

Generalización desde Tareas Aritméticas. Desempeño de una Pareja de Profesores de Educación Primaria en Formación ⁸³

Paola Andrea Trujillo, paolatrujillo@gmail.com

Encarnación Castro, encastro@ugr.es

Marta Molina, martamg@ugr.es

Universidad de Granada

Resumen. Presentamos en esta comunicación parte de un estudio de casos que analiza el proceso de generalización que realizan futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización. Para justificar la pertinencia e interés de este trabajo nos basamos en investigaciones internacionales relacionadas con esta área, las cuales nos han permitido perfilar el marco teórico de esta investigación. La recogida de datos se llevó a cabo en dos sesiones, en forma de entrevistas a dos parejas de estudiantes, en la que cada pareja trabajó conjuntamente en la resolución de cuatro tareas escritas. Centramos nuestra atención aquí en la producción de una de las parejas en la primera tarea. Partiendo de la comparación de los enunciados de generalización de ambos estudiantes, en cuanto a semejanzas y diferencias, presentamos algunas conclusiones acerca de su proceso de generalización.

1. Introducción

El estudio del proceso de generalización ha sido abordado en la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra en gran medida considerando a alumnos de educación secundaria, pero no así tanto a alumnos de otros niveles, en particular futuros maestros (Trujillo, 2008; Trujillo, Castro y Molina, 2008). En esta línea, Waters (2004) hace referencia a la existencia de una literatura muy limitada sobre la creación de patrones, así como sobre la expresión y justificación de generalizaciones e insiste en la necesidad de proporcionar un mayor apoyo a los profesores en un esfuerzo para mejorar su conocimiento matemático al respecto. Esta necesidad se intensifica si nos proponemos el objetivo de que los maestros integren en la enseñanza de las matemáticas de

⁸³ Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías, construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

primaria el desarrollo de pensamiento algebraico, como se sugiere desde la propuesta Early-Algebra.

Diversos investigadores (Becker y Rivera, 2008; Kieran, 2006; Mason, 1996 y Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al., 2003), en el desarrollo de sus trabajos, han tratado de responder a la cuestión *qué es el álgebra*, así como de buscar la forma más adecuada de trabajar el álgebra en el sistema escolar. Como resultado de esta búsqueda, se ha reconocido la importancia de la generalización dentro del álgebra y se ha llegado a distinguir diferentes concepciones y componentes del álgebra así como enfoques para trabajarla en el aula. Para nuestro trabajo tomamos una de dichas concepciones, el álgebra como aritmética generalizada, siguiendo a los autores que apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela (e.g. Mason, 1996; Mason, Graham y Johnston–Wilder, 2005; Schliemann et al., 2003; Warren, 2004).

Nuestro interés para realizar este estudio radica en la intención de conocer el modo en que futuros maestros se enfrentan a ciertas tareas aritméticas, propuestas especialmente para provocar en ellos la realización y expresión de generalizaciones, y analizar su desempeño centrándonos en el tipo de generalizaciones que realizan. En esta comunicación presentamos la producción de una pareja de estudiantes de la diplomatura de Magisterio de la Universidad de Granada, en una de dichas tareas. Nuestros objetivos aquí son: discernir si dichos sujetos realizan el “paso” desde las expresiones aritméticas a la generalización; recopilar todas las generalizaciones que produzcan y clasificarlas utilizando la taxonomía de *generalización reflejadas* de Ellis (2007); analizar y comparar las producciones en cuanto a semejanzas y diferencias y; comprobar si perciben los patrones que permiten la generalización.

2. Marco teórico

Kaput (1999) define la generalización como:

extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p.136)

A su vez, Mason (1996) considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, incluso como la esencia del álgebra, y afirma que la estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada. La visión del álgebra como una aritmética generalizada, es seguida por varios autores que consideran que la generalización es una valiosa vía de introducción del álgebra en la escuela. Para Hewitt (1998) el álgebra o el pensamiento

algebraico subyace a la aritmética, ya que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Así mismo, Schliemann et al. (2003) consideran en sus trabajos el álgebra como una aritmética de números y cantidades generalizada. Sostienen que este enfoque resalta el cambio de pensar sobre relaciones entre números y medidas particulares a pensar sobre relaciones entre conjuntos de números y medidas, y de calcular respuestas numéricas a describir y representar relaciones entre variables. Por su parte, Kieran (2006) considera que el “álgebra como generalización” es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones.

Siguiendo esta línea, en nuestro trabajo abordamos este enfoque de la enseñanza del álgebra como aritmética generalizada desde la propuesta de cambio curricular denominada Early-Algebra que pretende introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización obligatoria (Blanton y Kaput, 2005; Molina, 2009). Esta propuesta persigue promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial de la aritmética, a partir de la integración de modos de pensamiento algebraicos en la actividad aritmética. Numerosos investigadores conscientes de que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos en sus trabajos algebraicos, proponen trabajar con actividades que faciliten la transición entre ambas disciplinas, centrando la atención en la estructura de la aritmética, convencidos de que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra (Kieran, 1989).

Al promover un enfoque estructural de la aritmética se persigue potenciar el desarrollo del sentido numérico, operacional y estructural de los alumnos (Molina, Castro y Castro, 2007). Para la puesta en práctica de este cambio curricular, creemos necesario contar con maestros preparados para tal efecto que sean capaces de promover en sus alumnos modos de pensamiento algebraicos.

3. Metodología

Nuestra investigación responde a un estudio de casos. Los sujetos participantes han sido cuatro estudiantes de primer año de Magisterio de la especialidad de Lengua Extranjera⁸⁴ del curso 2007/2008, de la Universidad de Granada (tres chicas y un chico). La recogida de datos se llevó a cabo en dos sesiones, en forma de entrevistas. La primera sesión se realizó a las dos parejas, por separado. A través del trabajo en parejas provocamos en los estudiantes la necesidad de expresar oralmente cómo iban abordando las tareas. De este modo se pretendía recoger información de lo que pensaban mientras realizaban su trabajo. La primera autora de este trabajo realizó la entrevista siendo su participación limitada, dedicándose principalmente a observar el trabajo de los alumnos. La segunda entrevista, de carácter semi-estructurado, se realizó de forma individual. El objetivo era profundizar en las respuestas dadas por los alumnos en la primera sesión. Fue realizada por la misma entrevistadora quien participó haciendo las preguntas que, a priori, se habían elaborado para recabar la información pertinente.

Los datos recogidos son de tipo cualitativo y tienen distinta procedencia: a) documentos escritos por las investigadoras como preparación para el desarrollo de las entrevistas, b) observaciones y notas tomadas por la investigadora-entrevistadora a lo largo de las sesiones, c) documentos escritos por los alumnos en la resolución de las tareas propuestas, d) grabación en audio de las dos sesiones y e) la transcripción de las mismas.

Tareas. En la primera sesión se le propuso a las parejas de estudiantes cuatro tareas que se presentaron junto a dos informaciones que aportaban un contexto y una motivación. Las tareas están compuestas por expresiones aritméticas que guardan entre sí una relación que permite detectar (al menos) un patrón susceptible de ser generalizado, y en las que intervienen sólo números naturales, de no más de tres cifras, y las operaciones suma y multiplicación. En la tarea 1 se pueden observar las relaciones entre un número multiplicado por sí mismo, axa , y su siguiente multiplicado por el anterior

$$\left[(n+1) \times n \right] \left[n \times (n-1) \right].$$

En las cuatro tareas se les solicitó a los alumnos que escribieran expresiones similares a las dadas y que explicaran de forma general cómo se pueden construir más expresiones. En las tareas 1 y 2 también se les pidió que observaran las relaciones existentes en y entre las expresiones dadas, y que expresaran dichas relaciones de forma general. En las tareas 3 y 4, los estudiantes debían también buscar alguna multiplicación de dos números que diera igual resultado que las sumas dadas, y expresar las relaciones encontradas de forma general. Concretamente las expresiones en

⁸⁴ En España, actualmente, existen siete especialidades para la formación de un profesor de Educación Primaria. Una de dichas especialidades es la de Lengua Extranjera.

las que trabajaron en cada tarea fueron las siguientes (el formato de las tareas 1 y 2 fue vertical y no horizontal como aquí se presenta por limitación de espacio):

12×12	4×4	9×9	$2 \times 5 + 2 \times 7$	$4 \times 10 + 4 \times 5$	$7 \times 9 + 7 \times 6$
13×11	5×3	10×8	$2 \times (5 + 7)$	$4 \times (10 + 5)$	$7 \times (9 + 6)$
Tarea 1			Tarea 2		

$3 + 5 =$
$27 + 29 =$
$9 + 11 =$

$16 + 17 + 18 + 19 + 20 =$
$9 + 10 + 11 + 12 + 13 =$

Taxonomía para categorizar las generalizaciones. Para el análisis de los datos recogidos utilizamos la taxonomía de Ellis (2007), la cual tiene en cuenta diferentes niveles de generalización. Distingue entre la actividad de los estudiantes cuando generalizan, denominadas *acciones para la generalización*, y los enunciados finales de generalización, llamados *generalizaciones reflejadas*. En este trabajo utilizamos la segunda parte de la taxonomía para analizar y clasificar los enunciados finales (orales o escritos) de generalización de los estudiantes. Para adaptar la categorización de Ellis a nuestro trabajo hemos realizado las siguientes modificaciones: (a) no incluir la subcategoría influencia ya que consideramos que hace referencia a acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar una generalización, más que a un enunciado final; y (b) distinguir dos tipos de enunciados dentro de la subcategoría de similitud de objetos o representaciones: estructura y resultado, al apreciar en el análisis de los datos una clara distinción entre ambos tipos de enunciados. Esta distinción es pertinente ya que se han tomado expresiones numéricas que pueden considerarse similares por tener el mismo valor numérico (resultado) o una estructura idéntica o semejante. La taxonomía utilizada se muestra en la Tabla 1.

Tipo IV: Identificación o enunciado	1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.	Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	
		Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.	<i>Estructura</i>
			<i>Resultado</i>

		<i>Situaciones:</i> La identificación de situaciones como similares o idénticas.
	<i>3. Principio general:</i> Un enunciado de un fenómeno general.	<i>Regla:</i> La descripción de una fórmula general o hecho.
		<i>Patrón:</i> La identificación de un patrón general.
		<i>Estrategia o procedimiento:</i> La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.
		<i>Regla global:</i> El enunciado del significado de un objeto o idea.
Tipo V: Definición	<i>1. Clases de objetos:</i> La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.	

Tabla 1. Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas

4. Análisis de datos

Para cada una de las tareas realizadas por los alumnos se organizaron los datos en tablas en las que incluimos los enunciados finales (verbales o escritos) generados por los alumnos. En estas tablas sólo incluimos los enunciados finales que los alumnos desarrollaron en la primera sesión, por parejas; en la cual, la participación de la entrevistadora fue limitada. Presentamos aquí el análisis del trabajo producido por una de las parejas, Federico y Margarita⁸⁵, en la tarea 1. Antes es importante mencionar que en general, no se observó interés por trabajar en equipo por parte de ambos estudiantes; la interacción entre ellos fue mínima, realizando la mayoría del trabajo de forma individual. Sin embargo, esta falta de interés por trabajar en equipo por parte de ambos estudiantes, en especial por parte de Federico, no limitó a Margarita en el desarrollo de su trabajo ni en la búsqueda de relaciones entre las expresiones dadas. Por el contrario, ella tomó en cuenta algunas de las ideas planteadas por Federico, las cuales le permitieron tener otro punto de vista de las relaciones encontradas por ella. A continuación destacamos las semejanzas y diferencias detectadas en el tipo de enunciados producidos por cada uno de los estudiantes, haciendo uso de la taxonomía modificada. La tabla 2 resume el tipo de enunciados de generalización expresados por cada estudiante en la primera tarea.

Semejanzas. En la tarea 1 ambos estudiantes produjeron enunciados clasificados en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y en principios

⁸⁵ Federico y Margarita son nombres ficticios

generales como patrón. A continuación describimos dichos enunciados. En esta tarea ningún estudiante expresó enunciados (verbales o escritos) que puedan ser clasificados dentro de las subcategorías de fenómeno continuo, similitud en propiedad común, principios generales como regla y regla global, o clases de objetos.

Estructura. Al principio, ninguno de los dos estudiantes consideró las parejas de expresiones como un conjunto, sino que analizaron cada expresión por separado. Esto condicionó el tipo de relaciones que identificaron. Federico expresó de forma oral y escrita varias relaciones atendiendo al número de dígitos que componen cada término de las expresiones dadas y a si los términos de las expresiones que se estaban multiplicando eran iguales o diferentes (Figura 1F). Margarita coincidió en indicar una relación existente en las expresiones dadas relativa a la cantidad de dígitos que componen las expresiones (Figura 1M). Ambos reconocen relaciones que no verifican todas las expresiones sino un subconjunto de éstas.

- $10 \times 10, 11 \times 11, 12 \times 12 \dots$ (números de igual valor con dos dígitos)
 • (multiplicación de números de dos dígitos pero con diferente valor)
 • Multiplicación de números de un dígito con el mismo valor
 • Multiplicación de números de un dígito con diferente valor
 • Intercalar números de dos dígitos con otros de un dígito

Figura 1F

Otra relación que hemos comprobado es que en el ~~1er~~ ^{1er} cuadro son 2 cifras lo que multiplica, en el segundo ~~1~~ ¹ sola cifra

Figura 1M

Patrón. En general, ambos estudiantes tuvieron poca dificultad para identificar o describir algún patrón de forma verbal. Federico observó que en la primera pareja de expresiones dadas se presenta un término que se multiplica por sí mismo y, en cambio, en la segunda pareja la diferencia entre cada término de la expresión es de dos unidades (Figura 2F).

a parte de las anteriormente citadas similitudes también hay una concordancia en las operaciones que no son multiplicaciones por un número igual ($12 \times 12, 4 \times 4, 9 \times 9$) sino que en las multiplicaciones ($13 \times 11, 5 \times 3, 10 \times 8$) la diferencia entre cada multiplicador son dos.
 de arriba en un ~~una~~ ^{una} ad y se multiplica por un número 2 unidades menor.

Figura 2F

Figura 2M

Asimismo, Margarita expresó de forma oral y escrita (Figura 2M) las siguientes regularidades: “aquí es de dos cifras y aquí es de una, pero por ejemplo, aquí siempre se está multiplicando por el mismo número y el de abajo sería un número mayor y aquí sería la diferencia de dos, la multiplicación de dos, entonces he visto que sigue eso en los tres...”.

Ambos estudiantes identificaron la siguiente regularidad en las columnas de las expresiones aritméticas dadas: la diferencia entre los términos es de una unidad. Margarita lo explica de la siguiente forma oral: “aquí es la diferencia de un número... si miras de abajo a arriba [señala en el folio] es restando, si miras de abajo a arriba [señala en el folio] es sumando, es la diferencia de un número, aquí uno menos [señala en el folio] y aquí uno más [señala en el folio], aquí resulta lo mismo de 4 a 5 es uno menos y de 3 a 4 es uno más... es un número pero en un lado es por añadidura y por el otro es por resta”. Igualmente Federico, identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas “la diferencia es igual en línea así como en cruz, la diferencia es de un número en los dos”. Ambos estudiante apoyan su explicación con las anotaciones y representaciones pictóricas que se muestran en las figuras 3M y 3F.

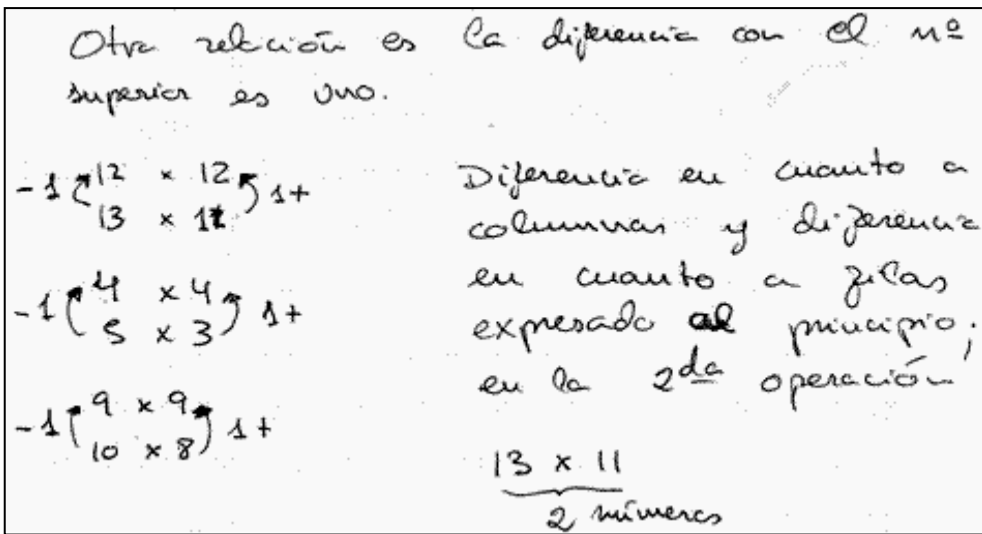


Figura 3M

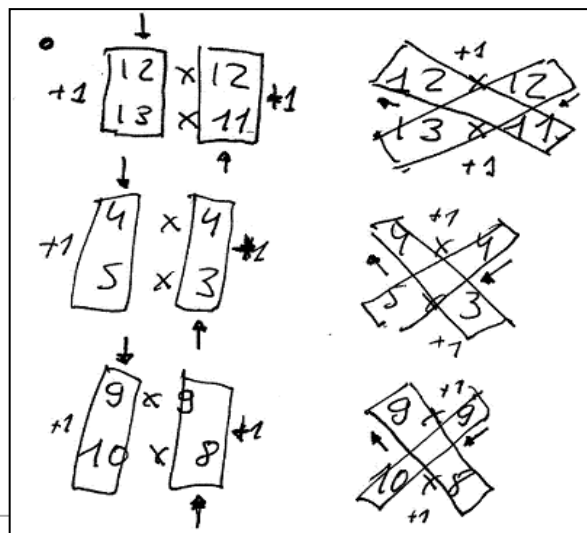


Figura 3F

Diferencias

Dentro de los enunciados producidos por Margarita y Federico en el desarrollo de la tarea 1, identificamos en el caso de Margarita enunciados clasificados dentro de las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como resultado y situaciones, y principios generales como estrategia o procedimiento. Además, Margarita comete un error de expresión al tratar de explicar la regularidad que ella había identificado y que se clasificó en la subcategoría de patrón. Federico no produjo más enunciados a los ya antes mencionados en semejanzas.

Patrón. En el siguiente enunciado oral: “he visto a posteriori que hay relación entre ellos, por eso, se multiplica por el mismo número y después lo de abajo sería el número mayor pero multiplicado por un número inferior dos veces, por el multiplicando”, la alumna al tratar de explicar las relaciones que identifica en las expresiones dadas comete un error de expresión: utiliza la expresión “dos veces” para indicar que la diferencia entre los dos términos de la expresión es de dos unidades.

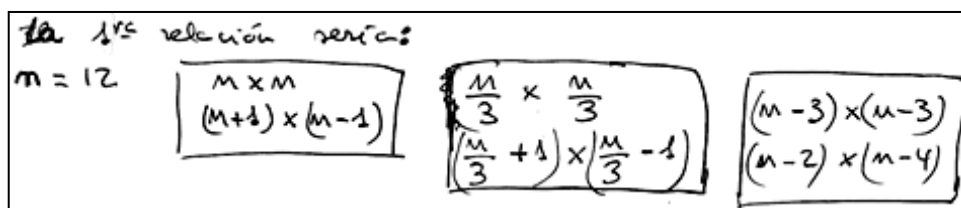


Figura 4M

Resultado. Margarita pone de manifiesto las relaciones que identifica en las expresiones numéricas a través de un caso particular: Sustituye el número 12 por la letra *n* y escribe las expresiones dadas en función de *n* (Figura 4M). En la primera entrevista la alumna no se percató de que con la primera expresión que propone habría bastado para expresar de forma general las expresiones aritméticas dadas. Más tarde, al revisar esta tarea en la segunda entrevista se percató de este hecho indicando: “sirve para cualquier número”.

Estrategia o procedimiento. La alumna expresa de forma oral cuál fue el procedimiento que siguió para crear expresiones aritméticas similares a las dadas: “Ahora me he dado cuenta que llevan una relación, un poquito los tres, entonces; en principio, he intentado poner números cercanos al doce y al trece y hacer multiplicaciones más o menos similares a las que dicen aquí: 14x12, 14x13; un poco cercanos a los que allí aparecen, pero después, bueno en el siguiente ejercicio, he puesto multiplicaciones de una sola cifra, también he seguido la misma tónica que en el primero, números cercanos al cuatro y al cinco, pero ahora me he dado cuenta que los tres van relacionados”.

Además, es importante resaltar de este extracto, que la alumna impone restricciones a las generalizaciones que realiza, en este caso, que los números fueran próximos a los dados.

Situaciones. Margarita identifica y expresa oralmente cierta semejanza entre la situación del aprendizaje de las tablas de multiplicar y las expresiones dadas: “aquí a la hora de ampliar puedes hacerlo en vez de orden decreciente en orden creciente igualmente, se supone que sí tiene que guardar una relación con el anterior se supone que el niño ya conoce, por ejemplo, toda la tabla del cuatro de multiplicar, o toda la del cinco...”. Esto se debe a que la primera estrategia o procedimiento que utilizó para crear más expresiones similares la alumna tomaba números cercanos a los dados y planteaba multiplicaciones (ver subcategoría de estrategia y procedimiento)

Para resumir la información que acabamos de comentar, presentamos numéricamente en la tabla 2 la clasificación de los enunciados de generalización de ambos alumnos en la tarea 1.

Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas			Federico	Margarita	
Identificación o enunciado	1. Fenómeno continuo				
	2. Similitud	Propiedad común			
		Objetos o representaciones	Estructura	■ ■	■ ■
			Resultado		■
		Situaciones			■
	3. Principio general	Regla			
		Patrón		■ ■ ■	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■
		Estrategia o procedimiento			■
Regla global					
Definición	1. Clases de objetos				
Total			5	11	

Tabla 2: Producción de Federico y Margarita en la Tarea 1

5. Discusión y conclusiones

En general, observamos ciertas semejanzas con respecto al tipo de enunciados producidos por ambos alumnos en la tarea 1 de acuerdo con la taxonomía modificada. Así, en la subcategoría principios generales, en patrón, los estudiantes identificaron las siguientes regularidades: a) un término se multiplica por sí mismo, b) en la segunda pareja la diferencia entre cada término de la expresión es de dos unidades y; c) la operación que los relaciona es la multiplicación. Con relación a similitud de objetos o representaciones como estructura, expresaron relaciones relativas a: a) el número de dígitos que componía cada término de las expresiones, b) el valor de los números y; c) si los términos de las expresiones se estaban multiplicando un número por sí mismo o dos números diferentes. Además, apreciamos que algunas de las subcategorías no fueron necesarias para clasificar los enunciados verbales o escritos producidos por ambos alumnos, concretamente la de fenómeno continuo, similitud en propiedad común, principios generales como regla y regla global; y clases de objetos. Esto puede ser debido en el caso de la subcategoría de fenómeno continuo por el tipo de tarea propuesta ya que las parejas de expresiones dadas no sugieren un movimiento o cambio de una a otra, como ocurre por ejemplo en una sucesión (ej. cada vez se suman cinco más) sino que comparten una relación (estática) entre sus términos, y para la subcategoría de clases de objetos: (1) dificultad por parte de los estudiantes de expresar de forma general las relaciones observadas, y (2) el tipo de enunciados que proponen no precisa el conjunto de elementos para los que es aplicable la generalización que expresa.

Como se ha mostrado Margarita tuvo un mayor número de enunciados en comparación con Federico (11-5). Ella produjo también enunciados en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como situaciones y resultado, y principios generales como estrategia o procedimiento. Este hecho puede ser debido a que Margarita identificó numerosas relaciones, incluso algunas diferentes a las consideradas en el diseño de la tarea.

En general, Federico y Margarita tuvieron poca dificultad describiendo un patrón de forma verbal y en algunas situaciones hicieron predicciones basadas en las relaciones identificadas en un patrón. Sin embargo, los estudiantes en esta tarea no proporcionaron una descripción algebraica formal (es decir, mediante lenguaje simbólico) de las expresiones aritméticas propuestas en dicha tarea. En este sentido, observamos cierta dificultad por parte de los alumnos en expresar por medio del simbolismo algebraico las relaciones observadas. Resultados similares se han observado en Zazkis y Liljedahl (2002), donde estos autores notaron que hay un vacío significativo

entre reconocer un patrón y ser capaz de expresarlo algebraicamente. En la segunda sesión, observamos que esta pareja de alumnos a través de un diálogo guiado con la entrevistadora proporcionan una descripción algebraica formal. Estas observaciones nos sugieren que si los alumnos trabajaran tareas de este tipo a lo largo de su formación progresarían significativamente en el desarrollo de generalizaciones. Es, así mismo, recomendable trabajar la expresión algebraica de dichas generalizaciones para enriquecer en detalles y precisión sus explicaciones. Todo ello adquiere mayor relevancia en el caso de los alumnos con los que hemos trabajado, debido a que se están formando como maestros.

Bibliografía

- Becker, J. R. y Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, 40(1), 1.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262.
- Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: LEA.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, (Vol. 4, pp. 33-59). Reston, VA.: LEA & NCTM.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp.65-86). London: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing.
- Molina, M. (2009). Una Propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. *PNA* 3(3), 135-156
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Desarrollando una agenda de investigación: Pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, 161-176.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. y Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME and the 25th PME-NA joined conference*, (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Trujillo, P. A. (2008). Proceso de generalización que realizan futuros maestros. Trabajo final de master. Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Trujillo, P.A., Castro, E. y Molina, M. (2008). Proceso de generalización: un estudio de casos con futuros maestros. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 225-231). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y SAEM Thales.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, R. Faragher y M. Mclean (Eds.), *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th MERGA Annual Conference)* (Vol 2, pp.565-572). Sydney: MERGA.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2(1), 93–120.