

SOFTWARE DEMMATOUL: UNA HERRAMIENTA PARA LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN

DEMMATTOUL SOFTWARE: A TOOL FOR THE RESEARCH ON ARGUMENTATIVE STRUCTURE OF PROOF

Rodríguez, F. ⁽¹⁾, **Gutiérrez, A.** ⁽²⁾

Universitat de les Illes Balears ⁽¹⁾, *Universitat de València* ⁽²⁾

Resumen

Las necesidades surgidas en una investigación sobre algunos aspectos de la demostración nos condujeron a la posibilidad de usar Software de Mapas de Argumentos para facilitar el análisis de la información recogida en la fase experimental de nuestra investigación. Sin embargo, el software existente presenta una serie de limitaciones, provocando un desajuste entre las características ofrecidas y las necesidades de nuestra investigación. El objetivo principal de esta comunicación es presentar la herramienta informática creada a partir de dichas necesidades, así como ejemplificar su uso. De esta manera intentamos mostrar que el Software de Mapas de Argumentos desarrollado es una herramienta útil para la investigación en Educación Matemática sobre la estructura argumentativa de las demostraciones.

Abstract

The needs that came up in a research on some aspects of proof led us to the possibility of using Argument Mapping Software in order to facilitate the analysis of the information collected during the experimental phase of our research. However, the current software presents some limitations, causing disparity between its features and our research needs. The main goal of this communication is to present the tool developed from these needs, just as to give examples of its use. This way we try to show that the Argument Mapping Software developed is a useful tool for Mathematics Education research on argumentative structure of proof.

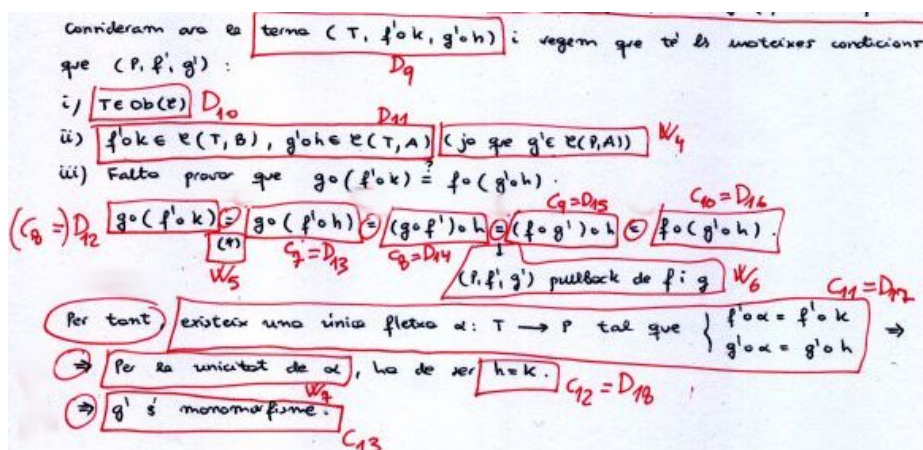
Palabras clave: *Demostración, Toulmin, Software de Mapas de Argumentos.*

Key words: *Proof, Toulmin, Argument Mapping Software.*

Introducción al problema

El análisis de los procesos de aprendizaje de la demostración matemática en los diferentes niveles educativos es una agenda de investigación importante en la actualidad. En este contexto, estamos desarrollando un estudio sobre algunos aspectos de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la demostración en los estudios universitarios de Matemáticas. Durante la fase experimental de esa investigación, se recogieron algunas demostraciones realizadas por alumnos de todos los cursos, así como filmaciones en vídeo de clases. De entre la multitud de puntos de vista y marcos teóricos para analizar las demostraciones obtenidas, uno de los que utilizamos es el modelo de Toulmin para analizar su estructura argumentativa.

Tras analizar los elementos argumentativos de algunas demostraciones seleccionadas, el resultado obtenido eran papeles llenos de recuadros y anotaciones que, además de no posibilitar su posterior modificación, no facilitan en absoluto el tratamiento de la información obtenida de ellos, teniendo que recurrir a transcripciones totales de las demostraciones para la representación de la estructura de las argumentaciones con ayuda de software y un posterior registro y tratamiento de algunos parámetros mediante el uso de otro software, como por ejemplo una hoja de cálculo.



Identificación sobre el papel de los elementos argumentativos de un fragmento de una demostración

Existen varios programas informáticos diseñados para crear *mapas de argumentos*, pero ninguno de los que hemos analizado cumple con las necesidades de nuestra investigación. Por este motivo, decidimos crear una herramienta informática adaptada a nuestras necesidades de representar diagramáticamente demostraciones complejas. El objetivo de esta comunicación es presentar el programa informático creado y mostrar su utilidad como herramienta para la investigación en Educación Matemática.

Antecedentes y marco teórico

Antes de describir el marco teórico que fundamenta el trabajo que aquí presentamos, es preciso aclarar el uso que hacemos de algunos términos. Sin entrar en el debate existente entre la relación de los términos *demostración* y *argumentación* (véase por ejemplo Reid y Knipping, 2010, capítulo 8), aceptamos la visión de la demostración

como un caso particular de argumentación. Además, consideramos que esa posición es complementaria y coherente con los conceptos *indagar* y *persuadir* que conforman el *esquema de demostración* de una persona (Harel y Sowder, 1998). En lo que sigue, también utilizamos el término *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier argumentación elaborada para convencer de la veracidad (o falsedad) de una afirmación matemática.

Modelo de Toulmin y representación visual de argumentos

Según Aberdein (2005), la obra “The uses of argument” de Stephen Toulmin, publicada en 1958, es quizá el trabajo más influyente en la teoría moderna de la argumentación. En el capítulo titulado “La forma de los argumentos”, Toulmin (2007) desarrolla un modelo para analizar la estructura argumentativa.

Sintetizando mucho la idea de dicho modelo, podemos decir que un *argumento* es una *conclusión* (*C*: Claim) que se deriva de un *dato* o hecho (*D*: Data) de acuerdo con una justificación o *garantía* (*W*: Warrant). Esta terna (*D*, *W*, *C*) se conoce como el *modelo básico de Toulmin*, pero esta visión del argumento resulta excesivamente simplista y es complementada con otros elementos que aparecen en las estructuras argumentativas. Por una parte, un argumento puede incluir términos como, por ejemplo, “necesariamente”, “presumiblemente” o “con cierta probabilidad”. Dicho elemento, que explica la fuerza que se le otorga a la garantía, es denominado *calificador modal* (*Q*: modal Qualifier). Si la garantía no proporciona necesidad, significa que existe la posibilidad de encontrar una excepción o *refutación* (*R*: Rebuttal) de dicha garantía, por lo que en ocasiones se presenta un apoyo o *respaldo* (*B*: Backing) a la garantía. De esta manera, el *modelo completo de Toulmin* está formado por esos seis elementos (*D*, *W*, *B*, *Q*, *R*, *C*) relacionados de la manera descrita anteriormente.

Dicha relación suele representarse de una manera visual en forma de diagrama, utilizada por el propio Toulmin (2007), que facilita la identificación de sus elementos:

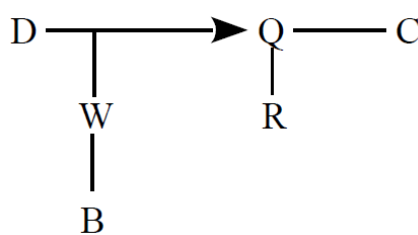
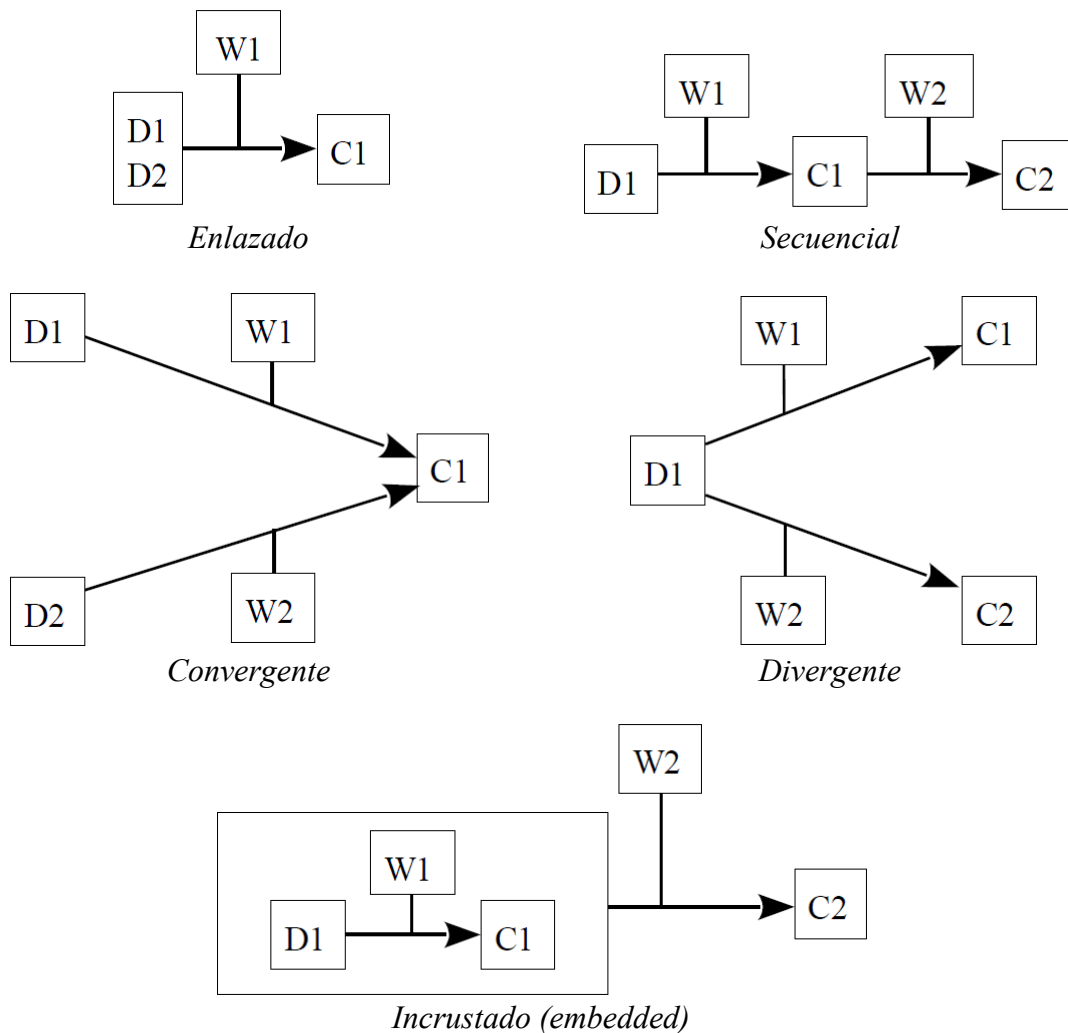


Diagrama del modelo de Toulmin

El diagrama anterior representa una argumentación simple, con una única implicación. Sin embargo, esto no se corresponde con la mayoría de argumentaciones matemáticas, por lo menos las que se dan en los niveles educativos superiores, dado que suelen contener varias implicaciones encadenadas, en las que la conclusión de un argumento es un dato del siguiente. Es por ello que resulta necesario combinar diagramas simples para formar diagramas que reflejen la estructura de argumentaciones más complejas. Aberdein (2006) explica cinco tipos de combinación de diagramas simples básicos (*D*, *W*, *C*) para construir diagramas complejos: enlazado, secuencial, convergente, divergente e incrustado.



En cuanto a los pros y contras de la representación visual de argumentos mediante diagramas, también conocida como *mapas de argumentos*, Aberdein (2006) realiza el siguiente comentario: “Una representación visual compartida puede facilitar significativamente la comunicación, tanto colaborativa como pedagógica, de ideas complejas. El modelo de Toulmin, que normalmente es representado gráficamente, es un buen ejemplo de esto. Sin embargo, la representación visual también tiene sus inconvenientes. Construir los diagramas puede suponer un consumo de tiempo y puede resultar frustrante actualizarlos, comentar sobre ellos o integrarlos con otros sistemas. Estos problemas se intensifican conforme los diagramas se tornan más complejos.”.

Software de Mapas de Argumentos

Representar gráficamente el mapa de argumentos puede suponer una ardua y costosa tarea, no sólo desde la perspectiva del docente que quiere utilizar mapas de argumentos en sus clases, sino también desde la perspectiva del investigador que quiere reconstruir una argumentación compleja, como es el caso de las demostraciones matemáticas. Dibujar los mapas de argumentos a mano o utilizar software estándar de dibujo o de ofimática son opciones que tienen el inconveniente, entre muchos otros, de no facilitar la modificación de los diagramas una vez construidos, si esto fuera necesario. No obstante, existe una alternativa interesante y más específica para representar los diagramas de las argumentaciones: el *Software de Mapas de Argumentos*

(SMA a partir de ahora, para abreviar). Según Aberdein (2006), “estos problemas [referidos anteriormente] pueden ser en buena parte eliminados a través del uso de software apropiado. Ahora están disponibles varios programas que, en mayor o menor medida, automatizan el proceso de construir diagramas de argumentos.”

Citamos algunos ejemplos de SMA existente: *Araucaria*, *Argumentative*, *Argunet*, *Carneades* y *Rationale*. Cada uno de ellos representa de manera diferente la estructura de argumentos; alguno de ellos utiliza, o puede ser adaptado para trabajar, el modelo de Toulmin (por ejemplo *Araucaria* incorpora la opción de trabajar explícitamente con el modelo básico de Toulmin).

El uso didáctico del SMA y el desarrollo de habilidades, como el razonamiento crítico, en los alumnos que trabajan con este software son temas que ya están siendo investigados y puestos en práctica en otras disciplinas como Derecho, Filosofía, Economía, Ciencias Políticas y Ciencias de la Salud. Si queremos utilizarlos en Educación Matemática, lo primero que debemos tener en cuenta es que el SMA citado anteriormente no está desarrollado bajo unos objetivos que persigan el trabajo específico de las matemáticas.

Limitaciones del software de mapas de argumentos existente

De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, desde la perspectiva de nuestra investigación es lógico que encontremos una serie de limitaciones en el SMA existente. A continuación listamos algunas de las más importantes:

1. Todos utilizan una estructuración de la argumentación más simple que la que aporta el modelo de Toulmin completo.
2. Ninguno permite realizar un tratamiento estadístico de los elementos presentes en la estructura de la argumentación.
3. Ninguno está diseñado con el objetivo de analizar demostraciones matemáticas, por lo que no están preparados para trabajar con el lenguaje y los símbolos propios de las matemáticas.
4. Excepto *Rationale*, el resto de programas no permite incluir imágenes como contenido de los elementos del diagrama.
5. Excepto *Argunet*, el resto de programas no permite mover libremente los elementos del diagrama, en ocasiones presentando una estructura rígida impuesta por el propio programa que puede no ajustarse al objetivo del usuario.

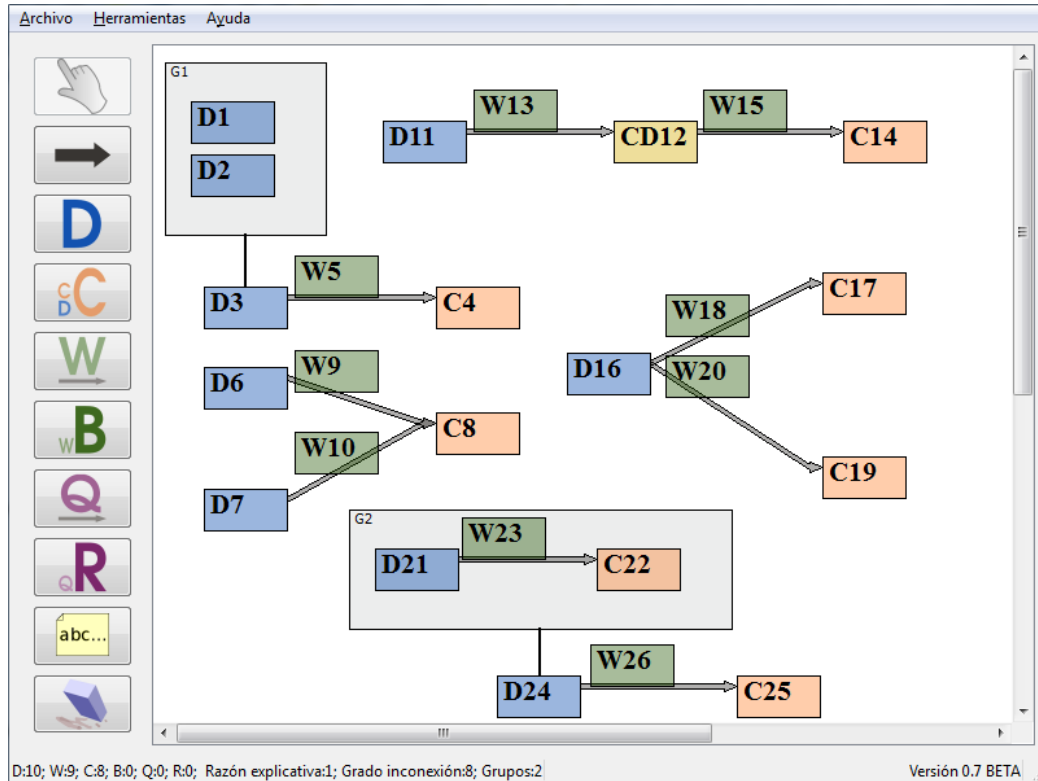
Especialmente la inflexibilidad provocada por las limitaciones 3, 4 y 5 puede conducir al investigador con objetivos similares a los nuestros a abandonar el uso del SMA, renunciando a algunas de sus características en aras del pragmatismo. En ese caso, la mejor opción es utilizar software de representación de diagramas, como por ejemplo *Dia*, que permite representar diagramas de una manera cómoda, flexible y relativamente rápida, pero que presenta especialmente las limitaciones 2 y 3, además de no trabajar con ninguna estructura específica de la argumentación (equivalente a la limitación 1, pero de mayor magnitud).

El nuevo software desarrollado: DEMMATTOUL

Al ver que el SMA existente no cubre de manera satisfactoria las necesidades surgidas durante nuestra investigación sobre la estructura argumentativa de las

demostraciones, el camino escogido fue diseñar y desarrollar un nuevo software que se ajustase mejor a nuestros objetivos.

El nombre de la aplicación informática creada es DeMMaTTouL¹, un software libre y de código abierto disponible en castellano, catalán e inglés cuya interfaz gráfica es ejecutable en varios sistemas operativos (Linux, MS Windows y Mac OS X).



Interfaz gráfica de DeMMaTTouL

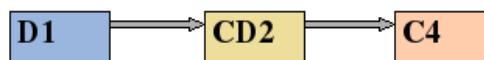
Con el uso de DeMMaTTouL se suavizan considerablemente las limitaciones mencionadas en el apartado anterior:

- Se trabaja con el modelo completo de Toulmin. Además, se ha reestructurado el diagrama simple de dicho modelo para optimizar el espacio utilizado, quedando de la siguiente manera:



Diagrama de Toulmin en DeMMaTTouL

DeMMaTTouL permite realizar todas las combinaciones de diagramas simples citadas en un apartado anterior. Cuando se combinan dos argumentos de manera secuencial, el elemento que es a la vez conclusión del primer argumento y dato del siguiente, se etiqueta automáticamente como CD y se muestra de la siguiente manera:



Combinación secuencial de argumentos

¹

<http://demmattoul.blogspot.com>

Además, DeMMaTTouL se encarga automáticamente de velar por la coherencia del modelo de Toulmin en el mapa que creamos. Por ejemplo, si en un mapa de argumentos eliminamos la única implicación que llega a una conclusión, este elemento se transforma automáticamente en un dato (dado que ya no es la conclusión de ningún argumento).

- Se calcula en tiempo real el número de elementos argumentativos de cada tipo que contiene la estructura, así como la razón explicativa (número de implicaciones con garantía sobre el total de implicaciones existentes en la estructura) y el grado de inconexión (número de grupos inconexos de elementos que forman la estructura).

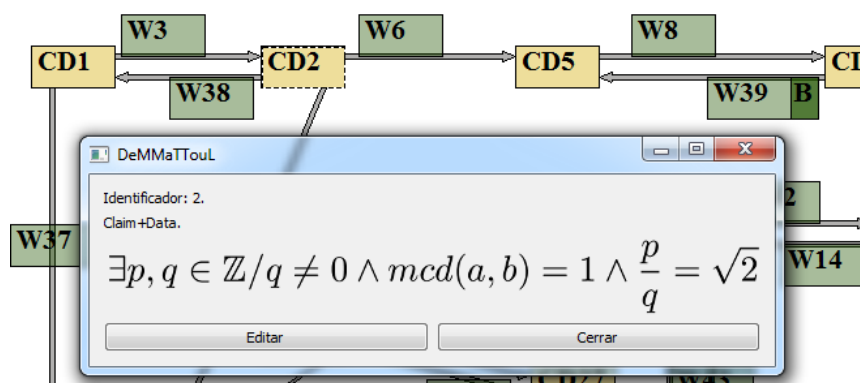
D:15; W:28; C:16; B:1; Q:0; R:0; Razón explicativa:0.9333; Grado inconexión:1; Grupos:0

La barra de estado muestra el número de elementos y los parámetros

Además, se incorpora una herramienta denominada Estadísticas, que calcula totales, máximos, mínimos y medias de los elementos, de la razón explicativa y del grado de inconexión de varias demostraciones.

- Si bien DeMMaTTouL no está preparado para trabajar directamente con símbolos propios del lenguaje matemático, aportamos una solución aprovechando la superación de la siguiente limitación.
- El contenido de los elementos puede ser texto, imagen o referencias a archivos de audio y vídeo. Esto posibilita insertar diferentes fragmentos de una demostración realizada en papel, previamente escaneada o fotografiada, o una demostración realizada en la pizarra y grabada en vídeo, sin tener que transcribirlas y conservando la apariencia de los fragmentos de la producción original.

También es posible, utilizando software complementario como *KLatexFormula*, insertar como imagen expresiones matemáticas escritas en *LaTeX*, superando en cierto modo la limitación 3.



Ventana que muestra el contenido de un elemento

- DeMMaTTouL permite mover los elementos libres (datos y conclusiones) del mapa de argumentos, sin más restricción que el tamaño de la zona de dibujo.

Ejemplos de mapas de argumentos contruidos con DEMMATTOUL

Para ejemplificar el uso de la herramienta creada hemos escogido una situación de clase en la que una proposición es enunciada y demostrada por uno de los docentes de una asignatura anual de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas de la

Universitat de les Illes Balears. Dicho momento se sitúa en el curso 2007-2008, transcurridos aproximadamente 2 meses desde que los alumnos comenzaron sus estudios universitarios. El enunciado de la proposición es el siguiente:

Si $f: [a,b] \rightarrow R$ es continua, entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.

El docente, tras hacer hincapié en la necesidad de que la función sea continua y que el intervalo sea cerrado, comienza a demostrar la afirmación realizada, indicando “yo veré por ejemplo que tiene un máximo, que tiene un mínimo se hace exactamente igual”. Debido al límite de extensión del presente texto no incluimos la transcripción de dicha demostración, simplemente señalamos que se utilizó el método de reducción al absurdo. Utilizando DeMMaTTouL dicha transcripción no es necesaria, pues el contenido de los mapas de argumentos que hemos realizado son mayoritariamente recortes de imágenes capturadas del vídeo de la grabación de la clase en las que se ve la pizarra.



Ventana que añade como contenido una imagen capturada del vídeo

Una vez analizada la demostración e identificados sus elementos argumentativos, los representamos en un mapa de argumentos con DeMMaTTouL, de manera parecida a la utilización de software de representación de diagramas. Nos parece interesante el hecho de que se producen variaciones en la argumentación en función de la fuente de información escogida, por lo que reconstruimos 3 mapas de argumentos, que se corresponden con:

- i) la argumentación oral que realizó el docente para demostrar la proposición (Figura 1),
- ii) la argumentación que escribió el docente en la pizarra (Figura 2), y
- iii) la argumentación que quedó en los apuntes de una alumna que asistió a clase (Figura 3).

Para facilitar la comparación entre los mapas de argumentos construidos, hemos mantenido la posición en el mapa de los elementos argumentativos, así como también su numeración. Es decir, el mismo elemento está situado en la misma posición y posee la misma numeración en todos los mapas de argumentos en los que aparece.

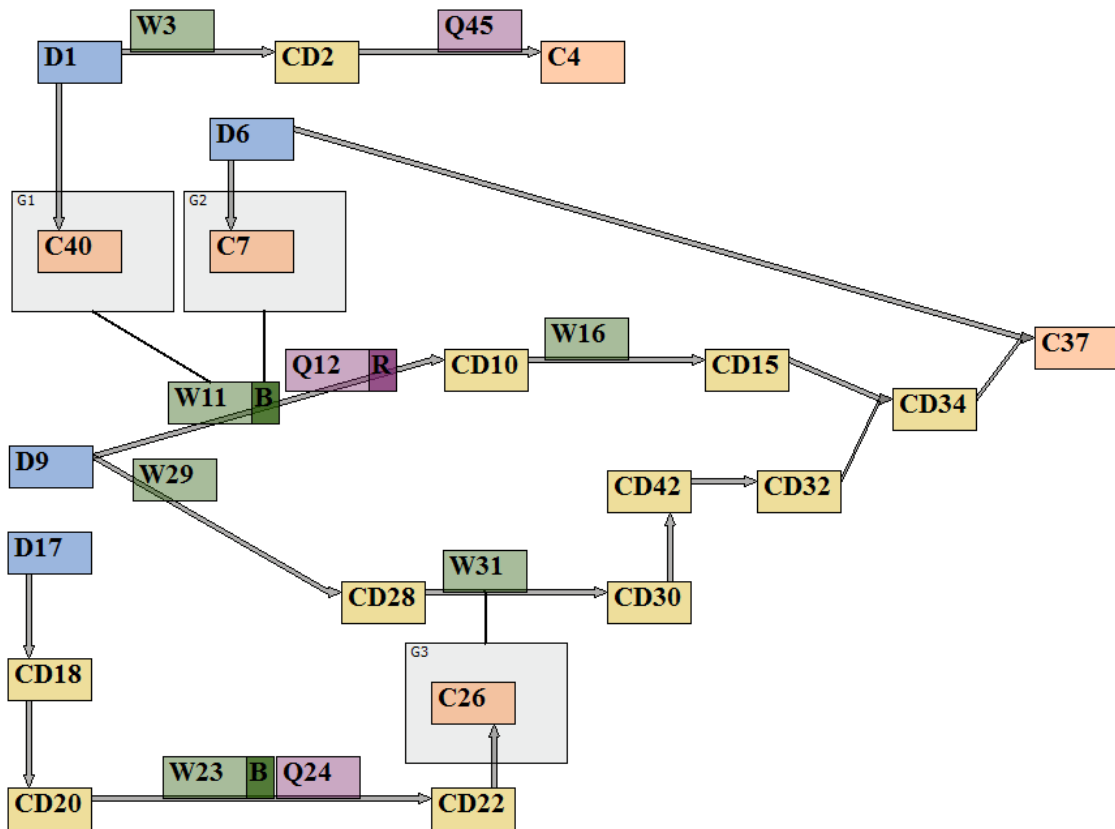


Figura 1. Mapa de la argumentación oral realizada por el docente

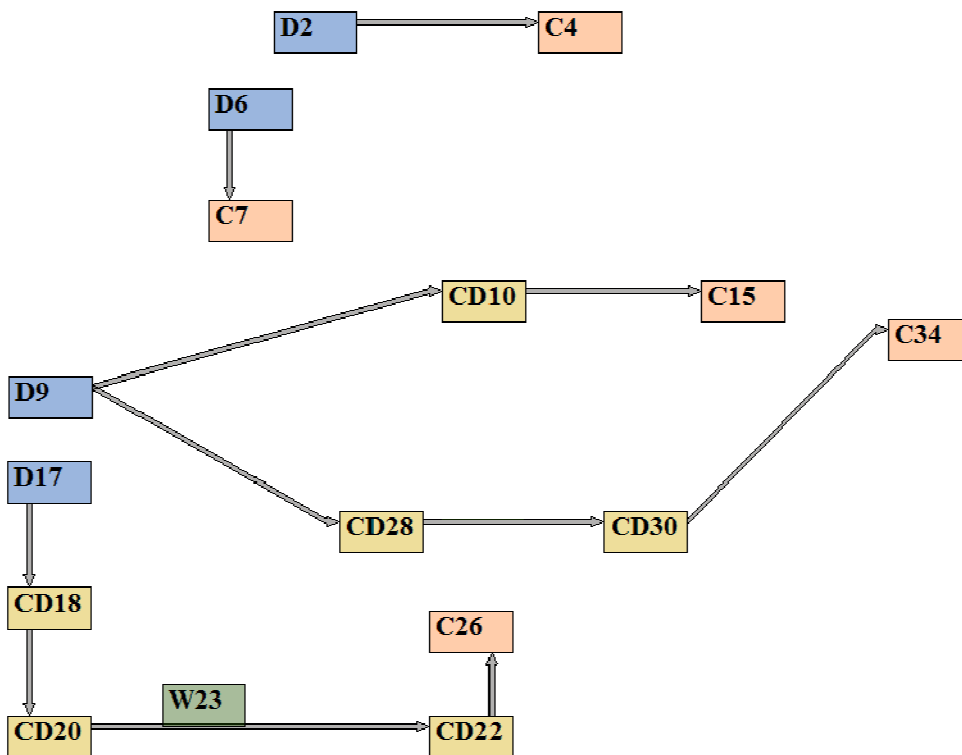


Figura 2. Mapa de la argumentación escrita por el docente en la pizarra

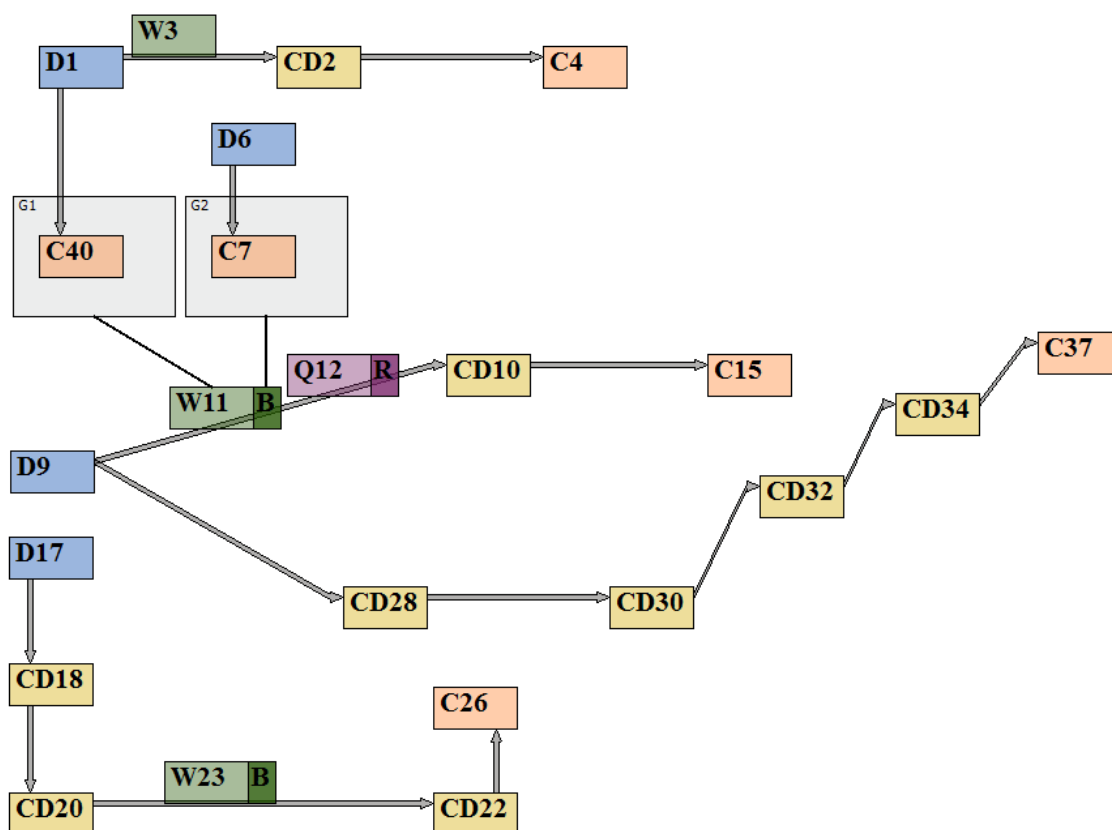


Figura 3. Mapa de la argumentación plasmada en los apuntes de una estudiante

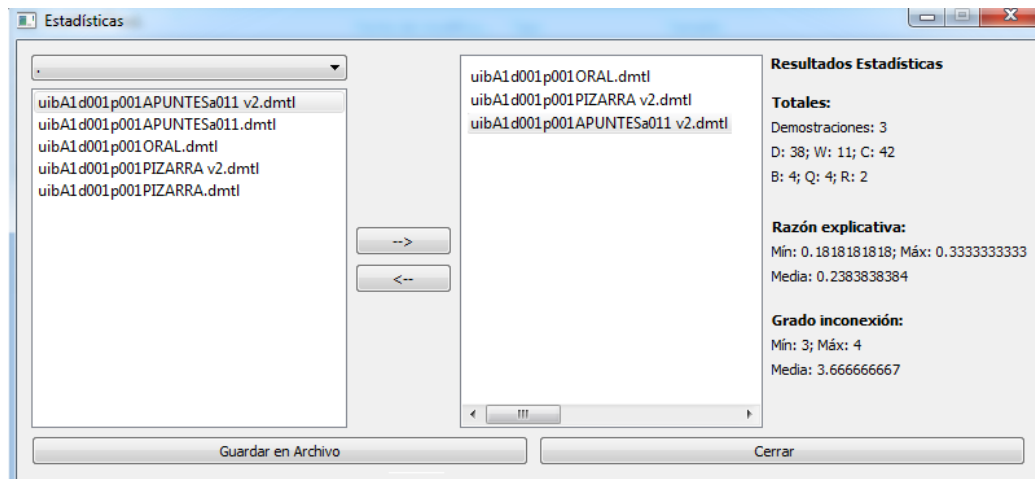
Una de las diferencias, que se observa rápidamente de manera visual, entre los mapas de argumentos anteriores es que la cantidad de elementos argumentativos difiere. También se aprecian fácilmente diferencias en el grado de inconexión de los mapas. Desde ambas perspectivas, la argumentación oral realizada por el docente es la más completa, así como también es la que más garantías aporta (6, de las que el docente sólo escribe en la pizarra 1 y se reflejan 3 en los apuntes de la estudiante). DeMMaTTouL ayuda en dicha tarea comparativa contabilizando aspectos como los que acabamos de citar. Hemos organizado en la siguiente tabla la información calculada por el software:

	D	W	C	B	Q	R	Grupos	Razón explicativa	Grado de inconexión*
Oral	15	6	16	2	3	1	3	0.3333	1
Pizarra	10	1	11	0	0	0	0	0.0909	4
Apuntes	13	3	15	2	1	1	2	0.2	2

Elementos argumentativos y parámetros calculados por DeMMaTTouL

Por otra parte, DeMMaTTouL también posee una herramienta que calcula la media y los valores máximo y mínimo de cada uno de los parámetros anteriores, por lo que, si bien en el caso que mostramos no resulta útil, podría ser de ayuda si quisiéramos trabajar con datos que sean representativos (en el sentido de la media) de un conjunto de argumentaciones (por ejemplo, las plasmadas en los apuntes de todos los alumnos que asistieron a clase).

* El grado de inconexión calculado por DeMMaTTouL todavía no tiene en cuenta las conexiones con grupos de elementos, por lo que hemos tenido que ajustarlo al grado de inconexión real de la estructura argumentativa.



Ventana de la herramienta Estadísticas

Si volvemos a los mapas de argumentos construidos y los analizamos desde el punto de vista de la naturaleza lógica del método utilizado en la demostración, reducción al absurdo, identificamos en la argumentación oral del docente, que puede tomarse como mapa de argumentos de referencia por ser el más completo, una serie de elementos argumentativos y conexiones clave:

- i) el dato $D6$ es la suposición de lo contrario de lo que se quiere demostrar,
- ii) utilizando el dato anterior se deduce $CD15$ y $CD32$, que son conclusiones contradictorias,
- iii) esto origina la conclusión $CD34$ de que se ha llegado a una contradicción, que proviene de suponer lo contrario de lo que se quería demostrar,
- iv) por tanto se concluye $C37$, es cierto lo que quería demostrarse (*f tiene un máximo absoluto en $[a,b]$*)

Sin embargo, algunos elementos y la mayoría de conexiones anteriores son inexistentes tanto en la pizarra como en los apuntes de la estudiante. Este análisis nos permite formular algunas preguntas de investigación: ¿cuáles son las razones por las que la estudiante no incluye dichas implicaciones en sus apuntes: tiene asumido el método y no necesita hacerlo explícito o no es consciente de dichas conexiones lógicas? (viendo su mapa de argumentos se puede descartar que se limite a copiar lo que aparece en la pizarra), ¿qué criterio sigue el docente para decidir si incluye o no un elemento argumentativo en la pizarra? y ¿qué consecuencias tiene la omisión de elementos argumentativos en el aprendizaje de los alumnos de primer curso?

Reflexiones finales

Nos gustaría destacar que, como hemos intentado mostrar mediante un ejemplo extraído de una situación de aula, los mapas de argumentos posibilitan un análisis visual y detallado de la estructura argumentativa de las demostraciones, identificando de manera sencilla aspectos como, por ejemplo, saltos en la argumentación (inconexiones) e implicaciones sin garantía. Los mapas de argumentos también permiten realizar comparaciones entre argumentaciones y consideramos que su uso puede aportar una óptica diferente a la formulación de preguntas de investigación.

Sintetizando, en el ejemplo mostrado en el apartado anterior, el software desarrollado ha sido de utilidad en las siguientes tareas:

- i) construcción de los mapas de argumentos basados en el modelo de Toulmin,

- ii) inserción de imágenes de las grabaciones en vídeo y de lenguaje matemático como contenido de los elementos de los mapas de argumentos,
- iii) exportación a imagen de los mapas de argumentos que se incluyen en este documento,
- iv) recuento de los elementos argumentativos de los mapas de argumentos y
- v) cálculo de los parámetros razón explicativa y grado de inconexión de los mapas.

También hemos comentado que el software incorpora una herramienta que realiza una descripción estadística de un conjunto de mapas de argumentos. Ningún otro SMA existente actualmente es capaz de ofrecer todo lo anterior al investigador, presentando los inconvenientes que detallamos en un apartado anterior, por lo que consideramos que DeMMaTTouL cubre un espacio hasta el momento vacío, presentándose como una herramienta útil en la investigación en Educación Matemática sobre la estructura argumentativa de las demostraciones.

Por otra parte, pensamos que DeMMaTTouL también se puede utilizar como herramienta de apoyo en la enseñanza-aprendizaje de la demostración, especialmente en los primeros cursos del Grado en Matemáticas. Es un software cuyo desarrollo puede continuar, mejorando sus limitaciones e incorporando características nuevas en función de las necesidades que surjan en sus posibilidades de uso.

Finalmente, a modo de vía abierta inexplorada, teniendo en cuenta que la tendencia actual de evolución del SMA parece ser, además de posibilitar la ejecución del software vía web, desarrollar características que permitan la construcción y evaluación de argumentos de manera colaborativa, puede resultar interesante explorar e investigar las posibilidades que este planteamiento ofrece en lo referente a la demostración en Educación Matemática.

Referencias

- Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation*, 19, 287-301.
- Aberdein, A. (2006). Managing informal mathematical knowledge: Techniques from informal logic. *Lecture notes in artificial intelligence*, 4108, 208-221.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283. Providence: American Mathematical Society.
- Reid, D. A. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península. [Traducción de Toulmin, S. E. (2003): The uses of argument. Edición actualizada de la 1ª edición de 1958.]