CONOCIMIENTO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO Y CÓMO RECONOCEN CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Pre-service teachers' knowledge of proportional reasoning and how they recognize characteristics of students' understanding

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S.
Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina el conocimiento del razonamiento proporcional de estudiantes para maestro (EPM) y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. 92 EPM resolvieron 12 problemas vinculados a 12 sub-constructos del razonamiento proporcional y analizaron tres respuestas de estudiantes a cada uno de los problemas anteriores. Los resultados indican que los EPM resuelven los problemas correctamente y reconocen la comprensión de los estudiantes en algunos sub-constructos vinculados al esquema fraccionario, pero tienen dificultades para resolver y reconocer la comprensión en los sub-constructos relacionados con la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales y con la comparación de razones. Estos resultados sugieren que el conocimiento del razonamiento proporcional y el reconocimiento de evidencias de la comprensión de los estudiantes dependen de cada sub-constructo considerado.

Palabras clave: *razonamiento proporcional, conocimiento de matemáticas, mirada profesional, comprensión de los estudiantes*

Abstract

This study examines pre-service teachers' knowledge of proportional reasoning and how they recognize characteristics of student's understanding. Ninety-two pre-service teachers solved 12 problems related to the 12 sub-constructs of proportional reasoning and analyzed three students' answers to each of the above problems. Results indicate that pre-service teachers solve problems correctly and recognize students' understanding in some sub-constructs linked to the fractional scheme but have difficulty in solving and recognizing students' understanding in the sub-constructs related to the discrimination between proportional and non-proportional situations and the ratio comparison. These results suggest that the knowledge of proportional reasoning and the recognition of students' understanding relay on the sub-constructs considered.

Keywords: *proportional reasoning, mathematical knowledge, professional noticing, students' mathematical thinking*

INTRODUCCIÓN

Identificar aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas es una competencia relevante del maestro en su labor docente (Mason, 2002). Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes a través de tres destrezas inte-

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). Zaragoza: SEIEM.

rrelacionadas: describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los detalles matemáticos importantes; interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir qué actividades proponer. Algunos estudios han proporcionado información considerando dicha caracterización en diferentes dominios matemáticos como la generalización de patrones (Callejo y Zapatera, 2016), la derivada (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015), los números racionales (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013), la medida (Ribeiro, Badillo, Sánchez-Matamoros, Montes y Gamboa, 2017) o la proporcionalidad (Rivas, Godino y Castro, 2012; Son, 2013). Estos estudios subrayan la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes en la caracterización de esta competencia. La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores interpretar las respuestas de los estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes (Bartell et al., 2013; Rivas et al., 2012; Son, 2013).

Dentro de esta línea de investigación, y teniendo en cuenta el currículum de primaria y secundaria, un foco de interés es el desarrollo del razonamiento proporcional. Algunos estudios previos muestran que enseñar la idea de razón y proporción que subyacen en el razonamiento proporcional no es una tarea fácil para los maestros (Lamon, 2007). Algunas de las dificultades identificadas están vinculadas a desarrollar formas de razonar en relación a la unidad y a la identificación de una unidad de referencia (Buforn y Fernández, 2014; Lee, Brown y Orril, 2011), a resolver e interpretar problemas de comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011), a dotar de sentido a las estrategias usadas para resolver problemas de proporcionalidad directa (Valverde y Castro, 2009) y a discriminar problemas proporcionales y no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014). Estas investigaciones previas aportan información para caracterizar el conocimiento para enseñar de fracción, razón y proporción (que son ideas implicadas en el razonamiento proporcional) pero es necesario examinar el papel de los diferentes sub-constructos vinculados al razonamiento proporcional en la competencia de reconocer características del desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes.

El razonamiento proporcional

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes sub-constructos: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento up and down y proceso unitizing). Pitta-Pantazi y Christou (2011) amplían y validan esta caracterización considerando la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y Buforn y Fernández (2014) añaden la capacidad de discriminar las situaciones proporcionales y no proporcionales. En nuestro estudio organizamos este modelo del razonamiento proporcional en 3 dominios: (i) esquema fraccionario, (ii) razón y comparación de razones, y (iii) discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales.

El esquema fraccionario consiste en 6 sub-constructos: el sub-constructo *parte-todo* se define como la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo. La fracción como número asignado a una medida permite considerar la *recta numérica* como una representación adecuada e introduce la idea de *densidad* de los números racionales. El sub-constructo *cociente* se vincula al proceso y resultado de un reparto equitativo. El *operador* es visto como una función aplicada a un número, objeto o conjunto. Y el *razonamiento up and down* implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple con la idea de fracción unitaria como unidad iterativa ($a/b = a \times 1/b$).

La razón y comparación de razones implica las ideas de: *razón* como un índice comparativo; *pensamiento relacional* vinculado al reconocimiento de comparaciones absolutas y relativas; *proceso unitizing* en el que es necesaria la construcción de una unidad de referencia y su uso para comparar situaciones; y covarianza que determina la relación entre dos cantidades de manera que, cuando una cantidad cambia, la otra también cambia de manera proporcional con respecto a la primera cantidad.

Finalmente, dado que el razonamiento proporcional implica no solo comprender la relación multiplicativa entre las cantidades en una situación proporcional, sino tener la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008), consideramos la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales como un dominio del conocimiento del razonamiento proporcional.

En este estudio examinamos el conocimiento de estudiantes para maestro de los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional y cómo reconocen evidencias de la comprensión de los estudiantes en estos sub-constructos.

MÉTODO

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 91 estudiantes para maestro (EPM) matriculados en el tercer curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Alicante. En los años previos habían cursado una asignatura centrada en el sentido numérico y otra centrada en el sentido geométrico. En el momento de la recogida de datos estaban cursando una asignatura relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Los datos fueron recogidos durante el módulo sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y del razonamiento proporcional.

Los datos se recogieron mediante dos cuestionarios. El Cuestionario 1 estaba formado por 12 problemas organizados en tres bloques (Figura 1) teniendo en cuenta los dominios de contenido matemático considerado: seis problemas sobre el esquema fraccionario (bloque A), dos problemas sobre discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B), y cuatro problemas de comparación de razones (bloque C). Los problemas utilizados en este cuestionario procedían de investigaciones previas (Buforn y Fernández; 2014; Lamon, 2007; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) o fueron modificados o diseñados ad hoc. El Cuestionario 2 consistía en 12 tareas en las que se presentaban tres respuestas de estudiantes a cada uno de los problemas que habían resuelto en el Cuestionario 1 que mostraban diferentes características de la comprensión de los estudiantes y cuatro cuestiones relacionadas con las destrezas identificar, interpretar y decidir que caracterizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

La figura 2 muestra la tarea relacionada con el sub-constructo razón. En este problema la razón puede ser vista como una medida (cuando la razón es más próxima a 1, el loft es más cuadrado). En relación a las respuestas de los estudiantes, en la respuesta 1 el estudiante calcula las razones e interpreta que el loft que tiene la razón más próxima a 1 es más cuadrado. Es decir, cuantifica la idea de ser más cuadrado mediante la aproximación de la razón a 1. En la respuesta 2 el estudiante calcula las razones entre los lados pero proporciona una justificación basada en relaciones aditivas entre los lados. La expresión “existe menor diferencia, por lo que será más cuadrado al tener lados más iguales” lleva a pensar que el estudiante está considerando la diferencia entre los lados y lo próxima que está esta diferencia a cero. Finalmente, en la respuesta 3 el estudiante usa relaciones aditivas identificando *ser más cuadrado* como la diferencia menor entre los lados (es decir, la que se aproxima más a 0).

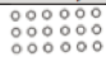
Las dos primeras cuestiones que debían contestar los estudiantes para maestro pedían identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema (cuestión a) y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes (cuestión b). Las otras dos cuestiones pedían proponer actividades (o modificar el problema presentado) para ayudar al estudiante a avanzar en su comprensión (cuestiones c y d). En este trabajo solamente nos centraremos en las cuestiones *a* y *b*.

Análisis

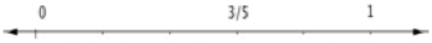
Los datos son las respuestas de los 91 estudiantes para maestro al Cuestionario 1 y las respuestas a las cuestiones a y b de las tareas del Cuestionario 2. El proceso de análisis siguió dos fases. En la primera,

Bloque A: esquema fraccionario (6 problemas)

1. Parte-todo: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?



2. Medida-recta numérica: Localiza 2/10 en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta.



3. Medida-densidad: Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5.

4. Reparto equitativo-Cociente: Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma cantidad de pizza? Haz un dibujo que muestre lo que le toca a cada persona.

5. Razonamiento "up and down": La parte sombreada de esta figura representa 3+2/3. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?

6. Operador: El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?

Bloque B: discriminación de situaciones proporcionales (2 problemas)

7. Problema valor perdido proporcional: La máquina R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J?

8. Problema valor perdido no proporcional: Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 120 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?

Bloque C: comparación de razones (4 problemas)

9. Pensamiento relativo-absoluto: José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?

10. Proceso "unitizing": La caja de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja es más barata?

11. Razón: En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes: a) 7.5 metros por 11.4 metros, b) 4.55 metros por 5.08 metros, y c) 18.5 metros por 24.5 metros. ¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

12. Covarianza: Responde a los siguientes apartados:

a) Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor?

b) Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor?

Figura 1. Problemas Cuestionario 1

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:

a) 7.5 metros por 11.4 metros b) 4.55 metros por 5.08 metros c) 18.5 metros por 24.5 metros

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales.

Respuesta 3

* El cuadrado se caracteriza por tener sus lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tenga menos distancia de metros, es decir:

• $11'4 - 7'5 = 03'9$ • $5'08 - 4'55 = 0'53$ • $24'5 - 18'5 = 06'0$

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

a) ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas? Justifica tu respuesta.

c) Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.

d) Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.

Figura 2. Ejemplo de tarea en el Cuestionario 2: problema relativo al sub-constructo razón del Cuestionario 1, tres respuestas de estudiantes y las 4 cuestiones profesionales nos centramos en el Cuestionario 1, codificando con un 1 si el estudiante para maestro había resuelto y justificado correctamente el problema y con un 0 si la resolución era incorrecta o lo había dejado en blanco. En la segunda fase del análisis nos centramos en cómo los estudiantes para maestro identificaban los elementos matemáticos relevantes de cada problema y reconocían características de la comprensión sen las respuestas de los estudiantes. Con este proceso generamos dos categorías relativas a la identificación de los elementos matemáticos (cuestión a): si el estudiante para maestro identifica los elementos matemáticos relevantes del problema o no los identifica; y dos categorías para el reconocimiento de la comprensión de los estudiantes (cuestión b): si el estudiante para maestro usa los elementos matemáticos para reconocer características de la comprensión o si el estudiante para maestro no reconoce características de la comprensión proporcionando comentarios generales basados en la corrección de las respuestas. Finalmente, se agruparon a los estudiantes para maestro según si identificaban y reconocían la comprensión en cada sub-constructo del razonamiento proporcional generando cuatro perfiles (grupos) como rasgos que caracterizan el comportamiento de los estudiantes para maestro.

RESULTADOS

La Tabla 1 muestra el porcentaje de éxito de los estudiantes para maestro en cada uno de los problemas del Cuestionario 1. Más de la mitad de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente los problemas relacionados con el proceso unitizing (71%), problema de valor perdido proporcional (84%), medida-recta numérica (91%), repartos equitativos-cociente (96) y parte-todo (98%). Sin embargo, menos de un tercio resolvieron correctamente los problemas relacionados con el significado de operador (5%), razón como índice comparativo (9%), pensamiento relacional (12%), razonamiento up and down (20%), medida-densidad (26%), problema de valor perdido no proporcional (30%) y covarianza-cualitativo (32%).

Tabla 1. Porcentaje de los estudiantes para maestro que resolvieron con éxito los problemas (N=91)

Problema	Sub-constructo	Número de EPM	Porcentaje de éxito (*)
6	Operador	5	5%
11	Razón	8	9%
9	Pensamiento relacional	11	12%
5	Razonamiento up and down	18	20%
3	Medida – Densidad	24	26%
8	Problema valor perdido no proporcional	27	30%
12	Covarianza – cualitativo	29	32%
10	Proceso unitizing	65	71%
7	Problema valor perdido proporcional	76	84%
2	Medida - recta numérica	83	91%
4	Cociente	87	96%
1	Parte – todo	89	98%

(*) Los porcentajes han sido redondeados a la unidad más próxima

Los resultados muestran que el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro varía en relación a los sub-constructos considerados. Los estudiantes para maestro parecen que son competentes en tres de los sub-constructos del esquema fraccionario (parte-todo, cociente y medida-recta numérica), en el problema de valor perdido proporcional y en el problema de comparación de razones vinculado al proceso unitizing. Sin embargo, tienen dificultades con el resto de sub-constructos vinculados al esquema fraccionario (operador, razonamiento up and down y densidad), con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales (problema de valor perdido no proporcional), y con los sub-constructos relacionados con la comparación e interpretación de razones (razón, pensamiento relacional y covarianza-cualitativo). Estos resultados sugieren que los estudiantes para maestro tuvieron un mayor éxito en los problemas que se pueden resolver a través de procedimientos como la división o la regla de tres y tuvieron dificultades en los problemas que implicaban tener en cuenta las relaciones entre las cantidades.

Respecto al Cuestionario 2 sobre el reconocimiento de características de la comprensión de los estudiantes, de los 92 estudiantes para maestro, las respuestas de 72 de ellos a las cuestiones a y b reflejaban alguna relación entre los elementos matemáticos que identificaron en cada problema y cómo reconocían características de la comprensión de los estudiantes (en los otros 20 no se puedo identificar ningún tipo de relación). Las relaciones identificadas nos permitieron agrupar a los estudiantes para maestro en cuatro perfiles (Tabla 2).

Tabla 2. Perfiles de estudiantes para maestro

	Relación entre la identificación de los elementos matemáticos y el reconocimiento de características de la comprensión de los estudiantes	Nº EPM
Perfil 0	No identifica los elementos matemáticos de cada problema del razonamiento proporcional y no reconoce características de la comprensión de los estudiantes en ningún problema del razonamiento proporcional.	20
Perfil 1	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto razonamiento up and down y operador) y reconoce algunas características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	17
Perfil 2	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (incluido el razonamiento up and down pero no el operador) y de la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y reconocen características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	19
Perfil 3	Identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto operador), de la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y de la razón en situaciones de comparación y reconocen características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas.	16

Los perfiles muestran que los sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional no fueron identificados por los estudiantes para maestro de la misma manera, y esto influyó en cómo reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes. Está característica ayudó a definir los perfiles 1, 2 y 3. La diferencia entre los perfiles 1 y 2 la generó el conocimiento del razonamiento up and down y la discriminación de las situaciones proporcionales y no proporcionales y cómo se usaban al referirse a la comprensión de los estudiantes. La diferencia entre los perfiles 2 y 3 la generó el conocimiento de la covarianza-cualitativo, el pensamiento relacional y la razón, que completan el dominio de comparación de razones. Así, los elementos matemáticos usados con más facilidad para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes son los relacionados con el esquema fraccionario, mientras que, los relacionados con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales fueron más difíciles, y estos, a su vez, fueron más fáciles que los elementos matemáticos relacionados con las situaciones de comparar razones. Por tanto, los problemas de comparar razones fueron los más difíciles a la hora de identificar los elementos matemáticos del problema y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes. Los perfiles identificados muestran que los estudiantes para maestro tuvieron más dificultades en reconocer características de la comprensión de los estudiantes en los problemas en los que las respuestas de los estudiantes mostraban una comprensión conceptual vinculada al significado del sub-constructo, en lugar de una resolución procedimental basada en algún algoritmo.

Presentamos a continuación un ejemplo del comportamiento de un estudiante para maestro del Perfil 1 en el cuestionario sobre conocimiento matemático y en el cuestionario sobre reconocer la comprensión de los estudiantes. Este estudiante para maestro resuelve correctamente los problemas del Cuestionario 1 del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador), el problema sobre el proceso unitizing y el problema de valor perdido proporcional pero no el resto de los problemas, es decir, resuelve con éxito los problemas más procedimentales. En el problema *parte-todo* realiza fracciones equivalentes, en *medida-recta numérica, medida-densidad* y *proceso unitizing* usa divisiones y en el *problema de valor perdido proporcional* usa la idea de "triple", pero no discrimina las situaciones no proporcionales ya que en el *problema de valor perdido no proporcional* usa la idea de "doble" incorrectamente. En el problema sobre *pensamiento relacional* usa una estrategia aditiva y una estrategia sin sentido en el problema de *razón*. Además no resuelve correctamente los problemas de reconstrucción de la unidad (*razonamiento up and down* y *operador* inverso) ni sabe resolver el problema de *covarianza-cualitativo*.

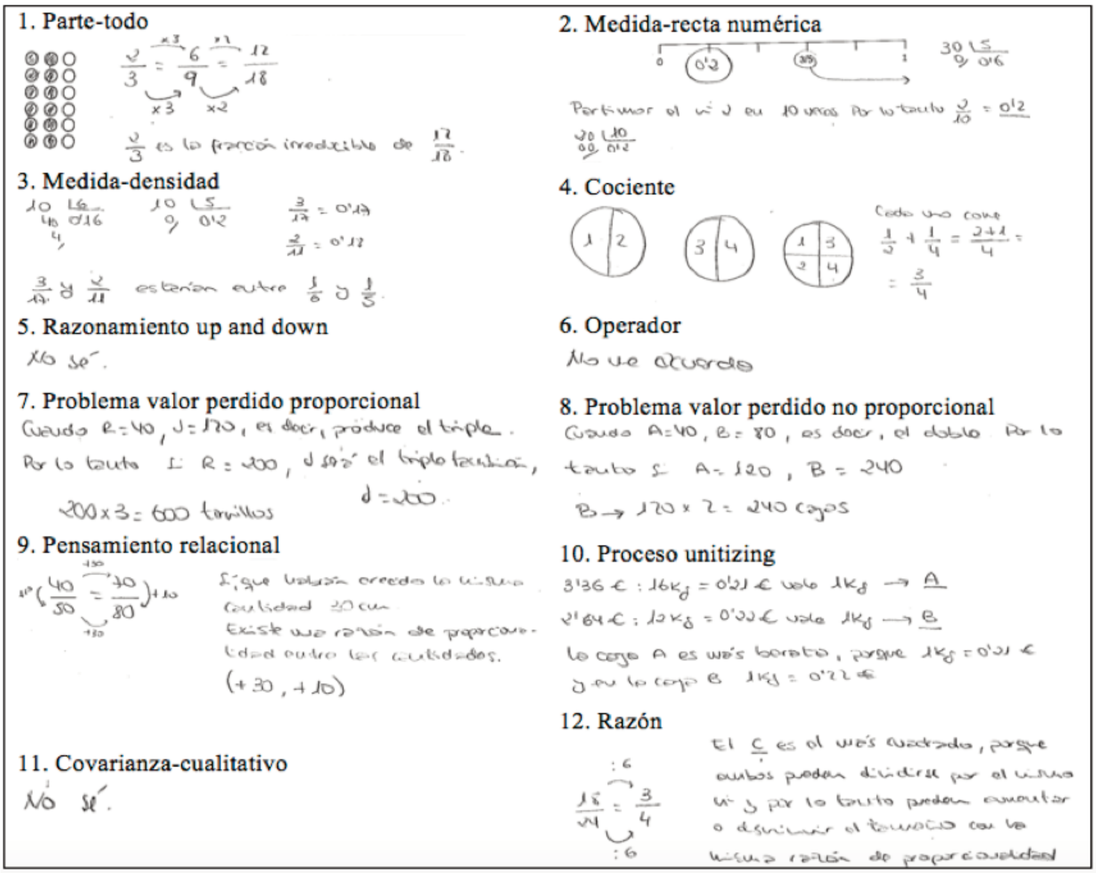


Figura 3. Respuesta del E008 al Cuestionario 1

En cuanto al Cuestionario 2 (identificar los elementos matemáticos relevantes del problema y reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes) (Figura 4), este estudiante identifica los elementos matemáticos del esquema fraccionario (excepto el razonamiento up and down y operador) y reconoce algunas características de la comprensión de los estudiantes en estos problemas. Sin embargo, no identifica ni reconoce características de la comprensión en el resto de sub-constructos (característica del Perfil 1). Así en relación a las diferentes respuestas de los estudiantes a los problemas indica que, en el problema *parte-todo* reconoce la relación entre el todo y las partes congruentes, el uso del operador por parte del estudiante 2 "al coger 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas", y que el estudiante 3 "no tiene en cuenta el todo". En el problema *medida-recta numérica* reconoce el uso de la fracción unitaria y la búsqueda de la unidad en la respuesta del estudiante 1 y el uso del operador en la respuesta del estudiante 2, y en la respuesta 3 la identificación incorrecta del todo. En el problema de *medida-*

densidad reconoce la necesidad de obtener varias fracciones equivalentes para encontrar las fracciones comprendidas entre las dadas. Y en el problema *cociente* reconoce las diferentes estrategias usadas por los estudiantes ("adjudica 1 pizza para cada persona" y "de cada pizza le da un trozo a cada persona").

Sin embargo, este estudiante para maestro no reconoce características de la comprensión de los estudiantes del problema *operador* ni del *razonamiento up and down* pertenecientes también al esquema fraccionario (en la respuesta 3 comenta "justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador" y entre las otras dos no diferencia que un estudiante no representa la fracción pedida). Tampoco reconoce diferencias en cómo los estudiantes resuelven los problemas de discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales ni en los problemas de comparación de razones, proporcionando una descripción basada en los procedimientos y dejando algunas respuestas en blanco sin mostrar evidencias de las características entre cada una de las respuestas (problemas de valor perdido proporcional y no proporcional).

1. Parte-todo "a) Es necesario saber interpretar la parte-todo y medida, porque necesitan reconocer el todo y dividir un todo en partes congruentes. También necesitan conocer el contexto discreto. b) R1: Utiliza la fracción como parte-todo y lo hace de forma correcta, porque identifica los 2 grupos necesarios dentro del conjunto que se le da. R2: Utiliza la fracción como operador, porque modifica la situación inicial para conseguir la final. Lo hace correcto porque interpreta que 2/3 es lo que tiene que coger y tiene 18 canicas. R3: La respuesta es incorrecta. Cree que cada grupo tienen 3 bolas y que tiene que coger dos grupos. No tiene en cuenta el todo que se la ha dado."	**2. Medida-recta numérica** "a) Fracciones y fracciones equivalentes. b) R1: Identifica la fracción unitaria. Busca la unidad y después da el resultado. R2: Utiliza la fracción como operador. R3: Identifica incorrectamente el todo y dice que es X es 15/19 veces esa fracción." **3. Medida-densidad** "a) Fracciones. Fracciones equivalentes. b) R1: Busca fracciones equivalentes y después las fracciones comprendidas entre estas nuevas fracciones obtenidas. R2: Saca fracciones equivalentes, pero necesita obtener más; porque este resultado no le permite averiguar 2 fracciones, solo una. R3: Saca el m.c.m., pero necesita obtener más fracciones equivalentes para poder resolver el ejercicio."
4. Cociente "a) Es necesario interpretar la fracción como cociente, ya que hay que hacer un reparto equitativo. b) R1: Hace partes congruentes, porque son 4 personas. El reparto la hace de forma que adjudica 1 pizza para cada persona y lo que le sobra para la otra persona que le falta. R2: El reparto es diferente a los demás. Divide cada pizza en 4 partes (según las personas) y de cada pizza le da un trozo a cada persona. R3: Hace el m.c.m entre pizzas y personas para saber en cuántas partes tiene que dividir las pizzas y así saber cuánto le toca a cada uno. No hace partes congruentes"	**5. Razonamiento up and down** "a) Es necesario interpretar la fracción como parte-todo e identificar el todo. b) R1: Justifica la respuesta buscando la unidad, utilizando la fracción como parte-todo. R2: Lo hace igual que el anterior, es decir, utilizando la fracción como parte-todo pero de forma gráfica. R3: Justifica la respuesta buscando la unidad y utilizando la fracción como operador." **6. Operador** "No se lo que hay que hacer."
7. Problema valor perdido proporcional "a) Proporcionalidad, razones externas o internas. b) R1: Utiliza el enfoque funcional, relacionado los tornillos de R y los de J. R2: R3: Utiliza una estrategia incorrecta para un problema de proporcionalidad."	**8. Problema valor perdido no proporcional** "a) No es un problema de proporcionalidad, es aditivo. b) R1: Utiliza una estrategia aditiva. R2: R3: Utiliza la proporcionalidad para un problema aditivo por lo tanto es incorrecto."
9. Pensamiento relacional "a) Proporcionalidad, cambios relativos. b) R1: Cambios absolutos. R2: Cambios relativos R3: Cambios relativos." **10. Proceso unitizing** a) Proporcionalidad, razones internas y externas. b) R1: Relaciona ambas magnitudes (€ y kg) mediante relaciones externas. R2: Realiza una regla de 3, calculando cuánto valdrían 12kg de la caja A y después lo relaciona con los 12kg de la caja B. R3: Lo hace fe forma incorrecta, porque es un problema de proporcionalidad y utiliza una estrategia aditiva.	**11. Covarianza-cualitativo** "a) Proporcionalidad. b) R1: Correcto, utiliza un pensamiento proporcional. R2: Ambas respuestas son incorrectas. R3: Establece relaciones, pero no concluye de forma correcta." **12. Razón** "a) Razones internas (metros – metros) b) R1: Relaciona ambas cantidades mediante una razón interna y lo hace de forma correcta. R2: Calcula razones internas, pero su explicación no es correcta porque se fija en la diferencia entre las cantidades. R3: No relaciona cantidades, solamente indica las diferencias entre las cantidades obtenidas."

Figura 4. Respuesta del E008 al Cuestionario 2

DISCUSIÓN

Este estudio tiene como objetivo analizar el conocimiento de los estudiantes para maestro de los diferentes sub-constructos del razonamiento proporcional y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes como una característica de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Mason, 2002). Los resultados obtenidos indican que el reconocimiento de las características de la comprensión de los estudiantes en este dominio matemático depende de los diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. En particular, los resultados sugieren que el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión en los estudiantes está vinculada al carácter procedimental o conceptual de los sub-constructos considerados en los problemas planteados (Hiebert y Lefevre, 1986; Star, 2005).

De esta manera, pudimos identificar diferentes rasgos que caracterizan el comportamiento de los estudiantes para maestro. Estos rasgos que permiten definir diferentes perfiles son: la forma en la que los estudiantes para maestro utilizaron el sub-constructo razonamiento up and down, la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y las razones en situaciones de comparación (pensamiento relacional, covarianza-cualitativo y razón como índice comparativo) y no utilizaron el sub-constructo operador. Así, para los estudiantes para maestro fue más fácil identificar y usar los elementos matemáticos para describir características de la comprensión en los problemas relacionados con el esquema fraccionario (excepto operador y razonamiento up and down), mientras que los relacionados con la discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales y el razonamiento up and down fueron más difíciles, y estos, a su vez, fueron más fáciles que los elementos matemáticos relacionados con las situaciones de comparar razones. Además, los sub-constructos en los que fue más difícil reconocer características de la comprensión de los estudiantes coinciden con los sub-constructos en los que los estudiantes para maestro tuvieron menos éxito en el Cuestionario 1 sobre el conocimiento matemático.

Los resultados indican que el conocimiento del razonamiento proporcional y el reconocimiento de características de la comprensión están vinculados a la naturaleza procedimental o conceptual de las situaciones planteadas para cada sub-constructo. Los estudiantes para maestro tuvieron éxito en los problemas en los que podían aplicar un procedimiento previamente aprendido, pero tenían dificultades en los problemas que requerían comprender los significados vinculados a la relación entre las cantidades y en los que no se tenía un procedimiento (los problemas razonamiento up and down, operador, problema de valor perdido no proporcional (no discriminan), pensamiento relacional, razón y covarianza-cualitativo). De la misma manera, tenían mayores dificultades en reconocer características de la comprensión de los estudiantes en aquellas situaciones en las que las respuestas de los estudiantes mostraban una comprensión conceptual y no estaban basadas en procedimientos. Esta dificultad de los estudiantes para maestro en reconocer evidencias de la comprensión en los estudiantes cuando estas no reflejan un procedimiento ha sido reconocida en otros dominios matemáticos reflejando una característica de la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell et al., 2013; Son, 2013; Son y Crespo, 2009).

Estos resultados sugieren que los formadores de maestros debemos diseñar oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para maestro que les permita reflexionar sobre cómo el conocimiento de carácter procedimental o conceptual de algunos dominios curriculares determina la manera en la que pueden reconocer características de la comprensión de sus estudiantes.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Lee, S. J., Brown, R. E. y Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198-220.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2) 22-43.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Ribeiro, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., Montes, M. y Gamboa, G. (2017). Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self-practice: the case of Carla. *Proceedings of the X CERME*. Dublin: Irlanda.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *BOLEMA, 26*, 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, *13*, 1305-1329.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Son, J., y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning about students' non-traditional strategies when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 236-261.

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.