CÓMO ESTUDIANTES PARA PROFESOR INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

HOW PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS NOTICE SECONDARY SCHOOL STUDENTS'MATHEMATICAL THINKING. DERIVATIVE OF A FUNCTION AT A POINT

Sánchez-Matamoros, G. (1), **Fernández, C.** (2), **Valls, J.** (2) , **García, M.** (1) , **Llinares, S.** (2)

Universidad de Sevilla (1), *Universidad de Alicante* (2)

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar grados de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto. A partir de los resultados de las investigaciones previas sobre la derivada diseñamos un cuestionario formado por tres tareas a partir de las respuestas de estudiantes a 3 problemas sobre el concepto de derivada en un punto. Los resultados han permitido generar descriptores de niveles de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos resultados aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de profesores de matemáticas que tengan como uno de sus objetivos el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes.

Abstract

The goal of this study is to characterize pre-service mathematics teacher's professional noticing of secondary school students' mathematical thinking in the case of derivative of a function at a point. We designed a test with three tasks taking into account previous research about secondary school students' understanding of derivative. The analysis has allowed building a framework for the development of pre-service teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. These findings have implications for the design of mathematics teacher education programs with a specific focus on the development of pre-service teachers' professional noticing of students' mathematical thinking.

Palabras clave: *Mirada profesional, pensamiento matemático de los estudiantes, niveles de desarrollo.*

Key words: *Professional noticing, student' mathematical thinking, levels of development.*

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM

La competencia docente "mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes".

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente "mirar con sentido" (professional noticing) la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs, Philipp, 2010; van Es y Sherin, 2002). Esta competencia docente permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Aunque en los últimos años esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas, la idea común que subyace a estos planteamientos es subrayar la manera en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Mason (2002) indica como una característica de esta competencia docente el que el profesor sea consciente de cómo interpreta las situaciones de enseñanza-aprendizaje, mirando, de una manera estructurada, lo que puede ser relevante. Por otra parte, Van Es y Sherin (2002) caracterizan esta competencia docente como el ser capaz de identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza y usar el conocimiento sobre el contexto para interpretarlos, realizando conexiones a principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Una de las tareas relevantes para el profesor en las situaciones de enseñanza es interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia considerando tres destrezas interrelacionadas:

- *identificar* las estrategias usadas por los estudiantes
- *interpretar* la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes
- *decidir* cómo responder teniendo en cuenta la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes

Recientemente el énfasis se sitúa en caracterizar y comprender el desarrollo de esta competencia en estudiantes para profesor en dominios matemáticos específicos (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Fernández, Llinares y Valls, 2011 a y b; 2012) planteándonos preguntas como

- En qué medida los estudiantes para profesor *identifican* los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes en la resolución de tareas
- Cómo los estudiantes para profesor *interpretan* las respuestas de los estudiantes
- De qué manera las *decisiones de acción* que los estudiantes para profesor plantean tienen en cuenta la manera en la que los estudiantes parecen comprender las nociones matemáticas

El planteamiento de estas cuestiones de investigación se apoya en la existencia de síntesis de resultados de investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes que son referencia para el diseño de los instrumentos y para los análisis generados en esta agenda de investigación.

Las características de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada

Un dominio de investigación que ha estado aportando resultados relevantes sobre cómo los estudiantes comprenden las nociones matemáticas es el Cálculo (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Tall, 1990) y dentro de este dominio el concepto de derivada (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011).

Estas investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de bachillerato en la construcción de los significados y relaciones de los diferentes elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada en un punto. Además han indicado que los sistemas de representación son considerados como medios que ayudan a los estudiantes a dotar de significado a los conceptos. Diversas investigaciones han mostrado que los estudiantes pueden realizar tareas sobre la derivada en un punto en un modo de representación pero tener dificultades con otro modo de representación. Esto es debido a que los estudiantes consideran los modos de representación separadamente sin ser capaces de establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, los estudiantes pueden hacer uso de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente (gráfico) o como razón de cambio (analítico) sin establecer ningún tipo de relación entre ambas. Este hecho subraya la importancia que tiene la coordinación entre los diferentes modos de representación en la comprensión del concepto.

Con estas referencias previas en esta investigación nos centramos en caracterizar en estudiantes para profesor la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito específico de la derivada de una función en un punto. Las preguntas de investigación planteadas son:

- ¿Qué elementos matemáticos de la derivada de una función en un punto y sus relaciones utilizados por los estudiantes de Bachillerato durante la resolución de problemas son identificados por los estudiantes para profesor?
- ¿Cómo los futuros profesores interpretan la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada de una función en un punto?
- ¿Qué decisiones de acción proponen?

Método

Participantes y contexto

En esta investigación han participado 30 estudiantes del máster de profesorado de educación secundaria (EPPs), especialidad de matemáticas, de las Universidades de Alicante y Sevilla. Estos estudiantes provienen de distintas licenciaturas.

Instrumento

A partir de los resultados de investigaciones previas sobre la comprensión de la derivada diseñamos un cuestionario formado por tres tareas (figura 1). Cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 1º Bachillerato a tres problemas de derivada en un punto, y extractos de la entrevista en los que el estudiante explicaba como había resuelto cada problema, estos datos fueron extraídos de trabajos anteriores (Sánchez-Matamoros, 2004), las tareas se completaban con tres cuestiones a las que los EPPs tenían que responder:

. *Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.*

. A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de derivada de una función en un punto?

. Considerando la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante X mostrada en la resolución de los problemas, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?

Los problemas usados en el diseño de las tareas mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en un punto en diferentes modos de representación. La figura 2 recoge los tres problemas usados, los elementos matemáticos que lo configuran y los modos de representación considerados.

Figura 1. Estructura de una tarea

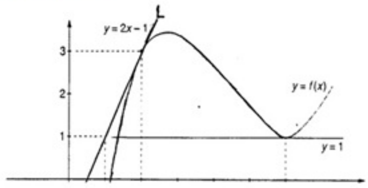
<table>
<tr>
<td>Problema 1
Comprueba que la tasa de variación media de $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$ en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?</td>
<td>Problema 2
Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f ’(2).

</td>
<td>Problema 3
De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>0.99999</td><td>1</td><td>1.00001</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-2.1</td><td>-2.01</td><td>-2.001</td><td>-2.0001</td><td>-2.00001</td><td>-2</td><td>-2.00002</td><td>-2.0002</td><td>-2.002</td><td>-2.02</td><td>-2.2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>1.9999</td><td>1.99999</td><td>2</td><td>2.00001</td><td>2.0001</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>3.61</td><td>3.9601</td><td>3.996001</td><td>3.99960001</td><td>3.99996</td><td>4</td><td>4.00004</td><td>4.00040001</td><td>4.004001</td><td>4.0401</td><td>4.41</td></tr>
</table>
a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?</td>
</tr>
<tr>
<td>Elementos</td>
<td>Elementos</td>
<td>Elementos</td>
</tr>
<tr>
<td>M1.1 Tasa de variación media en el intervalo [a, b]
M1.2. Relación de la TVM con la pendiente de la secante
M1.3. Tasa de variación instantánea
M1.4. Relación de la TVI con la derivada en x=a.
M1.5. Relación de la TVI con la pendiente de la tangente (entrevista)</td>
<td>M2.Interpretación geométrica de la derivada en un punto: la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto</td>
<td>M3.1. Aproximación – Calidad de la aproximación
M3.2. Existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que la función sea derivable en x = a (aproximación numérica a través de las tablas de valores)</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas del cuestionario

Las respuestas de los 3 estudiantes a estos problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de comprensión del concepto de derivada obtenidos en las investigaciones previas (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011):

- Nivel INTRA: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y no es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel INTER: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel TRANS: El estudiante usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto tanto en modo analítico como gráfico y en su aproximación numérica relacionándolos cuando resuelve los problemas.

La Figura 3 muestra parte de una de las tareas del cuestionario (respuesta del estudiante 2 al problema 3, más extracto de entrevista).

Estudiante 2 Iniciales nombre y apellidos

Problema 3

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

Estudiante 2

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)	RAZONA LA RESPUESTA	

PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{4-3'99996}{2-1'99999} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$$

$$\frac{4'00004-4}{2'00001-2} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$$

$$\frac{-2+2'00001}{1-0'99999} = \frac{0'00001}{0'00001} = 1$$

$$\frac{1'00001-1}{-2'00002+2} = \frac{0'00001}{-0'00002} = -0'5$$

RAZONA LA RESPUESTA

El valor de la derivada de f en x=2 es 4

Entrevista

E2: aplicando la definición de derivada, encontré que en x =2 la aproximación es 4

I: ¿y en x =1?

E2: me dio 1 por un lado y por el otro –0,5

I: y entonces, ¿es derivable?

E2: en x =2 coinciden. En x =1 no coinciden, entonces no será derivable

Figura 3. Ejemplo del problema 3 del cuestionario

Análisis

El análisis se ha realizado en dos fases. En la primera fase se analizaron las respuestas de cada EPPs a cada una de las tres preguntas del cuestionario.

El análisis de la respuesta a la primera pregunta tenía como objetivo ver en qué medida los EPPs identificaban los elementos matemáticos usados por los estudiantes de bachillerato. En el análisis de la segunda pregunta considerábamos en qué medida los EPPs identificaban o no las características de la comprensión de los estudiantes de bachillerato teniendo en cuenta las características de los niveles de comprensión de la derivada en un punto identificados (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011). Por último, para el análisis de la tercera pregunta categorizamos las acciones de enseñanza que proponían los EPPs de manera inductiva.

La segunda fase del análisis tenía como objetivo generar descriptores de diferentes grados de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de una función en un punto. Para ello, consideramos conjuntamente los elementos matemáticos y las características de la compresión de cada estudiante que los EPPs habían identificado. A partir de estos descriptores de los niveles de desarrollo de la competencia docente, asignamos un nivel para cada uno de los estudiantes para profesor.

Resultados

En primer lugar presentamos los elementos matemáticos que los estudiantes para profesor identificaron y cómo eran usados para interpretar las resoluciones de los problemas de los estudiantes (identificar, interpretar y decisiones de acción). En segundo lugar, presentamos los descriptores generados para los niveles de desarrollo de la competencia docente.

- *Identificar*

No todos los EPPs fueron capaces de mencionar explícitamente en su discurso los elementos matemáticos de la función derivada en un punto en los distintos modos de representación y las relaciones entre ellos que eran necesarios para describir las respuestas dadas por los estudiantes. 6 EPPs identificaron los elementos matemáticos cuando se usaba el modo de representación gráfico, 2 EPPs cuando se usaba el modo analítico, 4 EPPs cuando se usaban los modos analítico y gráfico y 3 en modos numérico y gráfico. Por último, 13 EPPs identificaron los diferentes elementos matemáticos en todos los modos de representación.

Por ejemplo, un EPPs (CML) identificó los diferentes elementos matemáticos en todos los modos de representación. En la descripción de la resolución del problema 1 del estudiante 2, mencionó explícitamente los elementos del modo analítico que son pertinentes (figura 4). En la descripción de la resolución del problema 2 del estudiante 2, hace mención explícita al elemento matemático de la interpretación geométrica de la función derivada en un punto (modo gráfico). Por último, hace mención explícita de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental, elemento matemático analítico-numérico, en la resolución del problema 3 del estudiante 2 (figura 4).

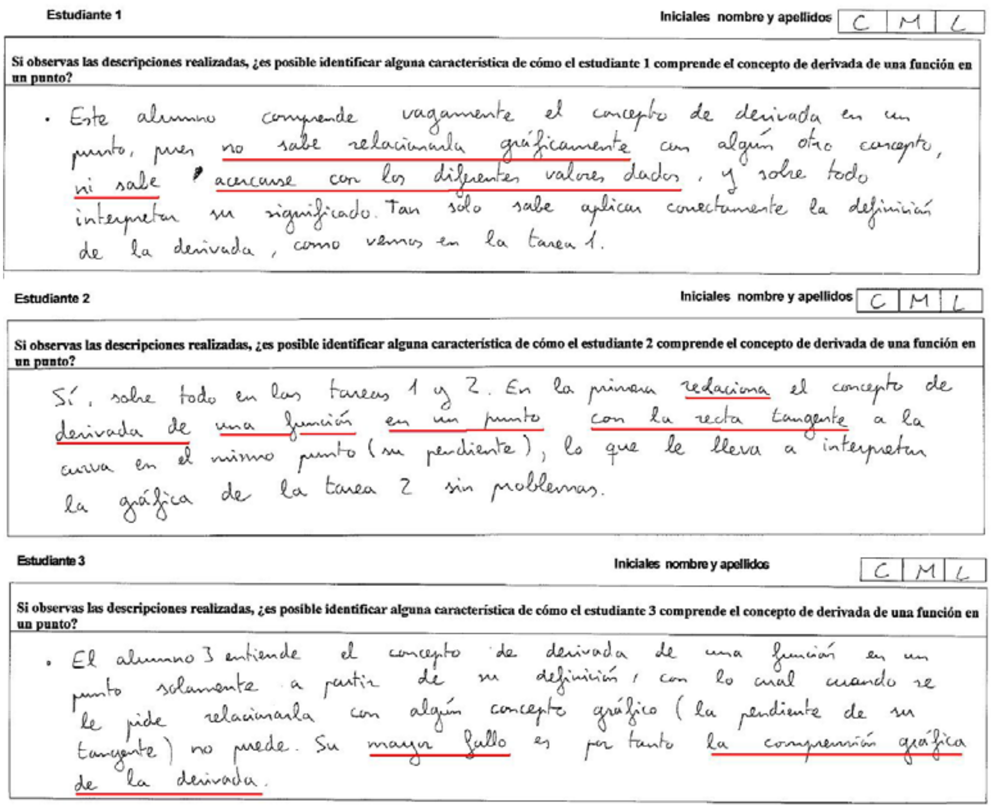
Describe cómo ha resuelto el estudiante 2 cada uno de los problemas , **indicando los elementos relacionados con el concepto de derivada, y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.**
Problema1 • La primera parte la realiza correctamente, pues conoce las definiciones exactas de los conceptos de Tasa de Variación Media y de pendiente de una recta. Efectivamente, calcula ambas por separado (expresadas como TVM y m) y ve que coinciden. Respecto a la segunda parte (tasa de variación instantánea), identifica la TVI con la derivada de la función en un punto cuando se lo indica su profesor en la entrevista, y relaciona, ahora sí correctamente por sí sola, esta derivada con la recta tangente a la curva en ese mismo punto.
Problema 2 . Tal como indica en la última pregunta de la anterior entrevista, relaciona la derivada en un punto con la recta tangente a la curva en ese mismo punto, y dado que sabe que esa tangente viene determinada por la pendiente (el coeficiente que acompaña a la x), realiza una interpretación geométrica correcta en este apartado. Respecto a f(2), sabe interpretar la gráfica correctamente y relacionar para qué valor x le corresponde cada valor y.
Problema 3 • En cuanto a la derivabilidad de una función, sabe aproximar el valor de la derivada de f en un punto por la izquierda y por la derecha (en todo caso, debería haber probado con más ejemplos). Si, como indica el alumno, estos valores no coinciden, f no será derivable en este punto. A pesar de que para x=1 realiza el segundo cociente erróneamente (intercambia el numerador por el denominador), sí conoce que deben coincidir para que la función sea derivable en ese punto.

Figura 4. Respuesta de CML a la primera pregunta del cuestionario

- *Interpretar: características de la comprensión*

Igual que en el caso anterior no todos los EPPs fueron capaces de identificar las características de los diferentes niveles de comprensión que mostraban los estudiantes. Para responder a esta pregunta los EPPs debían considerar conjuntamente las respuestas de los 3 estudiantes de bachillerato a los tres problemas e intentar identificar algún rasgo característico en su comportamiento. 8 EPPs no fueron capaces de caracterizar la comprensión de los estudiantes, 9 EPPs fueron capaces de identificar los rasgos característicos de la comprensión de los estudiantes que estaban en el nivel INTRA de desarrollo de la comprensión de la función derivada en un punto. 1 EPPs identificó solo las características de la comprensión que reflejaba el nivel INTRA e INTER en las resoluciones de los estudiantes y 9 identificaron las características de la comprensión que reflejaba el nivel INTRA y TRANS. Por último, 3 EPPs fueron capaces de reconocer las características de los diferentes niveles de desarrollo de la comprensión (INTRA, INTER y TRANS).

Por ejemplo, el discurso generado por CML mostraba que era capaz de reconocer la diferencia de comprensión de dos estudiantes, si bien no reconoce la del tercer estudiante al considerar CML que las aproximaciones se han de realizar con más de dos valores. Del estudiante 1 reconoce que solo es capaz de usar los elementos de la derivada de una función en un punto en modo analítico pero no los diferentes elementos del modo gráfico y numérico (características del nivel INTRA). Del estudiante 2 no identifica que es capaz de usar y relacionar todos los elementos matemáticos en tres modos de representación (características del nivel TRANS) ya que para CML la aproximación se debe realizar con más de dos puntos. Por último, en relación al estudiante 3 identifica que solo es capaz de hacer uso de los elementos en los modos analítico y numérico (características del nivel INTER), poniendo de manifiesto que el estudiante 3 no es capaz de relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente.



Estudiante 1 — Iniciales nombre y apellidos: C M L

Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 1 comprende el concepto de derivada de una función en un punto?

• Este alumno comprende vagamente el concepto de derivada en un punto, pues no sabe relacionarla gráficamente con algún otro concepto, ni sabe acercarse con los diferentes valores dados, y sobre todo interpretar su significado. Tan sólo sabe aplicar correctamente la definición de la derivada, como vemos en la tarea 1.

Estudiante 2 — Iniciales nombre y apellidos: C M L

Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 2 comprende el concepto de derivada de una función en un punto?

Sí, sobre todo en las tareas 1 y 2. En la primera relaciona el concepto de derivada de una función en un punto con la recta tangente a la curva en el mismo punto (su pendiente), lo que le lleva a interpretar la gráfica de la tarea 2 sin problemas.

Estudiante 3 — Iniciales nombre y apellidos: C M L

Si observas las descripciones realizadas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante 3 comprende el concepto de derivada de una función en un punto?

• El alumno 3 entiende el concepto de derivada de una función en un punto solamente a partir de su definición, con lo cual cuando se le pide relacionarla con algún concepto gráfico (la pendiente de su tangente) no puede. Su mayor fallo es por tanto la comprensión gráfica de la derivada.

Figura 5. Respuesta de CML a la segunda pregunta del cuestionario

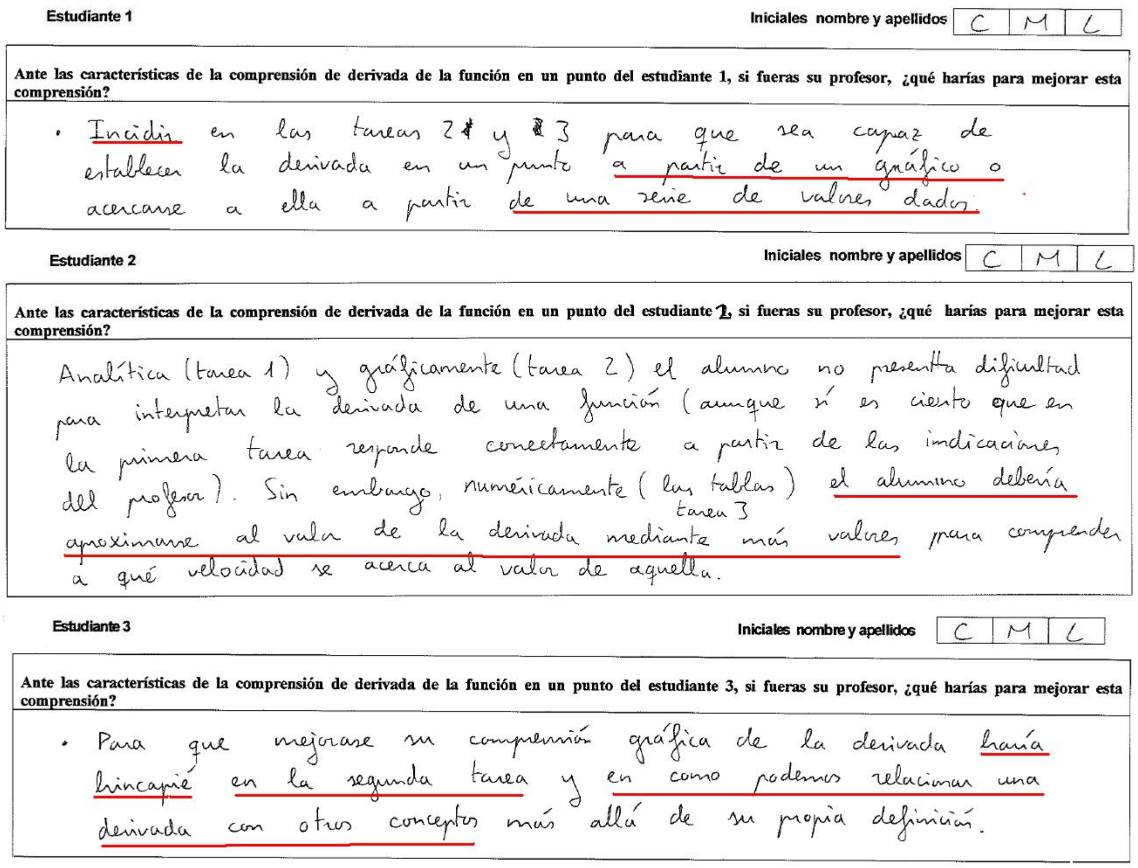
- *Decisiones de acción*

El análisis inductivo realizado de las respuestas dadas por escrito por los EPPs a la tercera pregunta del cuestionario nos permitió generar un sistema de categorías para las acciones de enseñanza que proponían los EPPs en función de las características de la comprensión que habían sido capaces de reconocer. Estas categorías fueron:

- **Sin acción**. No aporta ninguna acción significativa.
- **Acción procedimental**. Acciones centradas en los procedimientos.

- **Acción conceptual sin relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos pero sin establecer relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción conceptual con relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos estableciendo relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción de tematización.** Acciones centradas en que el estudiante sea capaz de pasar de la acción implícita a la utilización consciente, es decir, a la conceptualización de la derivada de una función en un punto.

Por ejemplo, CML (figura 6), propone acciones conceptuales sin relación para el estudiante 2. Mientras que para el estudiante 1 y 3 propone acciones conceptuales con relaciones al proponer textualmente "*haría hincapié en la segunda tarea y como podemos relacionar con otros conceptos más allá de su propia definición*".


Estudiante 1 Iniciales nombre y apellidos C M L

Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 1, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?

• Incidir en las tareas 2 y 3 para que sea capaz de establecer la derivada en un punto a partir de un gráfico o acercarse a ella a partir de una serie de valores dados.

Estudiante 2 Iniciales nombre y apellidos C M L

Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 2, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?

Analítica (tarea 1) y gráficamente (tarea 2) el alumno no presenta dificultad para interpretar la derivada de una función (aunque sí es cierto que en la primera tarea responde correctamente a partir de las indicaciones del profesor). Sin embargo, numéricamente (las tablas) tarea 3 el alumno debería aproximarse al valor de la derivada mediante más valores para comprender a qué velocidad se acerca al valor de aquella.

Estudiante 3 Iniciales nombre y apellidos C M L

Ante las características de la comprensión de derivada de la función en un punto del estudiante 3, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?

• Para que mejorase su comprensión gráfica de la derivada haría hincapié en la segunda tarea y en como podemos relacionar una derivada con otros conceptos más allá de su propia definición.

Figura 6. Respuesta de CML a la tercera pregunta del cuestionario

Desde el análisis conjunto de los elementos matemáticos y las características de la comprensión, de los estudiantes de bachillerato, identificadas por los EPPs, generamos descriptores para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" en seis grupos:

		IDENTIFICAR ELEMENTOS MATEMÁTICOS Y MODOS DE REPRESENTACIÓN		
		Ninguno	Algunos	Todos
INTEPRETAR LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES (Ser capaz de identificar los niveles de comprensión de los estudiantes de Bachillerato)	Ningún nivel	G1. No identifican ningún elemento matemático en ningún modo de representación y no identifican ningún nivel de comprensión. (2 EPPs)	G2. Identifican solo algunos elementos matemáticos en algún modo de representación pero no identifican ningún nivel de comprensión. (5 EPPs)	G3. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación pero no identifican ningún nivel de comprensión. (1 EPPs)
	Algún nivel		G4. Identifican los elementos matemáticos en algún modo de representación y son capaces de identificar algún nivel de comprensión. (14 EPPS)	G5. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación e identifican algún nivel de comprensión. (5 EPPs)
	Todos los niveles			G6. Identifican los elementos matemáticos en todos los modos de representación e identifican todos los niveles de comprensión. (3 EPPS)

El estudiante CML estaría en G5 ya que ha identificado los elementos matemáticos en todos los modos de representación pero solo ha identificado características de dos niveles de la comprensión de los estudiantes de bachillerato sobre la derivada de la función en un punto.

Discusión

El objetivo de esta investigación es caracterizar la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico de la derivada de la función en un punto y generar descriptores que pudieran indicarnos grados de desarrollo de esta competencia. Para Mason (2002) una manera de tener una mirada “estructurada” en relación a los aspectos relevantes en una situación de enseñanza era el ser consciente de cómo se está “mirando”. Este aspecto se ha intentado poner de manifiesto en esta investigación a través del análisis de discurso generado por los EPPs cuando describían e interpretaban las resoluciones de estudiantes de bachillerato a problemas de derivadas. Los resultados obtenidos indican que aunque los EPPs podían tener una formación matemática adecuada para este contenido matemático, resulta difícil para algunos de ellos describir las resoluciones de los estudiantes de bachillerato usando los elementos matemáticos del concepto y en reconocer las características de la comprensión de los estudiantes. Esta dificultad puso de manifiesto cierta falta de “consciencia” explícita sobre los elementos matemáticos que intervenían en la resolución de los problemas realizados por los estudiantes y su papel en determinar su comprensión. Este resultado pone de relieve el hecho de que tener un cierto nivel de conocimiento del contenido matemático no implica el ser capaz de hablar de cómo ese contenido aparece en la resolución de un problema realizada por un estudiante de bachillerato y generar información sobre su comprensión.

Por otra parte, Sherin et al. (2002) indicaban que un aspecto característico de la competencia docente “mirar con sentido” es el ser capaz de relacionar evidencias específicas a perspectivas más amplias sobre el aprendizaje. Este aspecto se pone de manifiesto en nuestra investigación a través de las interpretaciones generadas por los EPPs sobre la comprensión de la función derivada en un punto de los estudiantes de bachillerato y su vinculación de actividades que proponían (decisiones de acción). Los resultados obtenidos indican que este aspecto fue más difícil de conseguir. Estos resultados, aunque esperados, debido a que los EPPs no habían recibido instrucción específica sobre la comprensión de la derivada en alumnos de bachillerato, ponen de manifiesto la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas y que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 y PSI2008-02289 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España. Y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

Referencias

Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E. y Schwingendorf K. (1997). The development of students` graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011a) "Mirando con sentido" el pensamiento Matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae,* 13(1), jan./jun. 2011.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011b). Aprendiendo a "mirar con sentido" el aprendizaje matemático. *XIII Conferencia Interamericana de Educación matemática*- CIAEM. Recife-Brasil. Junio 2011.

Fernández, C.; Llinares, C. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM,.

Ferrini-Mundy J. y Graham K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. En Dubinsky y Kaput (Eds.) *Research issues in undergraduate Mathematics Learning*, 31-45.

García M., S. Llinares S. y Sánchez-Matamoros G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9(5), 1023-1045l.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 41(2), 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Sánchez-Matamoros G. (2004*). Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de* *derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Sánchez–Matamoros G., García M. y Llinares S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias,* 24 (1), pp. 85-98.

Sánchez–Matamoros G., García M. y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Tall, D. (1990). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education,* 10, 571-596.