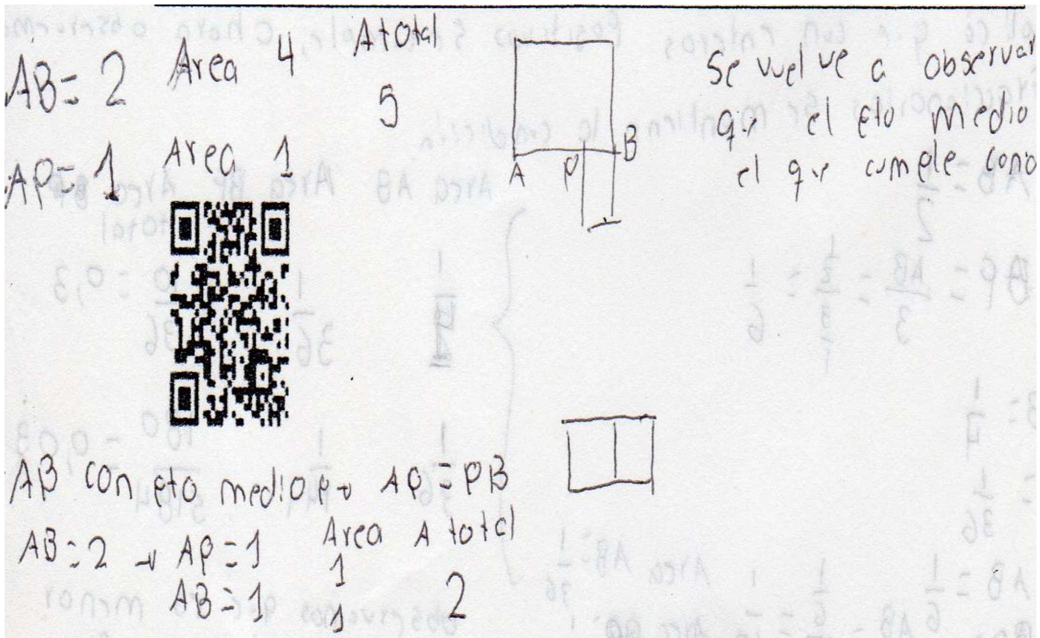


Figura 68. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G2.

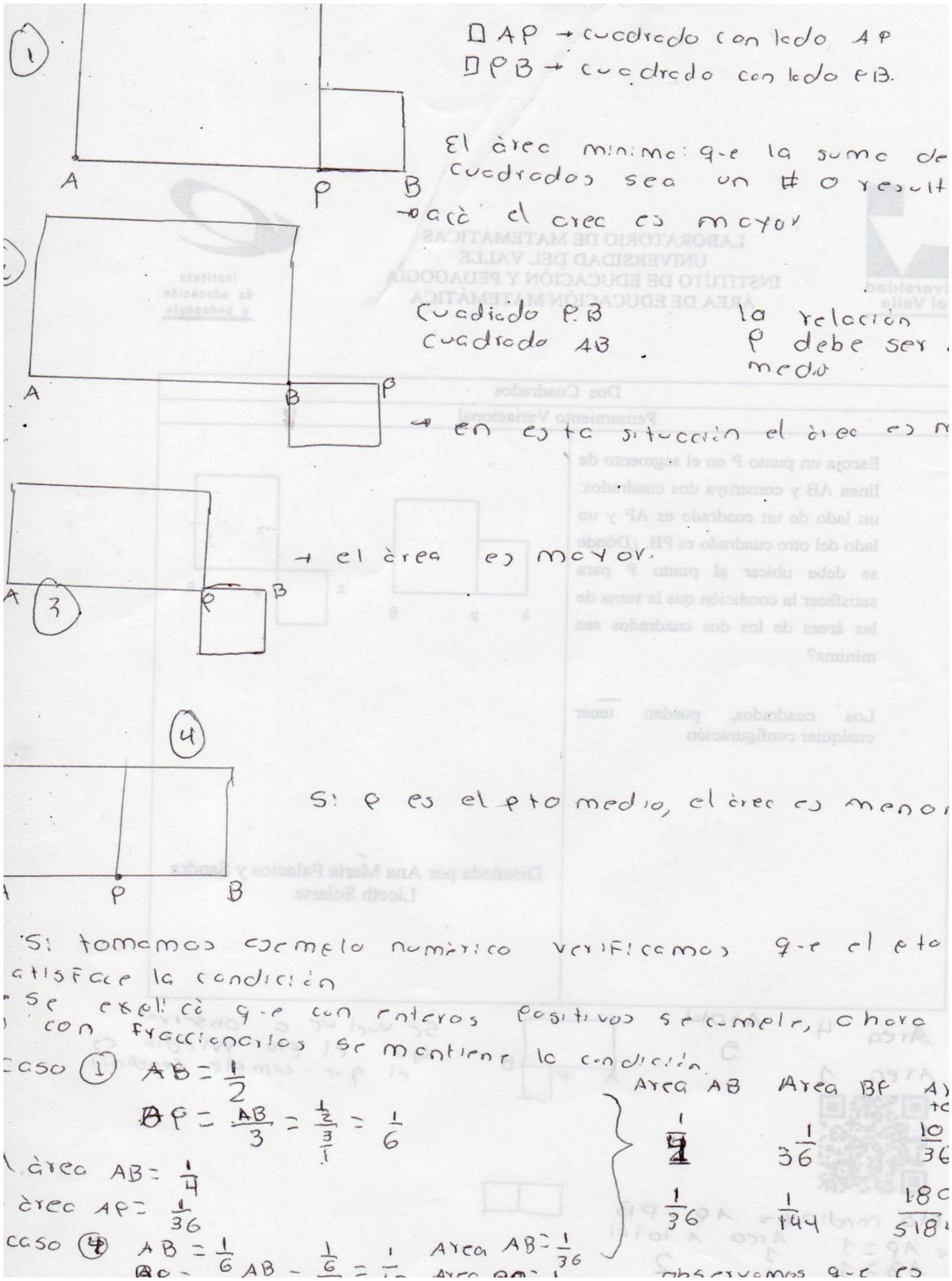


Figura 69. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G2.

- G3, durante el procesos de resolución del problema utiliza las estrategias heurísticas hacer un diagrama y tomar casos particulares, aun que los resolutores no dan la respuesta al problema, se puede evidenciar que las áreas son iguales cuando el punto P es el punto medio del segmento AB.

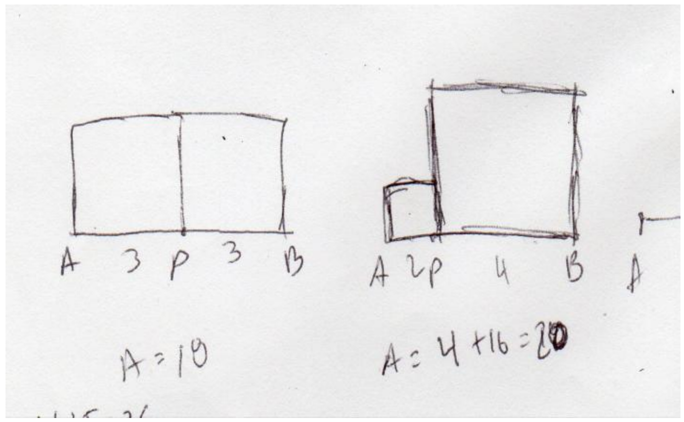


Figura 70. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G3.

- G4 en sus procesos de resolución del problema, lo supone ya resuelto y a partir de esta apreciación realiza una construcción que le garantiza que P es el punto medio del segmento dado, de sata manera, los resolutores encuentran la solución del problema.

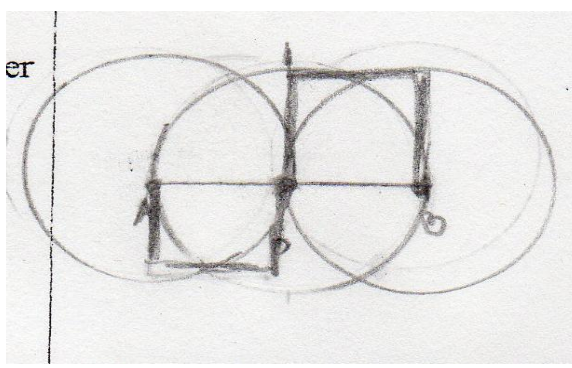
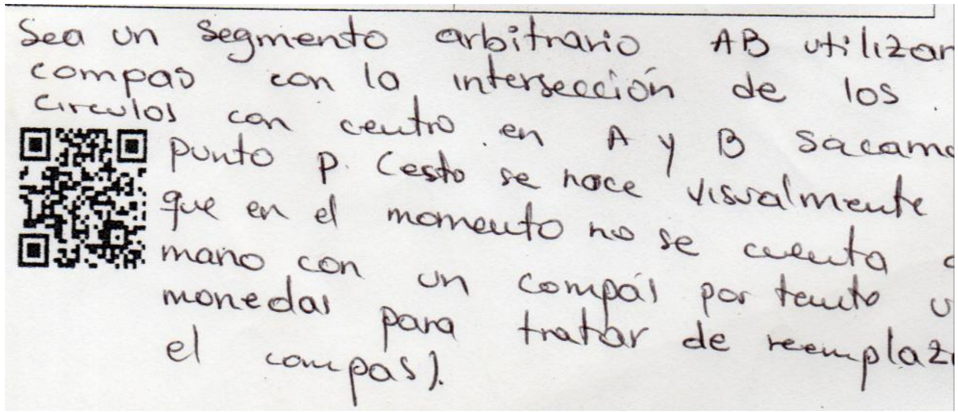


Figura 71. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G4.



Sea un segmento arbitrario AB utilizar
compas con la intersección de los
circulos con centro en A y B sacam
punto P. (esto se hace visualmente
que en el momento no se cuenta c
mano con un compás por tanto u
monedas para tratar de reemplaz
el compas).

Figura 72. Solución del problema N°4, de la actividad N°3 por parte de G4.

Finalmente, el análisis de todas las soluciones apunta a que existe una tendencia al reconocimiento parcial de las estrategias heurísticas por parte de los estudiantes en formación. Aunque, estas en ocasiones no sean empleadas adecuadamente para llegar a la solución del problema. Cabe resaltar, que los casos exitosos de resolución de problemas matemáticos estuvieron fuertemente influenciados por el empleo de un modelo de resolución y el uso de algunas estrategias heurísticas. Así como, la apropiación de recursos matemáticos.

Conclusiones

La investigación, tenía como propósito estudiar algunos de los alcances, limitaciones y posibilidades del enfoque de resolución de problemas, como proceso y metodología de enseñanza.

En este sentido, entre los logros de este trabajo de grado están a nuestro juicio, el haber verificado que en algunos de los hallazgos de las investigación sobre la utilización de las estrategias heurística en la resolución de problemas se acierta cuando, las estrategias heurísticas ayuda a los resoluctores a cambiar sus estructuras de una situación problema o su manera de verlas. Así pues, ellas ayudan a los resoluctores a explorar la situación problema y entenderla más profundamente, sobre todo cuando los resoluctores están atascados. Análogamente las estrategias heurísticas facilitan la exploración de los resoluctores, ellas no garantizan que los resolutores alcanzaran las soluciones finales. No puede decirse que el solo uso de las estrategias por un resoluctor sea un fracaso porque apenas puede mostrarle la solución *per se.* Si al utilizar las estrategias heurísticas el resoluctor tiene nueva información sobre la situación problema y empieza una nueva exploración, puede decirse que estas estrategias juegan un rol importante en este proceso de resolución de problemas.

Lo que resulta relevante aquí, es si los resolutores pueden obtener nueva información usando la información que ya conocen y las estrategias heurísticas, y si estas pueden facilitar las actividades de construcción del sentido del resoluctor. En esta medida los resolutores intentan cambiar su propio conocimiento matemático con las situaciones problemas confrontados. Si ellos tienen el conocimiento apropiado para dar sentido completo de las situaciones, ellos pueden encontrar esta combinación a través de la correspondencia de los elementos del conocimiento apropiado y aquellos de las situaciones aun cuando algunas situaciones intermedias puedan necesitarse. Finalmente, el proceso de resolución terminara cuando el resoluctor tenga sentido completamente de la situación con su conocimiento matemático basado en estructuras construidas recientemente y hallazgos que le permitan tomar una decisión sobre la pregunta formulada en el problema.

Adicionalmente se hizo evidente que las estrategias heurísticas utilizadas en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios, jugaron un rol clave tanto en la motivación para trabajar con los estudiantes como en la apropiación de elementos matemáticos, dado que se evidenció la presencia de obstáculos cognitivos en la representación y solución de los problemas.

A partir del análisis de las producciones se encontró que los modelos de resolución de problemas matemáticos no son simplemente secuenciales, consisten en varias fases incluyendo la comprensión de los problemas. Preferiblemente, los modelos enfatizan la transición entre esas fases. En tales modelos la misma fase, por ejemplo la comprensión de problemas, puede aparecer muchas veces en el proceso de resolución.

Cuando se trata el proceso de resolución en este sentido, se necesitaría prestar atención a la diferencia entre la comprensión previa y la a posterior.

De esta manera, se pudo dar cumplimiento al propósito general de esta investigación, enmarcado en describir la utilización de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, por parte de los estudiantes para profesor en el curso de resolución de problemas matemáticos.

Por otro lado, las tareas diseñadas se corresponden con la fundamentación teórica y permiten evidenciar que:

- Promover la interacción y reflexión entre los estudiantes, a través de resolución de problemas accesibles a estos, sobre la base de sus conocimientos previos, lo que garantiza que tales problemas no requerirán del uso de métodos de resolución complejos y mecánicos.
- Crear por parte de los estudiantes un interés en la construcción de ideas matemáticas, que le permitan generalizarlas a otros contextos donde se muestren exploraciones y hallazgos.

Por otro lado, esta investigación permite sentar bases para proponer un "modelo de trabajo" donde se especifican los diversos métodos de solución de un problema matemático no rutinario.

En relación con el diseño de las tareas, nuestra estrategia de intervención deja entrever algunos elementos teóricos implicados, como son:

- Se pudo observar que la forma en que resuelven un problema está fuertemente influenciada por el tema que están estudiando o que estudiaron recientemente (tal es el caso de problema Nº1, en las actividades 2 y 3, en cual se evidencia el uso del concepto de combinatoria).
- Al no poder asociar el problema a un contenido matemático específico, los estudiantes utilizaron principalmente operaciones aritméticas para resolverlo. Los resultados de operaciones fueron utilizados como pistas para resolver el problema. Adicionalmente se observó que los estudiantes no elaboran un plan para resolver los problemas si no que inmediatamente inician un conjunto de operaciones con los datos que se les provee.
- Así mismo, se evidencia que los estudiantes emplearon más tiempo de lo esperado, y además como estrategia potente en el proceso de resolución del problema utilizaron la estrategia heurística realizar un gráfico, la cual es efectiva pero no suficiente dado que garantiza la comprensión pero para dar solución al problema se hace necesario conectar los datos con un sistema de ecuaciones. Los estudiantes mostraron poca flexibilidad para el cambio de estrategia una vez la seleccionaron. Aun que observan que no les produce ningún resultado, los estudiantes continúan con misma estrategia, lo cual demuestra su poca destreza en el manejo de heurísticas.

En síntesis, como fruto de esta investigación es posible afirmar:

Nuestra investigación permitió identificar elementos teóricos y metodológicos para proponer un modelo de resolución de problemas matemáticos no rutinarios. Algunos de los elementos que se lograron precisar con el desarrollo de esta investigación incluyen:

- Exponer a los futuros maestros frecuentemente a la resolución de problemas en los cursos de formación matemática, de manera que desarrollen las destrezas necesarias para resolver los mismos y puedan enseñarlos apropiadamente a sus estudiantes.
- El hacer uso de un modelo, que incluya el desarrollo de estrategias heurísticas, que les permitan utilizar adecuadamente los recursos que poseen y controlar y evaluar su ejecución.
- Fortalecer a los futuros maestros en el uso de diversas representaciones para resolver un problema, esto fortalecerá la conexión entre estas, de forma que puedan utilizar la que sea más conveniente en el momento apropiado.

El trabajo con estrategias heurísticas permitirá a docentes en formación obtener una información clara de los aspectos que deben tener en cuenta para la implementación dado que, se propone animar a los profesores en formación a la discusión y comunicación para facilitar su aprendizaje para esto se plantea la importancia de trabajar con problemas variados y no muy numerosos, que presenten un cierto grado de dificultad para ellos, ya que se considera que es una condición sin la cual no se podría reflexionar sobre el proceso de resolución por ellos vividos.

Bibliografía

Abrantes, P. 2002. “Mathematical competence for all: options, implications and obstacles” en Bazzini, L; Whybrow Incheley, C. Littéracie mathématique à l’ère digitale. Ghisetti e Corvi Editori. Páginas 38-51

Avcu, S. A. (2010). *Utilizacion de estrategias en la resolución de problemas matemtaicos por parte de profesores de matemáticas elemental.* Aksaray 68100/Turquia: Elsevier Ltd.

Blanco, L.J. (1995). La investigación sobre la educación de las Matemáticas en España. Actas del V Seminario de Investigaçao en Educaçao Matemática. Associaçao de profesores de Matemática. Leiría. 17-34.

Blanco, L.J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. En Quadrante, Revista Teorica de Investigacion, 6(2), 45-65.

Chapman, Christopher D (2005) Clean House With Lean 5S pp 27- 32. En: Quality Progress, Vol. 38, No.6.

Coriat, M., Sancho, J., Marin, A. y Gonzalvo, P. (1989): Nudos y nexos. Redes en la escuela. Madrid; Síntesis.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1, 5 – 22. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). www.seiem.es

Koichu Boris, Berman Abraham, Moore Michael (2006) Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. Technion – Israel Institute of Technology. http://edu.technion.ac.il/faculty/bkoichu/Papers/KBM%20Heur%20literacy%20dev.pdf.

Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970–1994. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (6), pp. 660–675.

M.E.C. (1992). Educación Primaria. Matemáticas. Madrid.

Mayer, R.E. (1991). Thinking, problem solving, cognition (2nd Ed.). NY: Freeman.

Montague M., The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. Journal of Learning Disabilities, 25(4), 230-248, 1992.

NCTM. (1991) Curriculum Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM. (1991) Profesional Standards for Teaching Mathematics , Reston, VA: NCTM.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics. New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). Principles and Standards for teaching mathematics. Reston: Author.

Nieto, J. H. (s.f.). *Algunas Estretegias Basicas para la Resolución de Problemas de Olimpiadas Matemáticas.*

Nunokawa K. (2000) Heuristic strategies and problem situations. EN: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI. José Carillo Yánez, Luis Carlos Contreras. Editorial Hergué.

OIE-UNESCO/UNICEF. 2000. La repetición en la enseñanza primaria. Una perspectiva global. Geneva: UNESCO-OIE/UNICEF

Ortiz., J. J. (2005). Dificultades de aprendizaje e intervencion psicopedagogíca en la resolución de problemas matemáticos. *Revista educación*, 257-286.

Pabón Ramírez, Octavio Augusto (Autor) Arce Chávez, Jorge Hernando (Director), Resolución de problemas matemáticos y estrategias heurísticas (recurso electrónico): del lápiz y el papel a los ambientes de geometría dinámica. Tesis. Univalle. Instituto De Educación y Pedagogía. Maestría en Educación. Colombia: Universidad del Valle, 2007.

Plaza, M. d. (s.f.). *Tratamiento y Resolución de Problemas.* Madrid.

Ponte, J. P. "& Canavarro, A. (1994): A Resolução de problemas nas concepções e praticas dos profesores". En Fernandez, D.; Borralho, A. y Amaro, G.: Resolução de problemas: processos cognitivos, concepçoes de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa. Instituto de Inovação Educacional. 197-211.

Polya G. (1945). How solve it. [Trad. it.: Milano: Feltrinelli, 1967]

Polya, G. (1965, reimpresión 2001). Como Plantear y Resolver Problemas, México: Trillas.

Puig, Luis (2003) Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

Rodríguez, O.H & Villafañe, W (2009). Errores cometidos por los candidatos a maestros al resolver problemas matemáticos: 2009; revistas PARADIGMA, Vol. XXX. N° 1, junio de 2009, pág. 103-116.

Saleh, F. (s.f.). *Resolución de Problemas esquemas de profesores de matemáticas de secundaria.* Malasia.

Santos Trigo (1997) Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México, D.F.: Iberoamérica, 1997.

Santos Trigo (2007) La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Recuperado en: http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985): Mathematical Problem Solving, Academic Press: New York.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. GROUWS (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning. pp. 334-370. NY: MacMillan.

Soria, G. B. (2010). *100 problemas matemáticos.* Alicante: CEFIRE de ELDA.

ANEXOS

Rejilla de análisis de la actividad N°1

Tablas 15. Rejilla de actividad Nº 1

Preguntas	Argumentos	Tendencia
1. ¿Por qué es un problema matemático?	G1; Consideramos que es un problema, porque al observar la secuencia de las figuras sentimos curiosidad de saber cuál era el siguiente valor	Es evidente que para la mayoría de los grupos los gráficos representan un problema. Pues, de los nueve grupos ocho respondieron que la graficas conduce al resolutor a plantearse un problema. Es decir, que se evidencia un interés por la adaptación de un gráfico a un problema matemático. En donde es la matemática es quien trata de explicar la situación. Así pues, para la mayoría de los grupos los valores correspondientes a los pesos de las gallinas así como los puntos suspensivos son el indicio de un problema matemático. Aunque, cabe resaltar que el grupo nueve manifiesta que no es un problema, dice “La última imagen sugiere que se quiere conocer la masa de las tres gallinas”, así que, es contradictorio a lo que inicialmente enuncia. Además no justifica el por qué creen no es un problema matemático. Finalmente, es muy claro que para la mayoría de los grupos la ilustración lleva a un problema matemático aun en ausencia de un enunciado.
	G2; Por que invita al lector a preguntarse ¿Cuál es el valor de la suma de las tres gallinas? Y para hallar ese valor se debe de resolver, una ecuación de tres variables (de primer grado). Pero debería de tener un enunciado.	
	G3; Se puede determinar como un problema, puesto que, al momento de resolverlo se necesita un tiempo libre para dar solución al problema.	
	G4; En primera instancia, es un problema matemático, puesto que, de manera ilustrativa te están preguntando sobre le peso global de las tres gallinas. Se considera un problema, puesto que, no es algo logarítmico y ya, se sitúa en un contexto determinado, en este caso el peso de las gallinas, y además de ello se sitúa en un ejercicio de la cantidad lo cual es averiguar el peso mediante una balanza.	
	G5; Es un problema porque ´´invita´´ al resolutor a resolverlo, es decir conocer cuál es el peso de las gallinas. Un problema es una situación que se propone y que cobra significado ¨problema¨ para quien lo resuelve.	
	G6; Nosotras consideramos que es un problema matemático, pues en el hay un secuencia de viñetas que tiene unos valores numéricos y al final hay una viñeta que tiene unos puntos suspensivos como indicando ausencia de una información.	
	G7; Consideramos que es un problema, porque la ilustración nos muestra que hace falta un dato en la opción 4.	

	G8; Es un problema matemático desde el punto de vista, que abre la posibilidad de una incógnita al final de los esquemas, el globo con tres puntos suspensivos, hacen entender que existe algo más, una incógnita. Además, si se tiene en cuenta abre la posibilidad de indagar que es lo que sucede en la situación. Si no es un problema, la actividad está diseñada para generar esta afirmación, pues no es muy claro su fin.	
	G9; No, es un problema. La última imagen sugiere que se quiere conocer la masa de las tres gallinas, debido a que en los anteriores casos donde se combinan las gallinas se da un valor exacto sobre su masa.	
2. Escribe un enunciado al problema	G1; La romana: en granjero decide saber el peso de cada una de sus gallinas, como la pesa era tan vieja, no permitía, pesar a las gallinas pequeñas, por eso decidió pesara las como se observa en la ilustración. (utiliza el método más adecuado)	Para dar esta respuesta todos los grupos deciden redactar toda una situación que lleva a una pregunta alrededor de la masa o el peso de las gallinas. Aunque, algunos enunciados son más elaborados que otros, incluso algunos con una secuencia en particular de los gráficos todas las preguntas están van dirigidas al peso (masa) de las gallinas.
	G2; ¿Cuál es la suma de las masas de las tres gallinas?	
	G3; Encuentra el peso de cada gallina, y al final halla el peso total de las tres gallinas.	
	G4; La suma del peso de la gallina A con el peso de la gallina C da 10.6 Kg; la suma del peso de la gallina A con el peso de la gallina B en 805 Kg y el peso de la gallina C mas el peso de la gallina B es 6.1 Kg; entonces ¿Cuál es el valor del peso de las tres gallina A, B y C?	
	G5; Hay tres gallinas muy inteligentes y vanidosas que están preocupadas por su peso; al llegar el domingo ellas muy diestras se ubican en la balanza como muestran las tres primeras laminas, ayude a las tres gallinas a saber su peso.	
	G6; Dado que la gallina grande junto con la mediana pesan 10.6 Kg (viñeta 1), la gallina grande junto con la pequeña pesan 8.5 Kg (viñeta 2) y la gallina mediana junto con la pequeña pesan 6.1 Kg (viñeta 3). ¿Cuánto pesan las tres gallinas (viñeta 4)?	
	G7; De acuerdo a la ilustración de las gallinas criollas podemos observar tres gallinas distintas organizadas de parejas de tamaños diferentes con su respectivo peso hallar el peso de las tres	

	gallinas juntas ilustradas en el cuadro 4.	
	G8; Descubre cuantas gallinas, son necesarias para quedar a la altura de las flechas de la balanza.	
	G9; De acuerdo con la información de las tres primeras imágenes, ¿Cómo se dan cuenta las gallinas cuanto pesan las tres juntas?	
3. ¿Este enunciado hace parte de las matemáticas experimentales?	G1; Si; por que las figuras también se pueden organizar, colocando de primero la 3, 2, 1 y de ultimo la 4, o de primero la 4, luego la 1, 2 y 3.	Se evidencia una contradicción con respecto a lo estipulado en las respuestas. Pues para algunos las ilustraciones si hacen parte de las matemáticas experimentales, debido a que los gráficos necesariamente no deben de tener un orden en particular, otros por su parte plantean que estas generan un pensamiento matemático, o que este es un enunciado que facilita la exploración por sus diferentes recursos visuales. Otros grupos por el contrario, manifiestan que este enunciado no hace parte de las matemáticas experimentales pues, no construye conocimientos a partir de un artefacto o manipulativos. Finalmente, en esta respuesta se nota que no está claro que son las matemáticas experimentales, así que son confusas las respuestas.
	G2; Para ser parte de las matemáticas experimentales, debe ser que por medio de la experiencia el estudiante conjeture.	
	G3; Si, por que a partir de los dibujos puede observar y generar un pensamiento matemático.	
	G4; No, puesto que el objetivo de las matemáticas experimentales es construir nuevo conocimiento por un artefacto o manipulativo, pero en el problema anterior no se está construyendo un nuevo saber, solamente se sitúa en la resolución de problemas.	
	G5; Considero que las láminas (las tres imágenes iniciales) hacen parte del enunciado, un conducto, así que el enunciado está en la situación problema.	
	G6; el orden no afecta, se escogió enumerarlo por etiquetarlo e indicar la viñeta con la información. Por lo tanto se puede enumerar o etiquetar de cualquier otra forma (ver viñetas)	
	G7;No responden	
	G8; Si, puesto que abre la posibilidad de experimentar con diferentes recursos visuales que otorga el esquema o dibujo, por si solo en dibujo logra dejar ver el enunciado de la pregunta del problema.	
	G9; El enunciado No hace parte del contexto de las matemáticas	

	experimentales.	
4. ¿Consideras que todo problema matemático, requiere de un enunciado?	G1; Si, mientras se respete que la figura 4 se encuentre de primera o de ultima es independiente el orden de las otras; ya que genera la incógnita es esta.	Para la mayoría de los grupos si es importante que cada situación problema tenga un enunciado en particular que especifique la pregunta y sea esta quien guie el camino a la solución; otros grupos por su parte plantean que no es necesario pues, toman como ejemplo la lámina de las gallinas donde expresan que a pesar de que no hay un enunciado explicito, todos los gráficos implícitamente llevan a una pregunta.

	G2; Si, el problema muestra variables y la suma de esas variables dan un resultado es un problema matemático, pero debe tener un enunciado el cual invite al estuante a resolverlo, puesto que la representación gráfica da muchas conjeturas para resolver distintas situaciones problemas.	
	G3; No, porque el problema no habla por sí solo, lo que debemos realizar. Sin necesidad de tener un enunciado.	
	G4; Si, puesto que se necesita de una consigna para situar al estudiante a lo que desea saber.	
	G5; Si, todo problema requiere de enunciado.	
	G6; Dado la estructura, podríamos decir que No, porque este problema lo podemos resolver, comenzando con las tres gallinas, dado las tres condiciones del peso de las gallinas, aleatoriamente. Ejemplo: cuanto pesan las tres gallinas? Si en la viñeta 2 pesan 8.5 Kg, en la viñeta tres pesan 10.6 Kg y en la viñeta pesan 6.1 Kg	
	G7; No, porque en este caso el problema no tiene enunciado y las simples imágenes me garantizan un orden para encontrar la solución así: (1-3), (2-1) y (3-2)	
	G8; Si, pero no necesariamente un enunciado escrito, pues si existe y se puede hablar de un enunciado implícito, este ser el necesario en todo problema. Es decir, todo problema debe poseer un enunciado el cual no es necesario que sea escrito y explicito, pero si es necesario uno explícito en todo trabajo.	
	G9; Si considero, pues es necesario para establecer pautas o preguntas de exploración.	

Rejillas de análisis de la actividad N°2

Nota: El (*) en las casillas de las tablas, significa que el grupo se corresponde con la categoría

Tablas 16. Rejilla de actividad Nº 2

Problema Nº 1												
Grupos	Fases de modelo de resolución de problemas de Polya								Recursos		Encuentra la solución	
	Comprensión del problema	Concebir el plan					Ejecución del plan	Visión retrospectiva	Suf.	Insuf.	Si	No
		Planteamiento de ecuaciones	Hacer una tabla	Hacer un grafico	Particularizar	Dialogo inducido						
G1										*		*
G2					*					*		*
G3	*				*					*		*
G4	*		*		*		*		*			*
G5	*				*		*		*			*
G6			*		*		*			*		*
G7	*		*				*		*			*
G8	*		*		*		*	*		*	*	
G9	*		*		*		*		*			*

Problema Nº 2												
Grupos	**Fases de modelo de resolución de problemas de Polya**								**Recursos**		**Encuentra la solución**	
	Comprensión del problema	**Concebir el plan**					**Ejecución del plan**	**Visión retrospectiva**	**Suf.**	**Insuf.**	**Si**	**No**
		Planteamiento de ecuaciones	**Hacer una tabla**	**Hacer un grafico**	**Particularizar**	**Dialogo inducido**						
G1		*								*		*
G2	*	*					*	*	*		*	
G3	*					*	*	*	*		*	
G4	*					*	*	*	*		*	
G5	*	*							*			*
G6		*								*		*
G7	*	*					*		*		*	
G8												*
G9		*								*		*

Problema Nº 3												
Grupos	Fases de modelo de resolución de problemas de Polya								Recursos		Encuentra la solución	
	Comprensión del problema	Concebir el plan					Ejecución del plan	Visión retrospectiva	Suf.	Insuf.	Si	No
		Planteamiento de ecuaciones	Hacer una tabla	Hacer un grafico	Particularizar	Dialogo inducido						
G1		*					*			*		*
G2	*	*		*			*	*	*			*
G3	*	*					*		*			*
G4												
G5	*	*					*		*			*
G6		*					*			*		*
G7	*	*					*		*			*
G8	*	*					*	*	*		*	
G9		*					*			*		*

Rejillas de análisis actividad N °3

Tablas 17. Rejilla de actividad Nº 3

Problema N°1																			
Grupos de Estudiante	Estrategias heurísticas que solucionan el problema																		
	Resolver uno más sencillo	Utilización adecuada de la heurística		Particularizar	Utilización adecuada de la heurística		Usar un grafico	Utilización adecuada de la heurística		Hacer una tabla	Utilización adecuada de la heurística		Generalizar	Utilización adecuada de la heurística		Recursos		Encuentra la solución	
		Si	No		Si	No		Si	No		Si	No		Si	No	Suf.	Insuf.	Si	No
G1																*		*	
G2																	*		*
G3																*		*	
G4				*	*					*	*					*		*	
G5																	*		*
G6				*	*					*	*					*		*	
G7				*	*					*	*					*		*	
G8	*		*	*	*		*	*		*	*		*	*		*		*	
G9							*	*								*		*	

Problema N°2																
Grupos de estudiantes	**Estrategias heurísticas que solucionan el problema**															
	Ensayo y error	**Utilización adecuada de la heurística**		**Planteamiento de ecuaciones**	**Utilización adecuada de la heurística**		**Dialogo inducido**	**Utilización adecuada de la heurística**		**Hacer una tabla**	**Utilización adecuada de la heurística**		**Recursos**		**Encuentra la solución**	
		Si	**No**		**Si**	**No**		**Si**	**No**		**Si**	**No**	**Suf.**	**Insuf.**	**Si**	**No**
G1										*		*				*
G2										*		*				*
G3										*		*				*
G4										*		*				*
G5				*	*								*		*	
G6										*		*				*
G7																
G8				*		*								*		*
G9	*	*											*		*	

	Problema N° 3									
Grupos de estudiantes	**Estrategias heurísticas que solucionan el problema**						**Recursos**		**Encuentra la solución**	
	Planteamiento de ecuaciones	**Utilización adecuada de la heurística**		**Hacer un grafico**	**Utilización adecuada de la heurística**		**Suf.**	**Insuf.**	**Si**	**No**
		Si	**No**		**Si**	**No**				
G1	*	*		*	*		*		*	
G2	*	*		*	*		*		*	
G3	*		*					*		*
G4	*	*					*		*	
G5	*	*		*	*		*		*	
G6	*	*		*	*		*		*	
G7	*		*				*		*	
G8	*		*	*		*		*		*
G9	*	*		*	*		*		*	

Problema N°4																						
Grupos de Estudiante	Estrategias heurísticas que solucionan el problema																					
	Resolver uno mas sencillo	Utilización adecuada de la heurística		Particularizar	Utilización adecuada de la heurística		Usar un grafico	Utilización adecuada de la heurística		Hacer una tabla	Utilización adecuada de la heurística		Reducir el problema a otro conocido	Utilización adecuada de la heurística		Suponer el problema resuelto	Utilización adecuada de la heurística		Recursos		Encuentra la solución	
		Si	No		Si	No		Si	No		Si	No		Si	No		Si	No	Suf.	Insuf.	Si	No
G1							*	*											*		*	
G2	*	*		*	*		*	*											*		*	
G3				*	*		*	*											*		*	
G4							*	*								*	*		*		*	

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa Académico:	Licenciatura en Matemática y Física.
Nombre de la asignatura:	**Resolución de Problemas Matemáticos**
Código y grupo:	405063M - 01
Nombre del profesor	Octavio Augusto Pabón Ramírez
Horario y lugar	Lunes 18:00- 21:00 , Edificio 331 Salón 1005
Créditos:	3
Habilitable:	No
Validable:	No
Período:	Agosto – Diciembre 2012

2. DESCRIPCIÓN GENERAL

En la década de los años ochenta, el *National Council of Teachers of Matemáticas* (NCTM), influyente organización norteamericana, recomendó la resolución de problemas como objetivo prioritario para el currículo escolar de las matemáticas. Desde entonces, la investigación se dirigió al estudio de la *resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos* (Schoenfeld, 1985) y abarcó un espectro variado de temáticas que incluían desde los esfuerzos por caracterizar qué es un problema matemático hasta caracterizar los métodos y estrategias de resolución. En las últimas décadas, la resolución de problemas matemáticos sigue siendo un aspecto central de numerosas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Para algunos autores se ha convertido en uno de las *organizadores curriculares* (Rico, 1997) y ha sido objeto de especial interés en las investigaciones sobre formación de profesorado (Blanco, 1991, Carrillo, 1996, Contreras, 1998).

Estas mismas investigaciones relacionan las matemáticas con el proceso de resolución de problemas y señalan que el proceso de *aprender matemáticas* es de cierta manera, similar a la forma de desarrollar la disciplina. En este contexto se propone un marco donde se identifican elementos centrales alrededor de la *competencia matemática* de los estudiantes: El *conocimiento base* que disponen los estudiantes para entender y representar conceptos o resolver problemas (que incluye las definiciones básicas, el empleo de alguna notación, y el uso de algoritmos entre otros); las *estrategias* de resolución de problemas, tales como el empleo de diagramas o la consideración de casos particulares; los aspectos que ayudan a evaluar toma de decisiones y el monitoreo del propio proceso de solución, y las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas.

De igual manera, las investigaciones reconocen la importancia de plantear y resolver una variedad de problemas matemáticos que permitan que el estudiante exhiba distintos procesos del pensamiento matemático y que éste identifique, explore, pruebe y comunique distintas relaciones matemáticas. Este trabajo se ha visto profundamente influido en las últimas décadas por el advenimiento de las tecnologías informáticas y computacionales, que han permitido que los mismos estudiantes participen activamente en el proceso de formulación o descubrimiento de relaciones matemáticas.

En general, la resolución de problemas enfrenta al futuro docente de matemáticas con la necesidad de considerar nuevas opciones de intervención y evaluación en el aula. El profesor que adopta de manera fundamentada esta metodología, tiene posibilidad de analizar, comparar y clasificar los sistemas de representación y las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver ciertos tipos de problemas en tipos específicos de pensamiento matemático y en determinados niveles de escolaridad. De esta manera, puede utilizar este conocimiento para orientar el trabajo posterior en el aula, asesorar a sus alumnos y ayudarles en la construcción de su conocimiento y dar sentido a las enseñanzas posteriores.

3. PROPÓSITOS Y/O OBJETIVOS.

- Reconocer la importancia de la *resolución de problemas matemáticos* en los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde diferentes perspectivas teóricas.
- Estudiar la resolución de problemas como metodología de investigación en didáctica de las matemáticas
- Estudiar la naturaleza de los recursos y materiales didácticos y sus relaciones con la resolución de problemas, a la luz del estado actual y desarrollo reciente de la investigación en Didáctica de la Matemática.

4. CONTENIDOS Y/O EJES TEMÁTICOS

1. Aproximación histórica a la resolución de problemas: De Euclides a Descartes
2. Análisis y síntesis y el proceso de resolución de problemas matemáticos
3. Modelos de resolución de problemas: El modelo de fases de Polya, El modelo de Schoenfeld, El Modelo de Puig
4. Resolución de problemas matemáticos y matemáticas experimentales: Del uso de manipulativos al trabajo en el *Laboratorio de Matemáticas*

5. METODOLOGÍA

Se desarrollarán prácticas correspondientes a los contenidos y ejes temáticos del curso. El desarrollo de cada actividad integrará aspectos como: Presentación, Reflexión individual o en grupo, realización de actividades prácticas (trabajo con fichas del Laboratorio de Matemáticas) y valoración global del trabajo. Las actividades propuestas se inscriben en la propuesta del *Laboratorio de Matemáticas* del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

6. EVALUACION

Se tendrá en cuenta la participación en las actividades y trabajos realizados durante las clases tanto de manera individual como grupal. Estas actividades corresponden al 60% de la nota final. El restante 40% corresponde a un prueba parcial intermedia (20%) y a un examen final (20%)

7. BIBLIOGRAFÍA

ABRANTES, P. y OTROS (2002) La resolución de problemas en matemáticas. Barcelona: Graó

ABRANTES, P. y OTROS (2002) La resolución de problemas en matemáticas. Barcelona: Graó

ARCE, J. (2003) El Laboratorio de Matemáticas. Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Documento Interno de Trabajo.

CARRILLO, J. & CONTRERAS, L.C. (eds.) (2000). Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos. Huelva: Hergué.

MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988) Pensar matemáticamente. Barcelona: Ed. Labor

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1997). Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Santa fe de Bogotá.

POLYA G. (1995). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

PUIG L. y CERDÁN F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis

PUIG, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada. Comares.

SÁNCHEZ, J.C.; FERNÁNDEZ, J.A. (2003) La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. Madrid: Editorial CCS

SCHOENFELD, A. H. (1985). Mathematical problem solving. San Diego. Academic Press.

TRIGO, LUZ MANUEL (1997, 2008) Principios y métodos de la resolución de Problemas. Editorial Iberoamérica.

TRIGO, LUZ MANUEL (2008) La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. Editorial Trillas.