

ACERCA DE DIFICULTADES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES¹

CARMEN MARTÍNEZ Y MARGARITA LASCANO

El presente artículo reporta algunas evidencias que ponen de manifiesto la dificultad para el reconocimiento y la apropiación de algunos atributos que están presentes en la interpretación de la fracción como relación parte-todo. En particular, el que considera las partes como totalidad y el que considera las subdivisiones equivalentes. Estas evidencias se presentaron en el marco del desarrollo de una experiencia en el aula, que tuvo como propósito diseñar, aplicar y analizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la fracción en dicha interpretación.

INTRODUCCIÓN

El educador matemático en su práctica cotidiana se encuentra con dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, como número, área, función, ecuaciones y fracción, entre otros. En el caso particular del concepto de fracción surgen diversas preguntas como: ¿por qué los estudiantes no aprenden qué es una fracción?, ¿qué es en sí una fracción?, ¿qué es lo que se requiere para que el estudiante las comprenda?, ¿qué estrategias metodológicas favorecen su comprensión?

El tratar de dar respuesta a las anteriores preguntas dio origen a un proceso de indagación bibliográfica acerca del tópico en cuestión y al desarrollo de un proyecto de diseño e implementación de una secuencia didáctica² (Lascano, Martínez y Perilla, 1999) que abordara la complejidad de algunos aspectos relacionados con la enseñanza de las fracciones.

1. Agradecemos a Edna Ruth Perilla, por poner en práctica la secuencia didáctica que se describe en este artículo y a Pedro Javier Rojas y Oriol Mora por sus sugerencias al diseño de la propuesta didáctica. También a Felipe Fernández y a Luisa Andrade quienes contribuyeron a mejorar el texto del artículo; nuestra interacción académica con ellos fue apoyada financieramente por la Fundación Santillana.
2. La secuencia didáctica hace referencia a un trabajo de monografía realizado en 1999 por Edna Ruth Perilla y las autoras de este artículo, en el marco de la Especialización en Educación Matemática del Proyecto Curricular de Posgrado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

En la indagación bibliográfica encontramos que en los aportes dados por la comunidad de investigadores en Educación Matemática, existen diversas interpretaciones para la fracción: como relación parte-todo, medida, cociente, razón y operador (ver por ejemplo, Ohlsson (1996); Schwartz (1988), Freudenthal (1983) y Llinares y Sánchez (1988), entre otros).

Para el caso de la interpretación de la fracción como relación parte-todo, Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, citado en Llinares y Sánchez, 1988, pp. 80 y 81) proponen siete atributos que caracterizan dicha relación:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido.
3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos —partes— son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—.
6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
7. El “todo” se conserva.

Más adelante, Payne (1976, citado en Llinares y Sánchez, 1988, p. 81), propone otros cuatro atributos, que ve como esenciales a esta interpretación de la fracción: manejar el control simbólico de las fracciones, es decir, los símbolos relacionados a las fracciones; considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos; trabajar con fracciones mayores que la unidad y reconocer subdivisiones equivalentes; por ejemplo, notar que un tercio es equivalente a dos sextos, a tres novenos, etc.

Con respecto al proyecto de diseño de una secuencia didáctica se tuvo como propósito posibilitar en los estudiantes el reconocimiento y la apropiación de los atributos de la fracción como relación parte-todo. Al desarrollar esta secuencia se observaron varias dificultades en los estudiantes: una relacionada con el uso inadecuado de instrumentos de dibujo y medida como la regla, la escuadra, el compás y el transportador; y las otras, relacionadas con el reconocimiento y la apropiación de algunos de los atributos de la fracción en el contexto de su interpretación como relación parte-todo.

Este artículo centra la atención en analizar algunas de las respuestas de los estudiantes que se encontraron en el trabajo realizado durante la implementación de la secuencia didáctica y en particular, en las dificultades que especialmente se evidenciaron para el reconocimiento y apropiación de los atributos que consideran las partes como totalidad y las subdivisiones equivalentes, señalados más atrás.

El artículo se divide en dos partes. En la primera, se da cuenta de algunas características del contexto en el que se desarrolló la experiencia e incluye un resumen descriptivo de la secuencia didáctica. En la segunda, se exponen propiamente las evidencias que apoyan la existencia de las dificultades a las que hemos hecho referencia.

CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se desarrolló en 1999 con estudiantes del curso 702 del Centro Educativo Distrital Brazuelos en la jornada tarde. Este plantel está ubicado en la zona quinta de Bogotá (Usme). El curso en el que se aplicó la secuencia tenía una población de 36 estudiantes, con edades que oscilaban entre los 11 y 16 años; estos estudiantes provenían de los barrios aledaños al colegio: Monte Blanco, Usminia, Sucre, Brazuelos, clasificados en los estratos socioeconómicos 1 y 2.

Marcos de referencia de la propuesta

La secuencia didáctica que se desarrolló presenta una alternativa de trabajo diferente a la tradicional, pues no está orientada por el enfoque numérico y el énfasis no es en la operatividad.

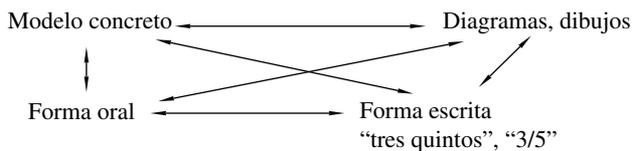
En las actividades que conforman la secuencia didáctica se hace énfasis en que los estudiantes a través de desarrollar lo que se propone, reconozcan y se apropien de los atributos que caracterizan a la fracción en su interpretación como relación parte-todo. Para el diseño de las actividades que conforman la secuencia didáctica se tomó como marcos referenciales y teóricos lo siguiente:

- un análisis de los errores que presentan los estudiantes cuando realizan trabajo con fracciones;
- una actividad de diagnóstico que tuvo como propósito indagar el estado inicial de los estudiantes con respecto al reconocimiento de los atributos de la fracción como relación parte-todo y a las formas de representar las fracciones;
- las investigaciones sobre fracciones, realizadas por Kieren (1975, citado en Maza y Arce, 1991), Novillis (1976, citado en Bell et al., 1983), Freudenthal (1994) y Llinares y Sánchez (1988);
- las propuestas para la enseñanza de las fracciones de Coxford et al. (1975, citados en Llinares y Sánchez, 1988) y de Adalira Sáenz-Ludlow (1998);

- y algunos trabajos sobre fracciones realizados por estudiantes del Posgrado en Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas;

Al trabajar sobre fracciones como relación parte-todo, es necesario realizar acciones sobre un todo (unidad); una vez que el todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto o dividido y coloreado en partes iguales, o se imagina o piensa como si lo fuera, queda constituida la fracción. Una vez constituida, ésta pasa a ser el resultado de una acción física o mental. Surge entonces, la necesidad de comunicar la acción y su resultado a través del lenguaje que puede ser oral, gráfico, escrito en palabras y/o escrito en símbolos numéricos propios de las matemáticas. Así pues, aparecen las diversas representaciones que ponen de manifiesto la relación que se establece entre las partes y el todo y se dota de sentido y significado a la fracción en su interpretación como relación parte-todo y al símbolo matemático que la representa.

De acuerdo a lo anterior y en consonancia con lo planteado por Llinares y Sánchez (1988), se puede decir que la fracción como relación parte-todo es generadora de símbolos y lenguaje. Este hecho se tuvo en cuenta para el diseño de las actividades que conforman la secuencia didáctica y también se refleja en la propuesta de Coxford et al. (1975, citados en Llinares y Sánchez, 1988, p. 96). Así pues, al elaborar un diseño que tuviera en cuenta algunos de los aspectos señalados, se abrió la oportunidad para que el estudiante transitara a través de las diferentes representaciones de la fracción —concreta, gráfica, verbal y escrita en palabras o símbolos numéricos (ver Figura N° 1)— y se propició la construcción del concepto de fracción con significado.



*Figura N° 1. Representaciones para la fracción
(Lesh, 1983, citado en Llinares y Sánchez 1988, p. 88)*

Descripción de la secuencia didáctica

La secuencia se inicia con la aplicación de una prueba de diagnóstico elaborada por García y Mayorga (1997), cuyo propósito era indagar acerca del estado inicial de los estudiantes con relación al reconocimiento y apropiación

ción de los atributos de la fracción en su interpretación como relación parte-todo, tanto para contextos continuos como discretos. Luego, se continuó con la elaboración de doce planchas de dibujo que se toman de algunos de los talleres diseñados por Sáenz-Ludlow (1998) en su trabajo sobre fracciones, en los que propone un juego con fracciones, constituido por ciertos dibujos de figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, círculos y triángulos) con particiones, algunas de ellas sombreadas. Posteriormente, se proponen otras seis actividades para contexto continuo y dos para contexto discreto, que tienen como fundamento la propuesta de la secuencia de enseñanza realizada por Coxford et al. (1975, citados en Llinares y Sánchez, 1988), la cual hace énfasis en los atributos de la fracción como relación parte-todo y le da importancia a hacer un trabajo que permita el tránsito entre las diversas representaciones para la fracción. Además, se elaboraron seis actividades adicionales que se diseñaron en momentos específicos del desarrollo de la experiencia. Éstas últimas, surgieron de acuerdo a las necesidades y dificultades que se iban encontrando en los estudiantes para el reconocimiento de los atributos.

Algunas de las actividades propuestas fueron:

- Para contextos continuos: realizar dibujos de figuras geométricas, (cuadrados, rectángulos, círculos y triángulos); sobre estos dibujos realizar particiones y sombrear algunas de las partes en que queda dividida la unidad; hacer dobleces para obtener dos, tres, cuatro, etc, partes del mismo tamaño, comparar las partes, doblar de distintas maneras para obtener partes del mismo tamaño sobre una unidad determinada (media hoja de papel tamaño carta) y comparar las diversas maneras de doblar para verificar que son del mismo tamaño; sombrear las partes y verbalizar la fracción; transitar de lo concreto a la representación gráfica; transitar de la representación gráfica a la representación escrita en palabras; transitar de la representación escrita en palabras a la representación concreta; socializar la actividad de tránsito de lo concreto a la representación gráfica y numérica; realizar dibujos (rectángulos) con subdivisiones; transitar entre todas las representaciones.
- Para contextos discretos: transitar de lo concreto a lo verbal y escrito en palabras y en símbolos numéricos y transitar de la representación gráfica a la representación simbólica en palabras y en números.

Algunos resultados

Al ser aplicada la secuencia didáctica y analizar los resultados, se observó para el contexto continuo un avance en los estudiantes con respecto al reconocimiento y la apropiación de algunos de los atributos, entre estos: la totalidad de la población logró ver una región como divisible, se dio cuenta que el número de dobleces no coincide con el número de partes y vio la necesidad de mantener la unidad fija (conservar el todo); un alto porcentaje reconoció la necesidad de la congruencia —que para este contexto, recae sobre la medida de área— entre las partes para construir la fracción como relación parte-todo; para modelos rectangulares la totalidad de la población logró dividir una región en el número de partes pedido y para modelos circulares sólo un octavo de la población no lo logró; en la medida en que se fue avanzando en la secuencia, fue aumentando el número de estudiantes que lograron reconocer que las subdivisiones cubren el todo, sin embargo, no todos lo lograron. Para el contexto discreto un poco menos de las tres cuartas partes de la población pudieron formar subgrupos, de tal forma que en cada grupo quedara la misma cantidad de elementos. Para este contexto la congruencia recae en tener la misma cantidad de elementos en cada subgrupo.

Los resultados sugieren que la estrategia implementada es pertinente para que los estudiantes reconozcan y se apropien de algunos de los atributos de la fracción en su interpretación como relación parte-todo. Por ejemplo, en las actividades que contemplan la manipulación de materiales es posible transitar entre las representaciones concretas, gráficas y simbólicas de la fracción; preguntas del estilo: ¿en cuántas partes quedó dividida la unidad?, ¿cuántas partes de la unidad están sombreadas y cuántas sin sombreadar?, propician que el estudiante se dé cuenta que la representación simbólica de la fracción en la forma a/b se puede asociar a la representación gráfica interpretando a como el número de partes que se sombrea o no se sombrea y b como el número de partes en que queda dividido el todo. Se favorece así, el que se ponga de manifiesto la relación en que se encuentran las partes y el todo de una fracción.

Ahora pasamos a presentar y comentar con más detalle los resultados en los que se evidenciaron dificultades alrededor de los dos atributos que prometimos analizar al comenzar este artículo.

EVIDENCIAS DE LAS DIFICULTADES

A través del desarrollo de las actividades se observó que para los atributos “considera las partes como totalidad” y “reconoce subdivisiones equivalentes”, los estudiantes presentaron dificultades para su reconocimiento y

apropiación; las evidencias de estas dificultades se manifestaron inicialmente en la prueba de diagnóstico y en las actividades originalmente diseñadas; aunque se diseñaron actividades adicionales para potenciar el reconocimiento y la apropiación de estos atributos, no se detectaron avances significativos en los estudiantes al respecto.

A continuación se presenta cómo se manifestaron estas dificultades en la prueba de diagnóstico (estado inicial de los estudiantes), en algunas de las actividades que hacían énfasis en estos atributos y en algunas de las actividades adicionales que fueron diseñadas en el transcurso del desarrollo de la propuesta didáctica para enfatizar el reconocimiento y apropiación de estos atributos.

Prueba de diagnóstico

En la Tabla N° 1, se presentan los enunciados de los ítems 1b, 1d, 2a y 9 de la prueba de diagnóstico que hacen referencia al reconocimiento del atributo ‘considera la partes como totalidad’, algunas de las respuestas de los estudiantes a estos ítems y un breve análisis descriptivo y porcentual de los resultados.

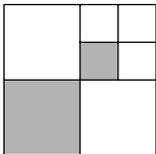
<p>Ítem 1b. Escriba en palabras y en números a qué parte de área corresponde la región sombreada.</p> 
<p>Ejemplos de respuestas dadas al ítem 1b</p> <ul style="list-style-type: none"> • un cuarto y un cuarto de un cuarto; $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$. • un cuadro dividido en 4 partes pero un cuarto de cuadro está dividido en otros cuatro. • un cuarto y un dieciseisavo; $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{16}$. • dos séptimos; $\frac{2}{7}$ o siete medios; $\frac{7}{2}$. • dos quintos; $\frac{2}{5}$. • cuatro tercios. • uno al lado izquierdo, uno arriba; 1, 1. • dos tercios; $\frac{2}{3}$. • dos treceavos; $\frac{2}{13}$. • un cuarto; $\frac{1}{4}$.

Tabla N° 1. Resultados con relación a la prueba de diagnóstico para el atributo “considera las partes como totalidad”

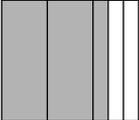
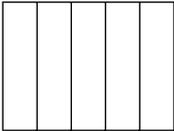
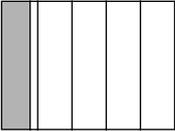
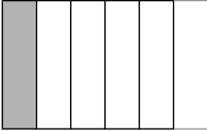
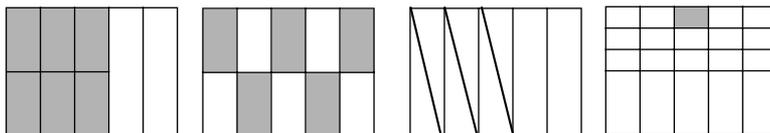
<p>Análisis descriptivo y porcentual (ítem 1b)</p> <p>Las dos primeras respuestas muestran evidencias de que el estudiante reconoce que una parte se puede considerar como totalidad; en la prueba sólo 2 de los 36 estudiantes (5.55%) dieron ese tipo de respuestas. En los ejemplos de las demás respuestas no hay evidencias de que se reconozca el atributo; en la prueba, 34 estudiantes (94.45%) dieron respuestas de ese tipo.</p>
<p>Ítem 1d. Escriba en palabras y en números a qué parte de área corresponde la región sombreada.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>Ejemplos de respuestas dadas al ítem 1d</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>dos enteros más un tercio o 7 sieteavos; $\frac{2}{3}$ o 7.</i> • <i>dos enteros y un tercio; 2 enteros y $\frac{1}{3}$.</i> • <i>setentaavos; 70.</i>
<p>Análisis descriptivo y porcentual (ítem 1d)</p> <p>La primera respuesta muestra evidencias de que el estudiante reconoce que una parte se puede considerar como totalidad; en la prueba sólo 3 estudiantes (8.33%) dieron respuestas similares. En los demás ejemplos de respuestas no hay evidencias de que se reconozca el atributo; en la prueba, 30 estudiantes (83.34%) dieron respuestas parecidas. Por otra parte, 3 estudiantes (8.33%) no respondieron el ítem.</p>
<p>Ítem 2a. Sombree un sexto del rectángulo.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>Ejemplos de respuestas dadas al ítem 2a</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div> </div>

Tabla N° 1. Resultados con relación a la prueba de diagnóstico para el atributo “considera las partes como totalidad”

Ejemplos de respuestas dadas al ítem 2a



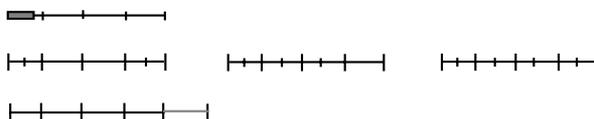
Análisis descriptivo y porcentual (ítem 2a)

El rectángulo de la izquierda de la primera, es un ejemplo de respuesta coherente con lo que se solicita, pero que no permite ver si se reconoce el atributo; lo cual hace ver que este ejercicio puede no ser el más apropiado para observar el reconocimiento del atributo; 5 estudiantes (13.88%) dieron respuestas así. El rectángulo de la derecha de la primera fila, muestra un ejemplo de respuesta en la que no se reconoce que una parte se puede considerar como totalidad, porque para obtener el sexto aumentan una parte adicional y así no conservan el todo; 17 estudiantes (47.22%) dieron respuestas de ese tipo. Por otra parte, en la segunda fila se muestran cuatro ejemplos de respuestas que aunque no son coherentes con lo que se solicita, si permiten entrever una posible aproximación para reconocer que una parte se puede considerar como una totalidad que se puede subdividir; en la prueba, 11 estudiantes (30.55%) dieron respuestas de ese tipo. Finalmente, hubo 3 estudiantes (8.33%) que no contestaron.

Item 9. Dado el siguiente segmento señale con color la sexta parte de su longitud.



Ejemplos de respuestas dadas al ítem 9



Análisis descriptivo y porcentual (ítem 9)

En la primera fila se exhibe una respuesta que es coherente con lo que se solicita, pero que no permite observar si el estudiante reconoce el atributo; 4 estudiantes (11.11%) respondieron así. En la segunda fila hay tres ejemplos de respuestas que aunque no son coherentes con lo que se solicita, porque realizan divisiones distintas a las pedidas, hay evidencia de que reconocen, de alguna manera, el atributo; 13 estudiantes (36.11%) dieron respuestas similares a las presentadas. En el ejemplo presentado en la tercera fila se muestra una respuesta en la que no hay evidencia de que se reconozca el atributo porque aumentan una parte al todo; 5 estudiantes (13.88%) dieron respuestas de ese tipo. Se presentaron 14 estudiantes (38.88%) que no respondieron el ítem.

Tabla N° 1. Resultados con relación a la prueba de diagnóstico para el atributo “considera las partes como totalidad”

En general, a través de las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems anteriores y también a los ítems que se presentan en la siguiente tabla (Tabla N° 2), se hace evidente que un alto porcentaje de la población no reconoce los atributos en cuestión. Así pues, la prueba de diagnóstico, nos muestra desde un principio la necesidad de elaborar propuestas didácticas para tratar de superar estas dificultades.

Ahora pasemos a mirar las respuestas dadas a los ítems 1 (1b y 1c) y 6 de la Tabla N° 2, que se refieren al atributo reconoce subdivisiones equivalentes.

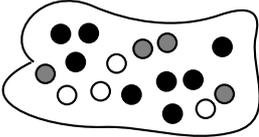
<p>Contexto continuo</p> <p>Ítem 1. Escriba en palabras y en números a qué parte de área corresponde la región sombreada.</p> <p>b. </p> <p>c. </p>
<p>Ejemplos de respuestas dadas al ítem 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>cuatro octavos o 2a mitad.</i> • <i>cuatro cuartos.</i>
<p>Análisis descriptivo y porcentual (ítem 1)</p> <p>En el primer ejemplo se presenta una respuesta donde hay evidencia de que el estudiante reconoce las subdivisiones equivalentes; 2 estudiantes (5.55%) respondieron así. La segunda respuesta no muestra evidencias de que se reconozcan las subdivisiones equivalentes; 32 estudiantes de los 36 (88.88%) dieron respuestas de ese tipo. Hubo 2 estudiantes (5.55%) que no respondieron.</p>
<p>Contexto discreto</p> <p>Ítem 6. En el siguiente conjunto de canicas qué parte corresponde a cada color.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>Ejemplos de respuestas dadas al ítem 6</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>2a mitad; 16/8 (para negro).</i> • <i>2a mitad de 2a mitad; 8/4 (para gris y blanco).</i> • <i>2a mitad porque son 8; 1/2 (para negro).</i> • <i>un cuarto, 2a mitad, 2a mitad porque son 4; 1/4 ó 1/2 ÷ 2.</i> • <i>un cuarto; 4.</i>

Tabla N° 2. Resultados con relación a la prueba de diagnóstico para el atributo “reconoce subdivisiones equivalentes”

Análisis descriptivo y porcentual (ítem 6)

En las dos primeras respuestas hay evidencias de que reconocen las subdivisiones equivalentes, aunque para la representación simbólica numérica la realicen como todo-parte; 4 estudiantes (11.11%) dieron respuestas de ese tipo. Las demás respuestas son ejemplos de lo que 29 estudiantes (80.55%) respondieron y en ellas no hay evidencias de que reconozcan las subdivisiones equivalentes. En este caso, 3 estudiantes (8.33%) no respondieron.

Tabla N° 2. Resultados con relación a la prueba de diagnóstico para el atributo “reconoce subdivisiones equivalentes”

Actividad de dibujo

Esta actividad tiene como fundamento los dibujos propuestos por Saéñz-Ludlow (1998). Los estudiantes realizaron doce planchas de dibujo con figuras geométricas (rectángulos, triángulos y círculos) que se encuentran divididas o subdivididas y algunas sombreadas. Algunos de estos dibujos permiten observar el desempeño de los estudiantes con respecto a los atributos que se están analizando. Para estos dibujos se solicitó que reconocieran y escribieran el número total de partes congruentes en que queda dividida la unidad, el número total de partes sombreadas y el número total de partes no sombreadas.

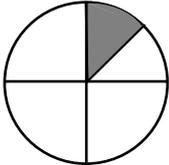
<p style="text-align: center;">Dibujo 1</p> 	<p>Algunas respuestas con relación al dibujo 1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las tres partes están iguales y una está dividida en mitad, media de una parte está sombreada; y tres y media no están sombreadas. • está dividida en ocho partes iguales está una parte rayada y siete sin rayar. • hay 5 partes iguales, hay una parte sombreada y hay 4 partes sin sombreadar”. • el círculo está dividido en cuatro partes y una de ellas está sombreada. • está dividida en tres partes iguales por que miden igual.
<p>Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 1)</p> <p>En las dos primeras respuestas hay evidencias de que el estudiante reconoce que partes del todo se pueden considerar como totalidad; en la actividad, 3 estudiantes (8.33%) dieron respuestas de ese tipo. Los tres últimos ejemplos muestran respues-</p>	

Tabla N° 3. Resultados con relación a la actividad de dibujo

tas en donde no hay evidencias de que el estudiante reconozca las partes como una totalidad, parece que ellos ven y cuentan pedazos y no reconocen la necesidad de congruencia; 17 estudiantes (47.21%) dieron respuestas de ese tipo. En este caso hubo 16 estudiantes (44.44%) que no respondieron.

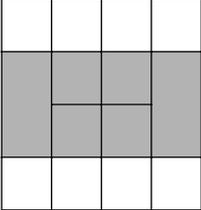
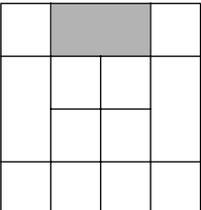
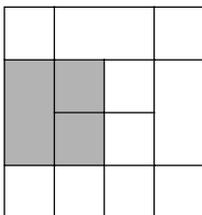
<p style="text-align: center;">Dibujo 2</p> 	<p>Algunas respuestas con relación al dibujo 2</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>está dividida en 15 partes iguales pero hay unas que falta dividir las, están subrayadas 8, sin subrayar 8 partes.</i> • <i>16 partes iguales porque los cuadrados grandes los dividimos, 4 sombreados y 12 sin sombrear.</i> • <i>está dividida en 8 partes iguales, si están rayadas 4, no están rayadas 4.</i> • <i>en 8 y en 4 partes, en 4 y en 2 partes, en 4 y en 2 partes.</i> • <i>La unidad está dividida en 12, 6 están sombreadas, 6 no están sombreadas.</i> • <i>está dividido en 14 partes.</i>
<p>Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 2)</p> <p>Los cuatro primeros ejemplos muestran las respuestas de 4 estudiantes (11.11%) en donde hay evidencias de que reconocen las partes como un todo. Sin embargo, sólo un estudiante en su respuesta (cuarto ejemplo), da evidencias de que reconoce subdivisiones equivalentes. En los dos últimos ejemplos de respuestas no se encuentran evidencias de que el estudiante reconozca los dos atributos que se están considerando; 5 estudiantes (13.89%) dieron respuestas de ese tipo. En este caso se presentaron 27 estudiantes (75%) que no respondieron.</p>	
<p style="text-align: center;">Dibujo 3</p> 	<p>Algunas respuestas con relación al dibujo 3</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>está dividida en 8 partes iguales, si están rayadas 1 y no están rayadas 7.</i> • <i>hay 16 partes una rayada sobran 15 sin rayar.</i> • <i>está dividida en 16, están rayadas 2 y están sin sombrear 14.</i> • <i>La unidad está dividida en 12 partes, una sombreada y 11 no están.</i>

Tabla N° 3. Resultados con relación a la actividad de dibujo

Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 3)

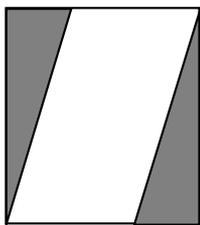
Los primeros tres ejemplos corresponden a las respuestas de 3 estudiantes (8.33%) en donde se perciben algunas evidencias de que se reconocen las partes como un todo. Sin embargo, ninguno de esas respuestas muestra evidencias de que se reconozcan fracciones equivalentes. El último ejemplo ilustra el tipo de respuestas que dieron 6 estudiantes (16.61%) en donde no hay evidencias de que reconozcan los dos atributos. Para este caso se presentaron 27 estudiantes (75%) que no contestaron.

Dibujo 4**Algunas respuestas con relación al dibujo 4**

- *La unidad está dividida en 7 partes, 2 están pintadas y 5 no.*

Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 4)

No hubo estudiantes que dieran respuestas en donde se mostraran evidencias de que se reconocieran los dos atributos; 9 estudiantes (25%) dan respuestas similares a las del ejemplo y 27 estudiantes (75%) no respondieron.

Dibujo 5**Algunas respuestas con relación al dibujo 5**

- *en 6 partes iguales solo dos sombreadas, cuatro sin sombrear.*
- *La unidad está dividida en 3 partes, 2 están pintadas y 1 sin pintar.*
- *está dividida en dos partes.*

Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 5)

Sólo un estudiante (2.77%) dio una respuesta (ver el primer ejemplo) en donde hay evidencias de que reconoce que las partes se pueden considerar como un todo, pero en esa respuesta no hay evidencias de que reconozca el otro atributo. Los ejemplos segundo y tercero muestran el tipo de respuestas que dieron 4 estudiantes (11.11%) en donde no se perciben evidencias de que reconozcan los dos atributos. En este caso se presentaron 31 estudiantes (86.1%) que no respondieron.

Tabla N° 3. Resultados con relación a la actividad de dibujo

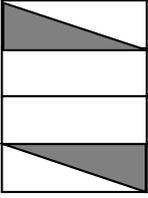
<p style="text-align: center;">Dibujo 6</p> 	<p>Algunas respuestas con relación al dibujo 6</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>La unidad está dividida en 4 partes, dos están pintadas y 2 sin pintar</i>
<p>Análisis descriptivo y porcentual (dibujo 6)</p> <p>En este caso sólo 2 estudiantes (5.5%) dieron respuestas y en ellas no se muestran evidencias de reconocer cualquiera de los dos atributos. 34 estudiantes (94.44%) no respondieron.</p>	

Tabla N° 3. Resultados con relación a la actividad de dibujo

Las respuestas dadas por los estudiantes en esta actividad también pusieron en evidencia la dificultad para reconocer los atributos ‘las partes se pueden considerar como totalidad’ y sobre todo para reconocer ‘subdivisiones equivalentes’.

Con respecto al atributo ‘las partes se pueden considerar como totalidad’, del análisis descriptivo-porcentual se puede concluir que en promedio sólo en 3 estudiantes hay evidencias de que lo reconocen; los que no lo reconocen observan pedazos y no tienen en cuenta la congruencia de las partes. Por otra parte, en la medida en que el grado de dificultad de los dibujos es más complejo, se incrementa el número de estudiantes que no contestan.

Respecto al atributo ‘subdivisiones equivalentes’, sólo un estudiante a través de la respuesta que da para el segundo dibujo presentado en la tabla anterior, da evidencias de reconocerlo, pero no se puede afirmar que él se halla apropiado de éste, porque en los otros dibujos en los que está presente el atributo, sus respuestas no dan evidencias. La población restante en sus respuestas no hace alusión a la presencia de subdivisiones equivalentes en los dibujos.

Actividad de dobleces

En esta actividad se propuso a los estudiantes que realizaran dobleces en hojas rectangulares, acordando primero que se consideraba como ‘unidad’ una hoja; se observó y se discutió acerca de las diversas maneras de realizar dobleces para obtener medios, tercios, cuartos, etc. Con respecto a las dificultades que se están analizando en el presente artículo, se destaca el hecho que ningún estudiante hizo alusión a que es posible obtener cuartos a partir

de subdivisiones en los medios u octavos subdividiendo cuartos, o sextos subdividiendo en medios los tercios o los tercios en medios; esto permite decir que los estudiantes no observan que las partes se puede considerar como un todo y tampoco expresaron que por ejemplo dos cuartos representan un medio, es decir no ven subdivisiones equivalentes.

Tránsito de la representación en palabras a la forma concreta

Se presentó a los estudiantes el siguiente problema:

Se quiere construir una valla publicitaria para un nuevo producto con las siguientes características:

- Dos de las cinco partes se pintan de verde.
- Debe llevar un dibujo en cinco de las nueve partes de lo que está sin pintar de verde.
- En la parte que está sin pintar y sin dibujo se escribe un aviso.

Diseñe la valla.

Para resolver el problema, el estudiante debía considerar tres quintos como un todo y realizar subdivisiones en ésta. Entonces debía, en los cinco novenos de tres quintos hacer el dibujo y en los cuatro novenos de tres quintos hacer el aviso. Al realizar la actividad la mayoría de estudiantes no presentó dificultad para pintar la parte de verde. Sin embargo, en la mayoría de los estudiantes se observó dificultad para comprender el enunciado “debe llevar un dibujo en cinco de las nueve partes de lo que está sin pintar de verde”, lo cuál evidencia el no reconocimiento del atributo “considera las partes como totalidad” y muestra la persistencia de la dificultad para reconocer dicho atributo.

Con respecto a al atributo “reconoce subdivisiones equivalentes” ningún estudiante da evidencias de reconocer que al subdividir los tres quintos en novenos se obtenían nueve quinceavos de la unidad inicial, que la parte de verde (dos quintos) corresponden a seis quinceavos y que tener cinco quintos es equivalente a tener quince quinceavos; sin embargo, cabe anotar que el enunciado del problema no invita explícitamente a que se haga este reconocimiento.

Dibujos con subdivisiones explícitas

Ante la persistencia de la dificultad para estos atributos se diseñó una actividad adicional que consistió en dibujar dos rectángulos de 4 cm por 6 cm

con subdivisiones en medios, tercios, sextos y doceavos (ver dibujos de la Tabla N° 4) e idear algunas preguntas que tenfan la intención de ayudar al estudiante a reconocer los atributos. Los dibujos que se propusieron se presentaron en una cartelera que se pegó en el tablero.

Los resultados relativos al dibujo 1 se obtuvieron de una discusión en plenaria con los estudiantes, mientras que los resultados relativos al dibujo 2 se obtuvieron como producto de una tarea. En el caso del dibujo 1, primero se pidió a los estudiantes que nombraran todas las divisiones posibles sin tener en cuenta las regiones sombreadas y luego se pidió tener en cuenta las regiones sombreadas; en el caso del dibujo 2 la instrucción dada fue que escribieran todas las opciones posibles para relacionar las partes sombreadas con la unidad.

De acuerdo a las respuestas (ver la Tabla N° 4) sólo un estudiante hace evidente que se reconoce las partes como totalidad y subdivisiones equivalentes. Esto lo vemos, cuando afirma “seis medios de sexto” donde es evidente que observa que hay una división en sextos, que cada uno de ellos fue subdividido en medios, que se sombream cada uno de estos medios; con relación a los otros estudiantes la respuesta más repetida por la mayoría fue la de “doceavos”, las otras respuestas no fueron tan frecuentes.

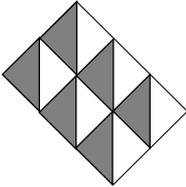
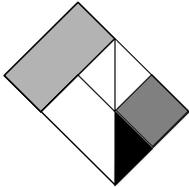
Dibujos	Resultados
<p data-bbox="237 901 324 921">Dibujo 1</p> 	<p data-bbox="496 910 1020 992">Cuando se indicó no tener en cuenta las regiones sombreadas, aparecieron respuestas como: “medios”, “tercios”, “sextos” y “doceavos”.</p> <p data-bbox="496 1009 1026 1120">Cuando se indicó tener en cuenta las regiones sombreadas, algunas respuestas fueron: “seis de doce”, “seis medios de sexto”, “tres sextos” y “medios tercios”.</p>
<p data-bbox="237 1163 324 1182">Dibujo 2</p> 	<p data-bbox="496 1154 1026 1409">Sólo 19 estudiantes realizaron la tarea, de éstos sólo 7 escribieron la relación entre el número de partes sombreadas con la unidad, y de estos 7 estudiantes sólo uno consideró todas las posibilidades para cada una de las intensidades de las sombras, por ejemplo, para la sombra negra escribió “una de las doce partes tiene sombra negra, un medio de seis tiene sombra negra y un cuarto de un medio de tres partes tiene sombra negra”.</p>

Tabla N° 4. Resultados con relación a la actividad de dibujos con subdivisiones explícitas

Tránsito entre todas las representaciones

En esta actividad se les entregó una hoja de trabajo a los estudiantes y se les pidió que siguieran de manera individual las instrucciones propuestas. El segundo ítem, en el que los estudiantes debían escribir en palabras y en números la relación entre la parte sombreada y la unidad que se encuentra presente en la representación gráfica dada, permitió observar el reconocimiento de los atributos en mención. A continuación se presentan los resultados de esta actividad.

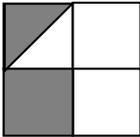
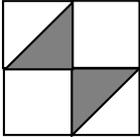
Dibujos	Resultados
<p data-bbox="231 500 317 525">Dibujo 1</p> 	<p data-bbox="494 500 1020 682">Sólo 7 estudiantes escriben “tres octavos” y en símbolos numéricos $\frac{3}{8}$; se evidencia que reconocen que una parte se puede considerar como totalidad. La población restante a través de sus respuestas evidencia que no reconocen ese atributo.</p>
<p data-bbox="231 703 317 728">Dibujo 2</p> 	<p data-bbox="494 703 1025 872">Sólo 8 estudiantes a través de su respuesta evidencian que reconocen que una parte se puede considerar como totalidad, el resto de la población no. Ningún estudiante establece subdivisiones equivalentes ya que no establecen la equivalencia entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$.</p>

Tabla N° 5. Resultados con relación a la actividad de tránsito entre todas las representaciones (primera actividad)

Esta actividad consistió en producir tres dibujos con representaciones de fracciones, en una cartelera que se pegó en el tablero; los estudiantes debían escribir en palabras y en números la relación entre las partes sombreadas y la unidad. En la Tabla N° 6 se presentan los dibujos y los resultados de los estudiantes:

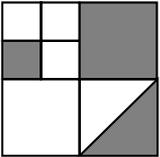
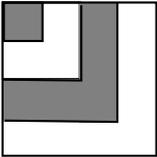
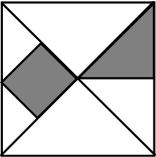
		
<p data-bbox="399 1372 485 1397">Dibujo 1</p>	<p data-bbox="592 1372 678 1397">Dibujo 2</p>	<p data-bbox="786 1372 872 1397">Dibujo 3</p>

Tabla N° 6. Resultados con relación a la actividad de tránsito entre todas las representaciones (segunda actividad)

Sólo 17 estudiantes (47.22%) realizaron la actividad y de éstos, únicamente 3 (8.33%) escribieron la relación pedida y, a través de sus respuestas, evidencian reconocimiento y apropiación del atributo ‘las partes se pueden considerar como totalidad’. En el dibujo 3, en el que está presente la equivalencia $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$ ningún estudiante establece las subdivisiones equivalentes.

Tabla N° 6. Resultados con relación a la actividad de tránsito entre todas las representaciones (segunda actividad)

CONSIDERACIONES FINALES

Desde el comienzo, en la prueba de diagnóstico, se detectaron dificultades en los estudiantes para el reconocimiento de los dos atributos que fueron objeto de análisis en este artículo; además, a través del desarrollo de la secuencia didáctica, se constató que dichas dificultades permanecen; finalizadas las actividades sólo en las respuestas de tres estudiantes se observaron evidencias del reconocimiento del atributo “considera las partes como totalidad” y únicamente en las respuestas de un estudiante se evidenció el reconocimiento de subdivisiones equivalentes.

Así pues, los resultados a que se llega muestran la necesidad de realizar un trabajo didáctico aún más profundo para abordar de manera específica estos dos atributos de la fracción como relación parte-todo y permitir así que los estudiantes los reconozcan y se apropien de ellos. Entonces, se requiere abordar preguntas más puntuales tales como: ¿cuáles son los elementos que subyacen en estos atributos?, ¿qué destrezas o habilidades necesita el estudiante para reconocerlos y apropiarse de ellos?, ¿cuáles son las actividades que permiten superar en los estudiantes las dificultades en torno al reconocimiento y apropiación de los mismos?

En reflexiones posteriores, al tratar de dar respuestas a estas preguntas surgen algunas ideas que podrían aportar elementos para el diseño de actividades que aborden estos atributos. Por ejemplo, tener en cuenta que una de las dificultades relevantes para reconocer subdivisiones equivalentes puede ser que el significado de los números está conectado a cantidad de elementos, dado que los estudiantes tienen como referente el universo de los números naturales, y en la fracción para simbolizar cantidad hay que utilizar dos números que representan la relación entre la parte y el todo. La siguiente situación para un contexto continuo (ver Figura N° 2), en donde las partes sombreadas de las figuras rectangulares recubren la misma área del todo (la unidad), podría contribuir a que los estudiantes identifiquen la relación entre las partes y el todo, a partir de la representación gráfica, de manera que al

pasar a la representación con símbolos numéricos, noten que las parejas de números que relacionan las partes sombreadas y el todo —uno de tres, dos de seis, tres de nueve, cuatro de doce, etc.— no son iguales, pero que la relación que hay entre las partes y el todo es la misma.

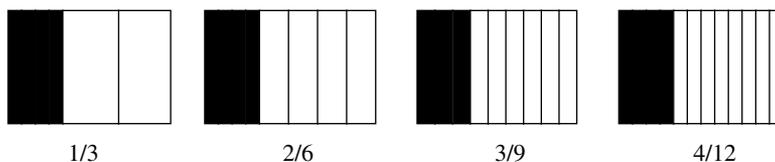


Figura N° 2. Ejemplo de subdivisiones equivalentes en contexto continuo

Para contextos discretos (ver Figura N° 3), la situación se torna más compleja para ser enseñada porque además, el niño tendría que reagrupar para ver tres en donde hay seis, o nueve, o doce y conservar de esta manera la congruencia en este contexto (la misma cantidad de elementos en cada subgrupo)

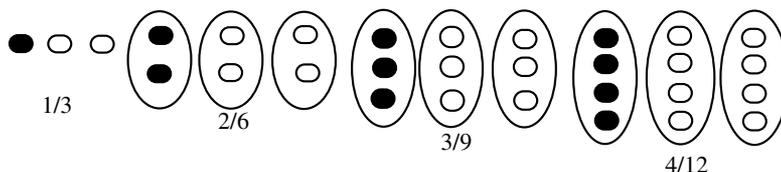


Figura N° 3. Ejemplo de subdivisiones equivalentes en contexto discreto

Hacer uso del atributo mismo en las actividades puede favorecer el reconocimiento y la apropiación del atributo “considera las partes como totalidad”. En este sentido se podría proponer al estudiante tomar partes de un todo y subdividirlos para obtener otras fracciones. Por ejemplo, para obtener sextos, se puede considerar a un medio como totalidad y hacer tercios en él, o a un tercio considerarlo como un todo y hacer medios en él (ver Figura N° 4). La idea es propiciar que el estudiante pueda ver diversas maneras de obtener otras fracciones a partir de subdividir partes de una unidad.

Una vez obtenidas fracciones a través de subdivisiones en las partes, se puede realizar conteo de fracciones unitarias para propiciar el reconocimiento de subdivisiones equivalentes; si se retoma el ejemplo anterior, se puede observar que $3/6$ es equivalente a $1/2$, que $2/6$ es equivalente a $1/3$. Las ideas anteriores permiten decir que al parecer los dos atributos están relacionados y que habría que trabajarlos simultáneamente.

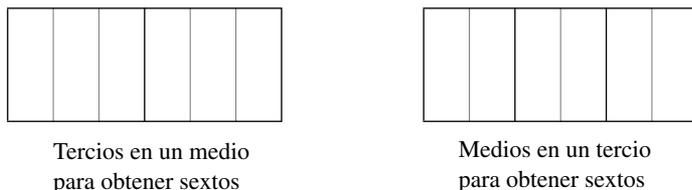


Figura N° 4. Obtención de fracciones a través de subdivisiones de partes de un todo.

Una razón importante para trabajar estos atributos es la relación de equivalencia presente al abordarlos, la que es primordial para establecer una relación de orden en los racionales y para insertar fracciones entre otras dos fracciones dadas. Se favorece así en los estudiantes un acercamiento al concepto de densidad y a la idea de continuo, características propias del sistema de los números racionales y posteriormente de los números reales.

Por otra parte, si bien es cierto que los resultados de la estrategia implementada aportan alternativas y nuevas ideas para enfrentar la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la fracción, no sobra señalar que dicha estrategia sólo abordó una de las interpretaciones de la fracción. Para una comprensión más significativa de este concepto es aconsejable trabajar las otras interpretaciones y tener en cuenta el significado que adquiere el símbolo numérico dependiendo de la interpretación con que se esté trabajando.

REFERENCIAS

- Bell, A., Costello, J. y Küchemann, D. (1983). *A Review of Research in Mathematical Education*. London: NFR-Nelson.
- Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Ernesto Sánchez Editores
- García, R. y Mayorga, D. (1997). Dificultades en la comprensión del concepto de número fraccionario: La relación Parte-todo (trabajo de grado no publicado). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lascano, M., Martínez, C. y Perilla, E. (1999). Una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones como relación parte-todo: reporte de una experiencia (trabajo de grado no publicado). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.
- Maza, C. y Arce, C. (1991). *Ordenar y Clasificar*. Madrid: Síntesis.
- Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sáenz-Ludlow, A. (1998). Arithmetic Project. (Ponencia presentada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 12, Bogotá, julio5-10).
- Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Margarita Lascano
Proyecto Curricular de la Lic. en Matemáticas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Tel.: 2842373
Bogotá, Colombia
E-mail: margarita @internacion.com

Carmen Martínez
Centro Educativo Distrital Brasilia - USME
Tel.: 7622130
Bogotá, Colombia
E-mail: car_martinez97@LatinMail.com