

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO, ENSEÑANZA DE FRACCIONES Y FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Pedagogical knowledge, teaching of fractions and initial teacher training

Castro-Rodríguez, E. y Rico, L.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de casos que analiza el conocimiento didáctico que un grupo de futuros profesores de primaria puso en juego al abordar cuestiones relativas a la enseñanza del concepto de fracción. A través de entrevistas se profundiza en la capacidad de los participantes para diseñar tareas escolares, enunciar objetivos y prever posibles limitaciones de los escolares sobre el significado de fracción. Los resultados destacan los contenidos prioritarios que dichos sujetos consideran en esa enseñanza.

Palabras clave: *análisis didáctico; formación inicial de profesores; enseñanza de fracciones; relación parte-todo.*

Abstract

In this paper we present a case study that analyzes the pedagogical knowledge that a group of future primary teachers demonstrate when dealing with issues related to the teaching of the concept of fraction. Through interviews, we study the participant ability to design school tasks, enunciate objectives and anticipate possible limitations in the students about the meaning of the fraction. The results show the priority content that these subjects consider in that teaching.

Keywords: *didactical analysis; preservice teacher training; fractions instruction; part-whole relationship.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática se conoce como una profesión técnicamente exigente y compleja, que fundamenta sus conocimientos en disciplinas con contenidos diversos. Un amplio dominio por el profesor de los contenidos matemáticos específicos no garantiza, por sí solo, un buen desempeño en la práctica docente (Tirosh, 1999). La formación experta del profesor de matemáticas requiere así mismo de conocimientos didácticos, conceptuales y profesionales, sustentados en contenidos propios de didáctica de la matemática, cuya demarcación ocupa a especialistas e investigadores. Precisar qué conocimientos profesionales específicos necesita un profesor competente en matemáticas responde a ese propósito (Sánchez, 2011).

La mayoría de los expertos hacen una primera distinción entre conocimiento del contenido, que se refiere a los distintos contenidos disciplinares de la matemática escolar, y el conocimiento didáctico, correspondiente a aquellos contenidos necesarios para planificar la enseñanza y orientar el aprendizaje sobre un tópico matemático determinado. Entendemos que los conocimientos didácticos y los específicos de la matemática escolar están estrechamente ligados y hacen parte, conjuntamente, del conocimiento profesional del profesor. Dentro de este campo, desde la perspectiva del profesor de matemáticas, se ha analizado cuidadosamente la naturaleza de ese conocimiento profesional (Bromme, 1994; Escudero-Ávila et al., 2015; Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005).

Esos trabajos estudian el conocimiento profesional del profesor considerando sus diversas dimensiones. La distinción general comúnmente aceptada diferencia entre conocimientos en matemáticas y conocimientos en didáctica de la matemática (INEE, 2012, pp. 91-113). Cada uno de esos conocimientos tienen fundamentos disciplinares distintos, que se denominan contenidos matemáticos y contenidos didácticos, respectivamente.

Al trabajar sobre formación de profesores, los conocimientos de cada sujeto vienen dados por su dominio de los contenidos matemáticos y de los contenidos didácticos tal y como los expresan esos sujetos en respuesta a determinadas tareas, mediante contraste con aquellos establecidos curricular y profesionalmente.

Cada tema matemático que se enseña en el aula de primaria es parte de dicho contenido; por eso el maestro lo estudia y trabaja durante su formación inicial, para hacerlo parte de su conocimiento. Entre los tópicos curriculares destacados por los investigadores se encuentran las fracciones (Cramer y Lesh, 1988; D'Ambrosio y Mendoça, 1992; Domoney, 2001). También estos estudios se basan en aquellos contenidos didácticos que fundamentan el correspondiente conocimiento profesional del profesor sobre cada tema, que ayudan al diseño de tareas y la toma de decisiones para su enseñanza y aprendizaje escolar, junto con la mejora de la práctica en el aula de matemáticas. Este tipo de trabajos son necesarios ya que, a pesar de los avances en investigación sobre conocimiento profesional de los profesores, se mantiene la preocupación por la desconexión existente entre la teoría y la práctica educativa (Loughran y Hamilton, 2006).

Este trabajo se centra en el conocimiento didáctico relativo al aprendizaje de las fracciones tal y como lo entienden e interpretan un grupo de maestros en formación, desde el método del análisis didáctico (Rico, 2013). El análisis didáctico sobre el aprendizaje de las fracciones identifica el conocimiento sobre ese tópico por el estudio de las respuestas de los profesores y su tipificación mediante una serie de categorías. Dichas categorías proporcionan una estructura sobre el aprendizaje de las fracciones, un marco teórico para su diseño y práctica docente. El contenido viene dado por la concreción de esa estructura teórica, específica al tema de fracciones. El conocimiento del profesor en formación lo establecen los conceptos y procedimientos finalmente identificados y expresados por el profesor ante determinadas demandas, en relación con dicho tópico (Rico, 2016, pp. 85-112).

El contenido sobre aprendizaje de un tópico matemático escolar determinado se estructura, en este marco, mediante tres categorías u organizadores curriculares: expectativas de aprendizaje, limitaciones en el aprendizaje y oportunidades de aprendizaje, que se sintetizan en el diseño de tareas. Son tres contenidos que han sido ampliamente trabajados a lo largo de la formación inicial de los maestros. Con la perspectiva del análisis didáctico, este trabajo tiene como objetivo indagar el conocimiento que muestra un grupo de maestros en formación inicial sobre aprendizaje de las fracciones cuando se proponen tareas, plantean objetivos y se les pide detectar posibles errores y dificultades de los escolares sobre dicho tema. Particularmente, dentro del concepto de fracción, este trabajo se fundamenta en la noción elemental que surge de la relación parte-todo, por ser fundamento y primer acercamiento a las fracciones (Behr et al, 1983; Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1993; Streffland, 1991).

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico entendemos un método de investigación en Didáctica de la Matemática, cuyo interés y funcionalidad se extiende a otros ámbitos de actuación de esta disciplina. El análisis didáctico se estructura sobre una fundamentación curricular y se articula mediante distintos niveles de análisis, cada uno de los cuales está determinado por un sistema propio de categorías que identifican unos componentes y contenidos. Las dimensiones que aquí consideramos son: análisis conceptual, análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo (Rico, 2013).

La necesidad de una metodología para el diseño y realización de nuestro estudio, nos llevó a seleccionar el análisis didáctico con esta finalidad. En particular, este trabajo ha utilizado las categorías del análisis del contenido y cognitivo, mediante las cuales hemos clasificado e interpretado las respuestas de los sujetos relativas al aprendizaje escolar de las fracciones, que han permitido establecer su conocimiento didáctico.

Resumimos las categorías, contenidos didácticos y elementos de cada uno de ellos en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías del Análisis Didáctico

Dimensiones	Conceptual/Contenido	Cognitiva/Aprendizaje
Método de análisis:	Análisis significados	Análisis cognitivo
Objeto de estudio:	Significados de los conceptos matemáticos escolares	Condiciones y orientación del aprendizaje matemático escolar
Organizadores o componentes curriculares:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Estructura conceptual 2. Sistema de representación 3. Sentidos y modos de uso 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expectativas de aprendizaje 2. Limitaciones 3. Oportunidades de aprendizaje
Contenidos didácticos:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Propiedades formales/ funcionalidad cognitiva; actitudes emocionales, morales y éticas 2. Representaciones simbólicas/ gráficas/numéricas 3. Términos/ contextos/ fenómenos/ situaciones 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Objetivos/ competencias/ compromisos 2. Errores/ dificultades/ bloqueos 3. Condiciones/ demandas/ retos
Síntesis:	Significados prioritarios para el aprendizaje y la enseñanza	Estructura de cada tarea matemática relativa al aprendizaje esperado

Análisis del contenido

Mediante el análisis del contenido se establecen y organizan los significados de los conceptos y procedimientos de cada tema matemático escolar (Rico, 2016). El análisis del significado del concepto de fracción, a través de las tres componentes que articulan dicho análisis, lo hemos acreditado desde las producciones de un grupo de profesores en formación, donde se identifican distintos conocimientos didácticos para esa dimensión (Castro-Rodríguez, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016).

Análisis cognitivo

El análisis cognitivo trata de organizar el aprendizaje de determinados conocimientos sobre un tópico. El análisis cognitivo se estructura en torno a aquellos conocimientos que el profesor espera que aprendan los escolares, aquello que puede interferir en ese aprendizaje y las opciones que facilitan a los escolares el aprendizaje y al profesor su observación efectiva (Lupiáñez, 2009).

MÉTODO

Para dar respuesta al objetivo planteado: indagar el conocimiento que muestra un grupo de maestros en formación inicial sobre el aprendizaje de las fracciones cuando se proponen tareas, plantean objetivos y se detectan posibles errores y dificultades de los escolares sobre dicho tema, seguimos una metodología de estudio de casos mediante la realización de entrevistas individuales. Tratamos de profundizar en la riqueza de la información que proporcionan los sujetos, en su diversidad y alcance; en esta ocasión no buscamos la cantidad ni estandarizar la información que esos datos proporcionan.

Sujetos

En este estudio participaron nueve maestros en formación que cursaban los estudios universitarios del Grado de Maestro en Educación Primaria durante el año académico 2012-2013 en la Universidad de Granada. Los sujetos eran estudiantes del tercer curso de dicha titulación, matriculados en la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en Educación Primaria”. Los estudiantes fueron seleccionados entre un grupo más amplio de 82 sujetos que habían participado en un trabajo previo realizado durante el año anterior cuando cursaban la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria”. Durante dicho periodo, además de finalizar tal asignatura, los participantes realizaron sus prácticas docentes en los centros escolares. Dicho trabajo consistía en redactar un texto cuyo propósito era iniciar a unos hipotéticos escolares en la noción de fracción. En dicho estudio, los sujetos seleccionados presentaron resultados heterogéneos.

Recogida de datos e instrumento

La recogida de datos la hemos realizado mediante entrevistas personales individualizadas con cada uno de los participantes. El trabajo se centra en caracterizar el conocimiento profesional de los maestros en formación sobre contenidos didácticos acerca del aprendizaje de las fracciones. Por esta razón, la entrevista comienza situando a esos profesores en formación en una situación escolar de aprendizaje de las fracciones. Para esta contextualización se entregó a cada sujeto una narración elaborada individualmente por cada uno con carácter previo, realizada en un trabajo anterior sobre cómo iniciar a los escolares de primaria en el concepto de fracción. Tras la nueva lectura de esa narración personal se plantearon preguntas relativas a los tres organizadores del análisis cognitivo ya mencionados: tareas, objetivos y errores y dificultades (ver Tabla 2).

Tabla 2. Preguntas de la entrevista sobre el análisis cognitivo

Contenido didáctico	Pregunta realizada
Diseño de tareas	Para finalizar la explicación sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, propón alguna tarea, actividad o problema.
Errores y dificultades	(Errores) ¿En qué se pueden equivocar?
	(Dificultades) ¿Por qué crees que se pueden equivocar?
Expectativas de aprendizaje	Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos, ¿qué crees que aprenderán?

Procedimiento

Las entrevistas se realizaron de manera individual, en una habitación aislada, para que el sonido de la grabación de audio fuese óptimo. Para detectar posibles fallos en el diseño y aplicación de la entrevista, se realizó un ensayo piloto con dos de los sujetos seleccionados, tres semanas antes de realizar las entrevistas definitivas.

El entrevistador era el docente que impartía la asignatura “Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en Educación Primaria”, que los estudiantes entrevistados se encontraban cursando. La relación con el entrevistador permitió un ambiente natural y facilitó su colaboración.

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Las entrevistas fueron transcritas para su análisis. Con los datos obtenidos, realizamos un análisis de contenido cualitativo. Para ello, usamos dos tipos de categorías: cognitivas y de significado. Esas categorías, junto con los datos obtenidos se muestran en los siguientes apartados.

Diseño de tareas

Todos los sujetos fueron capaces de proponer de manera natural algún tipo de tarea. Las tareas fueron en todos los casos enunciados verbales de problemas. En general, se pueden considerar apropiadas de acuerdo al tema de iniciación a las fracciones, a excepción de la planteada por el sujeto S6, quien propuso un enunciado de estructura aditiva de cambio.

Tabla 3. Respuestas dadas por los sujetos sobre diseño de tareas

Respuestas	
S1	Realizaremos una actividad basada en el reparto. Vamos de camino al Parque de las Ciencias y hemos tirado por un camino recto para llegar antes. Cuando hemos llegado al primer semáforo que nos encontramos, llevamos recorrido $1/3$ del camino. ¿Cuánto nos queda para llegar si ya no hay ningún semáforo más?
S2	Si tenemos una tarta partida en 4 trozos y yo me he comido $3/4$ ¿cuántos trozos quedan? Exprésalo en forma de fracción.
S3	Tenemos una cuerda demasiado grande. Queremos dividir esa cuerda para 3 personas de forma que cada uno tenga un trozo, los trozos tienes que ser del mismo tamaño ¿qué parte de la cuerda me corresponderá tener?
S4	Si Carlos tiene un pastel y quiere repartírselo a sus 6 amigos por igual, representa en forma de fracción cómo lo harías.
S5	A Marta se le ha olvidado el bocadillo para el recreo, pero su amigo Daniel decide compartirlo con ella. Si Daniel ha dividido su bocadillo en 3 trozos y se ha comido 2, ¿qué parte del bocadillo se ha comido Marta?
S6	Carolina ha hecho una tarta de chocolate por mi cumpleaños, si somos 6 y la dividimos en 6 partes iguales y yo me como la primera, ¿cuántos trozos de tarta quedan? Dibújalos.
S7	Tenemos una cinta de colores que hemos comprado entre 3 amigos ¿qué parte le correspondería a cada a amigo?
S8	Mi madre parte el bizcocho en 3 partes iguales. Si mi hermano se come dos tercios del bizcocho ¿cuánto queda para comerme yo?
S9	María tiene en su casa una barra de pan dividida en tres trozos. Si coge $1/3$ de la barra partida en trozos, ¿cuántos quedan para su hermana y su madre?

En el análisis de los enunciados anteriores, se usaron como categorías de análisis los siguientes elementos. Primero, *complejidad cognitiva* de la demanda planteada en la tarea: reproducción, conexión o reflexión. En segundo lugar, *competencia matemática* a la que contribuye la tarea.

En relación a las categorías de tipo cognitivo, todos los participantes inventaron tareas en las que se formulan problemas o retos, sin llegar a plantear un nivel mayor de reflexión como analizar o interpretar la respuesta. Con respecto a la categoría competencia, las tareas propuestas contribuyen al desarrollo de la competencia matemática *resolución de problemas* y en menor medida, algunas de las tareas, a la competencia *representar*.

Con respecto a las categorías de significado: estructura conceptual, sistema de representación y sentido, en la primera de ellas encontramos que en todos los casos las tareas implican como significado la relación parte-todo, no obstante, algunos de ellos no incluyen relaciones parte-todo multiplicativas (S3, S5 y S7). Por ejemplo, en la respuesta del alumno S5, no se indica que la solución haya de expresarse como una fracción en lugar de un número natural. En una ocasión, se plantea un problema aditivo de cambio, como hace el alumno S6.

Con respecto a la categoría sistema representación, la mayoría de los sujetos (S1, S3, S5, S7 y S8) no especificaron qué tipo de representación se requiere. Dos de los participantes (S2 y S4) especifican que se haga a través de la representación numérica-fraccionaria, y un sujeto (S6) indica que se haga tanto de forma numérica como gráfica.

Por último, en la categoría sentido, a excepción del enunciado de estructura aditiva, el resto de respuestas se corresponden con tres contextos: Reparto (S3, S4 y S7), Hallar la parte complementaria (S1) y Reconstruir la unidad (S2, S5, S8 y S9).

Tabla 4. Respuestas de los sujetos a la pregunta sobre expectativas de aprendizaje

Respuestas sobre expectativas	
S1	Aprender a diferenciar las partes que tenemos o cogemos, de un total. Aprender a repartir un camino en 3 trozos.
S2	Aprender las fracciones.
S3	Aprender las fracciones a partir de la división en partes iguales de una cuerda.
S4	Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones.
S5	Aprender a desenvolverse con las fracciones que se utilizan en la vida cotidiana, a utilizarlas en la vida cotidiana y aprender su utilidad, aunque no lo expresen de forma escrita.
S6	Aprendan a dividir de una forma exacta y creativa. Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.
S7	Que comprendan primeramente las fracciones, y que sea un lenguaje sencillo y de la vida real, que les sea a ellos útil.
S8	Dividir un objeto en partes iguales. Que la suma de las partes representa la totalidad del principio.
S9	Ser capaces de dominar las operaciones con las fracciones, en este caso el dominio de las restas.

Expectativas de aprendizaje

La mayoría de los sujetos no encontraron excesivas dificultades para enunciar expectativas de aprendizaje asociadas a su narración, manifestando algún tipo de expectativa acorde al tema. Solamente el sujeto S11 manifestó una expectativa ajena al tema de iniciación a las fracciones, que hacía referencia a las operaciones, particularmente, la resta de fracciones. Estas respuestas las recogemos en su totalidad en la Tabla 4.

Las categorías de tipo cognitivo y de significado consideradas en el análisis de las respuestas y sus resultados se presentan a continuación:

- *Capacidad cognitiva* a la que hace mención, que toma los valores *imprecisa*, si es una capacidad genérica o poco definida; *definida*, si es una capacidad cognitiva singular; *elaborada*, si se plantean varias capacidades cognitivas. Con respecto a esta categoría, destacan en las respuestas los términos “aprender” y “comprender”. El sujeto S2 fue el único que formuló una expectativa genérica “aprender las fracciones”. Tres de los sujetos (S3, S8 y S10) plantearon expectativas elaboradas, cuya expresión incluye dos capacidades situadas en enunciados independientes. El resto de sujetos planteó expectativas específicas que expresan una única capacidad cognitiva.
- *Estructura conceptual*, donde se observa que no existe predominio de los tipos de contenidos en las respuestas de los participantes. Se presentan expectativas relativas a conocimientos conceptuales como “Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.” y procedimentales “Dividir un objeto en partes iguales”. Dos participantes, S1 y S6, plantearon expectativas considerando ambos tipos de conocimientos, conceptual y procedimental, en sus respuestas. Otros dos participantes (S5 y S7) incluyen contenidos de tipo actitudinal reconociendo la importancia de conocer y apreciar la utilidad de las fracciones.
- *Representaciones*, en el que sólo un alumno hace mención a la representación de fracciones, sin especificar el sistema requerido (S4) “Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones”.

- *Sentido*, donde las expectativas expresan los contextos de división de objetos, reparto y reconstrucción de la unidad. Otras expectativas como “diferenciar las partes del todo” son generales y no especifican un contexto particular (Ruiz Hidalgo, 2016).

Limitaciones

En la última pregunta referente a las limitaciones de aprendizaje, los participantes reflexionaron acerca de los errores en que pueden incurrir los escolares al realizar su tarea y las dificultades que pueden originar esos errores. Estos sujetos encontraron limitaciones y carecieron de precisión para enunciar posibles errores en que pueden incurrir los escolares en las tareas que plantearon, así como en vincular y justificar tales errores a las dificultades que eventualmente los pudieran originar. Algunos participantes no llegaron a formular errores y dificultades, otros formularon dificultades muy genéricas o se limitaron a repetir la misma respuesta dada a la pregunta sobre errores. Las respuestas se encuentran recogidas en la Tabla 5.

Tabla 5. Respuestas dadas por los sujetos sobre limitaciones

	Respuestas sobre errores	Respuestas sobre dificultades
S1	Confundirse a la hora de saber qué lugar ocupa cada dato en la resta.	Repartir el camino. Dividir el camino en tres partes iguales y tener que coger alguna.
S2	Que no sepan resolverlo o si lo resuelven pondrían algo al azar.	Porque es complejo, si yo tengo 4 trozos, en vez de ver 4 puedo verlo como $4/4$ aunque sé que el resultado sea 1 que representa el total. Entonces puedo decir tengo 4 trozos y me he comido $3/4$, 4 menos $3/4$ y pondrá algo al azar. Porque hay que enseñarles si tenemos una tarta en 4 trozos que eso representa el total que es igual a $4/4$. Entonces el alumno si no sabe eso pondrá $4 - 3/4$ llevándole a cometer un error.
S3	Al dividir una unidad entre tres ya que tres es un número impar.	Porque los números impares siempre crean más problemas que lo pares, los números pares los niños los ven mucho mejor. Dividir una unidad entre un número par lo asocian mejor que si lo tienes que dividir entre números impares. Porque si tú divides 4 entre 2 sabes que te dan partes iguales... pero 1 entre 3 da cero como algo y el cero como algo puede que no lo manejen. Los niños tienen más facilidad para dividir una unidad entre un número que sea par que entre un número que sea impar.
S4	Al sumar, que sumasen también los denominadores por lo que dirían que saldría $6/36$.	Por despiste porque si el profesor se lo ha explicado... muchas veces están centrado en el resultado de arriba y lo de abajo se te va, a mí me ha pasado muchas veces. Se preocupan más por sumar los numeradores que luego hacen la misma operación con los denominadores.
S5	Fallo en la comprensión. En lugar de dividir el bocadillo en tres partes iguales se dividiese en dos, ya que hay dos niños a los que repartir.	Porque haya un fallo de comprensión en la lectura.
S6	Dividir en partes iguales y que realmente no vean bien lo que cogen o dan.	A lo mejor de la regla de las medidas... ahí veo que hay mucha dejadez, que tu le digas divide una tarta en 3 partes iguales, y que cada uno la divida como quiera, no, hay una forma correcta de dividirla para después que haya una solución correcta. Porque no hagan una división exacta de la tarta y la dividan como ellos crean. Falta de utilizar las medidas, reglas.

S7	La correspondencia de gráficamente los tres trozos, a que a cada uno le corresponda un tercio. En dividir en tres partes iguales no le costaría. Sería la correspondencia gráfica a la numérica.	Porque no es tan gráfico si no es más... de razonamiento, y tienen que verdaderamente comprender las fracciones, si no comprenden las fracciones no podrán hacer la equivalencia entre lo gráfico y lo numérico.
S8	En la colocación de las fracciones a la hora de restar.	Al ver fracciones, al ver un número encima de otro no se piensa que son restas normales, pueden pensar que esto (2/3) es mayor que esto (3/3). Al ver las fracciones pueden confundir los números y pensar que da igual el orden de colocación.
S9	Los alumnos podría tener dificultad a la hora de plantear el problema sin las fracciones y realizarlo con ellas, quizás también podrían tener problemas con la operación y equivocarse con el numerador y denominador.	Porque no he especificado cómo tendrían que hacerlo, yo he puesto que tengo tres trozos y pueden directamente quitarle dos y se ha acabado, no plantear que tengo 3 de 3 y si le quito uno tener 2/3. Porque puede ser que no lleguen a comprender del todo el enunciado y realizar la operación simple sin obtener el resultado por medio de las fracciones

Las respuestas recogidas sobre errores y dificultades se analizaron según tres categorías:

Tipo de limitación la cual examina si el enunciado corresponde a un error, a una dificultad, a un obstáculo, a una ausencia de conocimiento o no es una limitación. Dependiendo del valor de esta variable, se analiza la respuesta según la variable tipo de dificultad o tipo de error.

Tipo de dificultad, de acuerdo con las categorías acotadas por Socas (1997), toma los valores (a) asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, (b) asociada a los procesos propios de la actividad matemática, (c) asociada a los procesos de enseñanza, (d) asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, (e) asociada a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Tipo de error, que toma los valores (a) datos mal utilizados, (b) interpretación incorrecta del lenguaje, (c) inferencias no validas lógicamente, (d) teoremas o definiciones deformados, (e) falta de verificación de la solución, (f) errores técnicos, y (g) no es un error.

Respecto a los errores planteados, los participantes hicieron referencia a errores técnicos o datos mal planteados recurriendo a posibles fallos en los algoritmos de suma y resta de fracciones, a pesar de que en ninguna tarea es necesaria la realización de tales operaciones para su resolución. Otros errores dados, en relación a definiciones deformadas del concepto de fracción, fue la desigualdad de las partes al dividir el todo, y en relación con datos mal utilizados, dividir el todo en un número incorrecto de partes.

Las respuestas dadas sobre dificultades se centran en los procesos propios de la actividad matemática, particularmente en los procesos de división y reparto, procesos de desarrollo cognitivo con problema en la comprensión lectora, procesos de enseñanza debido a que el profesor no especifica bien cómo resolver la tarea, y dificultad de los objetos matemáticos por la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones.

Destaca en las respuestas el sujeto S2, ya que fue el único que respondió a las preguntas sobre limitaciones con ausencia de conocimiento “que no sepa resolverlo o si lo resuelven pondría algo al azar”.

En las categorías de significado, los sujetos S1, S3, S4, S6, S7, S8 y S9 plantean errores y dificultades relativos a contenidos procedimentales, como algoritmos o dividir en partes. Por otro lado, en las respuestas de los sujetos S2, S5 y S7, se observan dificultades en relación a contenidos conceptuales. En relación a las representaciones, sólo un sujeto (S7) menciona dificultades en la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones. Por último, en la categoría sentido, cuatro de los participantes incluyen contextos de división (S1, S3, S5 y S6) y reparto (S1) en sus respuestas.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha sido elucidar aspectos básicos del conocimiento didáctico relativo al significado y al aprendizaje de las fracciones mediante la relación parte-todo de los profesores en formación. Particularmente, hemos destacado el diseño de tareas, el enunciado de expectativas de aprendizaje y la identificación de las limitaciones para entender el concepto de fracción, debido a su papel fundamental en la planificación de la enseñanza (Lupiáñez, 2009). En ambos casos hemos obtenido información sobre el conocimiento didáctico de los participantes que se muestra relevante.

Como balance de los resultados obtenidos, sobre diseño de tareas, destacamos que los participantes proponen en todos los casos enunciados de problemas cuando se pide plantear de manera espontánea una tarea sobre fracciones. Sin embargo, en algunos casos su apego a los números naturales, hizo que planteasen problemas de estructura aditiva.

Otro de los aspectos estudiados, el diseño de expectativas de aprendizaje, muestras respuestas acertadas, ya que la mayoría de los sujetos son capaces de enunciar objetivos específicos al tema. Estas expectativas hacen referencia a contenidos procedimentales y conceptuales, y a aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y la utilidad de las fracciones. Consideramos así que esas capacidades, están desarrolladas por este grupo de profesores en formación inicial. Al respecto subrayamos que en su segundo curso de formación universitaria los estudiantes habían cursado una asignatura de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en que se trataron estos aspectos.

En otra perspectiva, se encuentra el estudio de las limitaciones de aprendizaje. Los sujetos ejemplificaron de manera natural tareas adecuadas para el aprendizaje de las fracciones redactadas en forma de problemas; aún así tuvieron dificultades para enunciar posibles errores en que pudieran incurrir los escolares en tales tareas y en vincular justificadamente los errores a dificultades que pudieran originarlos. De los 11 sujetos, sólo 5 plantearon errores, principalmente recurren a errores técnicos referidos a fallos en los algoritmos en la suma y resta de fracciones. En consecuencia, los sujetos no desarrollaron este conocimiento durante su formación.

Los planes de formación inicial de los maestros incluyen asignaturas de carácter general y específico, donde los sujetos trabajan contenidos didácticos ligados a la elaboración de unidades didácticas, como es el caso de objetivos de aprendizaje. Sin embargo, otros contenidos igualmente relevantes para la práctica, como el diseño de tareas o la detección de errores y dificultades son relegadas a un segundo plano. Atendiendo a los resultados, parece pertinente que los responsables de elaborar los programas para la formación de maestros tengan en cuenta incentivar esos contenidos didácticos durante la formación de los futuros profesores.

Finalmente, destacamos que las categorías del análisis didáctico propuestas han mostrado su utilidad para identificar, caracterizar y delimitar el conocimiento didáctico de los profesores en formación sobre el aprendizaje escolar de las fracciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con apoyo del proyecto de investigación «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I y se ha llevado a cabo en el Grupo “FQM-193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Referencias

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.

- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Kluwer Academic.
- Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 129-146.
- Cramer, K. y Lesh, R. (1988). Rational number knowledge of pre-service elementary education teachers. En M. Behr (Ed.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 425-431). DeKalb, Il.: PME.
- D'Ambrosio, B. S. y Mendonca-Campos, T. N. (1992). Pre-service teachers' representations of children's understanding of mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 213- 230.
- Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Vol. 21, num. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM.
- Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Kieren, T. E. (1993, January). *The Learning of Fractions: Maturing in a Fraction. Paper presented at the Conference Fraction Learning and Instruction*, University of Georgia.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2012), TEDS-M. *Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español*. Madrid (España): Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Loughran, J. y Hamilton, M. L. (2016). *International handbook of teacher education*. Washington DC: Springer.
- Lupiañez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16- 32.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, número 33, pp. 11-27.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En: L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, pp. 85-101. Madrid (España): Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En: L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, pp. 139-151. Madrid (España): Pirámide.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Steffe, L. P. y Olive, J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. En G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME* (pp. 59-66). Mexico: CONACYT.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing preservice teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25