EL DOBLADO DE PAPEL EN LA COMPRENSIÓN DE ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO

ZÚLIMAN SORAYA CANO DÁVILA

MERY ESTER FLÓREZ PÉREZ

ANDRÉS HARVEY ZAPATA GRANADOS

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2017

EL DOBLADO DE PAPEL EN LA COMPRENSIÓN DE ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO

Trabajo para optar por el título de Magister en Educación Matemática

ZÚLIMAN SORAYA CANO DÁVILA

MERY ESTER FLÓREZ PÉREZ

ANDRÉS HARVEY ZAPATA GRANADOS

Asesora:

Doctora ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2017

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Resumen

Al inicio de este trabajo de investigación se abordan algunos antecedentes desde la comprensión en educación matemática, desde el marco teórico enseñanza para la comprensión, estudios desde el objeto de estudio, los aspectos conceptuales, legales y desde el doblado de papel. Dentro del paradigma cualitativo y el método de estudio de casos, mediante observaciones, entrevistas y registros de estudiantes se analiza la información obtenida, teniendo en cuenta unas dimensiones y categorías distribuidas en una rúbrica. Dicho trabajo se realiza desde el marco teórico Enseñanza para la Comprensión (EpC) con el propósito de analizar cómo comprenden los estudiantes de grado octavo algunas características de los triángulos utilizando como herramienta el doblado de papel. Consta de dos actividades distribuidas así: la primera es una actividad diagnóstica para indagar qué conocen los estudiantes sobre algunas características de los triángulos, la segunda es una actividad que consiste en el desarrollo de una guía de enseñanza, la cual consta de una fase de exploración, una fase de investigación guiada y un proyecto final de síntesis, diseñados a la luz del marco teórico empleado. De esta manera se logra dar un aporte a la enseñanza de algunos conceptos de la geometría, en particular de los triángulos, que conllevan a facilitar su comprensión mediante el doblado de papel y en esta medida por medio del diseño y aplicación de una rúbrica se pueda determinar cómo comprenden los estudiantes.

PALABRAS CLAVES: Enseñanza para la comprensión, doblado de papel, clasificación de triángulos, mediana, mediatriz, bisectriz y altura.

Capítulo 1

Problema de investigación

Justificación

Desde épocas muy antiguas, la geometría ha hecho parte de la vida del ser humano; de hecho, los babilonios y los egipcios, en siglos anteriores a la era cristiana, ya la utilizaban para la resolución de problemas y en manifestaciones artísticas (Kline, 1972); de acuerdo con el MEN (2004),

> […] con los griegos y por motivos históricos y culturales la geometría dejó su carácter empírico y el objetivo primordial de resolver necesidades prácticas dio paso a la constitución de una disciplina científica, al abarcar procesos de racionalización abstractos y globales. (p. 5)

De este modo, la geometría empezó a considerarse como una ciencia formativa que ayuda a demostrar las representaciones mentales que el ser humano se hace de todo lo que lo rodea. Dicho esto, se puede argumentar que el aprendizaje de la geometría permite construir habilidades por medio de las cuales es posible resolver situaciones problemas, a la luz de la validación y comprobación de las afirmaciones que se pongan a prueba, apuntando hacia la comprensión de los objetos del mundo en donde se presentan diversas formas geométricas; al respecto, Jones (2002, citado por Gamboa, 2009) señala que la geometría contribuye con “el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración” (p. 126). Por otro lado, Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004, citados por Gamboa y Ballestero, 2010) afirman que:

> […] el desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas; situación que puede utilizarse para justificar un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría, la cual, a diferencia de la percepción disjunta que concibe su evolución de forma enajenada de la dinámica social, se oriente a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano, así como a incentivar en los estudiantes y las estudiantes el desarrollo de ciertas habilidades, entre ellas, razonamiento y justificación. (p. 126)

Pese a dicha construcción de miles de años, la realidad educativa muestra que, en la actualidad, la enseñanza de la geometría ha estado reducida a tareas simples; una de estas, es el registro de características de algunos objetos, como hallar áreas y volúmenes o medir perímetros, de manera mecánica, utilizando fórmulas; estas acciones pueden propiciar una visión simplificada de la geometría, limitándola solo a un componente métrico; también se evidencia que ha estado supeditada al estudio de figuras geométricas, mediante representaciones visuales, su denominación o su definición. Por este motivo, es claro que dicha enseñanza es superflua y limitante, apuntando, por lo general, al estudio simple de sus raíces y características, como un producto acabado de la actividad matemática. Algunos autores como Abrate, Delgado y Pochulu (2006) señalan que los docentes han ido desplazando la enseñanza de los contenidos relativos a la geometría a las últimas unidades de su planificación escolar, llegando incluso a prescindir de ella.

Por tal motivo, es importante reflexionar sobre las razones de enseñar y aprender geometría, como un primer paso para garantizar a nuestros estudiantes una comprensión total de los conceptos y procedimientos geométricos. Una de tales razones obedece al hecho de validar que el entorno inmediato que nos rodea está enmarcado dentro de diversas relaciones geométricas; por ejemplo, el aula de clase es probable que tenga forma de prisma rectangular, las paredes son perpendiculares al piso, las paredes opuestas son paralelas, la intersección de dos paredes no paralelas es una arista, las baldosas tienen forma de cuadrado, el tablero tiene forma de rectángulo, el palo de la escoba representa un cilindro, entre otras. Otra razón fundamental podría estar relacionada con el nivel que se alcanza para visualizar, formular, conjeturar, validar y abstraer. De modo que, al resaltar estas razones en el aula, encaminemos nuestra enseñanza hacia el reconocimiento, en primera instancia, de que la geometría no es solo manipular fórmulas para obtener un resultado numérico, sino que es una continua interpelación e interpretación de los objetos geométricos presentes en el universo.

Desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se plantea que:

> En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. (p. 62)

Adicionalmente, se define el pensamiento espacial como "[…] el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 1998. p. 56).

De acuerdo con lo anterior, la enseñanza de la geometría implica accionar sobre objetos reales de los cuales se abstraen ideas y se validan bajo formulaciones que ya han sido consideradas como verdades ineludibles, de manera que los estudiantes se hagan sus propias representaciones mediante lo que observan y, a partir de allí, puedan inferir los significados propios de los elementos que emergen dentro de la geometría; a su vez, que puedan entrever la ciencia que se manifiesta bajo las representaciones mentales que el ser humano se ha hecho de los objetos que le circundan.

Vemos pues que la enseñanza de la geometría no debe estar focalizada a la mera solución de problemas que implique el uso de fórmulas, sino que debe encaminarse a la construcción de habilidades que le permitan al estudiante verificar hipótesis, analizar características de objetos y, con base en ello, comprender el significado de cada uno de los conceptos que están presentes dentro de su constructo teórico, como bien se describe en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998):

> Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. (p. 43)

Por otro lado, nuestra experiencia docente, lograda a través de la observación directa, las prácticas en el aula y el diálogo constante con otros docentes del área, nos permite entrever que la enseñanza de la geometría ha estado supeditada a la tarea de utilizar fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes, y de revisar las características de los objetos que circundan el mundo, de manera superficial, sin lograr un verdadero aprendizaje; esta situación la hemos podido evidenciar en las diferentes pruebas que se han llevado a cabo durante el periodo escolar, en las que se ha percibido que los estudiantes no reconocen los conceptos asociados a las figuras planas, especialmente a los polígonos y, en particular, a los triángulos.

Así mismo, somos y hemos sido conscientes de que la regla y el compás son los instrumentos, desde la antigüedad griega, más usuales para la construcción de figuras planas y el reconocimiento de sus elementos; específicamente, en nuestras instituciones educativas, se han enseñado las construcciones de las líneas notables de un triángulo: alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, mediante el uso de estos instrumentos; esto nos permite inferir que los estudiantes, al estar poco familiarizados con el uso de estos, realizan construcciones no bien elaboradas, de las cuales poco se puede inferir sobre las cualidades de dichos objetos; en la siguiente imagen se puede observar la construcción de la mediatriz de un segmento AB, dado, hecha por un estudiante del grado octavo; en esta es notoria la falta de habilidad para la manipulación de los instrumentos, de modo que al terminar dicha construcción, posiblemente, el estudiante fracase en la descripción de sus características.

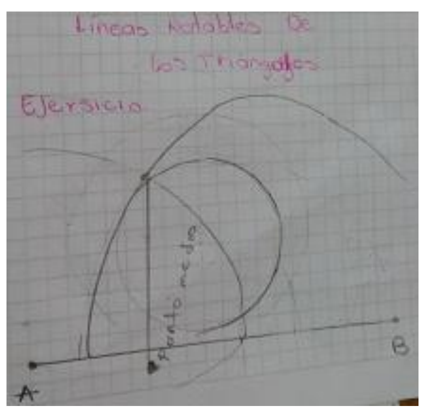


Figura 1. Mediatriz construida con regla y compás por un estudiante del grado octavo.

Un método alternativo que podría propiciar la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos, de manera fácil y amena, es el doblado de papel, que tiene su origen en la cultura japonesa; con este medio es posible hacer construcciones tan precisas como las logradas con regla y compás (Santa y Jaramillo, 2010). De hecho, estos autores afirman que:

> El doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino

Siguiendo todo este entramado teórico que subyace en la construcción de la geometría y, teniendo en cuenta que el uso de la regla y el compás, como herramientas usuales en la construcción y posterior análisis de las características de los triángulos, no ha alcanzado la meta esperada, el presente trabajo de investigación tiene como eje central guiar a los estudiantes del grado octavo de la básica secundaria de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, hacia la comprensión de las características de los triángulos, usando como herramienta metodológica el doblado de papel, pues esta permite la verificación de las propiedades que se encuentran implícitas en los triángulos y, a partir de allí, realizar conjeturas que puedan ser verificables, de modo que, a través de la manipulación de los objetos y la observación directa, puedan evocar comprensivamente su significado y su uso en el contexto en el cual se desenvuelven.

Para ello, es importante aclarar que, inicialmente, se realizó una actividad diagnóstica preliminar cuyo propósito fue identificar los conocimientos previos de los estudiantes para reconocer sus habilidades, fortalezas y debilidades, frente al tema en cuestión y, con base en sus resultados, iniciar el proceso de enseñanza; al respecto, Morales (2009) señala:

> […] en el ámbito educativo, debe tenerse en cuenta que, si los alumnos tienen procesos individuales y esquemas de pensamiento previos, los docentes deben promover ambientes

de aprendizaje donde las actividades de exploración, reto y descubrimiento para el alumno sean más importantes que la enseñanza en sí. De esta manera, el estudiante se convierte en el protagonista del aprendizaje y no el docente. (p. 211-222)

Planteamiento del problema

Para identificar el problema de investigación del que se ocupará este estudio, es necesario indagar por una serie de aspectos prácticos, metodológicos y teóricos, que sustenten las dificultades que se presentan en los estudiantes del grado octavo, para comprender los conceptos asociados con los triángulos, tales como: clasificación según la medida de sus ángulos y según la medida de sus lados, líneas y puntos notables, entre otros.

Aspecto práctico.

Uno de los factores que permite determinar el fracaso escolar en el área de geometría es la Prueba Saber, la cual es un instrumento que evalúa tres competencias (comunicar, razonar y solucionar problemas) que los estudiantes deben demostrar en tres contextos del conocimiento matemático específico: uno relacionado con los números, las operaciones y transformaciones de estos; otro asociado a los problemas propios de la geometría y de la medición y, finalmente, uno relacionado con los fundamentos de la estadística (MEN, 1998).

Hemos observado, a través de nuestra práctica docente, que algunos estudiantes de la institución educativa Tomás Eastman, están ubicados en un nivel insuficiente o mínimo, en lo referente a las pruebas Saber del año 2016. Esto es, el 21% se encuentra en el nivel insuficiente y el 58% se encuentra en el nivel mínimo; es decir, más del 50% de los estudiantes, presentan niveles bajos en las Pruebas Saber (ver figura 2);por lo tanto, de acuerdo con el ICFES (2016), se les dificulta comprender los enunciados y solo responden lo que está explícito en estos; no clasifican correctamente las figuras planas y tridimensionales de acuerdo con sus propiedades y se les dificulta la aplicación de fórmulas y algoritmos para justificar algunos procedimientos en el cálculo de áreas y volúmenes.

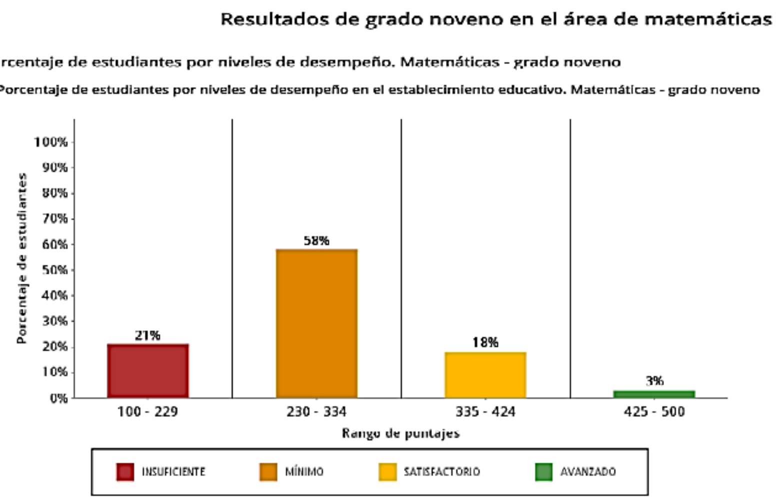


Figura 2. Distribución de los estudiantes de grado 9° según su nivel de desempeño I.E Tomás Eastman. Fuente: Guía de interpretación y uso de resultados de las pruebas saber 3°, 5° y 9°.[1]

Por otro lado, se diseñó una prueba diagnóstica con los siguientes aspectos:

Primera parte: preguntas de completación, relativas a los polígonos en general. En esta primera parte, se puede observar que los estudiantes del grado octavo no tienen claridad acerca de la diferencia entre un cuerpo geométrico y una figura plana, de modo que se les dificulta tener una noción clara del concepto de polígono, aunque enuncien con claridad ejemplos que hacen alusión a estas figuras; además, se observa que no logran nombrar un polígono según su número de lados, de la misma manera que definir cuándo se trata de un polígono cóncavo o convexo, y la implicación que tiene ser equilátero y equiángulo (ver figura 3).

[1] Tomado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

1. Complete las siguientes ideas:
   a. Un polígono es: cada figura geometrica por ejemplo un balon de fotbol es un poligono, Dependiendo la figura, 3 lados triangolo
   b. Los polígonos se nombran de acuerdo con su número de lados; de esta manera, si tiene tres lados se llama: triangulos; si tiene cuatro lados, se llama: cuadrado, rectangulo; si tiene cinco lados, se llama: pentanogo; si tiene seis lados, se llama: Nexagon O; y así, sucesivamente.
   c. Un polígono es convexo si: tiene dos lados
   d. Un polígono es cóncavo si: tiene
   e. Un polígono es equilátero si: tiene
   f. Un polígono es equiángulo si: tienes sus lados iguales
   g. Un polígono es regular si: tiene
   h. Un polígono es irregular si: tiene

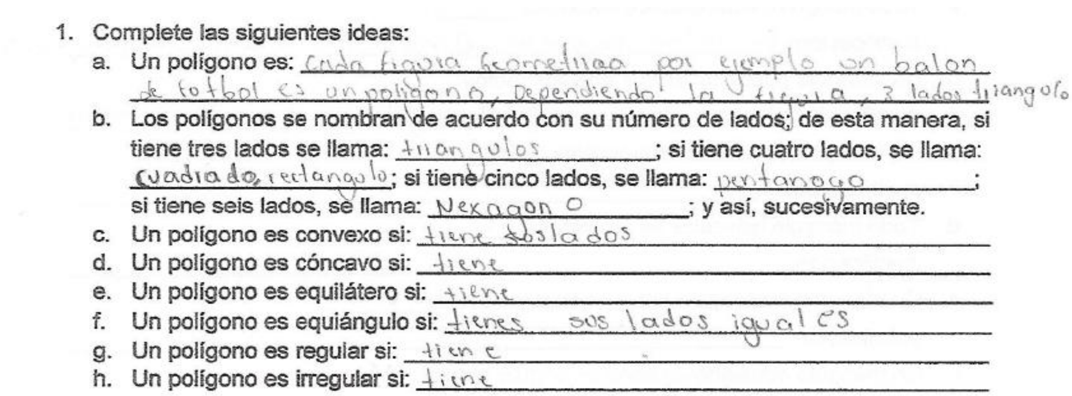
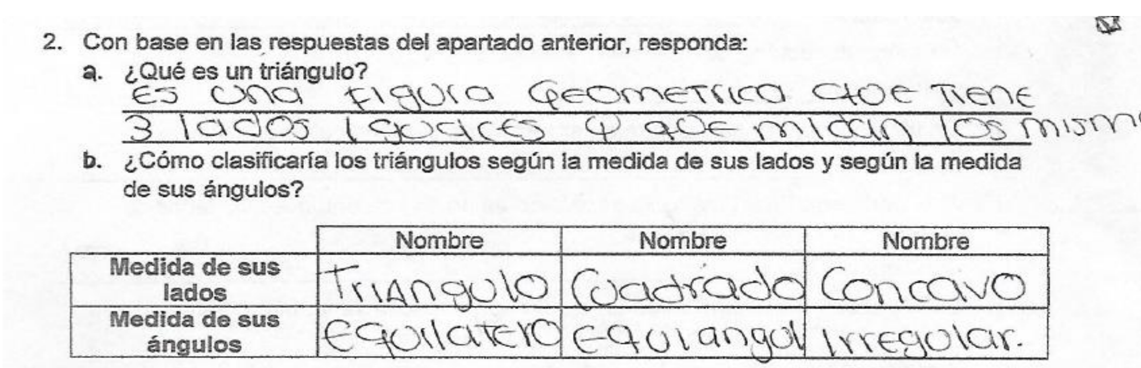


Figura 3. Actividad diagnóstica de un estudiante del grado 8° I.E Tomás Eastman.

Segunda parte: preguntas relacionadas con dos características de los triángulos: la medida de sus lados y la medida de sus ángulos, y a su representación gráfica. En esta segunda parte, se puede observar que los estudiantes del grado 8°, tienen una noción clara de lo que significa ser triángulo, a pesar de particularizarlo, tal y como se puede notar en la descripción que hace el estudiante, el cual escribe una característica de un triángulo en particular para construir su definición; sin embargo, es claro que, en general, a los estudiantes se les dificulta clasificarlos según la medida de sus lados y de sus ángulos, evidenciando, además, que no hacen una lectura acorde con su nivel de escolaridad (ver figura 4).



2. Con base en las respuestas del apartado anterior, responda:
   a. ¿Qué es un triángulo?
   ES UNA FIGURA GEOMETRICA QUE TIENE 3 lados IGUALES Y QUE MIDAN LOS MISMO
   b. ¿Cómo clasificaría los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos?

	Nombre	Nombre	Nombre
Medida de sus lados	TRIANGULO	Cuadrado	Concavo
Medida de sus ángulos	EQUILATERO	EQUIANGOL	Irregolar.

Figura 4. Actividad diagnóstica de un estudiante del grado 8° I.E Tomás Eastman.

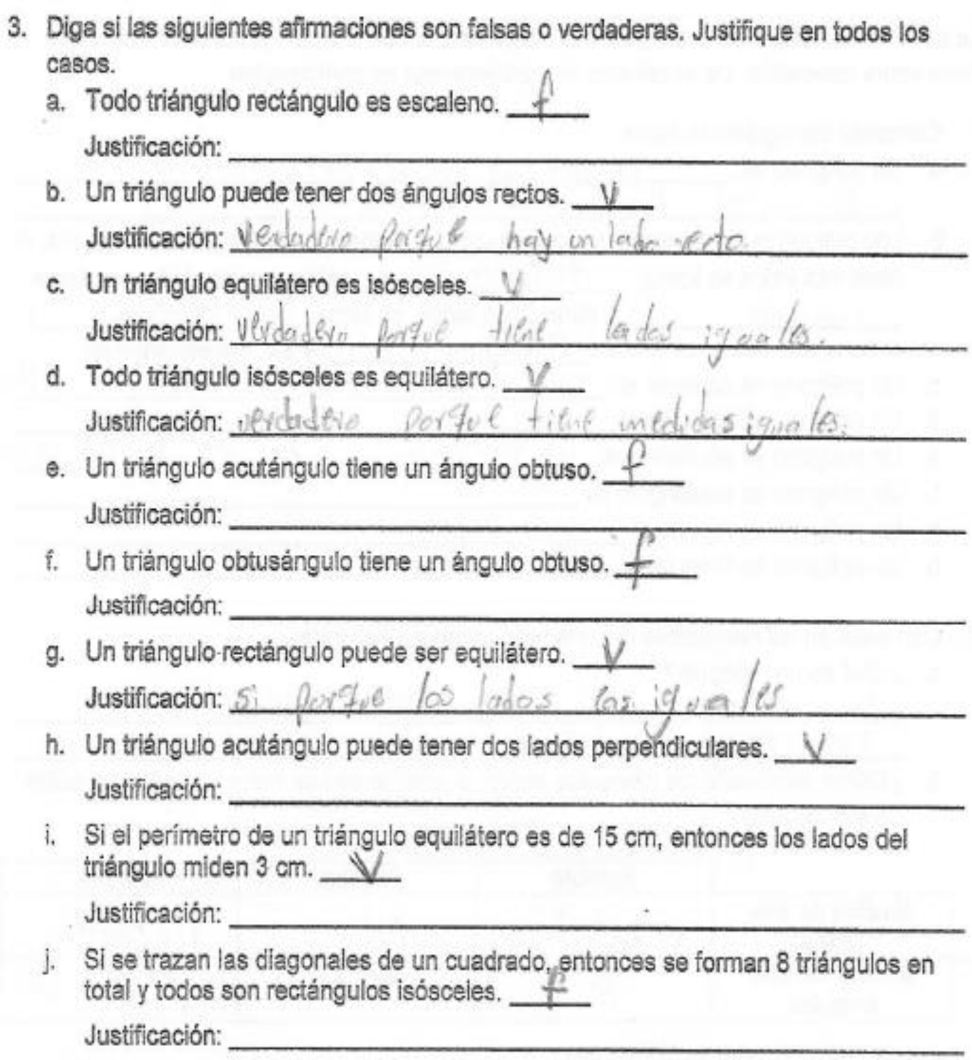
Es claro que, dadas sus dificultades para clasificar los triángulos según la medida de sus lados y la medida de sus ángulos, no han adquirido habilidad para realizar la respectiva representación gráfica y, aunque se note que representan gráficamente un triángulo, no pueden hacerlo según sus características (ver figura 5).

c. Dibuje los triángulos correspondientes a la clasificación según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.

	Representación gráfica	Representación gráfica	Representación gráfica
Medida de sus lados			
Medida de sus ángulos			

Figura 5. Actividad diagnóstica de un estudiante del grado 8° I.E Tomás Eastman.

Tercera parte: enunciados cuya finalidad es verificar su veracidad o falsedad y posterior justificación, todos relacionados con las características de los triángulos. Con respecto a esta tercera parte, se notó que los estudiantes presentan carencias para justificar adecuadamente la veracidad o falsedad de una afirmación, situación que prueba los problemas manifiestos para el reconocimiento de las características de los triángulos descritos anteriormente. (Ver figura 6).



3. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique en todos los casos.
   a. Todo triángulo rectángulo es escaleno. f
   Justificación:
   b. Un triángulo puede tener dos ángulos rectos. V
   Justificación: verdadero porque hay un lado recto.
   c. Un triángulo equilátero es isósceles. V
   Justificación: verdadero porque tiene lados iguales.
   d. Todo triángulo isósceles es equilátero. V
   Justificación: verdadero porque tiene medidas iguales.
   e. Un triángulo acutángulo tiene un ángulo obtuso. f
   Justificación:
   f. Un triángulo obtusángulo tiene un ángulo obtuso. f
   Justificación:
   g. Un triángulo rectángulo puede ser equilátero. V
   Justificación: si porque los lados los iguales
   h. Un triángulo acutángulo puede tener dos lados perpendiculares. V
   Justificación:
   i. Si el perímetro de un triángulo equilátero es de 15 cm, entonces los lados del triángulo miden 3 cm. V
   Justificación:
   j. Si se trazan las diagonales de un cuadrado, entonces se forman 8 triángulos en total y todos son rectángulos isósceles. f
   Justificación:

Figura 6. Actividad diagnóstica de un estudiante del grado 8° I.E Tomás Eastman

En relación al aspecto práctico, podemos determinar que al analizar los resultados de la prueba diagnóstica desarrollada por los estudiantes del grado 8°, se observa que, en lo concerniente a los conceptos y generalidades de los polígonos, los estudiantes manifiestan falta de apropiación y comprensión de estos. En cuanto a las características de los triángulos, un alto porcentaje de los estudiantes no las identifican, esto es, no los clasifican según la medida de sus lados ni tampoco la medida de sus ángulos; además, tienen dificultades para representarlos gráficamente teniendo en cuenta dichas características.

Otro aspecto relevante en la aplicación de la prueba diagnóstica, es el momento de la puesta en común de la misma, donde los estudiantes manifiestan que una posible causa de las dificultades que presentan, es el poco tiempo que se dedica en las clases de matemáticas a estudiar los contenidos de geometría; adicionalmente, muchos de los conceptos que se abordan en primaria, poco se profundizan en grados posteriores.

Aspectos teóricos y metodológicos.

El doblado de papel ha sido utilizado como medio para la comprensión o producción de conocimientos geométricos, uno de los artículos en los que se destaca su importancia para el acercamiento a la comprensión de objetos geométricos, es el desarrollado por Monsalve y Jaramillo (2003), quienes se centraron en las aplicaciones que se desprenden de la actividad de doblar papel y en algunos conceptos matemáticos como sucesión, límite, serie, convergencia y algunas nociones de la geometría euclidiana. Además, mediante la realización de una caja rectangular, se trabajan temas geométricos, algebraicos y de cálculo; sin embargo, aunque proponen estudios de figuras planas, no particularizan en las características de los triángulos como lo es el caso del presente trabajo.

Por otro lado, es importante mencionar que algunas investigaciones han intentado resolver el problema de la falta de comprensión en geometría, a través del uso de otros medios, como software de geometría dinámica. Por ejemplo, la tesis de Alemán (2012) pretendió mostrar el impacto que tiene en la enseñanza de la geometría y, en especial, de las características de los triángulos, el uso del software Cabri; de este modo, este autor afirma que es posible "favorecer la visualización, experimentación y descubrimiento de nuevas relaciones geométricas" (p. 4).

Así mismo, Etcheverry, Reid y Botta (2009) presentaron una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de las propiedades de los triángulos y sus líneas notables, a través del uso del software Cabri II Plus; con dicha propuesta pretendieron mostrar la pertinencia de una herramienta tecnológica, que permitiera centrar el interés de los estudiantes en la formulación de hipótesis y su posterior verificación a través de la observación directa.

Si bien, los problemas de investigación abordados por estos estudios se tornan similares al que hemos planteado, no resuelven el nuestro, debido a que el contexto sociocultural es diferente; de hecho, nuestra institución educativa carece de un aula virtual en la que se pueda disponer de un computador para cada estudiante o, si la hay, generalmente se encuentra ocupada con estudiantes pertenecientes a otros grupos u otras asignaturas; o, en el peor de los casos, es posible que no tenga ni siquiera computadores en buen estado. Con respecto a las condiciones socioeconómicas de las familias de nuestros estudiantes, estas se reportan desfavorables; en cuanto a la posesión de un computador personal por familia, se puede inferir que menos del 50% tienen un equipo de estos en sus casas.

Haciendo el rastreo de investigaciones realizadas sobre la comprensión de los triángulos, encontramos a Henao y Blanquicet (2014), quienes en su tesis de maestría abordan este tema apoyados en el modelo de Van Hiele; estos autores diseñan una guía didáctica como una herramienta que tiene la función de dar la ruta al estudiante para mejorar sus razonamientos mediante la realización de ciertas actividades intencionadas, favoreciendo así el progreso de los estudiantes; dichas actividades se desarrollan, además, con mediaciones tecnológicas como Geogebra. Aunque esta investigación se centra en el objeto de estudio que pretendemos estudiar y tiene un modelo definido hacia la comprensión, las actividades están diseñadas a partir de una guía didáctica pero la mediación implementada no es la que en nuestra investigamos se pretende utilizar; se ha analizado que el doblado de papel, en particular, es una actividad gratificante y una herramienta didáctica útil en el aula, como bien lo afirman Monsalve y Jaramillo (2003).

Cabe resaltar que los estudios mencionados aportan ideas teóricas o metodológicas a nuestro trabajo, pero no resuelven el problema presentado por nuestros estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, el cual se relaciona con la falta de comprensión de las características de los triángulos; se resalta que nuestro contexto sociocultural y las herramientas que hemos utilizado para la enseñanza de dichas características, se separan de los planteados en las diferentes investigaciones, dado que estos trabajos se han centrado en el estudio de las características de los triángulos por medio de software como Cabri y Geogebra y no hacen uso del doblado de papel, como medio para la comprensión de conceptos.

Dentro de este trabajo de investigación, se recurre al marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), como marco teórico de referencia, dado que es una estrategia que permite reconocer cómo comprenden los estudiantes; según Stone (2005), involucra a los estudiantes en desempeños de comprensión, de modo que , a partir de unos tópicos generativos, mediante los cuales se especifican los temas que serán objeto de estudio, unas metas de comprensión, que implican una motivación para el aprendizaje, unos desempeños de comprensión, que conllevan a que los estudiantes apliquen, amplíen y sinteticen su aprendizaje y una evaluación diagnóstica continua, con la cual se reconoce el avance que van desarrollando, se puede determinar dicha comprensión al identificarse determinándose un nivel, el cual va directamente relacionado con un desempeño; estos aspectos serán explicitados en el capítulo 2.

Pregunta de investigación.

La propuesta que se pretende desarrollar, tiene como eje problematizador el estudio de las características de los triángulos a través del doblado de papel, el cual hemos considerado útil, en la medida en que acerca a los estudiantes, de manera gradual, hacia la comprensión de conceptos geométricos; además, es una herramienta de fácil acceso en nuestras aulas de clase. Por lo tanto, con este estudio se pretende responder la siguiente pregunta: ¿cómo comprenden los estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, los conceptos relacionados con las características de los triángulos, cuando realizan construcciones con doblado de papel, desde el marco de la EpC?

Objetivos

Objetivo general.

Analizar cómo comprenden los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, los conceptos relacionados con algunas características de los triángulos, cuando realizan construcciones con doblado de papel, desde marco de la EpC.

Objetivos específicos.

- Describir el proceso de comprensión de los conceptos relacionados con algunas características de los triángulos, en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, cuando avanzan de un nivel a otro desde marco de la EpC.

– Utilizar el doblado de papel como medio para la comprensión de los conceptos relacionados con algunas características con los triángulos, en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara.

– Evaluar una guía de enseñanza con actividades que incorporen el doblado de papel como medio para la comprensión de algunos conceptos relacionados con los triángulos, en los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio Santa Bárbara.

Antecedentes

Dada la intencionalidad del estudio, se hace necesario realizar un rastreo de las teorías que se han desarrollado sobre la comprensión en Educación Matemática; así mismo, de los artículos o tesis que han abordado los triángulos y sus características generales como sus objetos de estudio; desde los aspectos legales se retoman algunas ideas de los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias. También, se resaltan algunas generalidades del doblado de papel, como estrategia didáctica para la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos.

Desde la comprensión en Educación Matemática.

Es necesario reconocer, inicialmente, el trabajo realizado por Blythe y Perkins (1998), donde presentan un análisis detallado acerca de la importancia de la comprensión como núcleo fundamental de la enseñanza, logrando establecer una comparación desde lo pedagógico y lo didáctico de lo que es saber algo y comprender algo; de ahí que la comprensión en un marco referencial como el de la Enseñanza para la Comprensión, se puede entender de la siguiente manera: “la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una manera nueva" (p. 39).

Por otro lado, también se resalta el trabajo de Van Hiele (1957), en el que se le da importancia a la comprensión en Educación Matemática, desde la geometría; este autor realiza algunos aportes en cuanto al proceso de comprensión en geometría, a través de cuatro momentos, los cuales se mencionan a continuación:

> 1. Primero se produce una estructuración del campo perceptivo. El caso de si esta estructuración es o no repentina no tiene mucha importancia puesto que ello no juega un papel determinante en el proceso de aprendizaje.
> 2. La estructuración del campo perceptivo va unida a distintas palabras.
> 3. El proceso mental acerca de las figuras se va desarrollando cada vez más en el terreno verbal, es decir, la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en estructuración lingüística.
> 4. Se crea cierta autonomía en la estructuración lingüística. Ciertas agrupaciones de premisas llevan automáticamente a determinadas conclusiones, o viceversa, la búsqueda de ciertas conclusiones lleva automáticamente a la búsqueda de ciertas premisas. (Van Hiele, 1957, p. 29)

Van Hiele (1957) manifiesta, además, que si se logran los tres primeros momentos, se puede decir que hay comprensión; si se alcanza el cuarto momento, se ha logrado una estructuración mayor, que sería equivalente a una comprensión mayor. Así mismo, de acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990), el modelo de Van Hiele se puede resumir en las siguientes cuatro ideas:

> (1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas; (2) un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de

> las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento; (3) si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela; (4) no se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible de esta forma. (p. 305)

Por lo tanto, el modelo de Van Hiele se enmarca en dos aspectos; uno descriptivo en el que se pueden identificar los tipos de razonamiento del estudiante logrados de manera secuencial, de modo que se puedan ubicar en un nivel de razonamiento y, de esta manera, visualizar el progreso en su comprensión. Otro descriptivo, mediante el cual los profesores puedan obtener criterios para ayudar a sus estudiantes a alcanzar los objetivos propuestos en cada uno de los niveles (Jaime y Gutiérrez, 1990).

El modelo de Van Hiele, como se ha mencionado antes, presenta unos niveles de desarrollo del pensamiento que Jaime y Gutiérrez (1990) categorizan así:

Nivel 1: De reconocimiento. Se puede decir que los estudiantes utilizan la percepción como objeto de aprendizaje, esto implica que no hay una capacidad de generalizar y se limitan a la descripción superficial; las clasificaciones que el estudiante realiza se basan en semejanzas y diferencias (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Nivel 2: De análisis. En este nivel se puede inferir que los estudiantes reconocen las particularidades de los objetos y también las propiedades de estos, para luego generalizarlas desde la experimentación, pero la dificultad es que las clasificaciones que realizan no son de manera lógica (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Nivel 3: De clasificación. Los estudiantes, en este nivel, pueden reconocer las características y las propiedades de los objetos, las cuales son más generales que otras; además, pueden describirlas formalmente, lo que significa que utilizan definiciones matemáticas, pero hace falta que realicen demostraciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Nivel 4: De deducción formal. Este es el nivel más alto y los estudiantes están en la capacidad de entender y realizar razonamientos, de comprender la estructura de los axiomas de las matemáticas y los teoremas, al igual que su utilidad (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Además de los niveles de razonamiento, Van Hiele (1957, citado por Jaime y Gutiérrez, 1990) propone cinco fases de aprendizaje:

1º Fase: Información. Esta fase tiene como objetivo que los estudiantes conozcan el trabajo que se pretende llevar a cabo y, a su vez, que el profesor identifique los conocimientos previos de los estudiantes participantes (Jaime y Gutiérrez, 1990).

2º Fase: Orientación dirigida. Durante esta fase, se pretende que los estudiantes adquieran habilidades para la comprensión de los conceptos relacionados a la parte de la geometría que se esté estudiando, de modo que puedan construir los elementos básicos vinculados al nuevo nivel (Jaime y Gutiérrez, 1990).

3º Fase: Explicitación. Esta fase implica la revisión de los resultados obtenidos en las fases anteriores, con el propósito de mejorar la forma de comunicarse (Jaime y Gutiérrez, 1990).

4º Fase: Orientación libre. Durante esta fase, los estudiantes aplican lo aprendido en otras investigaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990).

5º Fase: Integración. El desarrollo de esta fase implica la elaboración de las conclusiones relativas a lo aprendido en todo el proceso de comprensión (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Al igual que el Modelo de Van Hiele, el modelo de Pirie y Kieren (1991a) se basa en el crecimiento de la comprensión matemática; estos autores describieron esta última de la siguiente manera:

> La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (Pirie y Kieren, 1989, citados por Meel, 2003, p. 235)

De acuerdo con la definición anterior, Pirie y Kieren (1989) conceptualizan su modelo sobre el crecimiento de la comprensión matemática como poseedor de siete niveles potenciales que se muestran en la figura 11.

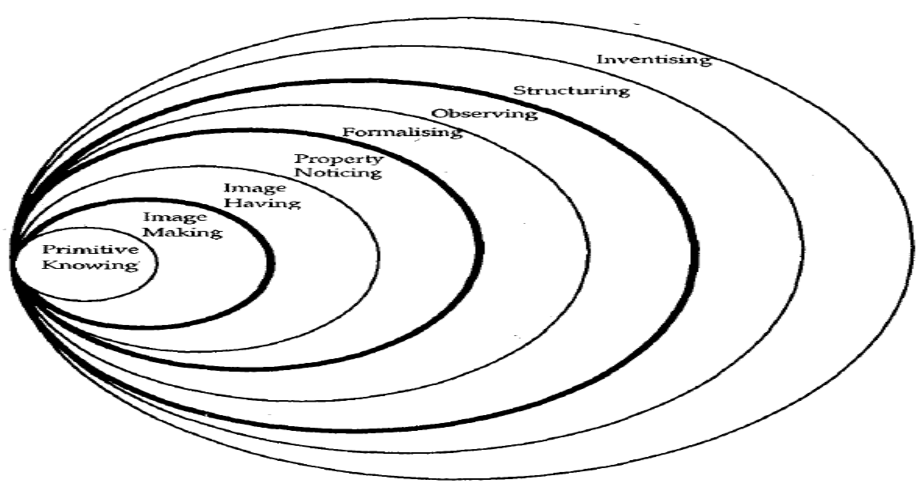


Figura 7. Una representación diagramática del modelo para el crecimiento de la comprensión matemática (Meel, 2003, p. 236)

El primer estrato es el de *conocimiento primitivo*; como su nombre lo dice, este estrato hace referencia a los conocimientos matemáticos que tiene el estudiante de manera empírica, es decir, adquiridos a través de sus experiencias (Meel, 2003).

En el segundo estrato llamado *creación de la imagen,* el estudiante se muestra con capacidad de realizar distinciones con base en conocimientos adquiridos con anterioridad, lo importante no es la imagen física sino el significado de la imagen mental (Meel, 2003).

En el tercer estrato llamado *comprensión de la imagen,* el estudiante asocia las imágenes creadas con su actividad cotidiana, generando así procesos mentales que implican su necesidad para realizar diferentes acciones, entre ellas las matemáticas (Pirie y Kieren, 1992b, citados por Meel, 2003).

El cuarto estrato que se conoce como *observación de la propiedad,* el análisis es la actividad principal de la comprensión, pues se puede hacer revisión de una imagen mental y luego determinar las propiedades y atributos del objeto de conocimiento que se relaciona a dicha imagen. (Meel, 2003). El quinto estrato de comprensión es llamado *formalización*; en este:

> […] el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona. (Pirie y Kieren, 1989, citado por Meel, 2003, p. 238)

En el sexto estrato de comprensión denominado la *observación,* el estudiante es capaz de estructurar y organizar diferentes procesos de pensamiento, también puede expresar de manera coherente las observaciones y resultados relacionados con los conceptos formales (Meel, 2003).

El séptimo estrato o anillo exterior del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión matemática se llama *invención (inventizing)*. En este estrato, la comprensión matemática del estudiante es superior, ya que posee un conocimiento estructurado y dominio de los conceptos matemáticos; el estudiante está en capacidad de ir más allá, de producir nuevo conocimiento (Meel, 2003).

Desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Se hace necesario anotar que el conocimiento, el desarrollo de habilidades y la comprensión, son elementos fundamentales para la Educación Matemática; incluso, cada uno de ellos se convierte en un ideal para el proceso docente educativo y, claro está, para el estudiante. En este panorama, el marco de la EpC emerge de los aportes realizados por un grupo de docentes de la Universidad de Harvard pertenecientes al proyecto Zero[2], y se centra específicamente en el concepto de comprensión. De acuerdo con Perkins (1999), la comprensión se define como: "[…] la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la ´capacidad de desempeño flexible'" (p. 70). Así mismo, Stone (1999) precisa que "cuando la comprensión se concibe como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas, las implicaciones para la pedagogía pueden parecer simples: enseñar para la comprensión involucra a los alumnos en desempeños de comprensión" (p. 95).

Se reconoce en la literatura que muchos trabajos de investigación han utilizado la EpC como su marco referencial, debido a que este ofrece elementos importantes para el análisis, el

[2] El Proyecto Zero surgió en la época de los 60´s; este fue dirigido por David Perkins y Howard Gardner, en el cual se discutían temas relativos a las disciplinas y a las artes (Gardner, 2013).

diseño, aplicación y posterior evaluación de las estrategias que apuntan a la comprensión del estudiante. También se encuentran trabajos que hacen referencia al doblado de papel desde la Enseñanza para la Comprensión; es importante resaltar que se han identificado algunos estudios con el mismo marco teórico, pero no hacen hincapié en la comprensión de las características de los triángulos, como veremos a continuación.

Marín (2015) orienta su proyecto desde los parámetros del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión; la finalidad del estudio era que los estudiantes abordaran el teorema de Pitágoras desde una perspectiva diferente a lo tradicional, que les permitiera mejorar sus niveles de comprensión. Por su parte, Castilla (2016), en su propuesta investigativa, analizó cómo los estudiantes comprenden la expresión matemática de la longitud de la circunferencia, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión; en su trabajo menciona, desde su experiencia como docente en dicha institución, que la metodología tradicional que algunos docentes usan para enseñar conceptos matemáticos, en especial geométricos, impide que el estudiante reflexione, piense, argumente, justifique, a partir de lo que sabe o aprende.

González (2014) realiza su trabajo de investigación con tres estudiantes del grado quinto (5º) de una institución educativa rural del municipio de Andes; en su estudio, hace hincapié en la comprensión que logran alcanzar estos frente a los conceptos de área y perímetro; así mismo, desarrolla una estrategia metodológica que le permita analizar la comprensión de dichos conceptos, mediante el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión.

En la particularidad de esta investigación, tanto los estudiantes como la institución objeto de estudio en el trabajo de campo, son de bajos recursos e implementos tecnológicos; esta es una de las tantas razones por las que se vio la necesidad de generar procesos de comprensión de las características básicas de los triángulos en los estudiantes del grado octavo, a través del doblado del papel. Sin embargo, cabe aclarar que no solo las construcciones con doblado de papel, en sí mismas, contribuyen con la comprensión de los conceptos, sino también que es necesario considerar la interacción con los compañeros y profesores, y los procesos de visualización, de experimentación y de justificación.

Estudios que se han desarrollado desde el objeto de estudio.

En el rastreo literario que hasta el momento se ha hecho, se encontraron diversos proyectos en los que se abordan las características de los triángulos. Uno de ellos lo desarrolló Alemán (2012), quien pretendió mostrar el impacto que tiene la enseñanza de la geometría y, en especial de las características de los triángulos (entre ellas, la clasificación de estos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos), a través del uso del software Cabri. La metodología que desarrolló siguió las directrices del paradigma cualitativo, a través de un estudio exploratorio; los estudiantes que hicieron parte de esta intervención pertenecían al grado octavo, del Centro de Educación Básica San Miguel de Heredia de Tegucigalpa.

Por otro lado, Etcheverry, Reid y Botta (2009) describieron una experiencia llevada a cabo con alumnos (entre los 13-15 años) de la EGB3 de la Unidad Educativa Nº6 “Prof. Julio Alejandro Colombato” de la ciudad de Santa Rosa, provincia de La Pampa, y docentes formadores de profesores de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLP. Estos investigadores expusieron una propuesta para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos asociados a los triángulos, a través del uso del software Cabri II Plus.

Aspectos conceptuales.

En nuestro trabajo de investigación se pone en evidencia la inquietud que tenemos como investigadores, con respecto a la comprensión que deberían desarrollar los estudiantes en cuanto a las características básicas de los triángulos; es por ello que se hace necesario clarificar algunas definiciones relacionadas con los objetos de estudio. Por ejemplo, Clemens, O'Daffer y Cooney (1998) definen el triángulo como "la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales" (p. 17).

En cuanto a los conocimientos de los estudiantes en los primeros años escolares, se observa que estos definen los triángulos como figuras que tienen tres lados y que, dependiendo de la longitud de sus lados y ángulos, varía su nombre. Por lo anterior, también se aclaran, a continuación, algunos conceptos relevantes relacionados con las características de los triángulos:

Clemens et al. (1998) establece que un triángulo equilátero "es aquel cuyos lados son todos congruentes entre sí" (p. 33); así mismo, precisa que un triángulo isósceles es aquel que tiene "dos lados congruentes entre sí" (p. 33). Se aclara que dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud (Clemens et al., 1998); por su lado, Cortázar (1864) menciona que "el triángulo escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales" (p. 12).

Por otro lado, Cortázar (1864) menciona que:

> Si a dos rectas cualesquiera AB y CD corta otra recta EF, esta toma el nombre de secante o transversal. Los cuatro ángulos AGH, BGH, CHG y DHG se llaman ángulos internos, y los otros cuatro ángulos AGE, BGE, CHF y DHF se llaman externos. Los ángulos EGB y EHD, uno externo y otro interno, de un mismo lado de la secante, y que no son adyacentes, se llaman ángulos correspondientes. Por lo tanto son también ángulos correspondientes los AGE y CHE, los DHF y

BGF, los CHF y AGF. Los ángulos internos BGH y CHG de diferente lado de la secante, y no adyacentes, se llaman ángulos alternos. Según esto, son también ángulos alternos los AGH y DHG. Se llaman paralelas dos rectas que están en un mismo plano y que, por más que se prolonguen, no se encuentran". (p. 7)

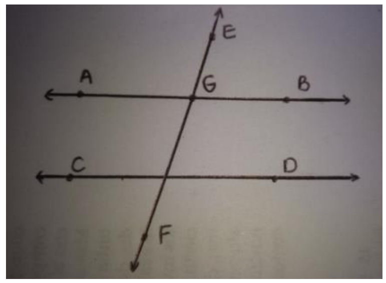


Figura 8. Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante. Imagen construida con las indicaciones dadas por el autor mencionado anteriormente.

Con respecto a las líneas notables, se encuentra que la **bisectriz** de un ángulo ABC es un rayo BD en el interior del ángulo ABC, de manera que el ángulo ABD sea congruente con DBC. (Clemens et al., 1998, p. 25). Cortázar (1864) menciona, a su vez, que la bisectriz de un ángulo es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales. (p. 14).

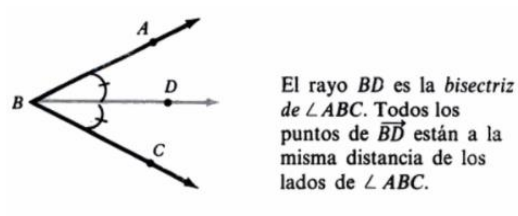


Figura 9. Bisectriz de un ángulo. Fuente: Clemens et al. (1998, p. 24).

Así mismo, la bisectriz de un segmento "es cualquier punto, segmento, rayo, recta o plano que contenga al punto medio del segmento" (Clemens et al., 1998, p. 24). En particular, se tomará como mediatriz, la recta perpendicular que contenga el punto medio del segmento.

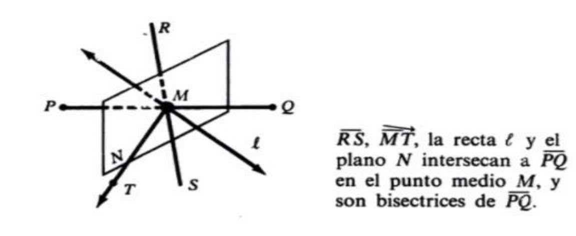


Figura 10. Bisectriz de un segmento. Fuente: Clemens et al. (1998, p. 24).

Por otro lado, Cortázar (1864) afirma que la "altura de un triángulo es la perpendicular bajada desde el vértice de uno de sus ángulos al lado opuesto, que entonces toma el nombre de base, o a su prolongación" (p. 13). "La mediana de un triángulo se entiende como el segmento que va del punto medio de un lado al vértice opuesto. Además, las medianas se unen en un punto llamado baricentro o centro de gravedad" (Reyes y Rodríguez, 2014, p. 549)

Los anteriores conceptos se enseñan, evidencian o verifican a medida que se construyen los módulos de las figuras mediante el doblado de papel; por lo tanto, los estudiantes analizan las relaciones y propiedades implícitas en las construcciones para lograr la comprensión de los conceptos relativos a los triángulos; el ideal es que ellos mismos sean artífices de ese conocimiento, en compañía y seguimiento del docente.

Aspectos legales.

Este proyecto no está aislado de los diferentes aspectos legales que enmarcan la educación en Colombia, que tienen como finalidad la enseñanza y el mejoramiento de la educación a través del aprendizaje de los estudiantes; por esta razón, a continuación, se hace referencia a la Ley General de Educación, a los Lineamientos Curriculares, a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y a los Derechos Básicos de Aprendizaje, los cuales le dan soporte a nuestro trabajo de investigación.

***Ley general de Educación*.** La importancia de la enseñanza de las matemáticas, especialmente de la geometría, se encuentra en los fines de la educación colombiana, enmarcados en la ley 115 de 1994, artículo 5: "la adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber" (Ley 115, 1994, p. 2). Así mismo, se enuncia como fin de la educación: "el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones" (Ley 115, 1994, p. 2).

Si analizamos lo anterior, podemos inferir que una de las finalidades que tiene la educación en Colombia es formar jóvenes íntegros, que puedan desarrollar diferentes habilidades tanto investigativas, científicas y artísticas; por medio de este proyecto, los estudiantes del grado octavo de las instituciones antes mencionadas, podrían desarrollar habilidades tanto artísticas como de análisis en el área de matemáticas, ya que al ir construyendo los módulos en papel, pueden ir evidenciando, analizando y comprendiendo las características de los triángulos.

Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Los objetivos, directrices y estrategias que los Lineamientos plantean, nos orientan en nuestro trabajo mediante el análisis de la geometría activa, la cual es una herramienta de exploración y representación del espacio. Este documento rector nos plantea la geometría como una herramienta que nos ayuda a interpretar, entender y considerar el mundo circundante; esta rama del saber se convierte en una fuente de modelación y desarrolla el pensamiento espacial y diversas formas de argumentación.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. El desarrollo del razonamiento lógico, tal como lo mencionan los Estándares, empieza en los primeros grados, en los que se fortalece con el contexto y los materiales físicos, ya que estos ayudan a entender que las matemáticas no son solo fórmulas, reglas o algoritmos, sino que al manipular material físico, se puede potenciar la capacidad de razonar, pensar y probar. En este sentido, el MEN (2003) define el pensamiento espacial como: "[…] el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p. 61).

Desde los Estándares, se espera que el estudiante realice diferentes representaciones espaciales y mentales, y tenga claridad frente a los conceptos y propiedades de los espacios físicos y del espacio geométrico. Además, que se apropie y analice las distintas relaciones entre los cuerpos sólidos o huecos, con respecto a sus formas, caras, bordes, vértices. Al estudiante podría observar los movimientos y transformaciones de los cuerpos; también le podría permitir evidenciar y comprender conceptos como volumen, área y perímetro, acercándolo más a los sistemas métricos o de medida y a las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del ciclo octavo-noveno que se relacionan con nuestro trabajo, son los siguientes:

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

- "Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas." (MEN, 2003, p. 86)
- "Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas." (MEN, 2003, p. 86)

- “Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)” (MEN, 2003, p. 86)
- “Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (MEN, 2003, p. 86)

Derechos Básicos de Aprendizaje. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2015) presenta los Derechos Básicos de Aprendizaje segunda versión (DBA), como una propuesta que pretende mostrar, de una manera estructurada, los conocimientos, habilidades y actitudes que todo niño colombiano debe adquirir en cada uno de los grados de su educación escolar, en las áreas de lenguaje, matemáticas, ciencias sociales y ciencias naturales.

Los DBA relativos al grado octavo que se relacionan con el objetivo general de este trabajo de investigación, son los siguientes:

> “Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico” (p. 60). Este DBA se relaciona con el trabajo de investigación porque los estudiantes participantes deben explicar en el proyecto final de síntesis conceptos cuyas características se visualizan en las construcciones de los módulos.
>
> Este DBA tiene las siguientes evidencias de aprendizaje:
>
> – Utiliza lenguaje algebraico para representar el volumen de un prisma en términos de sus aristas.
>
> – Realiza la representación gráfica del desarrollo plano de un prisma.
>
> – Estima, calcula y compara volúmenes a partir de las relaciones entre las aristas de un prisma o de otros sólidos.

– Interpreta las expresiones algebraicas que representan el volumen y el área cuando sus dimensiones varían. (p. 60)

"Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto" (p. 62). En el caso particular del trabajo de investigación, los estudiantes verifican propiedades implícitas de congruencia, en la medida en que deben clasificar los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, a través del doblado de papel.

Este DBA tiene las siguientes evidencias de aprendizaje:

– Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos.

– Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas.

– Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza.

– Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruente o semejantes entre sí.(p.62)

"Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales" (p. 62). Para el desarrollo de este DBA, los estudiantes visualizan las propiedades de las líneas notables en los dobleces que realizan para la construcción de los módulos propuestos.

Este DBA tiene las siguientes evidencias de aprendizaje:

– Describe teoremas y argumenta su validez a través de diferentes recursos (software, tangram, papel, entre otros).

– Argumenta la relación pitagórica por medio de construcción al utilizar material concreto. (p. 62)

Desde el doblado de papel

El doblado de papel, origami o papiroflexia como también es conocido, tiene sus inicios en Japón; una de las características de esta estrategia es que no se permite el corte con tijeras o pegar las figuras con algún material; el doblado de papel es un medio accesible para nuestros estudiantes, porque al manipular el papel y ser parte del proceso de construcción de figuras, comprenden los conceptos de manera más fácil y tangible.

El doblado de papel es una actividad que permite, a partir de su base inicial, la cual generalmente es un cuadrado y de sus dobleces, aprender, observar y obtener otras figuras geométricas; en particular, se pueden construir diferentes triángulos y a partir de allí, estudiar sus diferentes características: tipos de triángulos, ángulos, áreas, perímetro, entre otras. Por consiguiente, nuestro trabajo de investigación propende por la realización de una serie de construcciones, las cuales están conformadas por un conjunto de módulos que luego se ensamblan para representar una figura geométrica.

Mediante el doblado de papel se pueden potenciar diferentes habilidades, tanto motrices como de agilidad en sus manos, atención, concentración, lateralidad, entre otras; también se pueden desarrollar habilidades académicas o conceptuales para comprender las características de los triángulos y algunos conceptos asociados como diagonal, vértice, ángulo, entre otros.

El trabajo realizado por Santa (2016), emerge del desarrollo de unas tareas de formación por parte de un colectivo de profesores en ejercicio, de una Institución Educativa de la ciudad de Medellín; estos profesores mostraron interés por dicha metodología pues les permitió la construcción y comprensión de conceptos geométricos haciendo uso del doblado de papel. Por lo tanto, esta autora concluyó las siguientes ideas:

El doblado de papel es un medio que posibilita la comprensión de algunos conceptos y procedimientos inmersos en la actividad de doblar, dado que propicia procesos de visualización, procesos de experimentación, generación y validación de conjeturas visuales, pruebas visuales, procesos de argumentación, entre otros; estos aspectos contribuyen con la producción de conocimiento geométrico del colectivo. (p. 166)

Las actividades diseñadas con doblado de papel deben estar dotadas de algún sentido para el colectivo, de tal manera que permitan la visualización de conceptos y propiedades geométricas, en la experimentación de las construcciones concretas. (pág. 167)

Definición y origen.

Tal como se mencionó anteriormente, el origami es un arte muy antiguo que surgió en Japón. De acuerdo con Royo (2002),

[…] el origen de la papiroflexia hemos de situarlo en Japón. La palabra japonesa para la papiroflexia es origami. Su escritura está compuesta por dos caracteres: En el primero, el radical de la izquierda deriva del dibujo de una mano, y significa doblar (ori). El segundo deriva del dibujo de la seda, y significa papel (kami). (p. 1)

Este autor precisa que el origami, en la antigüedad, era símbolo de riqueza pues solo los nobles o personas de la clase alta podían acceder al papel ya que tenía un alto costo (Royo, 2002). Además, era usado, comúnmente, para generar calma y paciencia en las personas que realizaban las figuras. Con respecto a los procesos educativos, el doblado de papel se ha convertido en una herramienta que posibilita la construcción de figuras de diferentes tamaños para estudiar, comprender o demostrar temas geométricos.

El doblado de papel u origami tiene diferentes nombres de acuerdo a sus construcciones (Royo, 2002); el origami modular es aquel que se construye mediante el ensamblaje de varios módulos que dan origen a unas figuras geométricas tridimensionales. El origami de acción se relaciona con las figuras movibles, en este caso las figuras de animales. Y el plegado en papel húmedo, el cual se usa para generar figuras de apariencia real y más fuerte. Por último, están las teselaciones que son las figuras que cubren totalmente una superficie y no se permite que queden espacios entre ellas.

Por otro lado, en el trabajo de Santa y Jaramillo (2010) se mencionan seis axiomas de la geometría del doblado del papel, que el ítalo – japonés Humiaki Huzita presentó en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología, los cuales tienen relación con los conceptos básicos de la geometría euclidiana, otros con problemas del cálculo diferencial o la geometría analítica. Estos autores también presentaron un séptimo axioma, que fue propuesto por el japonés Koshiro Hatori. De acuerdo con Santa y Jaramillo (2010) y teniendo en cuenta su traducción original, estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

Axioma 1. "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que pasa a través de ellos"

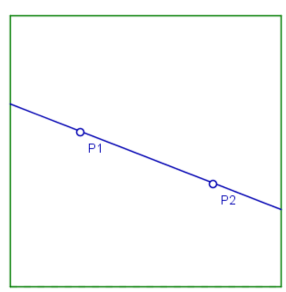


Figura 11. Doblez resultante de la aplicación del axioma 1 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 343).

Axioma 2. "Dados dos puntos P_1 y P_2, se puede hacer un doblez que lleva a P_1 sobre P_2"

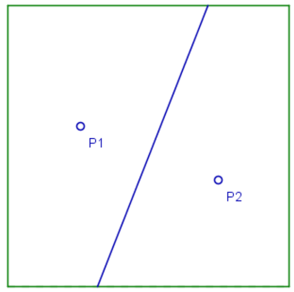


Figura 12. Doblez resultante de la aplicación del axioma 2 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 344).

Axioma 3. "Dadas dos líneas L_1 y L_2, se puede hacer un doblez que pone a L_1 sobre L_2"

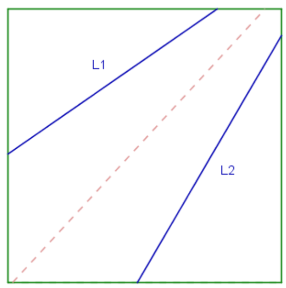


Figura 13. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 3 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 345).

Axioma 4. "Dado un punto P_1 y una línea L_1, se puede hacer un doblez que pone a L_1 sobre sí misma y pasa por P_1"

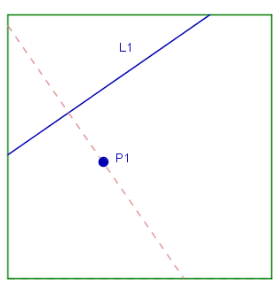


Figura 14. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 4 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 345).

Axioma 5. “Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea L_1, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre L_1 y pasa por P_2”

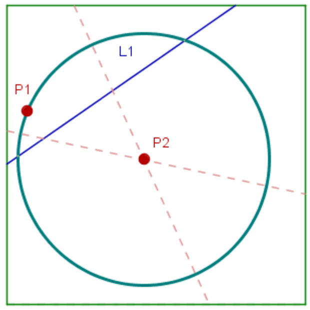


Figura 15. Dobleces (punteados) resultantes de la aplicación del axioma 5 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 346)

Axioma 6. “Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas L_1 y L_2, se puede hacer un doblez que pone a P_1 sobre L_1 y a P_2 sobre L_2”

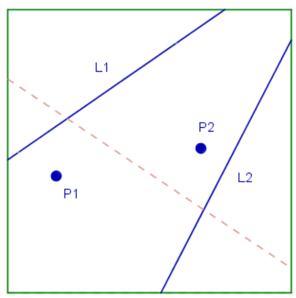


Figura 16. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 6 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 349)

Axioma 7. “Dados un punto P_1 y dos líneas L_1 y L_2, se puede hacer un doblez perpendicular a L_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea L_1”

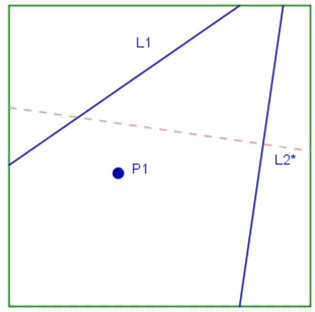


Figura 17. Doblez (punteado) resultante de la aplicación del axioma 7 (Santa y Jaramillo, 2010, p. 350)

Estos axiomas se abordan en este trabajo de investigación para garantizar la veracidad de las características de los dobleces que realizan los estudiantes y a partir de estos poder enunciar las definiciones de algunos conceptos matemáticos que serán objeto de estudio.

Capítulo 2

Marco teórico

A continuación, presentamos las directrices del marco teórico que fundamenta y orienta el proceso de investigación, el marco de la Enseñanza para la Comprensión; este es el más adecuado para abordar y guiar el estudio ya que permite analizar y describir el progreso de la comprensión a partir de la evaluación diagnóstica continua y del diseño de actividades contextuales en las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis.

Acerca de la comprensión

Los procesos docentes educativos permiten relacionar la comprensión con un proceso de creación mental donde, a partir de información recibida, se puede crear un significado que se puede transmitir de diferentes maneras. Es decir, comprender es un ejercicio complejo que implica una conexión entre la información que se recibe con la que se tiene para poder estructurar un significado o conocimiento formal.

Es así como la comprensión se convierte en una habilidad mental que adquiere el ser humano a través de la interacción constante, para explicar y entender situaciones y, luego, poder demostrarlas; así lo manifiesta Blythe y Perkins (1998) cuando menciona que "comprender implica ser capaz de realizar con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y volver a presentar el tópico de una nueva manera" (p. 39). Por su lado, Perkins (1999) advierte que la comprensión es poder llevar a cabo una serie de acciones que demuestren que se entiende un tema y que, al mismo tiempo, se es capaz de usarlo en otros contextos; es decir, es asimilar un conocimiento y saberlo utilizar de manera innovadora.

Reseña del marco de la Enseñanza para la Comprensión

El marco de la Enseñanza para la Comprensión, en adelante EpC, se gestó gracias al trabajo de un grupo de investigadores y profesionales de la Universidad de Harvard pertenecientes al proyecto Zero (Stone, 1999). Este proyecto inició en 1967 bajo la dirección de Howard Gardner y David Perkins y se centró en el diseño de investigaciones sobre la naturaleza de la inteligencia, la comprensión, el pensamiento, la creatividad, la ética, y otros aspectos esenciales del aprendizaje humano (Stone, 1999).

La EpC se consolidó en la década de los 90´s; durante varios años, educadores universitarios, docentes de primaria e investigadores, dedicaron tiempo, esfuerzos y experiencia para definir, identificar y encontrar los elementos que conforman este marco conceptual (Stone, 1999); también dirigieron proyectos y diseñaron unidades curriculares obteniendo logros significativos. Con la suma de todos estos esfuerzos, se consolida el marco de la Enseñanza para la Comprensión cuyo objetivo es diseñar y dirigir prácticas que promuevan la comprensión y reflexionar sobre ellas (Blythe y Perkins, 1998).

La Enseñanza para la Comprensión

La EpC es un enfoque constructivista que comparte con otros enfoques ideas con respecto a las construcción de los conceptos que internaliza quien aprende, pero su aporte singular consiste en conceptualizar los desempeños que permiten tal construcción (Pogré y Lombardi, 2004).

El marco de la EpC genera un campo de orientación para decisiones que giran en torno a tres preguntas planteadas: "(1) ¿qué es lo que realmente queremos que nuestros alumnos comprendan?, (2) ¿cómo sé que mis alumnos comprenden? y (3) ¿cómo saben ellos que comprenden?" (Pogré y Lombardi, 2004, p. 72); la intención de estos interrogantes es movilizar en los profesores la comprensión de la propia enseñanza.

Elementos de la comprensión

Desde el marco de la EpC se reconocen cuatro elementos fundamentales que crean una estructura de pensamiento acerca de la práctica de la enseñanza alrededor de propósitos educativos de gran importancia. Estos elementos son: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua.

Tópicos generativos.

Los tópicos generativos se refieren a los temas, cuestiones, conceptos o ideas que generan significados, nuevas conexiones o infinidad de perspectivas para apoyar el desarrollo de comprensiones profundas por parte del estudiante (Blythe y Perkins, 1998); en este sentido, los tópicos generativos son conceptos complejos y, para que sean generativos, deben desequilibrar concepciones, movilizar el pensamiento y relacionar otros conocimientos (Blythe y Perkins, 1998). Los tópicos generativos presentan las siguientes características (Stone, 1999):

Centrales para un dominio o disciplina. Esto significa que todo el contenido que se construye a partir de los tópicos generativos, debe involucrar a los estudiantes en el desarrollo de comprensiones para que el trabajo sea más adecuado en una disciplina determinada.

Accesibles e interesantes para los alumnos. Los tópicos generativos se deben vincular con las experiencias y necesidades de los estudiantes, lo que implica tener en cuenta su contexto y su edad, sin dejar a un lado sus propios intereses personales.

Interesantes para el docente. Esto significa que la forma como el docente enseña, la pasión y la inspiración proyectadas por este, sirven como referencia para que sus estudiantes exploren de manera intelectual con preguntas de final abierto, es decir, que requieran de argumentaciones claras y precisas.

Ricos en conexiones. Estos tópicos deben relacionarse con las experiencias previas de los estudiantes, tanto dentro como fuera del entorno escolar y permiten realizar exploraciones cada vez más profundas.

Metas de comprensión.

Como segundo elemento de la EpC, encontramos las metas de comprensión, las cuales son definidas por Blythe y Perkins (1998) como aquellos conceptos, procesos o habilidades que deben comprender los estudiantes, de acuerdo a un tópico determinado; en este sentido, "las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender" (Stone, 1999, p. 101). Estas se utilizan para especificar procesos o ideas que los estudiantes llegarán a comprender durante el desarrollo de las actividades que se realizan.

Algunas características que tienen las metas de comprensión (Stone, 1999) se describen a continuación:

Explícitas y públicas. Las metas de comprensión son más útiles si tienen esta característica, pues permiten que el profesor comparta dichas metas con sus estudiantes y demás actores del proceso formativo; de esta manera, se puede saber hacia dónde va la clase, cómo avanzar y centrar la atención para el logro de la comprensión.

Dispuestas en una estructura compleja. La organización de las metas de comprensión en una estructura determinada, ayuda a clarificar las conexiones que existen entre la práctica y los objetivos propuestos. Las metas generales deben estar vinculadas con las metas definidas para cierta unidad; esto es, las metas de comprensión más abarcadoras contienen implícitamente las metas de comprensión más específicas.

Centrales para la materia. Las metas de comprensión deben centrarse en las ideas, métodos y formas de indagación, de tal manera que tanto estudiantes como docentes las pongan como ejes fundamentales del trabajo; es decir, deben ser significativas y no se deben dejar como un proceso superficial de la planeación.

Desempeños de comprensión.

Los desempeños de comprensión tal vez sean el elemento más importante del marco conceptual de la EpC (Stone, 1999); esto se debe a que la comprensión, al ser concebida como un desempeño, se puede desarrollar y demostrar en muchos escenarios, lo que se ve reflejado en variadas situaciones de aprendizaje.

Un desempeño de comprensión siempre nos obliga a ir más allá. Estos son flexibles y exigen ser pensados, elegidos y nivelados por el profesor, a veces con la colaboración del estudiante, tanto para expresar la comprensión como para llevarla más lejos (Stone, 1999). Los desempeños de comprensión plantean tres categorías o fases (Stone, 1999) que son progresivas y que a continuación se describen:

Fase de exploración. Se refiere a los desempeños que se encaminan a una investigación inicial, es decir, a la apropiación de saberes previos; la fase de exploración también le ofrece al profesor información de lo que los estudiantes saben y de lo que están interesados en aprender; además, esta etapa permite comprometerlos para poner en práctica sus conocimientos o comprensiones anteriores.

En el desarrollo de la presente investigación, se realizó como actividad de exploración la lectura de un cuento de motivación para, posteriormente, desarrollar un pensagrama en el que se involucraron términos y conceptos relacionados con las características de los triángulos. La intención de esta actividad fue reconocer los conocimientos previos de los estudiantes y generar un ambiente propicio para el desarrollo de las demás actividades.

Fase de investigación guiada. Stone (1999) precisa que en esta fase se debe involucrar a los estudiantes en la utilización de ideas y modalidades de investigación que el docente considera centrales para la comprensión de metas identificadas; la investigación guiada orienta al estudiante hacia la comprensión de los tópicos generativos y hacia la relación entre los saberes previos y los conocimientos formales; en esta etapa, el profesor puede centrarse en habilidades como la observación, el registro, el uso de vocabulario y la capacidad de síntesis, alrededor de una pregunta específica.

En la particularidad de este estudio, la etapa de investigación guiada estuvo diseñada bajo tres actividades; la primera actividad consistió en la construcción de un módulo a través del doblado de papel donde, a medida que se iban realizando los dobleces, se hacían preguntas relacionadas con conceptos como polígonos, características de los polígonos, líneas notables, área, entre otros. En la segunda actividad se abordó la construcción de un módulo a partir de un triángulo equilátero mediante el cual el estudiante podía identificar las diferentes líneas (bisectriz, mediana, mediatriz y altura) y puntos (baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro) notables a través del doblado de papel. La tercera actividad consistió en la construcción de triángulos escalenos mediante el doblado de papel para, posteriormente, construir las líneas notables y establecer diferencias y semejanzas con las construidas en el triángulo equilátero.

Fase de proyecto final de síntesis. Esta fase tiene como propósito que los estudiantes demuestren con claridad el dominio que tienen sobre las metas de comprensión establecidas. Esto implica que deben realizar un trabajo independiente más fuerte que en la etapa anterior, que busque organizar las compresiones que han desarrollado a lo largo de la experiencia (unidad curricular o unidades curriculares).

En el estudio en cuestión, el proyecto final de síntesis de la unidad consistió en la preparación y presentación de una exposición final por parte de los estudiantes que participaron en la ejecución de este trabajo de investigación. En esta debían demostrar el progreso en su comprensión a lo largo de la aplicación de las diferentes actividades, a través de la realización de diversas figuras y dobleces, y de la explicación de las características de los triángulos al grupo al cual pertenecen.

Finalmente, con respecto a los desempeños de compresión, se puede decir que estos:

> Se vinculan directamente con las metas de comprensión; desarrollan y aplican la comprensión por medio de la práctica; utilizan múltiples estilos de aprendizaje y formas de expresión; promueven un compromiso reflexivo con tareas que entrañan un desafío y que son posibles de realizar; demuestran la comprensión. (Stone, 1999, p. 114)

Evaluación diagnóstica continua

La evaluación diagnóstica continua tiene una relación estrecha con las metas de comprensión debido a que esta refuerza a la vez que evalúa el aprendizaje, así se refiere Perkins (1999) cuando afirma que la evaluación diagnóstica continua "alude a la importante práctica de ofrecer a los alumnos una frecuente evaluación informativa en todo momento, no tanto con fines de calificación, sino para hacer avanzar su dominio de los desempeños que expresan su creciente comprensión" (p. 89).

La evaluación diagnóstica continua presenta los siguientes rasgos o características (Stone, 1999):

Criterios relevantes, explícitos y públicos. Los criterios de evaluación deben estar ligados con las metas de comprensión y articulados a los desempeños de comprensión; además, se pueden transformar a lo largo de la práctica; los criterios deben ser públicos para que los estudiantes tengan la oportunidad de aplicarlos y comprenderlos antes de que se evalúen sus desempeños.

Evaluaciones diagnósticas continuas. La evaluación se hace constantemente y de manera conjunta con las actividades específicas en cada desempeño de comprensión.

Múltiples fuentes. La evaluación no solamente se centra en la que hace el profesor, sino que también la misma evaluación que el estudiante se haga de sus propios desempeños y la que realizan sus compañeros, benefician el proceso de comprensión.

Estimar el avance y configurar la planificación. La evaluación diagnóstica continua le muestra al profesor los avances o retrocesos que tiene cada estudiante en el desempeño demostrado durante las actividades, para que pueda diseñar estrategias de mejora de los desempeños de los estudiantes.

En la siguiente figura se muestra un esquema donde se relacionan los cuatros elementos de la EpC:

Figura 18. Marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión (Blythe, 1998, p. 45)

Dimensiones de la comprensión

El marco de la EpC resalta cuatro dimensiones fundamentales de la comprensión que están íntimamente conectadas unas con otras; estas dimensiones permiten describir la comprensión y se han constituido como una herramienta poderosa, que le sirve de ayuda al profesor para articular lo que desea que los estudiantes comprendan (Boix y Gardner, 1999); estas dimensiones son las siguientes:

Dimensión de contenido.

La dimensión de contenido se relaciona con los conocimientos primitivos y comunes que adquiere el niño a través de la experiencia y de su propia imaginación; también hacen parte de esta, los conceptos o conocimientos que le ofrece el entorno inmediato como la familia, la cultura y la sociedad; dichos conocimientos entran en validación cuando la persona adquiere una estructura cognitiva organizada y formal (Boix y Gardner, 1999).

Esta dimensión evalúa el nivel hasta el cual los estudiantes han transformado saberes intuitivos o no escolarizados en conocimientos formales; es decir, pueden moverse con flexibilidad en una red conceptual coherente y rica en conexiones (Boix y Gardner, 1999).

La dimensión de contenido se fundamenta en dos criterios (Boix y Gardner, 1999): *creencias intuitivas transformadas* que consiste en demostrar que las teorías y conceptos han transformado las creencias intuitivas; *redes conceptuales coherentes y ricas*, referido a la capacidad de razonamiento que tienen los estudiantes dentro de las diferentes redes conceptuales organizadas y moviéndose entre detalles, ejemplos y generalizaciones.

Dimensión de método.

Esta dimensión permite evaluar la validez y uso del conocimiento, considerando el que ha sido aceptado por la comunidad académica. De acuerdo con Boix y Gardner (1999), la dimensión de método también posibilita evaluar la capacidad que tiene el estudiante para mantener un escepticismo claro frente a lo que conoce o a lo que se le dice. Esto teniendo en cuenta que los métodos que utilice sean confiables para validar trabajos e informaciones.

En la dimensión de métodos encontramos algunos criterios importantes (Boix y Gardner, 1999), los cuales se enuncian a continuación:

Sano escepticismo, construir conocimiento dentro del dominio, validan el conocimiento en el dominio. Todos estos criterios se focalizan en la capacidad que tienen los estudiantes para usar estrategias, procedimientos y técnicas en la construcción de conocimiento veraz; el sano escepticismo se materializa en la búsqueda de otras fuentes como libros de texto, opiniones o mensajes en los medios de comunicación, para tener la posibilidad de presentar argumentos racionales desde métodos sistemáticos.

Dimensión de propósito.

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), la dimensión de propósito “se basa en la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar en el mundo, además evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción de conocimiento […]” (p. 235); esta dimensión se asocia con la capacidad que tienen los estudiantes para: reconocer las intenciones que orientan el conocimiento y su construcción, utilizar dicho conocimiento en diferentes situaciones y las consecuencias de hacerlo, evidenciar el nivel de autonomía que muestran al utilizar lo que saben en nuevas situaciones.

La dimensión de propósito tiene las siguientes dos características (Boix y Gardner, 1999): *la conciencia de los propósitos del conocimiento*, enfocada en la capacidad que tiene el estudiante para discernir frente a las cuestiones esenciales, los propósitos e intereses que impulsan la indagación y, *múltiples usos del conocimiento*, referida a la capacidad que tiene el estudiante para usar de manera variada todo lo que aprende.

Dimensión de las formas de comunicación.

De acuerdo con Boix y Gardner (1999), la dimensión de formas de comunicación permite evaluar el uso de diferentes medios para explicar o demostrar lo que se ha comprendido, considerando los tópicos generativos y las metas de comprensión. El estudiante puede mostrar los progresos de su comprensión a partir de una exposición, un cuento, una obra de teatro, entre otros sistemas de representación. Esta dimensión presenta las siguientes características o criterios (Boix y Gardner, 1999):

Dominio de los géneros de realización, efectivo uso de sistemas de símbolos, consideración de la audiencia y el contexto. Estos criterios hacen alusión a la capacidad de los estudiantes para demostrar el dominio de habilidades propias de la comprensión como la escritura, el análisis de textos, la indagación, entre otras, y cómo, desde sus intereses y necesidades, pueden demostrar conciencia de las situaciones actuales que los rodean.

Con las dimensiones mencionadas anteriormente, en el estudio en cuestión se elaboró un instrumento en forma de rúbrica que nos posibilitó establecer una serie de descriptores de acuerdo con las características de cada dimensión para que, posteriormente, nos permitiera describir el avance en la comprensión de cada uno de los estudiantes del estudio de casos, con respecto a los conceptos relativos a los triángulos.

Niveles de comprensión

Como hemos visto antes, las dimensiones ilustran la naturaleza de la comprensión; como esta puede variar en cada dimensión, es necesario que se realice una distinción de desempeños débiles de otros más avanzados; a continuación, hablaremos de los cuatro niveles de comprensión de la EpC.

Nivel Ingenuo.

Los desempeños de comprensión ingenua están basados en el conocimiento intuitivo, es decir, el estudiante capta la información directamente del entorno donde se desenvuelve (Boix y Gardner, 1999). Una característica fundamental que se puede discernir de este nivel es que los estudiantes no logran ver la relación entre lo que se aprende en la escuela con su cotidiano; además, hay poca reflexión en cuanto a la forma en cómo se comunica el conocimiento a los otros.

Nivel Novato o principiante.

De acuerdo con Pogré (2012), en el nivel novato o principiante surgen algunas ideas o conceptos propios de la disciplina, pero las conexiones que se realizan son muy superficiales. La construcción del conocimiento se basa netamente en el uso de métodos mecánicos, que suelen seguir un paso a paso. Incluso, la autoridad externa (profesor o acudiente) es la encargada de validar estos conocimientos, pues los estudiantes aún no han desarrollado criterios propios para hacer dicha validación.

Nivel Aprendiz.

Este nivel de desempeño se caracteriza por los conocimientos y modos de pensar disciplinarios; la construcción del conocimiento ya sigue procesos y criterios establecidos; incluso, estos desempeños evidencian la relación entre el conocimiento disciplinar y la vida cotidiana del estudiante. (Boix y Gardner, 1999); la flexibilidad del conocimiento y las formas de expresión caracterizan a este nivel de comprensión.

Nivel de Maestría.

En este nivel, los estudiantes actúan con flexibilidad entre las diversas dimensiones, relacionando la teoría con la práctica (Boix y Gardner, 1999); pueden validar sus conocimientos y los pueden usar en diferentes contextos; así mismo, están en la capacidad de comunicarlo, usando diferentes representaciones. En el nivel de maestría, los conocimientos son expresados creativamente y se puede ver la integralidad de la teoría con la práctica; en este sentido, la capacidad crítica es uno de los logros u objetivos que alcanza el estudiante al llegar al nivel de maestría (Boix y Gardner, 1999).

Para finalizar, Boix y Gardner (1999) manifiestan que las dimensiones y los niveles, constituyen una herramienta conceptual y un marco para examinar la comprensión de los estudiantes y orientar su futuro trabajo. Por esta razón, en la presente investigación, después de realizado el trabajo de campo y de organizar la información recolectada, se analiza el proceso de comprensión de cada estudiante para ubicarlo en uno o más niveles de comprensión, de acuerdo a las dimensiones, considerando los desempeños mostrados durante la experiencia.

Capítulo 3

Marco Metodológico

Para el desarrollo de este proyecto de investigación, se hace fundamental describir el paradigma, el tipo de estudio y el proceso mediante el cual se obtiene la información, la cual se convierte en objeto de análisis; así mismo, se presenta la caracterización de los participantes y la descripción de cada una de las estrategias empleadas considerando el marco teórico de referencia.

Paradigma: enfoque cualitativo

Este trabajo de investigación se apoya en un enfoque de carácter cualitativo, en la medida en que pretende analizar la manera como los estudiantes comprenden los conceptos asociados a los triángulos a través del desarrollo de unas actividades de aprendizaje y a luz del marco teórico de Enseñanza para la Comprensión (EpC). Al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) describen el enfoque cualitativo de la siguiente manera: "[…] un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo "visible", lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos" (p. 10).

Este enfoque permite construir conclusiones que surgen al llevar a cabo un trabajo de campo, el cual ha sido diseñado metodológicamente para resolver un problema detectado por medio de la exploración y revisión de la literatura (Hernández et al., 2010); de acuerdo con esto, estos autores señalan que los estudios cualitativos podrían "desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección o el análisis de datos, con frecuencia, estas actividades sirven, primero, para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes , y después, para refinarlas y responderlas" (p. 7). Lo anterior se ve reflejado en este proyecto mediante la aplicación de la actividad diagnóstica referente a la caracterización de los triángulos pues esta permitió dilucidar algunos interrogantes que dieron origen al problema objeto de estudio.

Por otro lado, este trabajo de investigación se basa en el análisis de la información obtenida a partir del desarrollo de una guía de enseñanza, diseñada con miras a lograr que los estudiantes comprendan las características de los triángulos y, posteriormente, que estén preparados para comunicarlo a sus compañeros y profesores; además, las actividades de la guía se elaboran teniendo en cuenta la exploración sobre los conocimientos previos de los estudiantes realizada a través de una prueba diagnóstica; en este sentido, la ejecución de este proyecto toma herramientas del paradigma cualitativo de la investigación, pues este se basa "en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas)" (Hernández et al., 2010, p. 9). Con relación a ello, Londoño (2011) afirma que:

> El enfoque cualitativo se caracteriza por estar fundamentado en métodos de recolección de datos no estandarizados y en procedimientos que son analizados caso por caso y dato por dato, hasta llegar a una perspectiva más general, construyendo hipótesis que se van refinando conforme se recaban más datos. (p. 181)

A su vez, es importante anotar que la investigación cualitativa permite hacer cambios durante el proceso, es decir, "con frecuencia es necesario regresar a etapas previas" (Hernández et al., 2010, p. 8) y, para el caso de este proyecto, es pertinente regresar a la revisión de los descriptores que orientan el análisis de la información obtenida, de modo que haya una conexión entre los tópicos generativos propuestos en la guía y las subcategorías de las cuatro dimensiones empleadas desde el marco de la EpC.

Tipo de estudio: estudio de casos

Dado que el objetivo general del trabajo de investigación es analizar cómo comprenden los estudiantes las características de los triángulos, se elige como tipo de estudio el estudio de caso, pues este:

> […] es una estrategia metodológica de investigación científica, útil en la generación de resultados que posibilitan el fortalecimiento, crecimiento y desarrollo de las teorías existentes o el surgimiento de nuevos paradigmas científicos; por lo tanto, contribuye al desarrollo de un campo científico determinado. (Martínez, 2016, p. 189)

Por otro lado, la recolección de la información por medio de la observación, del desarrollo de una guía de enseñanza y, posteriormente, a través de una entrevista final, permite determinar que el estudio de casos sería una herramienta útil para lograr el objetivo general propuesto; en este sentido, Martínez (2016) precisa que es necesario utilizar diferentes instrumentos de información para recolectar los datos de la investigación. Por lo tanto, este tipo de estudio permite que haya una convalidación de los resultados obtenidos por medio de la comparación entre los métodos utilizados (Martínez, 2016), lo cual implica que se pueda determinar el nivel de comprensión de los estudiantes participantes con respecto a las características de los triángulos.

Métodos de recolección de la información

Con miras a alcanzar el objetivo general de la investigación a la luz del marco teórico de la EpC, la información se recolecta por medio de los siguientes métodos:

Observación.

La observación debe ser entendida como un hecho que difiere notablemente a la acción de ver; según Hernández et al. (2010), “no es mera contemplación (“sentarse a ver el mundo y tomar notas”); implica adentrarnos en profundidad a situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones” (p. 411). Por tal motivo, este instrumento permite que haya una constante reflexión en torno a los resultados que se vayan presentando durante el desarrollo de la guía de enseñanza; en este sentido, dicha reflexión permitirá constatar que a partir de los descriptores diseñados se pueda ubicar en un nivel determinado a cada uno de los estudiantes que participan en el proyecto. Al respecto, es importante anotar que, durante el desarrollo de la guía de enseñanza, el profesor tiene una participación activa, pues está presente en todas las actividades sin mezclarse totalmente con los estudiantes, es decir, su papel es de observador (Hernández et al., 2010).

Por otro lado, dentro del proceso de observación, se deben considerar las acciones individuales o colectivas del caso o de los casos, a través de las siguientes preguntas: “¿qué hacen los participantes?, ¿a qué se dedican?, ¿cuándo y cómo lo hacen?” (Hernández et al., 2010, p. 412); con base en ello, la observación de los investigadores se centra en el desarrollo de la guía de enseñanza, en la cual los estudiantes realizan actividades individuales o colectivas, de modo que pueden ir comparando con sus compañeros las respuestas asignadas a cada pregunta; se dedican a la elaboración de un módulo para, posteriormente, realizar inferencias y lograr la comprensión de las líneas notables de los triángulos; así mismo, se resalta que los estudiantes vivencian las actividades en un trabajo extraescolar y su participación es voluntaria.

Registros de los estudiantes

Los registros de los estudiantes se realizan a través del desarrollo de unas actividades de aprendizaje, que hacen parte de la guía de enseñanza, la cual se planea teniendo en cuenta el marco teórico que sustenta el proyecto, por lo que está conformada por una fase de exploración, una fase de investigación guiada y un proyecto final de síntesis. Estas actividades se describen en el capítulo cuatro.

El diseño de esta guía es un proceso paulatino que resulta de verificar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, de modo que se puedan superar las dificultades encontradas con relación a las características de los triángulos para que, posteriormente, los estudiantes comprendan los conceptos asociados a estos. A partir del análisis de los resultados de la prueba mencionada anteriormente, se elabora una guía que consta de tres actividades de enseñanza y que, según el marco de la EpC, permiten ubicar al estudiante en un nivel determinado. Estas actividades se diseñan según los conocimientos previos de los estudiantes a través de una fase de exploración, los conocimientos que se espera vayan comprendiendo por medio de una fase de investigación guiada y según los conocimientos adquiridos los cuales demuestran mediante un proyecto final de síntesis.

Entrevista.

Consiste en la elaboración de unas preguntas que se efectúan al final de la fase de proyecto final de síntesis, para realizar una triangulación entre los diferentes métodos empleados durante el trabajo de campo (observación, registros de los estudiantes y entrevista). La entrevista propuesta tiene una estructura semiestructurada pues durante el desarrollo de esta, se pueden ir generando nuevas preguntas que emergen de las respuestas dadas por los estudiantes; este tipo de entrevista es flexible y pretende obtener perspectivas, experiencias y opiniones detalladas de los participantes en su propio lenguaje (Cuevas, 2009, citado por Hernández et al., 2010).

Las preguntas que se consideran para llevar a cabo la entrevista, se enuncian a continuación:

- En lo referente al aprendizaje de la geometría, ¿cómo considera usted que ha sido su proceso formativo? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son las herramientas que utiliza con más frecuencia en las clases de geometría?
- ¿Considera que el doblado de papel es una herramienta útil para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las líneas notables de los triángulos? ¿Por qué?
- ¿Qué opinión le da al proyecto final de síntesis, para determinar su nivel de comprensión con relación a sus formas de comunicación?
- ¿Cómo se clasifican los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos? Describa cómo podría hacer dicha clasificación mediante el doblado de papel.
- Explique mediante el doblado de papel el método para construir las líneas notables.
- Dadas las características de las líneas notables que pudo visualizar mediante su construcción con doblado de papel, defina cada una.
- ¿Qué conclusión pudo obtener con la relación a las líneas notables en un triángulo equilátero, en un triángulo isósceles y en un triángulo escaleno?

Caracterización de los estudiantes participantes

Juan.

Participante de 13 años de edad; actualmente reside en el municipio de Santa Bárbara con sus padres y hermanos mayores; el estrato socio económico al cual pertenece es 2. Se interesa por el desarrollo de actividades relacionadas con las ciencias naturales y siente curiosidad constante por comprender los fenómenos de la naturaleza y por conocer cuál ha sido su origen. Se destaca por ser un niño receptivo y atento durante las clases de matemáticas, de modo que frecuentemente se está interrogando por el porqué de algunos conceptos matemáticos. Posee habilidades para comprender con facilidad los conceptos aprendidos durante las clases y se preocupa por relacionarlos con el entorno en el cual se desenvuelve. Tiene una actitud curiosa frente a los diferentes temas que se le presentan, por tal motivo su interés para hacer parte de este proyecto fue inmediato, además posee habilidades para el uso de materiales concretos.

En términos generales puede decirse que Juan:

- Es un niño que demuestra por medio de la prueba diagnóstica tener ciertos conocimientos con respecto a los polígonos y a sus generalidades, y con respecto a ciertas características de los triángulos. Tiene una noción clara de la definición de triángulo pues cuando se le pregunta ¿qué es un triángulo?, el estudiante responde: *"es una figura geométrica que tiene tres lados y tres ángulos".* Con relación a la clasificación de los triángulos, responde que según la medida de sus lados pueden ser: triángulos isósceles, escaleno o equilátero y, según la medida de sus ángulos, pueden ser: obtusángulos, rectángulos o acutángulos. A su vez, puede representarlos gráficamente.
- Tiene habilidades para el uso de materiales concretos, en este caso para el doblado de papel.

- Tiene intereses particulares en el estudio de la matemática pues quiere desempeñarse profesionalmente en áreas afines a ella.
- Posee destreza para las presentaciones en público.

Valeria.

Participante de 13 años de edad; actualmente reside en el municipio de Santa Bárbara con una hermana mayor; el estrato socio económico al cual pertenece es 1. Su principal hobbie es tocar el clarinete y hace parte de la banda musical de la institución; tiene habilidades para el trabajo con manualidades y se interesa por sobresalir en las actividades que se programan a nivel artístico. A nivel académico, se preocupa por obtener buenos resultados, por tal motivo recibe con agrado todas las sugerencias que se le hacen con respecto a su proceso de formación. Durante el año escolar, se observó que es receptiva frente a las explicaciones de los diferentes temas en matemáticas; sin embargo, a menudo, comete errores en la solución de problemas que implican el uso de operaciones básicas con números enteros y racionales, pese a ello constantemente está en función de superar esas dificultades. Una de las ramas de la matemática que más le llama la atención y que disfruta, es la geometría, pero se inquieta porque asegura que en los años anteriores fue muy poco lo que aprendió de esta, por tal motivo se interesa en hacer parte de este proyecto a su vez porque le genera curiosidad conocer las características del doblado de papel y su utilidad en la comprensión de los conceptos que se pueden asociar a este.

En términos generales, puede decirse que Valeria:

- Es una niña responsable con sus deberes académicos y se prepara con disciplina para pruebas escritas y orales; sin embargo, demuestra mediante la prueba diagnóstica que no tiene conocimientos previos claros con relación a los polígonos y a sus generalidades y con respecto a las características de los triángulos. Se puede observar que tiene dificultades para la clasificación de los triángulos según la medida de los lados, pues, aunque reconozca que se pueden clasificar en equiláteros e isósceles, olvida los escalenos; también se observan dificultades para clasificar los triángulos según la medida de sus ángulos.

- Tiene habilidades para el uso de materiales concretos, en este caso el doblado de papel.
- Demuestra interés por superar sus dificultades académicas permitiéndose la asistencia a asesorías extra clase que programa la institución.
- Aunque tenga dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos, se interesa por el aprendizaje de estos.

Lucas.

Participante de 13 años; vive en la zona rural del municipio de Santa Bárbara, con sus padres y hermanos; el estrato socio económico al cual pertenece es 2; es un estudiante que presenta un desempeño académico básico en el área de matemáticas, pero que se apropia de los procesos de manera responsable y con ánimos de ser cada día mejor; es estudioso y posee un manejo de conceptos considerable en comparación a sus demás compañeros. Se le invitó a participar del estudio porque es un estudiante propositivo, crítico y con gran capacidad de argumentación.

En general, puede decirse que Lucas:

- Tiene habilidades para el uso de materiales concretos, en este caso el doblado de papel.
- Posee destreza para desenvolverse públicamente.
- Demuestra interés por el área de matemáticas.

– Posee ciertos conocimientos previos con relación a las generalidades de los polígonos y a las características de los triángulos.

Cada uno de los estudiantes que se invitaron a participar del estudio, lo hicieron de manera voluntaria, con una autorización firmada por sus padres o acudientes para desarrollar las actividades propuestas en la guía de enseñanza y para la participación en la entrevista. Los nombres que se utilizan para identificar a los estudiantes son seudónimos con el fin de proteger su integridad.

Análisis de la información

Dentro de este proyecto se debe analizar, de manera individual, la información obtenida por medio del desarrollo de la guía de enseñanza con el fin de ubicar a cada estudiante participante dentro de un nivel de comprensión determinado. Es importante anotar que el desarrollo de cada actividad por parte de cada estudiante es analizado, por lo tanto, para cada una de estas actividades se determinan unos descriptores específicos del nivel de comprensión en el cual este se encuentra; dichos descriptores hacen parte de una rúbrica de cuatro tablas, los cuales surgen después de realizar la prueba diagnóstica y en los que se consideran las dimensiones: contenido, método, propósito y formas de comunicación, del marco de la EpC; se espera que esta rúbrica permita la ubicación de cada estudiante en lo relativo a su proceso de comprensión en: ingenuo, novato, aprendiz o maestría y, al final, poder valorar el proceso general de comprensión y el impacto del trabajo realizado para determinar unas conclusiones personales, generales y del proceso.

Ruta metodológica

A continuación, se realiza una breve descripción de las actividades que se desarrollan con los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Tomás Eastman.

- Prueba diagnóstica que permite reconocer cuáles son los conocimientos previos sobre las generalidades de los polígonos en los estudiantes participantes del proyecto.
- Desarrollo de una guía de enseñanza la cual consta de una fase de exploración, una fase de investigación guiada y un proyecto final de síntesis.
    a. Fase de exploración: actividad que permite reconocer cuáles son los conocimientos previos relativos a los triángulos y a sus generalidades.
    b. Fase de investigación guiada: consta de tres actividades en las que el estudiante debe:
       Construir un módulo para la elaboración de un tetraedro.
       Construir un módulo para la elaboración de un dodecaedro.
       Construir las líneas notables con doblado de papel en cualquier triángulo.
    c. Proyecto final de síntesis: el estudiante expone a sus compañeros cuáles son las características de las líneas notables a partir del doblado de papel.
- Entrevista: el estudiante responde un conjunto de preguntas con el propósito de obtener conclusiones que permitan la triangulación de los métodos de recolección de datos utilizados.

Capítulo 4

Guía de enseñanza y evaluación

Durante nuestra práctica docente, hemos observado que muchos de nuestros estudiantes tienen dificultades para la comprensión de conceptos geométricos, de modo que el poco conocimiento que adquieren es utilizado en las actividades que el profesor propone sin tener ningún tipo de relación con el contexto en el cual se desenvuelven; dicho de otra manera, todo el conocimiento que emerge es olvidado con facilidad, dado que no le encuentran aplicabilidad en las situaciones en las que, normalmente, acostumbran estar inmiscuidos. Por ello, es importante que los docentes reflexionemos sobre nuestras prácticas pedagógicas, repensando los contenidos que pueden ser causa de interés de nuestros estudiantes y que puedan responder a sus necesidades. Al respecto, Stone (1999) señala que:

> […] los docentes deben seleccionar la materia y ajustar los contenidos para responder a las necesidades de los alumnos concretos, no solo ofrecer información sino promover espirales de indagación que lleven a los alumnos a preguntas más profundas que establezcan conexiones con otras ideas preguntas o problemas fundamentales. (p. 97)

De esta manera, este trabajo se desarrolla en tres fases, fundamentadas en el marco de la EpC: exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis y, por tal motivo, las guías de trabajo poseen una estructura con los siguientes aspectos:

Tópico generativo: Los estudiantes comprenderán las características de los triángulos, empleando como herramienta el doblado de papel.			
Metas de comprensión	Comprender las características de algunos polígonos mediante construcciones con doblado de papel.	Comprender las características de los triángulos mediante construcciones con doblado de papel.	Aplicar las características de los triángulos en situaciones problemas relacionadas con los intereses y necesidades de los estudiantes.
Hilo conductor: Los estudiantes comprenden las características de los triángulos, mediante la visualización y experimentación de figuras construidas con doblado de papel.			

Tabla 1.Tópico generativo, metas de comprensión e hilo conductor de la investigación.

Desempeños de Comprensión (actividades)

Los desempeños de comprensión tienen el propósito de orientar a los estudiantes a alcanzar las metas de comprensión (Stone, 1999) a partir de las actividades que se desarrollan en las siguientes tres fases:

Fase de exploración.

Las actividades que se desarrollan en esta fase, según Stone (1999), ayudan a que los estudiantes vean conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas; además, le permite al profesor conocer el dominio conceptual que tienen los estudiantes en relación a los polígonos y a sus generalidades; esta fase está compuesta por una actividad, la cual se desarrolla en el contexto escolar y, la otra, en su hogar, con ayuda de su acudiente o padre de familia como autoridad académica.

Fase de investigación guiada.

El interés principal en esta fase, es que el estudiante pueda particularizar el aprendizaje de los polígonos, de modo que reconozca las características de los triángulos, los clasifique según la medida de sus lados y la medida de sus ángulos, e identifique las líneas y puntos notables. La investigación guiada se centra en la construcción de un tetraedro y un dodecaedro regular, a través del doblado de papel. En la medida en que dichas construcciones se vayan llevando a cabo, se generan una serie de interrogantes que deben ser respondidos por medio de la visualización y el empleo de conocimientos previos, anteriormente fortalecidos.

Fase de proyecto final de síntesis.

Durante esta fase, se analizan los resultados obtenidos en las actividades de enseñanza, por medio de la elaboración y presentación, por parte de los estudiantes, de un proyecto final, en el que exponen a sus compañeros, utilizando un lenguaje formal, todo lo relacionado con las características de los triángulos, empleando como herramienta de apoyo el doblado de papel.

Las actividades de enseñanza se muestran a continuación.

Actividades fase de exploración.

Propósito. Con esta actividad, se pretende que los estudiantes den cuenta de lo que han aprendido sobre los polígonos en años anteriores, a través de la lectura de un cuento y de la puesta en común de las preguntas asignadas

EL GRAN RETO

https://us.123rf.com/450wm/iimages/iimages1304/iimages130401725/19302032-ilustraci-n-de-un-ni-o-con-una-bolsa-de-caminar-por-la-calle-en-un-fondo-blanco.jpg?ver=6

Roberto se ha caracterizado por ser un niño bastante inquieto y amante de la naturaleza; uno de sus mejores entretenimientos es caminar por el sendero que lo conduce de su casa al colegio cada mañana; este camino está rodeado de una gran variedad de árboles frutales y animales de muchas especies, y Roberto disfruta de todo este paisaje, pues lo llena de aire puro y, a la vez, puede practicar diferentes juegos con los animales que encuentra a su paso. Sin embargo, durante las últimas dos semanas, lo ha invadido la monotonía y su caminata ya no es tan plácida, los animales han emigrado a bosques más lejanos y los árboles no tienen ningún fruto.

Una mañana, cabizbajo y bastante meditabundo, observó que en medio de un paso agreste, algo brillaba; al acercarse, se dio cuenta que se trataba de una lámpara, una muy distinta a las que acostumbraba ver en su casa y en la casa de sus amigos; esta tenía forma de tetera, además de ser muy brillante, tan solo había que sacarle el polvo para ver su espectacular brillo. La tomó entre sus manos y, de repente, sintió que algo se movió en su interior; al acercar su ojo a la tapa observó cómo un pequeño humo iba remolinándose; de inmediato, la dejó caer al piso y extrañamente el humo empezó a salir y tras este, un hombre grande y fuerte, muy parecido a los fantasmas que imagina durante la lectura de sus libros de historia preferidos.

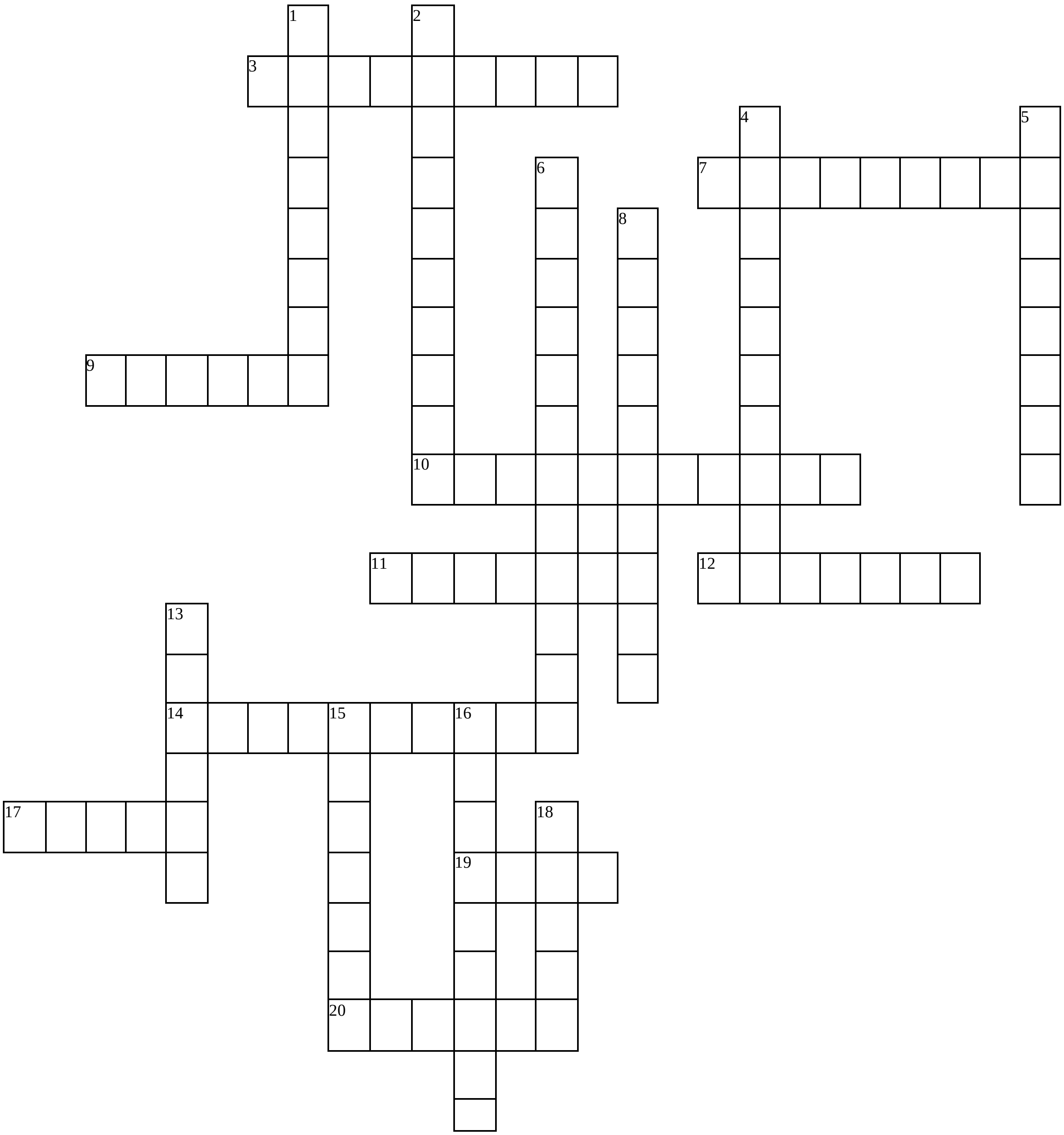
https://st.depositphotos.com/1742172/2148/v/950/depositphotos_21480317-stock-illustration-genie-in-lamp-cartoon.jpg

https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS2bnGxoqIqL-d_Uxm6IcqZZ2lajFZMURMBsJaPyx2aKahqn3x3yw

Roberto sintió terror y quiso correr muy rápido, pero su cuerpo no le respondió y experimentó una gran quietud, el hombre que había salido de la lámpara pronunció su nombre: ¡Roberto!, no tengas miedo, me has liberado de esa pequeña habitación a la que me había visto reducido, por ello te concederé tu más profundo deseo, pero para eso deberás resolver un reto. Roberto sorprendido y asombrado, aceptó el reto; no podía dejar pasar la oportunidad de lograr su más pronto y gran sueño: una biblioteca con todos los libros de historia que pudiera contener. El hombre explicó a Roberto que debía resolver el pensagrama grabado en la tierra y, si era asertivo, como por arte de magia encontraría en su casa, al finalizar su jornada escolar, una enorme biblioteca, repleta de los mejores libros.

Ayuda a Roberto a cumplir con este reto para que pueda ver cumplido su gran sueño.

PENSAGRAMA



Horizontales

3. Es un triángulo que tiene dos lados de igual medida.

7. La suma de la medida de los lados de una figura.

9. Unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen.

10. Un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

11. En un polígono, es la intersección de dos lados.

12. Si para cada par de puntos A y B del interior de un polígono, de modo que el segmento AB no está contenido totalmente en el interior del polígono, este es:

14. Dos ángulos que tiene el mismo vértice, un ángulo en común y son suplementarios.

17. Ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.

19. Medida de la superficie de una figura.

20. Ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

Verticales

1. Un triángulo que tiene sus tres lados de diferente medida.

2. Un triángulo que tiene tres ángulos agudos.

4. Un triángulo que tiene un ángulo recto.

5. Es una figura plana, de varios ángulos, limitado por segmentos rectos.

6. Dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común.

8. Un triángulo que tiene tres lados de igual medida.

13. Unidad de medida angular.

15. Si para cada par de puntos A y B del interior de un polígono, el segmento AB está totalmente contenido en el interior del polígono, este es:

16. Polígono de tres lados.

18. Ángulo que mide 90°.

Luego de que se realiza la actividad de manera individual en el aula, los estudiantes se llevan el pensagrama para sus casas y lo intentan resolver con su padres o autoridades académicas; a la clase siguiente, se pone en común la actividad y se establecen algunas conclusiones de la misma.

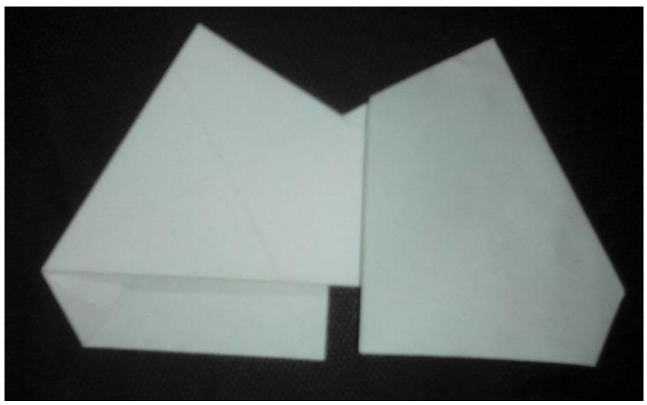
***Actividades de la fase de investigación guiada*.**

A continuación, se presentan las actividades propuestas:

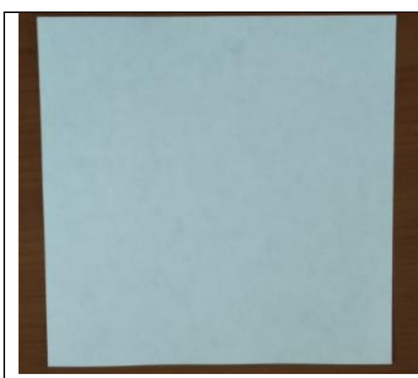
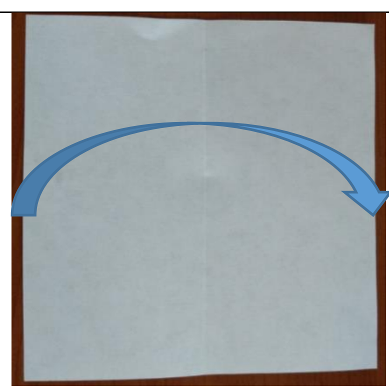
Actividad de enseñanza 1

Módulo para la construcción de un tetraedro.

Dadas las siguientes indicaciones, construya el siguiente módulo y responda las preguntas:



Se inicia con una hoja de papel de forma cuadrada; se lleva el lado derecho sobre el lado izquierdo, y se hace el doblez; posteriormente, se recorta por este doblez. El módulo que se va a construir tiene como base un rectángulo; por esta razón, se comienza la construcción con una de las dos partes recortadas.


1. ¿Cuáles son las características de un rectángulo? ________________________________

   ____

2. ¿Cuántos ángulos, vértices y lados tiene un rectángulo? ___________________________

   ____

   ¿El rectángulo es un polígono? ¿Por qué? _______________________________________

   ____

3. Si lleva el lado vertical izquierdo exactamente sobre su lado paralelo (vertical derecho) y dobla, ¿en cuántas partes queda dividido el polígono con el que se inició la construcción? ¿Por qué? ____

   ____

4. ¿Qué características tiene el doblez que surgió de llevar el lado vertical izquierdo exactamente sobre su lado paralelo (vertical derecho)? ____________________________

   ____

5. ¿Qué nombre reciben los nuevos polígonos formados (las partes que resultaron del doblez)? ____

   ____

6. ¿Cuáles son las características de dicho polígono? ________________________________

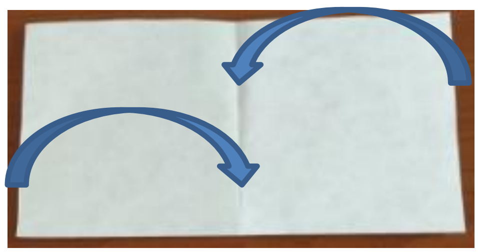
   ____

   ____

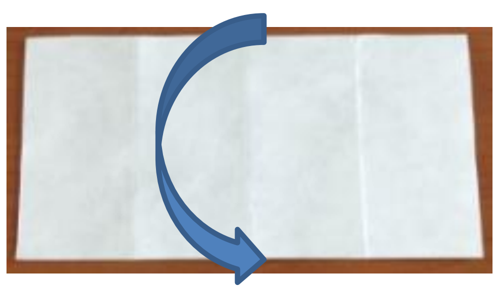
7. Si realiza dos nuevos dobleces, de modo que superponga el lado vertical izquierdo y el lado vertical derecho, ambos sobre el doblez del paso anterior, ¿en cuántas partes queda dividido el polígono inicial con el que se inició la construcción? ¿Por qué? ____________

____

____



Lleve el lado superior sobre el lado inferior del rectángulo y realice el doblez. Luego, desdoble.



8. Dado el doblez anterior, ¿en cuántas partes quedó dividido el rectángulo? ______________

____

____

9. El doblez anterior generó dos nuevos rectángulos. Si toma de referencia uno de estos rectángulos, ¿qué fracción representa con respecto al área total del cuadrado con el que se inició la construcción? ____

____

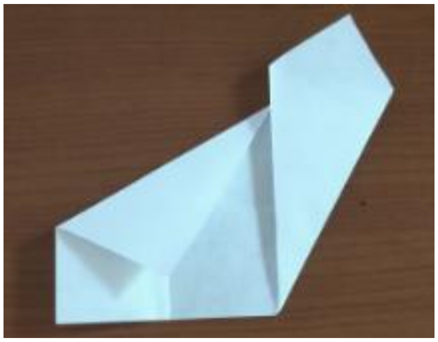
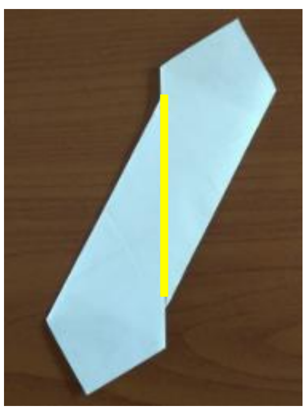
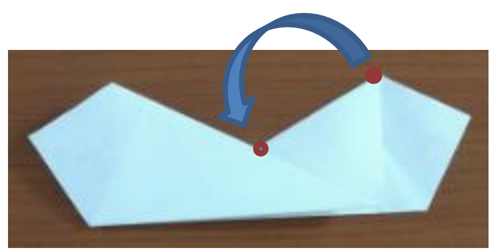
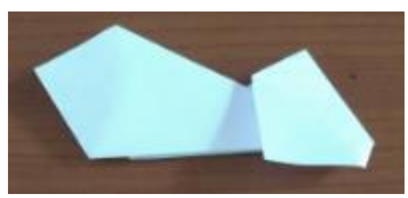
10. ¿Qué fracción representa el cuadrado pequeño con respecto al área total del rectángulo?

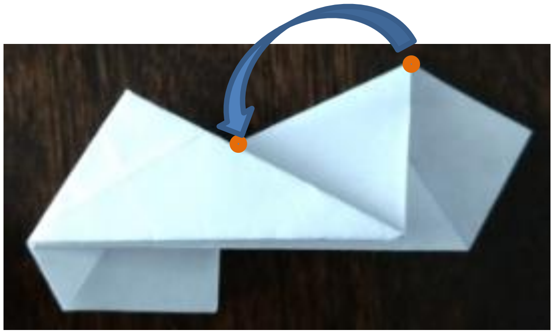
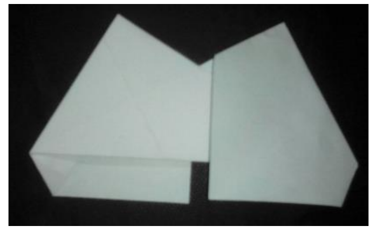
____

____

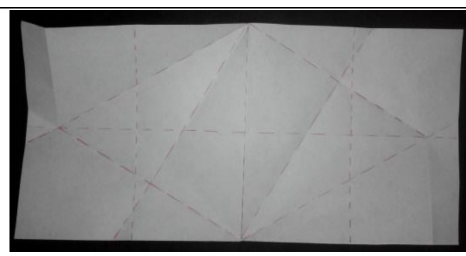
Posteriormente, siga los pasos que se presentan a continuación:

 Haga un doblez de modo que le permita llevar el vértice inferior derecho sobre algún punto del doblez inmediatamente paralelo al lado derecho de la figura, de tal manera que este pase por el punto medio del lado inferior.	 Realice el mismo procedimiento con el vértice superior izquierdo de modo que el doblez pase por el punto medio del lado superior.

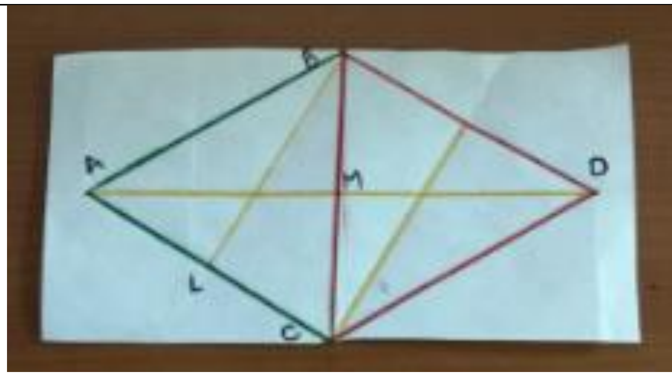
 Observe los segmentos señalados en la figura anterior; haga un doblez de modo que el segmento inferior derecho (amarillo) se lleve al doblez vertical central del rectángulo.	 Repita el mismo procedimiento con el otro segmento señalado (color morado).
 Haga un doblez hacia afuera, por el segmento señalado.	  Rote la figura de tal manera que la base sea el doblez que hizo en el paso anterior. Observe los dos puntos; haga un doblez de modo que le permita llevar un punto sobre otro.

 Rote la figura 180°. Observe los dos puntos; haga un doblez de modo que le permita llevar un punto sobre otro.	 Este es el módulo con el que se procederá a formar la figura tridimensional.

Realice otro módulo, siguiendo los pasos anteriores. Luego, desdóblelo. Subraye cada uno de los dobleces que se observan en el mosaico.



Con el mosaico de pliegues, identifique con un color diferente los siguientes dos triángulos y dobleces asociados; además, nombre los vértices como se muestra a continuación:



Con base en la información que le proporcionan los dobleces realizados en los pasos anteriores, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las características de las figuras ABC y BCD? ________________________

    ____

2. ¿Son las figuras ABC y BCD polígonos? ¿Por qué? ______________________________

    ____

3. ¿Cómo podría definir las figuras ABC y BCD? __________________________________

    ____

4. ¿Con qué nombre son conocidas dichas figuras? _________________________________

    ____

5. ¿Cómo clasificaría estas figuras, de acuerdo a la medida de los lados y a la medida de los ángulos? ¿Por qué? ____

    ____

Para tener en cuenta:

Clasificación de los triángulos según la medida de sus lados:

- Equilátero: sus tres lados tienen la misma medida.
- Isósceles: dos de sus lados tienen la misma medida.
- Escaleno: todos sus lados tienen diferentes medidas.

Clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos:

- Acutángulo: sus tres ángulos son agudos, es decir, miden menos de 90°.
- Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso, es decir, que mide más de 90° y menos de 180°.
- Rectángulo: tiene un ángulo de 90°.

Tomado de: Acosta, M.; Joya, A.; Ortiz, L.; Ramírez, M.; Sánchez, C.; Sabogal, Y.; Patiño, O. (2016) *Proyecto Saberes Matemáticas 8°*. Bogotá, Colombia: Santillana.

6. Clasifique los triángulos que observa en la figura anterior, teniendo en cuenta:

   a. Según la medida de sus lados: ____

   ____

   b. Según la medida de sus ángulos: ____

   ____

7. ¿Cómo podría determinar que L es el punto medio del segmento AC mediante el doblado de papel? ____

   ____

8. ¿Cómo podría determinar que M es el punto medio del segmento BC mediante el doblado de papel? ____

   ____

Para tener en cuenta:

Tomado de:

Las líneas y puntos notables de un triángulo son:

- **Medianas:** son los segmentos que unen los vértices del triángulo con los puntos medios de los lados opuestos. El punto donde se cortan las medianas se llama baricentro.
- **Mediatrices:** son las rectas perpendiculares a los lados, que los dividen en partes iguales. El punto donde se cortan las mediatrices se llama circuncentro.
- **Bisectrices:** son las rectas que dividen los ángulos del triángulo en partes iguales. El punto donde se cortan las bisectrices se le llama incentro
- **Alturas:** son los segmentos perpendiculares a los lados del triángulo (o a la prolongación de estos) que tienen su otro extremo en el vértice opuesto. El punto donde se cortan las alturas se le llama ortocentro.

Tomado de: Acosta, M.; Joya, A.; Ortiz, L.; Ramírez, M.; Sánchez, C.; Sabogal, Y.; Patiño, O. (2016) *Proyecto Saberes Matemáticas 8°*. Bogotá, Colombia: Santillana.

9. El segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: ____
10. El punto donde se cortan dichos segmentos se denomina: _________________________
11. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado de papel, que los segmentos AM y CB forman ángulos de 90°? ____

    ____
12. Dadas estas características, ¿qué otro nombre podría darle a dichos segmentos? ________

    ____

    ____
13. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan dichos segmentos? ¿Por qué? ______________

    ____

    ____

14. Si los ángulos que forman los segmentos AM y CB miden 90°, ¿cómo podría nombrar estos segmentos? ____

____

15. ¿Cuál es el nombre del punto donde se cortan dichos segmentos? __________________

____

____

16. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado, que el segmento AM divide en dos ángulos iguales al ángulo BAC? ____

____

17. ¿Cómo podría nombrar, de otro modo, al segmento AM? ¿Podría nombrar el segmento BL de la misma manera? ¿Por qué? ____

____

18. ¿Cómo se nombra el punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo? ____________

____

____

19. ¿Son los segmentos AM, BL, MD líneas notables de los triángulos respectivos? ¿Qué clase de líneas son? ____

____

20. En un triángulo equilátero, ¿se podría decir que las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas son iguales? ¿Por qué? ____

____

21. Construya, mediante el doblado de papel, la línea notable que falta tanto del triángulo ABC, como del triángulo BCD ____

____

Para tener en cuenta:

$$\acute{A}rea\ de\ un\ tri\acute{a}ngulo = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$Teorema\ de\ Pit\acute{a}goras: h^2 = a^2 + b^2$$

$$h: hipotenusa \quad a: cateto \quad b: cateto$$

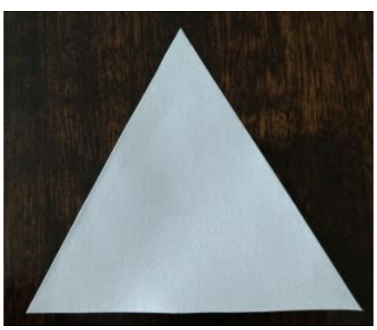
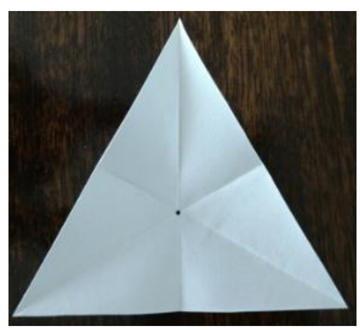
Tomado de: Acosta, M.; Joya, A.; Ortiz, L.; Ramírez, M.; Sánchez, C.; Sabogal, Y.; Patiño, O. (2016) *Proyecto Saberes Matemáticas 8°*. Bogotá, Colombia: Santillana.

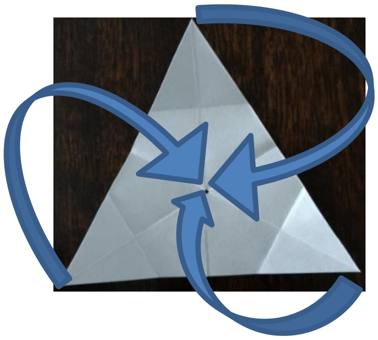
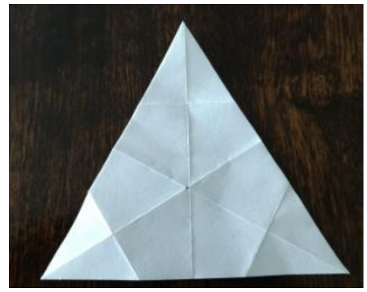
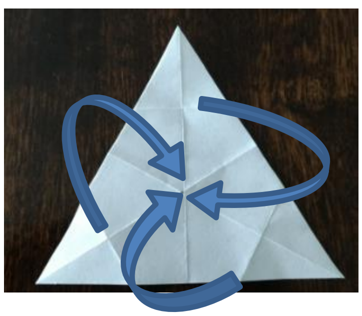
22. Determine el área del triángulo ABC, en función del lado x de la hoja de papel con la que se inició la construcción.

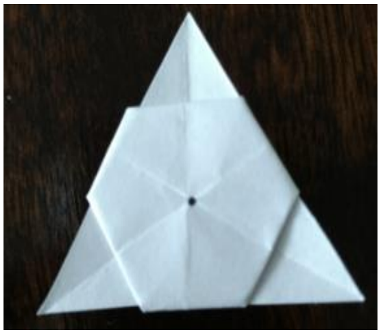
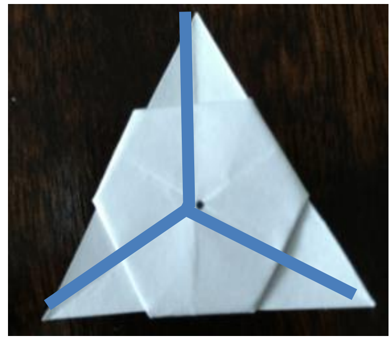
Actividad de enseñanza 2

Módulo para la construcción de un dodecaedro.

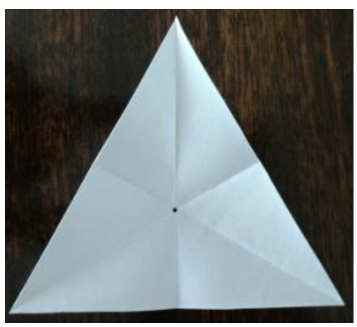
La actividad consiste en la construcción de un dodecaedro utilizando el doblado de papel a partir de hojas en forma de triángulos equiláteros. A continuación, se describe el paso a paso de dicha construcción.

1.	2.
 Dado el triángulo equilátero, realice los siguientes dobleces.	 Lleve el vértice superior a cada uno de los dos vértices y realice los dobleces. Desdoble. Lleve el vértice derecho sobre el vértice izquierdo; realice el doblez y desdoble. Señale el punto donde se cortan estos tres dobleces.

3.  Lleve cada vértice al punto que señaló en el paso anterior y realice el doblez. Desdoble.	4.  Rote la figura del paso anterior 180°, del anverso al reverso.
5.   Lleve cada uno de los dobleces realizados en el paso anterior al punto que señaló en el paso 2.	6.  Rote la figura del paso anterior 180°, del anverso al reverso.

7.	8.
 Doble hacia adentro los triángulos que perciba más gruesos.	  Doble por los segmentos señalados hacia adentro.

De acuerdo a las orientaciones dadas para la construcción del módulo y, teniendo en cuenta las imágenes, responda las siguientes preguntas:



1. ¿Qué tipo de polígono debe utilizar para la construcción del módulo? ________________
   ____
2. ¿Cuáles son las características de dicho polígono? _______________________________
   ____

3. Si lleva un vértice sobre su consecutivo y dobla, ¿cuántos segmentos podría construir? ¿Qué características tiene dicho segmento? ____

   ____

4. Dadas las características que tienen los segmentos anteriores, ¿qué nombre cree que reciben? ____

5. Dichos segmentos se cortan en un punto, ¿cuál es el nombre de dicho punto? ___________

   ____

6. Utilice su transportador para medir los ángulos del polígono inicial y los ángulos que determinan los segmentos construidos. ____

   ____

7. Con base en el procedimiento anterior, ¿qué podría concluir acerca de los segmentos construidos? ____

   ____

8. ¿Podría nombrar de otra manera dichos segmentos, teniendo en cuenta lo que ha hallado después de medir los ángulos? ¿Cuál sería este nuevo nombre? ______________________

   ____

9. En este caso, el nombre del punto donde se cortan dichos segmentos sería: _____________

   ____

10. Dadas las características del polígono inicial, ¿qué otros nombres podría darle a estos segmentos? Justifique su respuesta. ____

    ____

    ____

11. ¿Qué otro nombre recibe el punto de corte de estos segmentos? _______________________

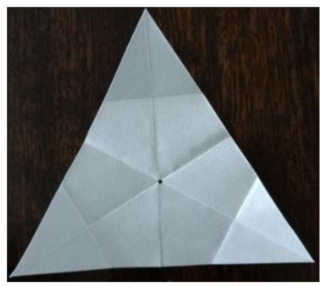
    ____

12. ¿Qué significado le da a la palabra incentro? ¿Qué significado le da a la palabra circuncentro? ¿Encuentra alguna similitud o diferencia entre ellas? ___________________

____

____

Responda las siguientes preguntas, teniendo en cuenta la siguiente imagen:



1. Al llevar los vértices al punto donde se cortan las medianas, ¿qué polígono se forma en el centro? ____
2. ¿Qué polígonos se forman en los extremos? ______________________________________
3. Según la medida de sus lados, ¿cómo se clasifican estos polígonos? __________________

____

4. ¿El doblez que hizo al llevar cada vértice al punto donde se cortan las medianas determina que cada una de ellas queda dividida en cuántas partes? ____________________________
5. Supongamos que la medida de cada lado del triángulo es x, ¿cuál es la medida de cada mediana? ____

____

6. Si la mediana está divida en tres partes, ¿cuánto mide cada parte? ____________________

____

7. Dada la respuesta anterior, ¿qué conclusión puede sacar con respecto a la distancia que hay del vértice al punto de corte de las medianas y de este al lado opuesto? ____________

____

____

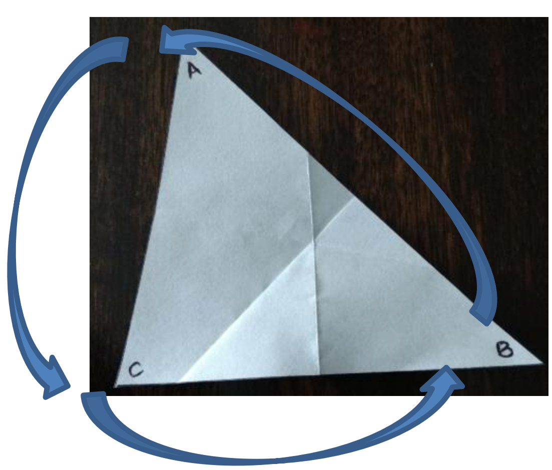
Actividad de enseñanza 3

A partir de los conocimientos que ha adquirido en el desarrollo de las dos actividades anteriores y dados los pasos a seguir para la construcción de las líneas notables en cualquier triángulo, con doblado de papel, responda las preguntas a continuación.

Construya con doblado de papel cuatro triángulos escalenos iguales y construya en ellos las cuatro líneas notables, así:

Construcción de las mediatrices.

Dado el triángulo ABC, lleve el vértice A sobre el vértice C, doble y desdoble. Luego lleve el vértice C sobre el vértice B, doble y desdoble. Posteriormente, lleve el vértice B sobre el vértice A, doble y desdoble.



1. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? ¿En qué caso pasan por los vértices? ____

   ____

2. El punto donde se cortan estas tres líneas notables se llama: ________________________
3. Cuando lleva el vértice A sobre el vértice C, ¿qué relación encuentra entre el doblez construido y el segmento AC?

   Cuando lleva el vértice C sobre el vértice B, ¿qué relación encuentra entre el doblez construido y el segmento CB?

   Cuando lleva el vértice B sobre el vértice A, ¿qué relación encuentra entre el doblez construido y el segmento BA?

   ____

   ____

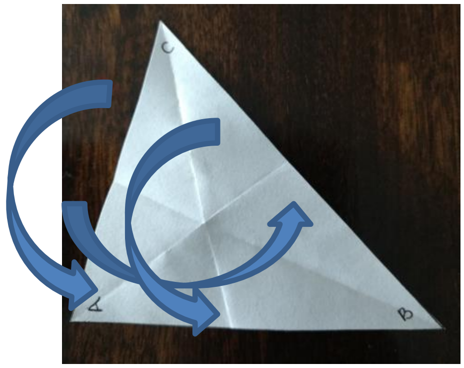
4. ¿Qué puede concluir sobre las mediatrices en un triángulo equilátero, en un triángulo isósceles y en un triángulo escaleno? ____

   ____

   ____

Construcción de las bisectrices.

Dado el triángulo ABC, lleve el lado AC sobre el lado AB, doble y desdoble. Lleve el lado BC sobre el lado BA, doble y desdoble. Por último, lleve el lado AC sobre el lado BC, doble y desdoble.



1. El punto donde se cortan estas tres líneas notables se llama: ______________________________

2. ¿Cuál es la característica de esta línea notable? ____

   ____

3. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? ___________________________

   ____

4. Cuando lleva el lado AC sobre el lado AB, ¿qué puede concluir sobre el ángulo A y el doblez construido?

   Cuando lleva el lado BC sobre el lado BA, ¿qué puede concluir sobre el ángulo B y el doblez construido?

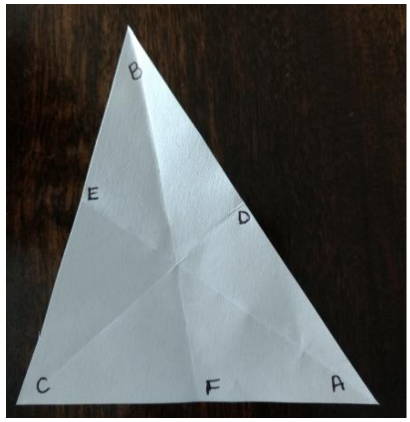
   Cuando lleva el lado AC sobre el lado BC, ¿qué puede concluir sobre el ángulo C y el doblez construido?

   ____

   ____

Construcción de las medianas.

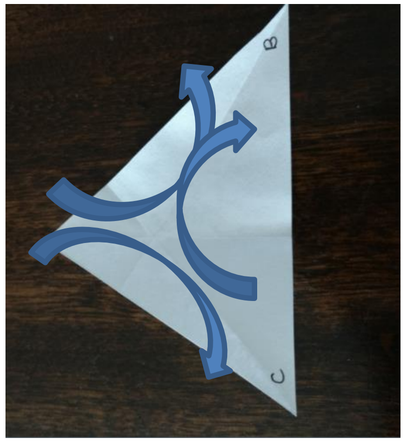
Dado el triángulo ABC, halle el punto medio de cada lado y nómbrelos: D (punto medio de AB), E (punto medio de CB) y F (punto medio de CA). Recuerde que este punto medio se construye llevando un vértice sobre otro (solo indique el punto medio, es decir no haga todo el doblez). Luego, realice un doblez que pase por A y E; un doblez que pase por B y F y, por último, un doblez que pase por C y D.



1. ¿Qué diferencia encuentra entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana? Defina con sus propias palabras qué es una mediatriz y qué es una mediana a partir de estas diferencias ____
   ____
   ____
   ____
2. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las medianas? _____________________________

Construcción de las alturas.

Dado el triángulo ABC, lleve el lado CA sobre sí mismo y realice el doblez únicamente cuando este pase por el vértice opuesto B. Lleve el lado BA sobre sí mismo y realice el doblez únicamente cuando este pase por el vértice opuesto C. Lleve el lado CB sobre sí mismo y realice el doblez únicamente cuando este pase por el vértice opuesto A.



1. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? ______________________________
2. ¿Cuál es la diferencia que encuentra entre una mediatriz y una altura? ________________

   ____

   ____
3. ¿Qué relación encuentra entre cada altura y su lado correspondiente? ________________

   ____

   ____

Conclusiones generales.

1. En un triángulo equilátero, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? ____

   ____

   ____
2. En un triángulo isósceles, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? ¿En qué caso son las mismas o en qué caso son diferentes? ______

   ____

   ____

   ____

3. En un triángulo escaleno, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas o son diferentes? ¿Por qué? ____

____

____

4. Si compara las líneas notables construidas en los cuatro triángulos escalenos, ¿cuál es la conclusión que puede sacar sobre estas? ¿Se trata de las mismas líneas notables? ¿En qué caso serían las mismas líneas? ¿Por qué? ____

____

____

Actividades de la fase de proyecto final de síntesis

Esta etapa se desarrolla teniendo como punto de partida los intereses particulares de los participantes del estudio; en este sentido, se les invita a la revisión y elección de figuras construidas a través del doblado de papel, teniendo en cuenta que dichas construcciones lleven a la visualización de triángulos y, posteriormente, elaboración de dobleces con los que se pudieran analizar las características de las líneas notables, de modo que se pueda inferir un nivel de comprensión mayor, en especial, en la dimensión de las formas de comunicación; para ello, se les solicita a los estudiantes que realicen una exposición, ante el grado octavo, de las principales características de los triángulos, a partir de construcciones con doblado de papel.

Rúbrica

En las siguientes tablas se presentan algunos descriptores con los que se pretende caracterizar el proceso de comprensión de los conceptos asociados a los triángulos, en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Tomás Eastman, del municipio de Santa

Bárbara. En cada tabla se asumen los descriptores desde seis categorías: la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos; el concepto de mediana y baricentro; el concepto de mediatriz y circuncentro; el concepto de bisectriz e incentro; el concepto de altura y ortocentro.

Dimensión de contenido

Niveles / **Categorías**	**Nivel 1: Ingenuo**	**Nivel 2: Novato**	**Nivel 3: Aprendiz**	**Nivel 4: Maestría**
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados	Se le dificulta clasificar los triángulos según la medida de sus lados.	Nombra diferentes clases de triángulos, sin considerar la característica relacionada con la medida de los lados.	Clasifica los triángulos según la medida de sus lados.	Explica la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados. Utiliza la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados para hacer comparaciones con figuras representativas de su entorno.
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus ángulos	Se le dificulta clasificar los triángulos según la medida de sus ángulos.	Nombra diferentes clases de triángulos, sin considerar la característica relacionada con la medida de los ángulos.	Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos.	Explica la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos. Utiliza la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos para hacer comparaciones con figuras representativas de su entorno.
Concepto de Mediana y baricentro	Se le dificulta reconocer el concepto de mediana en un	Asume como mediana la noción que se le	Reconoce el concepto de mediana en un triángulo.	Explica los conceptos de mediana y de baricentro.

	triángulo. Se le dificulta reconocer el punto donde se cortan las medianas en un triángulo.	brinda en las actividades de clase. Relaciona la mediana con otros conceptos geométricos, de manera errónea.	Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo.	Aplica los conceptos de mediana y de baricentro en la solución de problemas. Le da relevancia a la aplicación del concepto de mediana en el contexto donde se encuentra.
Concepto de Mediatriz y circuncentro	Se le dificulta reconocer el concepto de mediatriz en un triángulo. Se le dificulta reconocer el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo.	Asume como mediatriz la noción que se le brinda en las actividades de clase. Relaciona la mediatriz con otros conceptos geométricos, de manera errónea.	Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo.	Explica los conceptos de mediatriz y de circuncentro. Aplica los conceptos de mediatriz y de circuncentro en la solución de problemas. Le da relevancia a la aplicación del concepto de mediatriz en el contexto donde se encuentra.
Concepto de Bisectriz e incentro	Se le dificulta reconocer el concepto de bisectriz en un triángulo. Se le dificulta reconocer el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo.	Asume como bisectriz la noción que se le brinda en las actividades de clase. Relaciona la bisectriz con otros conceptos geométricos, de manera errónea.	Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo.	Explica los conceptos de bisectriz y de incentro. Aplica los conceptos de bisectriz y de incentro en la solución de problemas. Le da relevancia a la aplicación del concepto de bisectriz en el contexto donde se encuentra.
Concepto de altura y	Se le dificulta reconocer el	Asume como altura la noción	Reconoce el concepto de	Explica los conceptos de

ortocentro	concepto de altura en un triángulo. Se le dificulta reconocer el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.	que se le brinda en las actividades de clase. Relaciona la altura con otros conceptos geométricos, de manera errónea.	altura en un triángulo. Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.	altura y de ortocentro. Aplica el concepto de altura en la solución de problemas. Le da relevancia a la aplicación del concepto de altura en el contexto donde se encuentra.

Tabla 2. Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de contenido.

Dimensión de Métodos

Niveles / Categorías	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. Novato	Nivel 3. Aprendiz	Nivel 4. Maestría
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados	Se le dificulta utilizar instrumentos de medida, para medir los lados de un triángulo y así poder clasificarlo. No usa el doblado de papel para comparar las medidas de los lados de un triángulo.	Utiliza, de manera errónea, instrumentos de medida para medir los lados de un triángulo, para poder determinar su clasificación. Usa el doblado de papel, de manera errónea, para comparar las medidas de los lados de un triángulo.	Utiliza instrumentos de medida para medir los lados de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los lados de un triángulo.	Explica cómo puede utilizar instrumentos de medida para medir los lados de un triángulo. Explica cómo usar el doblado de papel para comparar las medidas de los lados de un triángulo. Realiza comparaciones con figuras geométricas de su entorno, considerando las medidas de los lados de los triángulos.
Clasificación de los triángulos, según la medida	Se le dificulta utilizar instrumentos de	Utiliza, de manera errónea, instrumentos de	Utiliza instrumentos de medida para	Explica cómo puede utilizar instrumentos de

de sus ángulos	medida, para medir los ángulos de un triángulo y así poder clasificarlo. No usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo.	medida para medir los ángulos de un triángulo, para poder determinar su clasificación. Usa el doblado de papel, de manera errónea, para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo.	medir los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo.	medida para medir los ángulos de un triángulo. Explica cómo usar el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo. Realiza comparaciones con figuras geométricas de su entorno, considerando las medidas de los ángulos de los triángulos.
Concepto de Mediana y baricentro	Se le dificulta realizar dobleces que permitan la construcción de las medianas de un triángulo.	Realiza diferentes dobleces que no conducen a la construcción de las medianas de un triángulo.	Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.	Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las medianas de un triángulo. Usa la construcción de las medianas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.
Concepto de Mediatriz y circuncentro	Se le dificulta realizar dobleces que permitan la construcción de las mediatrices de un triángulo.	Realiza diferentes dobleces que no conducen a la construcción de las mediatrices de un triángulo.	Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.	Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las mediatrices de un triángulo. Usa la construcción de las mediatrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.
Concepto de Bisectriz e incentro	Se le dificulta realizar dobleces que	Realiza diferentes dobleces que no	Construye las bisectrices de un triángulo y halla	Explica cómo puede usar el doblado de papel

	permitan la construcción de las bisectrices de un triángulo.	conducen a la construcción de las bisectrices de un triángulo.	el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.	para construir las bisectrices de un triángulo. Usa la construcción de las bisectrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.
Concepto de altura y ortocentro	Se le dificulta realizar dobleces que permitan la construcción de las alturas de un triángulo.	Realiza diferentes dobleces que no conducen a la construcción de las alturas de un triángulo.	Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.	Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las alturas de un triángulo. Usa la construcción de las alturas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.

Tabla 3. Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de método

Dimensión de praxis

Niveles / **Categorías**	**Nivel 1. Ingenuo**	**Nivel 2. Novato**	**Nivel 3. Aprendiz**	**Nivel 4. Maestría**
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados	Se le dificulta utilizar el doblado de papel para clasificar los triángulos según la medida de sus lados	Utiliza con poca destreza el doblado de papel para clasificar los triángulos según la medida de sus lados	Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según las medidas de sus lados	Utiliza el doblado de papel para explicar a sus compañeros la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados.
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus ángulos	Se le dificulta utilizar el doblado de papel para clasificar los triángulos según la medida de sus	Utiliza con poca destreza el doblado de papel para clasificar los triángulos según la medida de	Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según	Utiliza el doblado de papel para explicar a sus compañeros la clasificación de los triángulos según la medida

	ángulos.	sus ángulos	las medidas de sus ángulos	de sus ángulos.
Concepto de Mediana y baricentro	Tiene dificultades para visualizar las características de la mediana en la construcción con doblado de papel.	Visualiza, de forma errónea, características de la mediana en la construcción con doblado de papel.	Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel.	Explica las características de la mediana en diversas construcciones con doblado de papel.
Concepto de Mediatriz y circuncentro	Tiene dificultades para visualizar las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel.	Visualiza, de forma errónea, características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel.	Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel.	Explica las características de la mediatriz en diversas construcciones con doblado de papel
Concepto de Bisectriz e incentro	Tiene dificultades para visualizar las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel.	Visualiza, de forma errónea, características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel.	Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel.	Explica las características de la bisectriz en diversas construcciones con doblado de papel
Concepto de altura y ortocentro	Tiene dificultades para visualizar las características de la altura en la construcción con doblado de papel.	Visualiza, de forma errónea, características de la altura en la construcción con doblado de papel.	Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.	Explica las características de la bisectriz en diversas construcciones con doblado de papel

Tabla 4. Descriptores de categoría por nivel. Dimensión de praxis

Dimensión formas de comunicación

Niveles / Categorías	Nivel 1. Ingenuo	Nivel 2. Novato	Nivel 3. Aprendiz	Nivel 4. Maestría
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados.	Se le dificulta comunicar la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados.	Comunica con dificultad la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados.	Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados.	Expresa a sus compañeros y a otras personas la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados.
Clasificación de los triángulos, según la medida de sus ángulos.	Se le dificulta comunicar la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.	Comunica con dificultad la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.	Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.	Expresa a sus compañeros y a otras personas la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.
Concepto de Mediana y baricentro	Se le dificulta expresar los conceptos de mediana y de baricentro.	Expresa con dificultad los conceptos de mediana y de baricentro.	Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado.	Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediana y de baricentro, y las usa en diferentes contextos.
Concepto de Mediatriz y circuncentro	Se le dificulta expresar los conceptos de mediatriz y de circuncentro.	Expresa con dificultad los conceptos de mediatriz y de circuncentro.	Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado.	Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediatriz y de circuncentro, y las usa en diferentes contextos.
Concepto de Bisectriz e incentro	Se le dificulta expresar los conceptos de bisectriz y de incentro.	Expresa con dificultad los conceptos de bisectriz y de incentro.	Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado	Expresa las definiciones formales de los conceptos de bisectriz y de incentro, y las usa en diferentes contextos.

Concepto de altura y ortocentro	Se le dificulta expresar los conceptos de altura y de ortocentro.	Expresa con dificultad los conceptos de altura y de ortocentro.	Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.	Expresa las definiciones formales de los conceptos de altura y de ortocentro, y las usa en diferentes contextos.

Tabla 5. Descriptores de categoría por nivel. Formas de comunicación.

Capítulo 5

Análisis del proceso de comprensión

De acuerdo con el marco metodológico propuesto para el presente estudio y, considerando la aplicación de las actividades de la guía de enseñanza durante el trabajo de campo, junto con las rúbricas de evaluación, se realiza una caracterización del proceso de comprensión de los estudiantes que participaron en la investigación: Juan,Valeria y Lucas. Inicialmente, se realiza una descripción general de la manera en que cada estudiante realizó las actividades, para luego enumerar los descriptores que cumple y así ubicarlo en un nivel por cada dimensión de comprensión.

Juan

Fase de exploración.

En el desarrollo de la actividad propuesta, se puede observar que el estudiante reconoce las características de los triángulos y es capaz de nombrarlos según algunos de sus atributos; es decir, según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. Así mismo, se encontró que tiene dificultades para reconocer los ángulos según su posición pues aunque reconozca cuándo son adyacentes, no lo hace cuando son consecutivos. Frente a las definiciones de polígono, de polígono cóncavo y del convexo, tuvo falencias en establecer sus características principales.

En la siguiente figura se pueden corroborar estas afirmaciones.

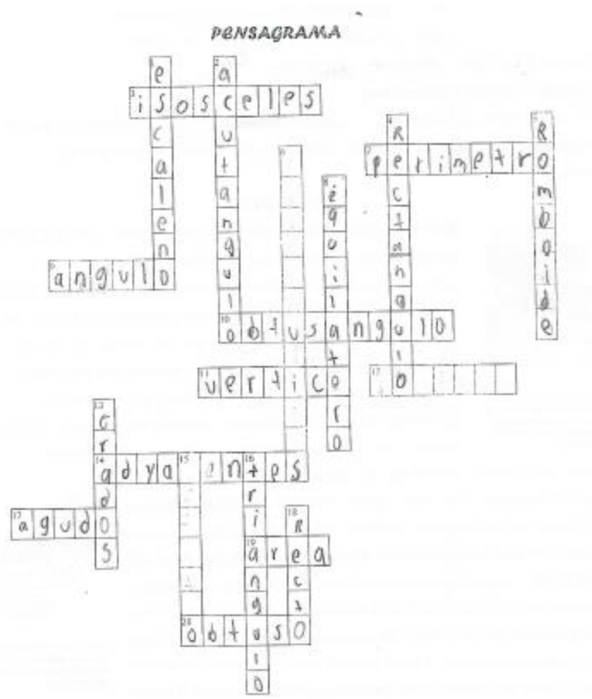


Figura 19. Pensagrama, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En cuanto a la actividad desarrollada por una autoridad académica, la cual estuvo conformada por sus dos padres, se observó que estos presentan dificultades para definir qué es un polígono, cuándo son convexos o cóncavos y qué es el área de una figura; además, no logran clasificar los ángulos según su posición, por tal motivo no pudieron intervenir en las aclaraciones que necesitó Juan para completar el pensagrama.

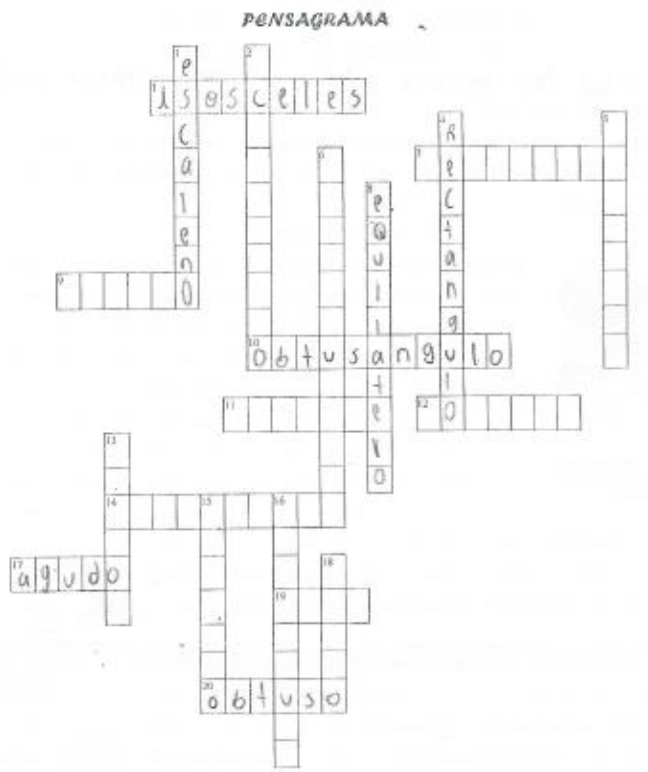


Figura 20. Pensagrama. Padre de familia, estudiante 8° del I.E. Tomás Eastman.

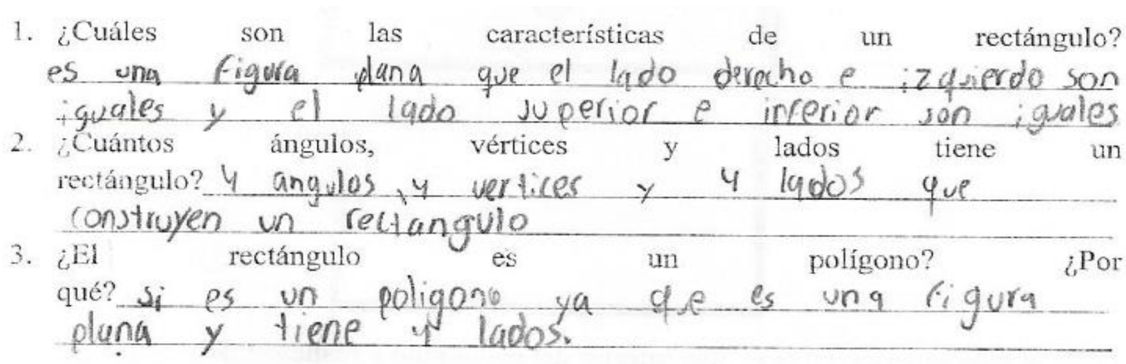
Por otro lado, se observa que el estudiante logra nombrar algunos objetos geométricos, según las características establecidas en las preguntas; sin embargo, los investigadores pudieron inferir que el estudiante no tiene una comprensión global y flexible de las generalidades de los triángulos, ni de sus líneas y puntos notables.

Fase de investigación guiada.

Esta fase estuvo dividida en tres actividades; en las dos primeras se realizaron las construcciones de dos módulos, a través del doblado de papel, con el propósito de identificar algunas características básicas de los triángulos; la tercera consistió en la construcción de las líneas notables de un triángulo escaleno, utilizando el doblado de papel.

Actividad de enseñanza 1.

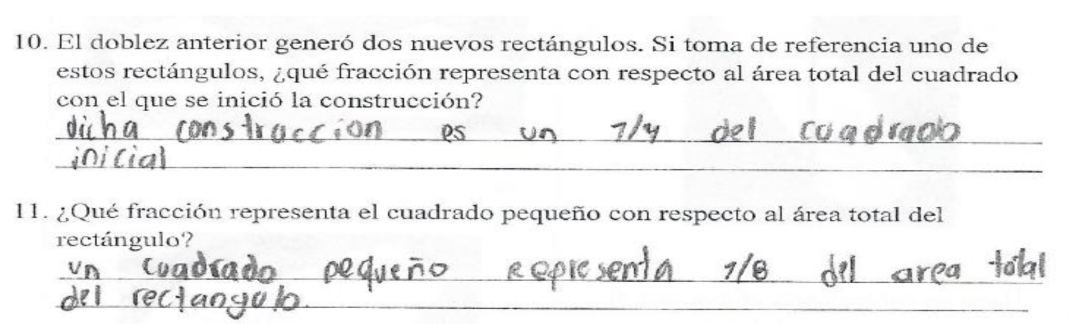
Durante la primera actividad, se observó que Juan reconoce las características del rectángulo y las enuncia correctamente; esto se observa cuando el estudiante manifiesta en la pregunta 1 lo siguiente: "*es una figura plana que el lado derecho e izquierdo son iguales y el lado superior e inferior son iguales*". Por otro lado, pudo expresar, de manera verbal, que "*el rectángulo es un polígono convexo porque si se prolonga uno de los lados, la figura queda en un mismo semiplano*".



1. ¿Cuáles son las características de un rectángulo? es una figura plana que el lado derecho e izquierdo son iguales y el lado superior e inferior son iguales
2. ¿Cuántos ángulos, vértices y lados tiene un rectángulo? 4 angulos, 4 vertices y 4 lados que construyen un rectangulo
3. ¿El rectángulo es un polígono? ¿Por qué? si es un poligono ya que es una figura plana y tiene 4 lados.

Figura 21. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Responde adecuadamente las preguntas relacionadas con las fracciones del área y utiliza números fraccionarios para referirse a estas partes.



10. El doblez anterior generó dos nuevos rectángulos. Si toma de referencia uno de estos rectángulos, ¿qué fracción representa con respecto al área total del cuadrado con el que se inició la construcción?
dicha construccion es un 1/4 del cuadrado inicial

11. ¿Qué fracción representa el cuadrado pequeño con respecto al área total del rectángulo?
un cuadrado pequeño representa 1/8 del area total del rectangulo.

Figura 22. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman

Se observa en la siguiente figura, que el estudiante no pudo hallar el área del triángulo ABC en función del lado x de la hoja de papel con la que inició la construcción, lo que evidencia que aunque en la fase de exploración reconoció qué es el área de una figura no es capaz de utilizar métodos algebraicos para hallarla.

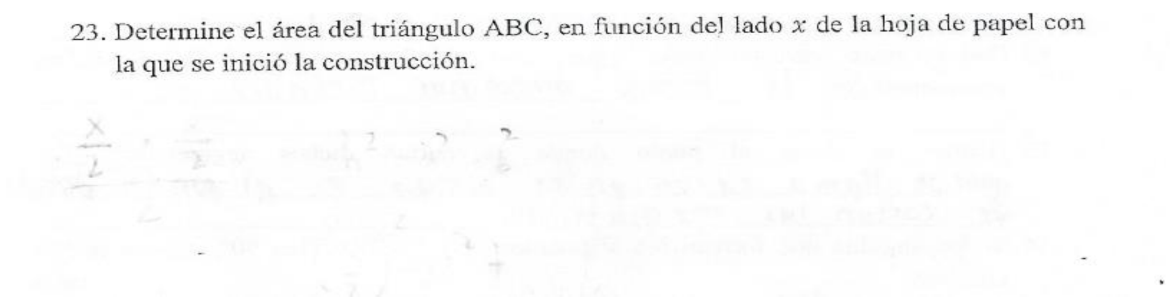
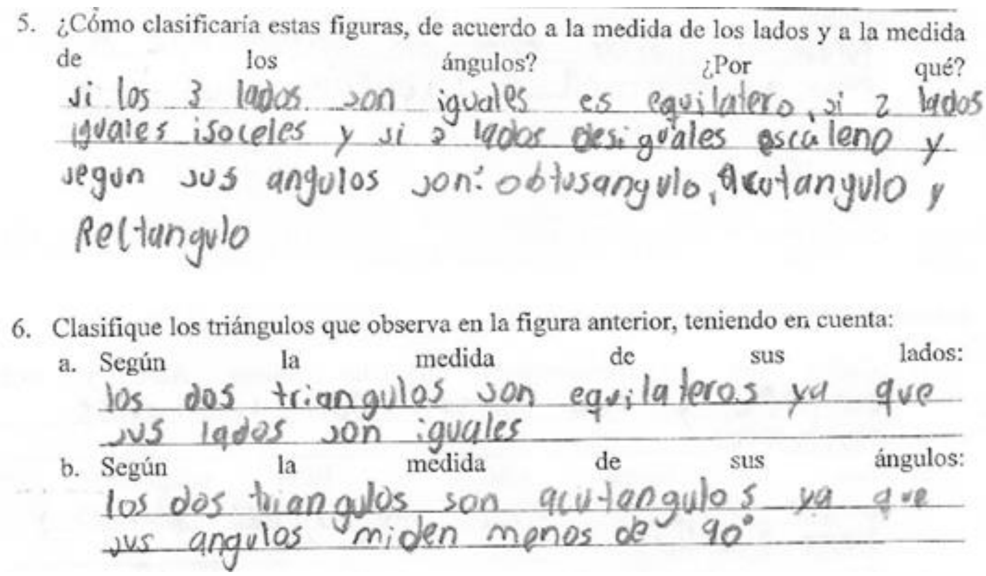

23. Determine el área del triángulo ABC, en función del lado x de la hoja de papel con la que se inició la construcción.

Figura 23. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En la segunda parte de esta actividad se pudo observar que las preguntas relacionadas con la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, fueron respondidas correctamente, mostrando que el estudiante tiene claras estas clasificaciones, como se muestra en las siguientes imágenes. En particular, en la pregunta 5, Juan precisa que: "*si los tres lados son iguales es equilátero, si dos lados iguales isósceles y si tres lados desiguales escaleno y según sus ángulos son: obtusángulo, acutángulo y rectángulo*".


5. ¿Cómo clasificaría estas figuras, de acuerdo a la medida de los lados y a la medida de los ángulos? ¿Por qué?
si los 3 lados son iguales es equilatero, si 2 lados iguales isoceles y si 3 lados desiguales escaleno y segun sus angulos son: obtusangulo, acutangulo y Reltangulo

6. Clasifique los triángulos que observa en la figura anterior, teniendo en cuenta:
a. Según la medida de sus lados:
los dos triangulos son equilateros ya que sus lados son iguales
b. Según la medida de sus ángulos:
los dos triangulos son acutangulos ya que sus angulos miden menos de 90°

Figura 24. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante describe por qué el punto L es el punto medio del segmento AC, a través del doblado de papel, como se observa en la respuesta a la pregunta número 7: "*llevando el vértice A al vértice C L queda en la mitad del segmento*"; después de repetir el procedimiento varias veces intenta dar una respuesta más elaborada, pero con ciertas imprecisiones, tal como se percibe en la respuesta a la pregunta número 8: "*porque al juntar estos dos vértices B y C M es el punto que determina el segmento*".

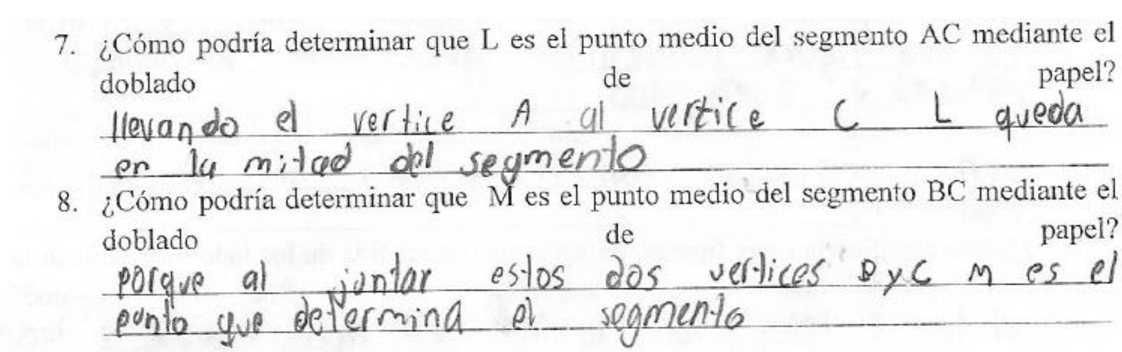
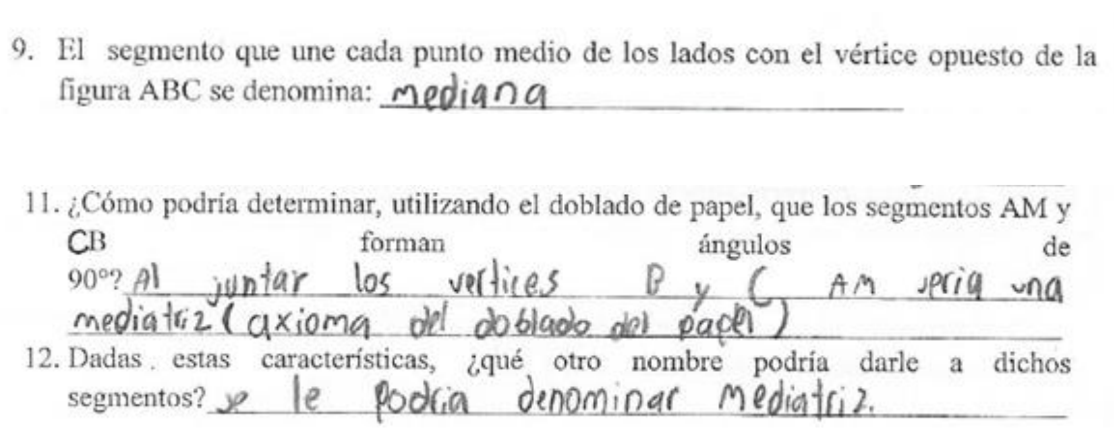

7. ¿Cómo podría determinar que L es el punto medio del segmento AC mediante el doblado de papel?
llevando el vertice A al vertice C L queda en la mitad del segmento
8. ¿Cómo podría determinar que M es el punto medio del segmento BC mediante el doblado de papel?
porque al juntar estos dos vertices B y C M es el punto que determina el segmento

Figura 25. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

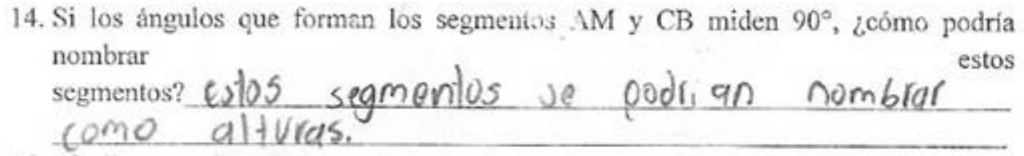
En las siguientes figuras se puede evidenciar que el estudiante reconoce las características de las líneas notables de los triángulos, dada una revisión previa de los aportes de información planteados en la guía. Realiza el procedimiento de doblar el papel hasta que puede obtener conclusiones de dichos dobleces y responder las preguntas planteadas, como se muestra en la respuesta a la pregunta número 9, en la que afirma que el segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: *“mediana”.* Por otro lado, la respuesta a la pregunta número 10*: “al juntar los vértices B y C AM sería una mediatriz (axioma del doblado de papel)*”, permite corroborar que Juan reconoce algunas características que se visualizan al realizar este doblez. La respuesta a la pregunta número 12 en la que Juan afirma que a los segmentos anteriormente nombrados como medianas *“se le podría denominar mediatriz”*, permite evidenciar que reconoce las características de los dobleces que ha llevado a cabo y es capaz de relacionarlos con una línea notable. Asimismo, la respuesta a la pregunta número 14 *“estos segmentos se podrían nombrar como altura”*, permite inferir que Juan reconoce las características de la altura de un triángulo y lo relaciona con el doblez que ha realizado inicialmente.


9. El segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: mediana

11. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado de papel, que los segmentos AM y CB forman ángulos de 90°? Al juntar los vertices B y C AM seria una mediatriz (axioma del doblado del papel)

12. Dadas estas características, ¿qué otro nombre podría darle a dichos segmentos? se le podria denominar Mediatriz.

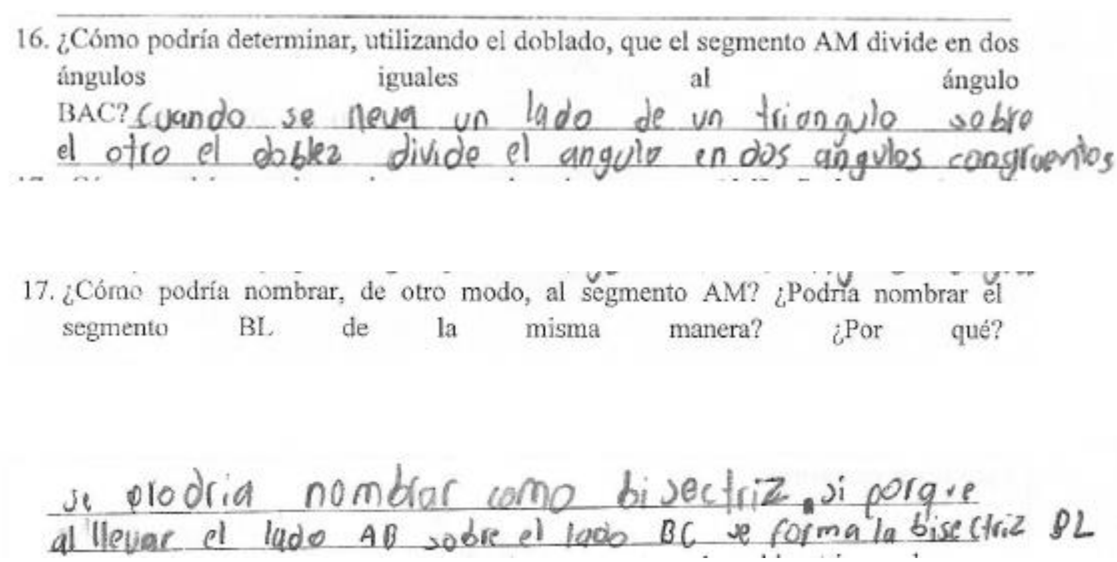
Figura 26. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.



14. Si los ángulos que forman los segmentos AM y CB miden 90°, ¿cómo podría nombrar estos segmentos? estos segmentos se podrían nombrar como alturas.

Figura 27. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Aparte de reconocer las características de las líneas notables anteriormente mencionadas, tanto la respuesta a la pregunta número 16: *"cuando se lleva un lado de un triángulo sobre el otro doblez divide el ángulo en dos ángulos congruentes"*, como la respuesta a la pregunta número 17: "*se podría nombrar como bisectriz. Si porque al llevar el lado AB sobre el lado BC se forma la bisectriz BL*", señalan que Juan reconoce las características de la bisectriz y las relaciona con los dobleces que ha realizado.



16. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado, que el segmento AM divide en dos ángulos iguales al ángulo BAC? cuando se lleva un lado de un triangulo sobre el otro el doblez divide el angulo en dos angulos congruentes

17. ¿Cómo podría nombrar, de otro modo, al segmento AM? ¿Podría nombrar el segmento BL de la misma manera? ¿Por qué?

se podria nombrar como bisectriz. si porque al llevar el lado AB sobre el lado BC se forma la bisectriz BL

Figura 28. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante reconoció también las características de las líneas notables en un triángulo e identificó que solo en el caso de los triángulos equiláteros estas líneas coinciden, tal como se muestra en la siguiente figura:

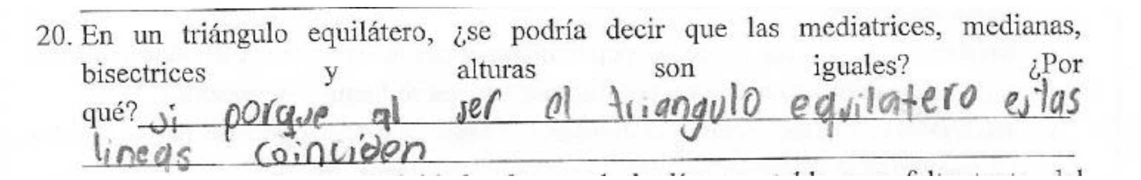

20. En un triángulo equilátero, ¿se podría decir que las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas son iguales? ¿Por qué? si porque al ser el triangulo equilatero estas lineas coinciden

Figura 29. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En esta primera actividad de la fase de investigación guiada, se pueden reconocer unos descriptores principales que, de acuerdo a cada una de las dimensiones, ubican a Juan en unos niveles de comprensión:

Dimensión	Nivel
Contenido	**Aprendiz** - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo. - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo. - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos.
Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los lados y los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.

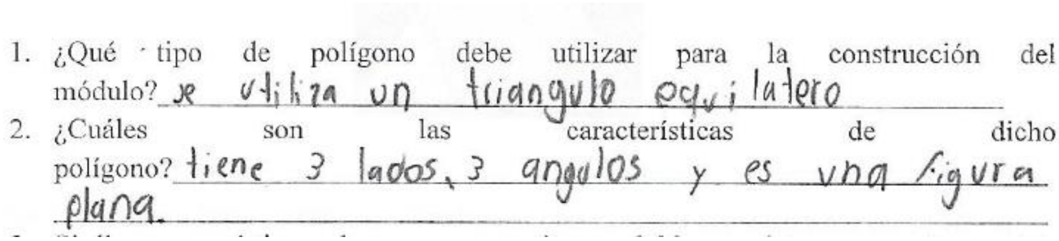
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. **Novato** - Expresa con dificultad los conceptos de mediana y de baricentro. - Expresa con dificultad los conceptos de mediatriz y de circuncentro. - Expresa con dificultad los conceptos de bisectriz y de incentro. - Expresa con dificultad los conceptos de altura y de ortocentro.

Tabla 6. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 1 de Juan.

Se puede inferir que el estudiante ha logrado avanzar en su proceso de comprensión de los conceptos asociados a los triángulos, con respecto a sus conocimientos previos; de acuerdo a las dimensiones y a sus diferentes categorías, el estudiante alcanza indicadores de aprendiz y de novato.

Actividad de enseñanza 2.

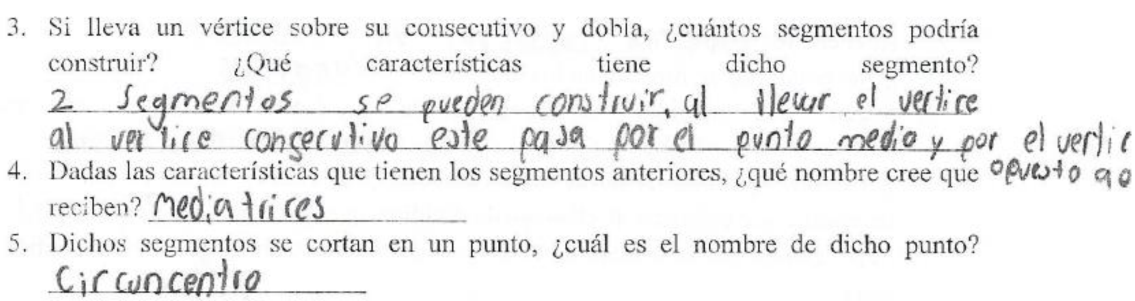
Durante la segunda actividad, se observó que Juan clasifica los triángulos según la medida de sus lados; esto se corrobora cuando responde en la pregunta número 1 relacionada con el polígono que se usa para la construcción del módulo: *“se utiliza un triángulo equilátero”* y, posteriormente, en la pregunta número 2, que *“tiene tres lados, tres ángulos y es una figura plana”*.



1. ¿Qué tipo de polígono debe utilizar para la construcción del módulo? se utiliza un triangulo equilatero
2. ¿Cuáles son las características de dicho polígono? tiene 3 lados, 3 angulos y es una figura plana

Figura 30. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

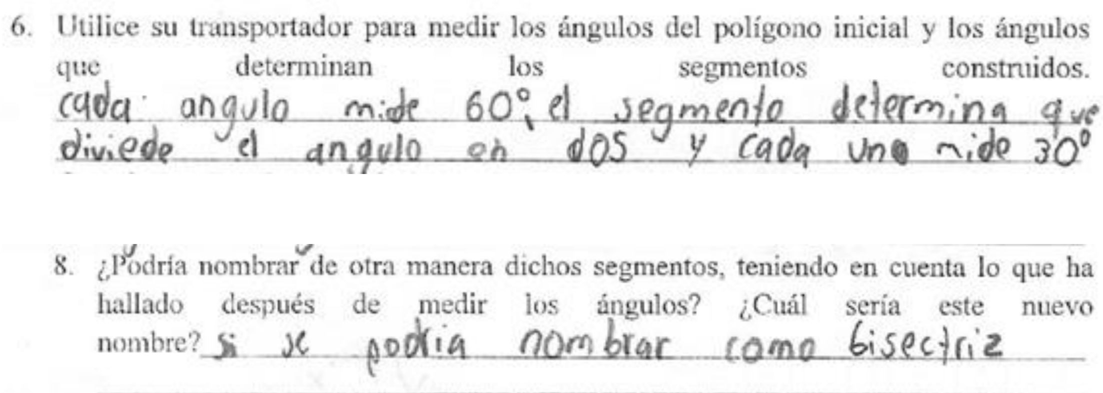
Reconoce algunas características de la mediatriz mediante el doblado de papel y nombra correctamente el punto donde estas se cortan, como se puede observar en la respuesta de la pregunta número 3 en la que afirma que: “*2 segmentos se pueden construir, al llevar el vértice al vértice consecutivo este pasa por el punto medio y por el vértice opuesto”;* verbalmente, Juan afirma que dichos dobleces generan ángulos de 90° y, por tal motivo, precisa que es una mediatriz.



3. Si lleva un vértice sobre su consecutivo y dobla, ¿cuántos segmentos podría construir? ¿Qué características tiene dicho segmento? 2 segmentos se pueden construir, al llevar el vertice al vertice concecutivo este pasa por el punto medio y por el vertic opuesto a o
4. Dadas las características que tienen los segmentos anteriores, ¿qué nombre cree que reciben? Mediatrices
5. Dichos segmentos se cortan en un punto, ¿cuál es el nombre de dicho punto? Circuncentro

Figura 31. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Utiliza adecuadamente instrumentos de medida de ángulos para hallar sus medidas y, posteriormente, determinar que el doblez realizado es una bisectriz, según lo aprendido en la actividad anterior, lo cual se puede evidenciar en la respuesta a la pregunta número 8 en la que responde que el doblez: "*se podría nombrar como bisectriz*". Después de realizar una medición de los ángulos y corroborar numéricamente que se trata de ángulos de igual medida, Juan respondió en la pregunta número 6 que *"cada ángulo mide 60°, el segmento determina que divide el ángulo en dos y cada uno mide 30°".* Verbalmente, enuncia que al llevar un lado sobre otro, los ángulos que determina dicho doblez son iguales y se puede ver al superponerlos.

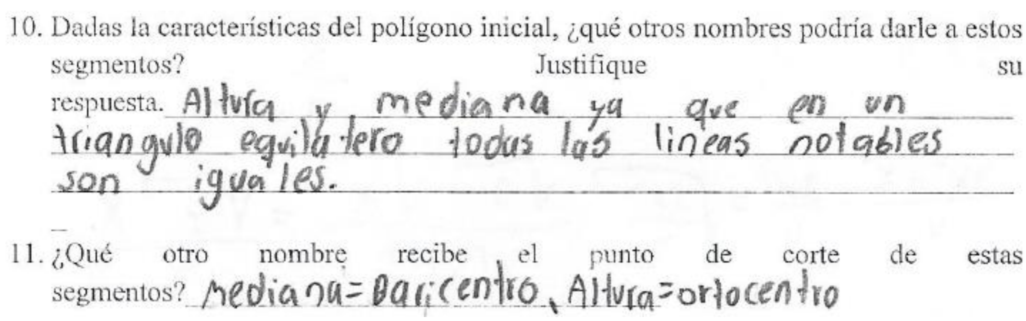


6. Utilice su transportador para medir los ángulos del polígono inicial y los ángulos que determinan los segmentos construidos. cada angulo mide 60°, el segmento determina que diviede el angulo en dos y cada uno mide 30°

8. ¿Podría nombrar de otra manera dichos segmentos, teniendo en cuenta lo que ha hallado después de medir los ángulos? ¿Cuál sería este nuevo nombre? si se podria nombrar como bisectriz

Figura 32. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Reconoce que en el triángulo equilátero las cuatro líneas notables coinciden, cuando escribe en la pregunta 10: "*ya que en un triángulo equilátero todas las líneas notables coinciden*", de modo que puede concluir que una mediatriz es la vez altura y mediana.

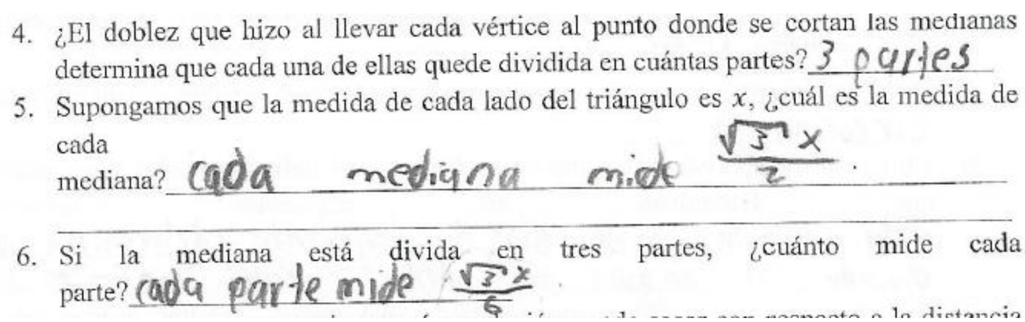


10. Dadas la características del polígono inicial, ¿qué otros nombres podría darle a estos segmentos? Justifique su respuesta. Altura y mediana ya que en un triangulo equilatero todas las lineas notables son iguales.

11. ¿Qué otro nombre recibe el punto de corte de estas segmentos? mediana=baricentro, Altura=ortocentro

Figura 33. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

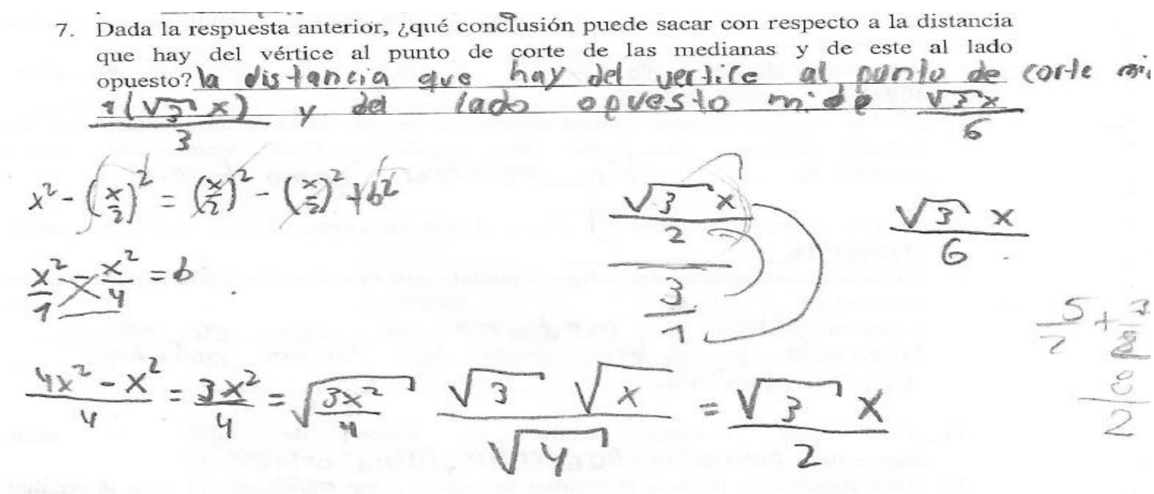
Halla correctamente la medida de las medianas en función del lado x del triángulo inicial, empleando algunos cálculos y el teorema de Pitágoras del cual se hizo alusión en el aporte de información de la actividad de enseñanza 1. Dado que reconoce que la mediana es también una mediatriz, utiliza el teorema de Pitágoras para hallar dicha medida, como se muestra en la respuesta que dio en la pregunta número 5, en la cual escribe el resultado que obtuvo: *"cada mediana mide* $\frac{\sqrt{3}}{2}x$*".*



4. ¿El doblez que hizo al llevar cada vértice al punto donde se cortan las medianas determina que cada una de ellas quede dividida en cuántas partes? 3 partes
5. Supongamos que la medida de cada lado del triángulo es x, ¿cuál es la medida de cada mediana? cada mediana mide $\frac{\sqrt{3}x}{2}$.
6. Si la mediana está divida en tres partes, ¿cuánto mide cada parte? cada parte mide $\frac{\sqrt{3}x}{6}$

Figura 34. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Juan logra hallar la medida de la distancia que hay entre el vértice y el punto donde se cortan las medianas y el punto donde estas se cortan y el lado correspondiente, como se muestra en la respuesta de la pregunta número 7: *"la distancia que hay del vértice al punto de corte mide* $\frac{\sqrt{3}}{3}x$*, y del lado opuesto mide* $\frac{\sqrt{3}}{6}x$*".*


7. Dada la respuesta anterior, ¿qué conclusión puede sacar con respecto a la distancia que hay del vértice al punto de corte de las medianas y de este al lado opuesto? la distancia que hay del vertice al punto de corte mi $\frac{1(\sqrt{3}\,x)}{3}$ y del lado opuesto mide $\frac{\sqrt{3}\,x}{6}$

$$x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2+b^2$$

$$\frac{x^2}{1}-\frac{x^2}{4}=b$$

$$\frac{4x^2-x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}\quad\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}\,x}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}\,x}{2}}{\frac{3}{1}}\qquad\frac{\sqrt{3}\,x}{6}$$

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}$$

Figura 35. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Se pudo observar durante el desarrollo de esta actividad, que el estudiante Juan, a diferencia de la primera actividad, puede expresar con mayor espontaneidad y de forma adecuada las definiciones de las líneas notables y reconocer el punto donde estas se cortan, mediante el doblado de papel.

A continuación, se muestran los descriptores que describen el nivel de comprensión del estudiante en esta segunda actividad. Se resalta que Juan ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión.

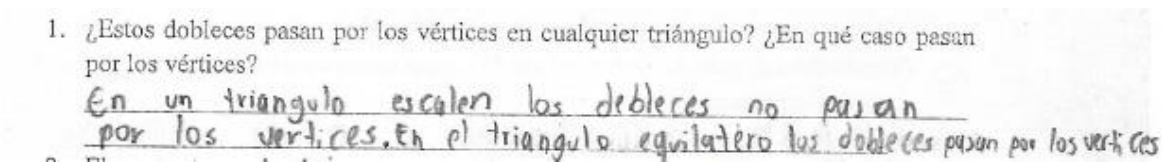
Dimensiones	Nivel
Contenido	**Aprendiz** - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.

Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel. - Encuentra métodos para hallar el área de un triángulo usando las características de las construcciones con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 7. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 2 de Juan.

Actividad de enseñanza 3.

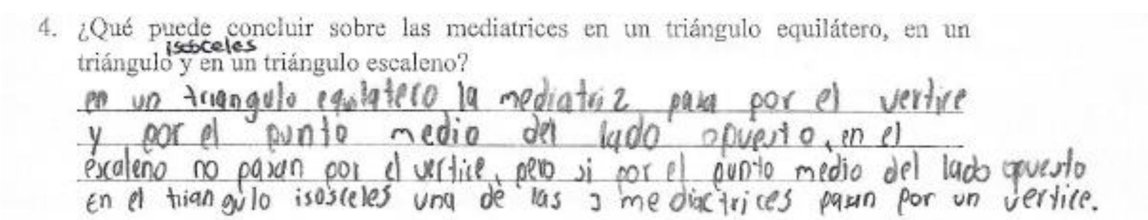
Durante el desarrollo de esta actividad, se observó que Juan sigue instrucciones correctamente, de modo que pudo realizar con facilidad y habilidad los dobleces para la construcción de las líneas notables en un triángulo escaleno. La siguiente figura demuestra que Juan comprende que solo en el caso de los triángulos equiláteros las mediatrices pasan por los vértices, enunciando que *"en un triángulo escaleno los dobleces no pasan por los vértices. En un triángulo equilátero los dobleces pasan por los vértices"*


1. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? ¿En qué caso pasan por los vértices?

En un triangulo escalen los dobleces no pasan por los vertices. En el triangulo equilatero los dobleces pasan por los vertices

Figura 36. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Puede describir acertadamente qué diferencias observa en las mediatrices de un triángulo equilátero, un triángulo isósceles y un triángulo escaleno, pues cuando se le pide enunciar una conclusión sobre estas en dichos triángulos, afirma que: *"en triángulo equilátero la mediatriz pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto, en el escaleno no pasan por el vértice, pero si por el punto medio del lado opuesto en el triángulo isósceles una de las tres mediatrices pasa por un vértice".*


4. ¿Qué puede concluir sobre las mediatrices en un triángulo equilátero, en un triángulo isósceles y en un triángulo escaleno?

en un triangulo equilatero la mediatriz pasa por el vertice y por el punto medio del lado opuesto, en el escaleno no pasan por el vertice, pero si por el punto medio del lado opuesto en el triangulo isosceles una de las 3 mediatrices pasan por un vertice.

Figura 37. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Se observa que Juan visualiza las características de las bisectrices al afirmar que *"dichos segmentos pasan por el vértice y dividen el ángulo en dos ángulos congruentes",* además, reconoce que en todos los triángulos pasa por vértice.

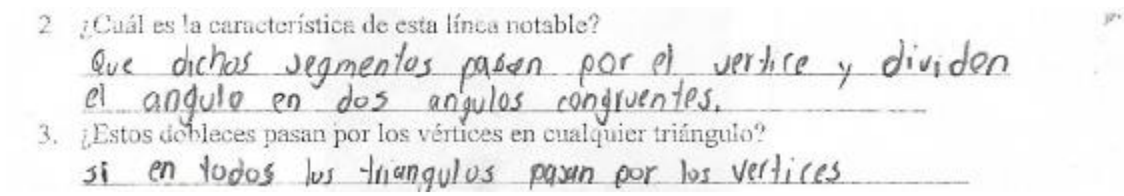

2 ¿Cuál es la característica de esta línea notable?
Que dichos segmentos pasan por el vertice y dividen el angulo en dos angulos congruentes.
3. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo?
si en todos los triangulos pasan por los vertices

Figura 38. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Juan realiza con destreza los dobleces pedidos y puede visualizar características de estos, como se puede observar en la respuesta a la pregunta número 4, en la que afirma que: *"este doblez divide el ángulo C en dos ángulos iguales".*

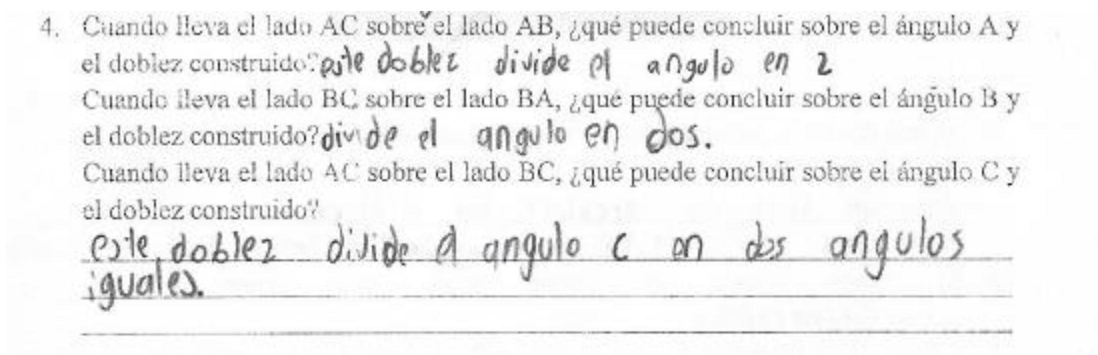
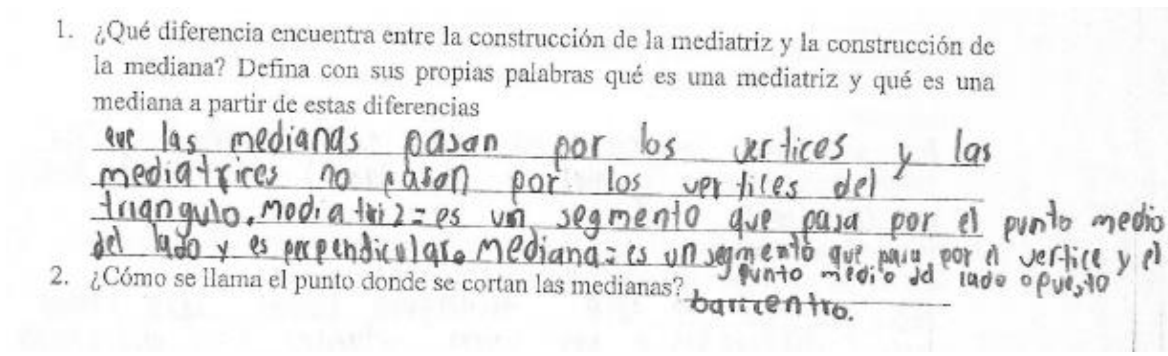

4. Cuando lleva el lado AC sobre el lado AB, ¿qué puede concluir sobre el ángulo A y el doblez construido? este doblez divide el angulo en 2
Cuando lleva el lado BC sobre el lado BA, ¿qué puede concluir sobre el ángulo B y el doblez construido? divide el angulo en dos.
Cuando lleva el lado AC sobre el lado BC, ¿qué puede concluir sobre el ángulo C y el doblez construido?
este doblez divide el angulo c en dos angulos iguales.

Figura 39. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante visualiza las diferencias entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana, de tal manera que puede afirmar que: "*las medianas pasan por los vértices y las mediatrices no pasan por los vértices del triángulo".* Define qué es una mediatriz así: *"mediatriz es un segmento que pasa por el punto medio del lado y es perpendicular". Y* define qué es una mediana así*: "mediana: es un segmento que pasa por el vértice y el punto medio del lado opuesto.*



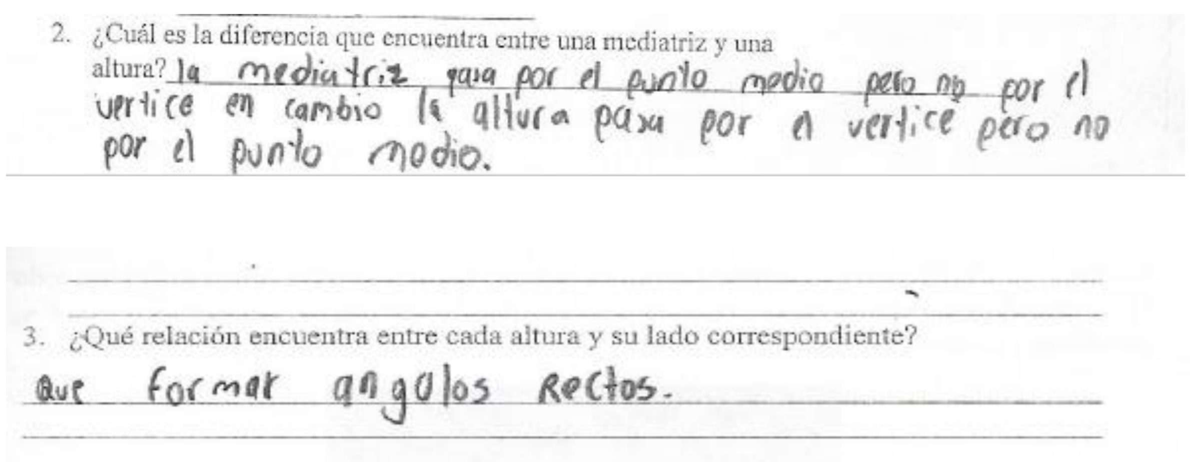
1. ¿Qué diferencia encuentra entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana? Defina con sus propias palabras qué es una mediatriz y qué es una mediana a partir de estas diferencias

que las medianas pasan por los vertices y las mediatrices no pasan por los vertices del triangulo. Mediatriz: es un segmento que pasa por el punto medio del lado y es perpendicular. Mediana: es un segmento que pasa por el vertice y el punto medio del lado opuesto

2. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las medianas? baricentro.

Figura 40. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Juan describe las diferencias entre una mediatriz y una altura como se muestra en la siguiente figura en la que afirma que: "*la mediatriz pasa por el punto medio pero no por el vértice en cambio la altura pasa por el vértice pero no por el punto medio*"; de esta manera, se puede inferir que Juan identifica las características de la mediatriz y de la altura reconociéndolas en los dobleces que lleva a cabo.



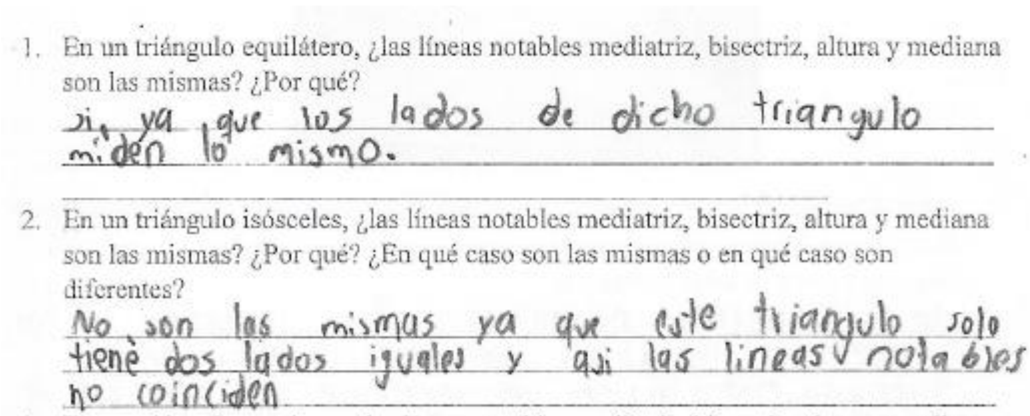
2. ¿Cuál es la diferencia que encuentra entre una mediatriz y una altura? la mediatriz pasa por el punto medio pero no por el vertice en cambio la altura pasa por el vertice pero no por el punto medio.

3. ¿Qué relación encuentra entre cada altura y su lado correspondiente?

Que formar angulos Rectos.

Figura 41. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Juan reconoce que solo en el triángulo equilátero las cuatro líneas notables coinciden, pues en la respuesta a la pregunta número 1 afirma que: *"si, ya que los lados de dicho triángulo son iguales".* Además, se puede observar que visualiza que en el triángulo isósceles solo las líneas relativas al par de lados iguales coinciden, pues aunque no lo haya escrito correctamente, de manera verbal enuncia que *"estas líneas coinciden cuando son relativas al vértice que se determina por la intersección de los dos lados iguales".*

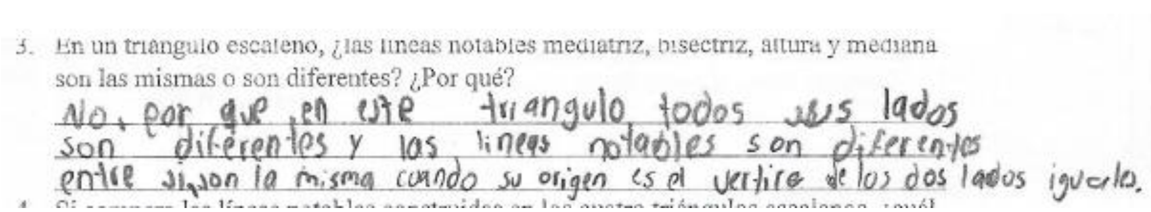


1. En un triángulo equilátero, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué?
si, ya que los lados de dicho triangulo miden lo mismo.

2. En un triángulo isósceles, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? ¿En qué caso son las mismas o en qué caso son diferentes?
No, son las mismas ya que este triangulo solo tiene dos lados iguales y asi las lineas notables no coinciden

Figura 42. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

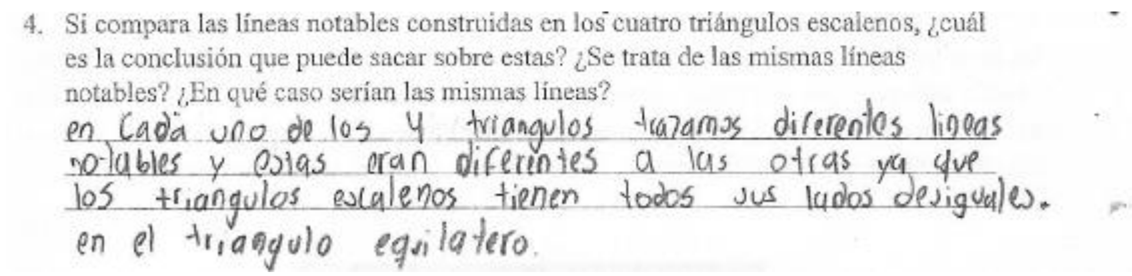
Con respecto al triángulo escaleno, afirma que las líneas notables no coinciden *"porque en este triángulo todos sus lados son diferentes y las líneas notables son diferentes entre sí, son la misma cuando su origen es el vértice de los dos lados iguales".* Se destaca que, en esta última idea, se refiere al triángulo isósceles.



3. En un triangulo escaleno, ¿las lineas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas o son diferentes? ¿Por qué?
No, por que en este triangulo todos sus lados son diferentes y las lineas notables son diferentes entre si, son la misma cuando su origen es el vertice de los dos lados iguales.

Figura 43. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Finalmente, el estudiante puede concluir que las líneas notables no coinciden en un triángulo escaleno, mientras que en el triángulo equilátero si, pues afirma que: *"en cada uno de* *los 4 triángulos trazamos diferentes líneas notables y estas eran diferentes a las otras ya que los triángulos escalenos tienes todos sus lados desiguales"*


4. Si compara las líneas notables construidas en los cuatro triángulos escalenos, ¿cuál es la conclusión que puede sacar sobre estas? ¿Se trata de las mismas líneas notables? ¿En qué caso serían las mismas líneas?

en cada uno de los 4 triangulos trazamos diferentes lineas notables y estas eran diferentes a las otras ya que los triangulos escalenos tienen todos sus lados desiguales.
en el triangulo equilatero.

Figura 44. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

A continuación, se muestran los descriptores que describen el nivel de comprensión del estudiante en esta tercera actividad.

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Aprendiz** - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción

	con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel. - Encuentra métodos para hallar el área de un triángulo usando las características de las construcciones con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 8. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 3 de Juan.

En esta tercera actividad, se observa que Juan ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión, a excepción de aquellos relativos a la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos y a la utilización de instrumentos para la medida de ángulos, debido a que para el desarrollo de esta actividad no se tuvieron en cuenta.

Proyecto final de síntesis.

Durante el desarrollo de este proyecto, se pudo evidenciar que el estudiante avanzó en su proceso de comprensión, en lo relativo a las líneas notables y a la forma de comunicar dichos conceptos a sus pares; algunos aspectos que se pueden resaltar de su exposición, son los siguientes:

- Reconoció las características de las líneas notables mediante el doblado de papel.
- A partir de la visualización, comprendió las definiciones de las líneas notables.

– A través del doblado de papel, expuso a sus compañeros las características de las líneas notables, de modo que pudieran construir una definición.

Juan resolvió adecuadamente las preguntas que le hicieron sus compañeros, entre estas se encuentran las que se describen a continuación:

Estudiante: "¿Cuáles son las características del doblez que resulta al llevar un vértice sobre otro vértice en general?"

Juan: "Se llama mediatriz, siempre que usted lleve un vértice de un polígono sobre otro de sus vértices va a darle una mediatriz".

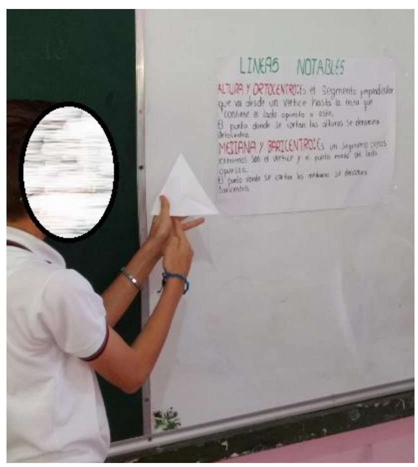


Figura 45. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Estudiante: "¿Cuáles es la diferencia entre una altura y una mediatriz?"

Juan: "la mediatriz y la altura son perpendiculares al lado, es decir forman ángulos de 90°, sin embargo, la mediatriz solo en el caso de un triángulo equilátero y un triángulo isósceles pasa por el vértice del lado opuesto, si es un triángulo escaleno no, en cambio la altura siempre *pasa por el vértice opuesto, además la mediatriz pasa por el punto medio del lado y la altura no".*

Estudiante: "las mediatrices pasan por todos los vértices en un triángulo isósceles, entonces ¿cuál es la diferencia con las mediatrices en un triángulo equilátero?"

Juan: "en un triángulo isósceles la mediatriz pasa solo por el vértice que forman los lados iguales"

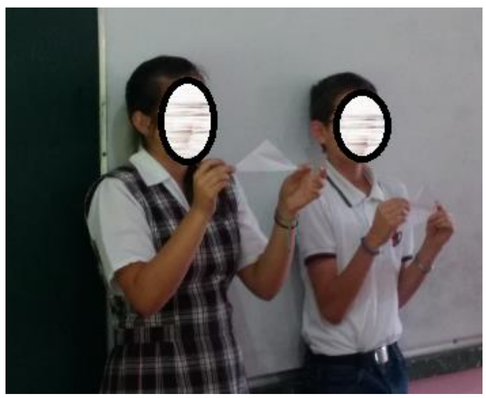


Figura 46. Proyecto final de síntesis, estudiantes del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Juan: "¿Qué pueden concluir sobre las líneas notables en cualquier triángulo"

Estudiante A: "se puede concluir que las líneas notables son las mismas en un triángulo equilátero y son diferentes en un triángulo escaleno".

Estudiante B: "se puede concluir que el punto donde se cortan queda siempre en el interior del triángulo si es un triángulo acutángulo, si es un triángulo obtusángulo el punto donde se cortan las mediatrices y las alturas queda por fuera y si es un triángulo rectángulo las alturas se cortan en el vértice que forman los catetos"

Estudiante C:"Son las mismas si es un triángulo equilátero, son las mismas si son relativas al vértice que genera la intersección de los lados iguales y son diferentes si es un escaleno".

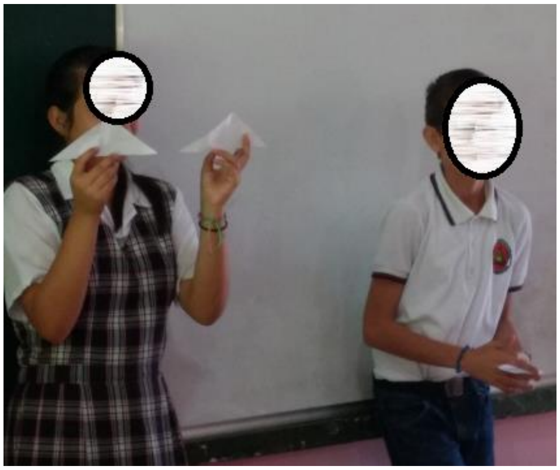


Figura 47. Proyecto final de síntesis, estudiantes del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En esta fase de proyecto final de síntesis y en todo el proceso del desarrollo de la guía de enseñanza, se pudieron reconocer unos descriptores que, de acuerdo a las dimensiones de comprensión ubican a Juan en un nivel de comprensión de maestría, el cual se describe a continuación:

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Maestría** - Explica el concepto de mediana y de baricentro. - Explica el concepto de mediatriz y de circuncentro. - Explica los conceptos de bisectriz y de incentro. - Explica los conceptos de altura y de ortocentro.
Método	**Maestría** - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las medianas de un triángulo. - Usa la construcción de las medianas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las mediatrices de un triángulo. - Usa la construcción de las mediatrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las

	bisectrices de un triángulo. - Usa la construcción de las bisectrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las alturas de un triángulo. - Usa la construcción de las alturas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.
Praxis	**Maestría** - Explica las características de la mediana en diversas construcciones con doblado de papel. - .Explica las características de la mediatriz en diversas construcciones con doblado de papel. - Explica las características de la bisectriz en diversas construcciones con doblado de papel. - Explica las características de la altura en diversas construcciones con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Maestría** - Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediana y de baricentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediatriz y de circuncentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de bisectriz y de incentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de altura y de ortocentro, y las usa en diferentes contextos.

Tabla 9. Descriptores de categoría por nivel. Proyecto final de síntesis de Juan.

Entrevista.

A través de esta entrevista final, se pudo corroborar que Juan comprendió las características de los triángulos en la medida en que puede definir con propiedad las líneas notables y reconocer todas sus cualidades. Al respecto, se describen de manera general sus respuestas.

"Mediante el doblado de papel pude reconocer las características de los triángulos y clasificarlos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. Por ejemplo, según la medida de sus lados pude llevar un lado sobre otro lado y comparar si tenían la misma medida y así decir si eran equiláteros, isósceles o escalenos, y los ángulos tomaba como

referencia un ángulo de 90° y observaba, si eran menor los tres, era acutángulo y si era mayor era obtusángulo. Pude aclarar dudas sobre los polígonos convexos y los polígonos cóncavos. Mediante el doblado de papel también pude reconocer las características de los dobleces que hacía y así poder relacionarlos con una línea notable, por ejemplo al llevar un vértice sobre otro vértice y doblar, ese doblez sería una mediatriz; al llevar un lado sobre otro lado y doblar ese doblez sería una bisectriz; al buscar el punto medio de un lado y doblar de modo que este doblez pasara por dicho punto y por el vértice opuesto al lado que contiene este punto medio construía la mediana; al llevar un lado sobre sí mismo y deslizar hasta que el doblez pasara por el vértice opuesto a este lado era una altura. Mediante el proyecto final de síntesis pude corroborar mis nuevos conocimientos adquiridos al explicárselos a mis compañeros de grupo".

El desarrollo de estas actividades propuestas permitió hacer una triangulación entre los tres métodos de recolección de información, de modo que se pudo establecer que el estudiante Juan comprendió las características de los triángulos, pasando del nivel novato y aprendiz, al nivel de maestría, en todas las dimensiones.

Valeria

Fase de exploración.

La actividad propuesta para la fase de exploración muestra que la estudiante nombra los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos; sin embargo, se le dificulta nombrar un ángulo que mide más de 0° y menos de 90°; tiene falencias para enunciar cuándo un polígono es cóncavo y cuándo es convexo y no logra responder a la pregunta que describe las características de un polígono, como se muestra en la siguiente figura.

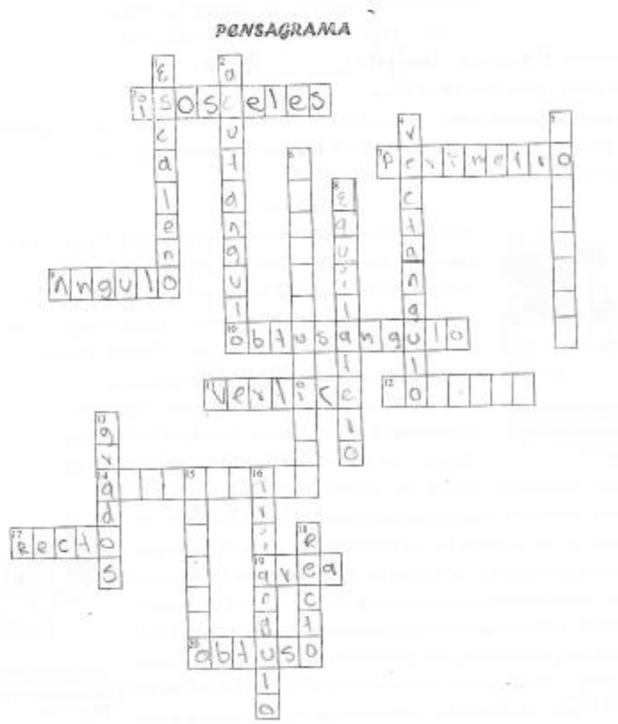


Figura 48. Pensagrama, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En cuanto a la actividad desarrollada por su autoridad académica en su hogar, se puede observar que no responde acertadamente las siguientes preguntas: ¿qué determina la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen? Para la cual responde: “altura”. Es una figura plana, de varios ángulos, limitada por segmentos rectos, sin ninguna respuesta. Si para cada par de puntos A y B del interior de un polígono, de modo que el segmento AB no está contenido totalmente en el interior del polígono, entonces este se denomina…, a la cual responde “mediana”. Dos ángulos que tienen el mismo vértice, un ángulo en común y son suplementarios, la respuesta fue: congruente. Si para cada par de puntos A y B del interior de un polígono, el segmento AB está totalmente contenido en el interior del polígono, entonces este se denomina…, no escribe ninguna respuesta. Sin embargo, se observa que responde acertadamente las preguntas relacionadas con la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, como se muestra en la siguiente figura.

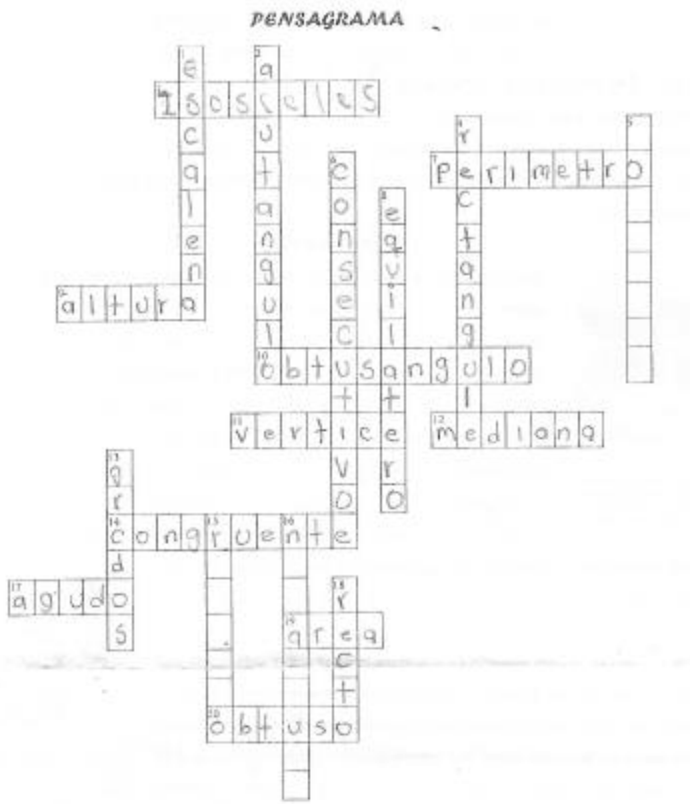


Figura 49. Pensagrama, padre de familia, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Dada la participación de los padres de familia en la elaboración del pensagrama, se puede inferir que la estudiante pudo, con ayuda de sus acudientes, resolver algunas de sus inquietudes referidas a los polígonos en general.

Fase de investigación guiada.

Actividad de enseñanza 1.

El desarrollo de esta actividad muestra que la estudiante Valeria responde las preguntas sobre las características del rectángulo acertadamente pues escribe que es "*una figura plana, tiene 4 lados y 4 ángulos rectos, es decir, mide 90°"*. Como se muestra en la figura 56.

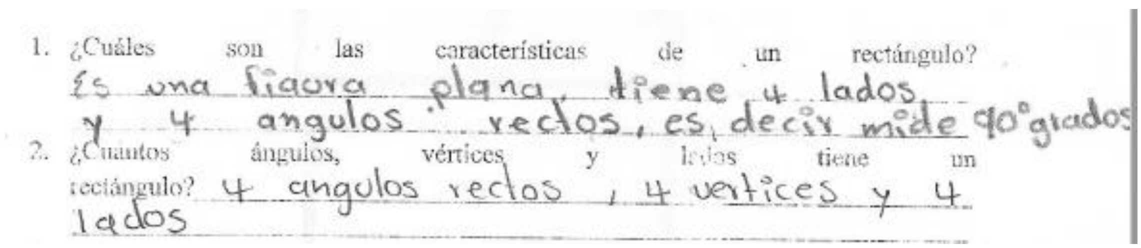

1. ¿Cuáles son las características de un rectángulo?
Es una figora plana, tiene 4 lados y 4 angulos rectos, es, decir mide 90°grados
2. ¿Cuantos ángulos, vértices y lados tiene un rectángulo? 4 angulos rectos, 4 vertices y 4 lados

Figura 50. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Es conveniente anotar que la estudiante afirma verbalmente que: *"estos lados no tienen que ser iguales y, por tal motivo, el cuadrado es un caso especial del rectángulo al tener todos sus lados iguales"*. Reconoce que el rectángulo es un polígono; sin embargo, no logra explicar claramente qué es, dada la definición de un polígono y atendiendo a la puesta en común de la fase de exploración, pues responde en la pregunta número 3 que el rectángulo es un polígono "*porque es una figura plana de 4 lados*".

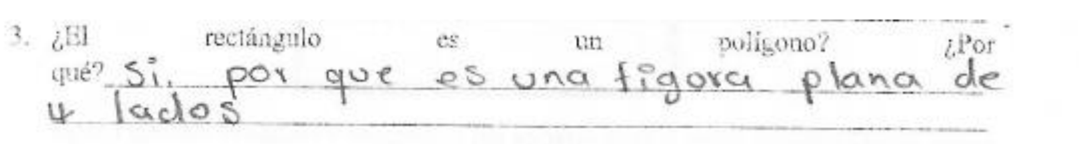
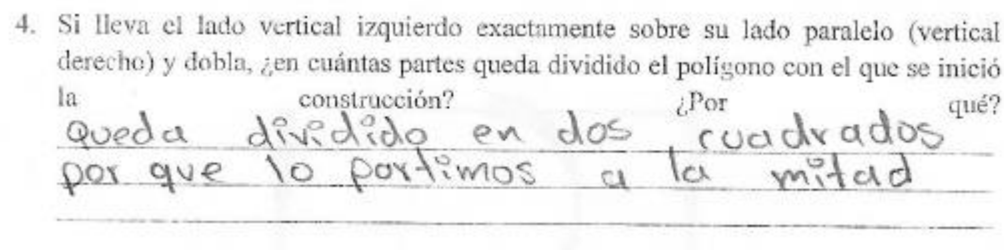

3. ¿El rectángulo es un polígono? ¿Por qué? Si, por que es una figora plana de 4 lados

Figura 51. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Tiene claro que, al llevar el lado vertical izquierdo de un rectángulo exactamente sobre su lado paralelo, este segmento pasa exactamente por la mitad del rectángulo; esto se puede observar en la siguiente figura:


4. Si lleva el lado vertical izquierdo exactamente sobre su lado paralelo (vertical derecho) y dobla, ¿en cuántas partes queda dividido el polígono con el que se inició la construcción? ¿Por qué?

Queda dividido en dos cuadrados por que lo partimos a la mitad

Figura 52. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Al realizar nuevos dobleces, como indica la pregunta número 8, la estudiante afirma que se generan partes iguales, de modo que puede resolver correctamente la pregunta número nueve, respondiendo que al realizar los dobleces según las instrucciones, el rectángulo inicial queda dividido en *"8 cuadrados iguales"*; a la vez que responde con facilidad la pregunta número 10, en la cual se hace alusión al área de cada uno de los cuadrados resultantes de los dobleces, en función del rectángulo inicial, así: *"$\frac{1}{4}$ del cuadrado del cuadro inicial"*; esto se aprecia en la figura 59.

9. Dado el doblez anterior, ¿en cuántas partes quedó dividido el rectángulo?
En 8 cuadrados iguales

10. El doblez anterior generó dos nuevos rectángulos. Si toma de referencia uno de estos rectángulos, ¿qué fracción representa con respecto al área total del cuadrado con el que se inició la construcción? 1/4 del cuadrado del cuadro inicial

11. ¿Qué fracción representa el cuadrado pequeño con respecto al área total del rectángulo?
1/8 del vectangulo dado

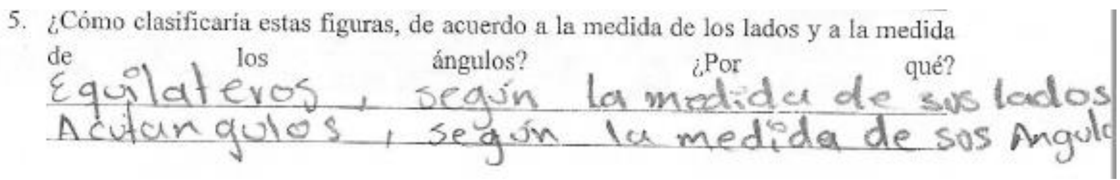
Figura 53. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En la segunda parte de esta actividad, se pudo observar que la estudiante reconoce cuándo una figura es un triángulo equilátero; así mismo, enuncia de manera verbal que los triángulos ABC y BCD son equiláteros porque al llevar un lado sobre otro son iguales, es decir, tienen la misma medida. Tiene falencias para enunciar por qué un triángulo es un polígono, pues a la pregunta número dos responde que: *"es una figura plana y tiene tres lados y tres vértices"*, olvidando la característica de ser limitada por segmentos rectos, como se puede observar en la siguiente figura.

1. ¿Cuáles son las características de las figuras ABC y BCD?
Los figuras ABC y BCD son figuras planas y son 2 triangulos equilateros
2. ¿Son las figuras ABC y BCD polígonos? ¿Por qué? Si, por que es una figura plana y tiene tres lados y 3 vertices

Figura 54. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

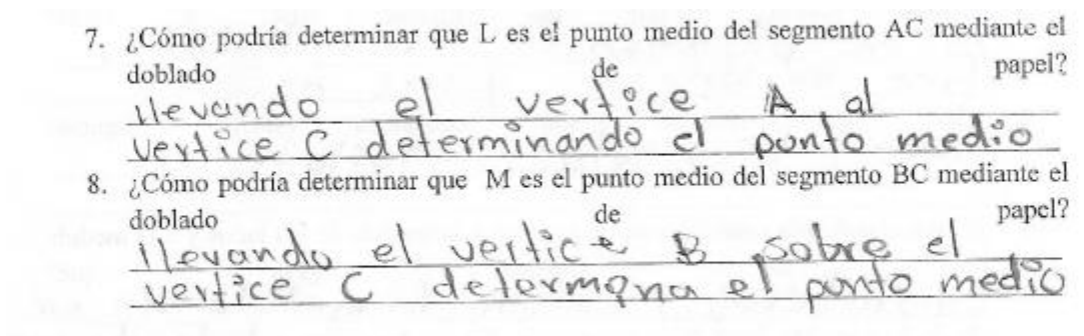
La respuesta a la pregunta sobre la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, fue acertada, pues la estudiante respondió que según sus lados se clasifican en: "*equiláteros"* y según la medida de sus ángulos, en *"acutángulos"*. Lo anterior se corrobora en la figura 61.


5. ¿Cómo clasificaría estas figuras, de acuerdo a la medida de los lados y a la medida de los ángulos? ¿Por qué?

Equilateros , según la medida de sus lados
Acutangulos , según la medida de sos Angulo

Figura 55. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria responde acertadamente por qué se puede determinar que L es el punto medio del segmento AC, mediante el doblado de papel, dado que su respuesta fue: *"llevando el vértice A al vértice C determinando el punto medio"* como se muestra en la figura.


7. ¿Cómo podría determinar que L es el punto medio del segmento AC mediante el doblado de papel?

llevando el vertice A al
vertice C determinando el punto medio

8. ¿Cómo podría determinar que M es el punto medio del segmento BC mediante el doblado de papel?

llevando el vertice B sobre el
vertice C determqna el punto medio

Figura 56. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Después de realizar una revisión previa de los aportes de información planteados en la guía, sobre las características de las líneas notables, responde que el segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: *"mediana"* y que el punto donde estas se cortan se denomina *"baricentro".* De este modo, se infiere que Valeria reconoce las características de la mediana y encuentra una relación entre ellas y el doblez que ha realizado.

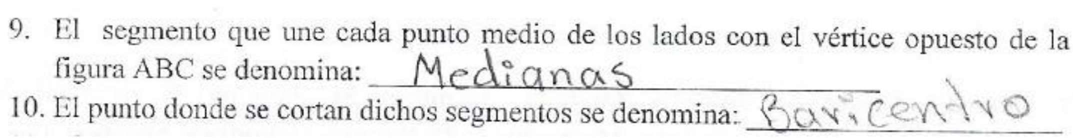

9. El segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: Medianas
10. El punto donde se cortan dichos segmentos se denomina: Baricentro

Figura 57. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Por otro lado, a partir de la respuesta dada a la pregunta número 11, se puede notar que tiene claro que al llevar un punto sobre otro, el segmento que se determina al realizar el doblez se llama mediatriz y que dicho procedimiento es uno de los axiomas del doblado de papel, pues responde que: “*al llevar el punto CB AM sería una mediatriz (axioma del doblado de papel)”*

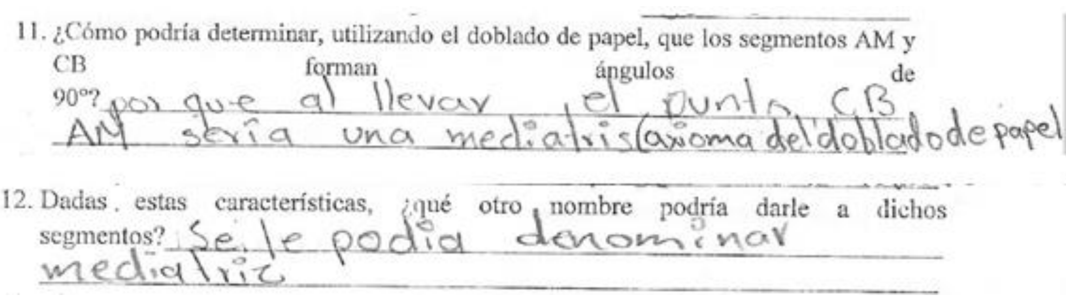
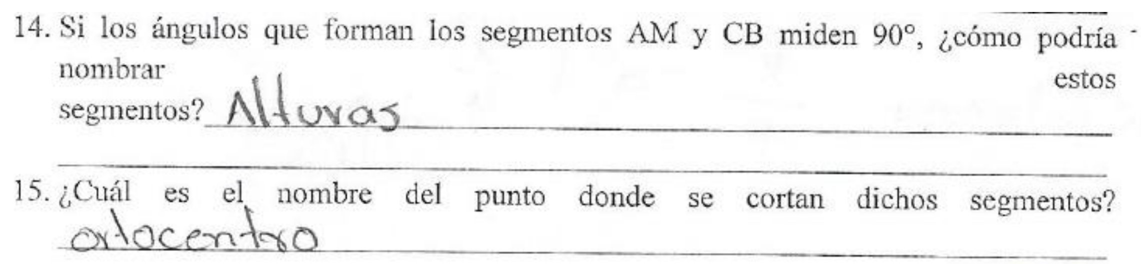

11. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado de papel, que los segmentos AM y CB forman ángulos de 90°? por que al llevar el punto CB AM sería una mediatris (axioma del doblado de papel
12. Dadas estas características, ¿qué otro nombre podría darle a dichos segmentos? Se le podía denominar mediatriz

Figura 58. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

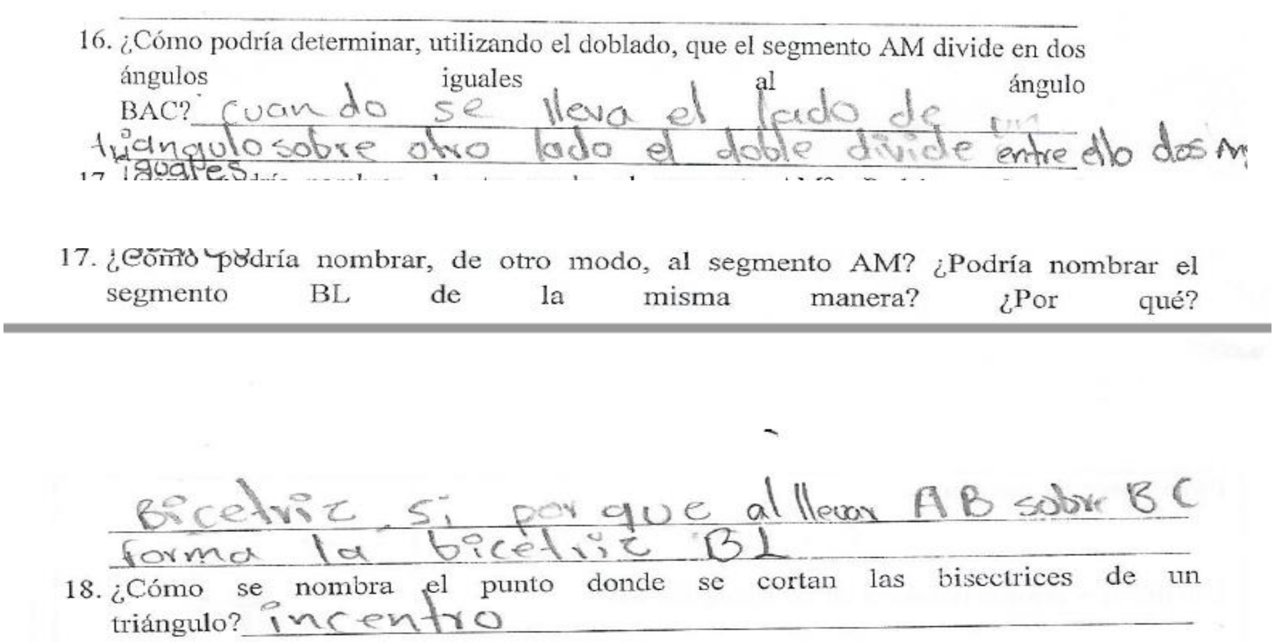
Reconoce que las alturas forman con el lado correspondiente un ángulo de 90°, dado que responde en la pregunta número 14 que si los ángulos que se forman al cortarse los segmentos AM y CB son 90°, el segmento AM podría denominarse altura, tal como se muestra a continuación.


14. Si los ángulos que forman los segmentos AM y CB miden 90°, ¿cómo podría nombrar estos segmentos? Alturas

15. ¿Cuál es el nombre del punto donde se cortan dichos segmentos? ortocentro

Figura 59. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Reconoce cuál es la característica del segmento que se construye al llevar un lado sobre otro y doblar, debido a que responde *"cuando se lleva el lado de un triángulo sobre otro lado el doblez divide el ángulo entre ellos en dos ángulos iguales"*; por tal motivo, reconoce que el segmento AM puede llamarse bisectriz y que el punto donde estas se cortan se denomina incentro.


16. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado, que el segmento AM divide en dos ángulos iguales al ángulo BAC? cuando se lleva el lado de un triángulo sobre otro lado el doble divide entre ello dos iguales

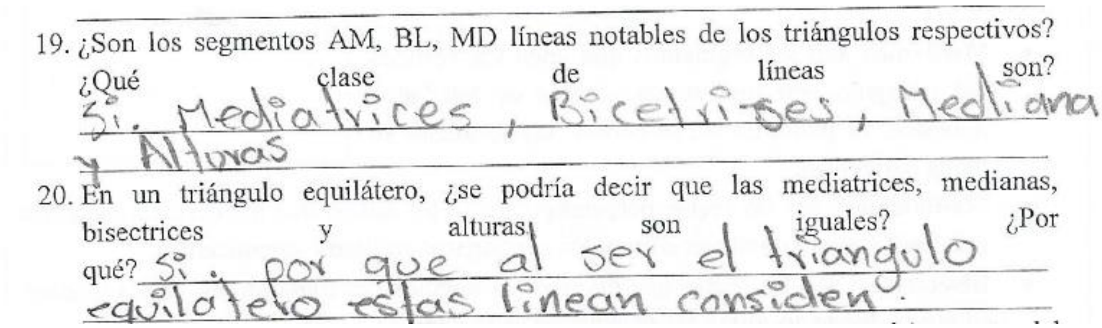
17. ¿Cómo podría nombrar, de otro modo, al segmento AM? ¿Podría nombrar el segmento BL de la misma manera? ¿Por qué?

Bicetriz si porque al llevar AB sobre BC forma la bicetriz BL

18. ¿Cómo se nombra el punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo? incentro

Figura 60. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Reconoce que solo en un triángulo equilátero las líneas notables coinciden como se muestra en la respuesta que dio a la pregunta número 20: "*Si. Porque al ser un triángulo equilátero estas líneas coinciden*".


19. ¿Son los segmentos AM, BL, MD líneas notables de los triángulos respectivos? ¿Qué clase de líneas son? Si. Mediatrices, Bicetrises, Mediana y Alturas

20. En un triángulo equilátero, ¿se podría decir que las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas son iguales? ¿Por qué? Si. por que al ser el triangulo equilatero estas linean considen.

Figura 61. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman**.**

Se puede inferir que la estudiante Valeria realiza dobleces correctamente y reconoce las características de los segmentos que construye. Esto se puede corroborar en la figura 68 cuando menciona que "*llevando el lado BC sobre el lado AC se formará la línea notable faltante…*".

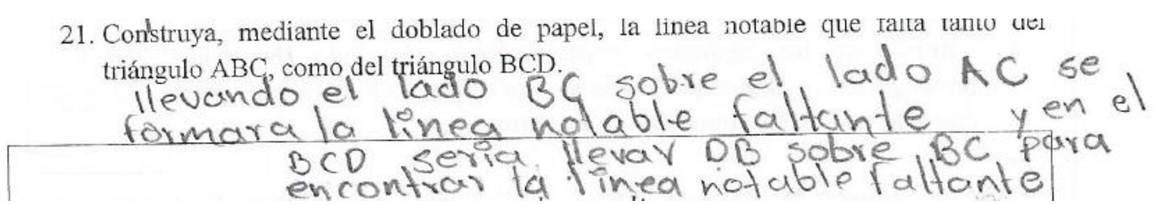
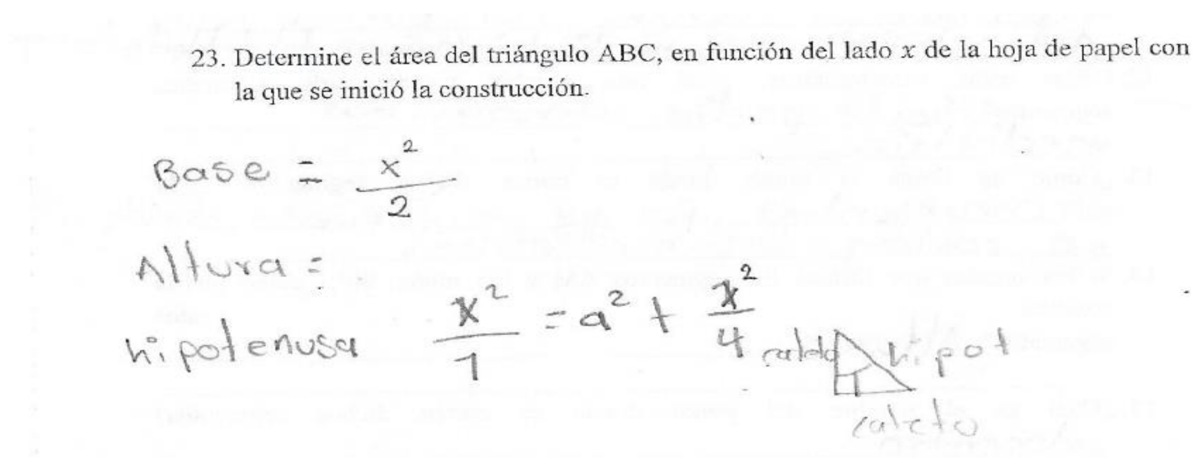

21. Construya, mediante el doblado de papel, la línea notable que falta tanto del triángulo ABC, como del triángulo BCD.
llevando el lado BC sobre el lado AC se formara la linea notable faltante y en el BCD seria llevar DB sobre BC para encontrar la linea notable faltante

Figura 62. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Se observa que la estudiante tiene dificultades para hallar el área de un triángulo, en función del lado x de la hoja de papel con que se inició la construcción, a pesar de tener aportes de información planteados en la guía, en los que se le da información suficiente que puede utilizar para resolver la pregunta. Valeria enuncia verbalmente que no comprende cómo debe utilizar el teorema de Pitágoras y que se le dificulta hacer operaciones con fraccionarios. Es importante aclarar que, en la rúbrica de dimensiones por niveles, no se consideraron descriptores relacionados con el área, pues este concepto solo se abordó en esta parte de la guía de enseñanza.


23. Determine el área del triángulo ABC, en función del lado x de la hoja de papel con la que se inició la construcción.

Base $= \frac{x^2}{2}$

Altura =

hipotenusa $\frac{x^2}{1} = a^2 + \frac{x^2}{4}$ catdo hipot

cateto

Figura 63. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En esta primera actividad de la fase de investigación guiada, se pueden reconocer unos descriptores principales que, de acuerdo a cada una de las dimensiones, ubican a Valeria en unos niveles de comprensión:

Dimensiones	**Niveles**
Contenido	**Aprendiz** - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos. - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo. - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los lados de un triángulo, y clasificarlo según este atributo.

	- Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los lados de un triángulo. - Utiliza instrumentos de medida para medir los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según la medida de sus lados. - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados. - Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos. **Novato** - Expresa con dificultad los conceptos de mediana y de baricentro. - Expresa con dificultad los conceptos de mediatriz y de circuncentro. - Expresa con dificultad los conceptos de bisectriz y de incentro. - Expresa con dificultad los conceptos de altura y de ortocentro.

Tabla 10. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 1 de Valeria.

Se puede inferir que la estudiante ha logrado avanzar en su proceso de comprensión de los conceptos asociados a los triángulos, en relación a lo observado en la fase de exploración; de acuerdo a las dimensiones y a sus diferentes categorías, la estudiante alcanza indicadores de aprendiz y de novato.

Actividad de enseñanza 2.

Durante la segunda actividad, se observó que la estudiante clasifica los triángulos según la medida de sus lados y reconoce cuáles son las características de un triángulo equilátero, en particular, ya que en la pregunta número dos responde que: "*tiene tres lados, es una figura plana, tiene tres vértices y tres ángulos iguales*"; esto se puede corroborar en la figura 70.

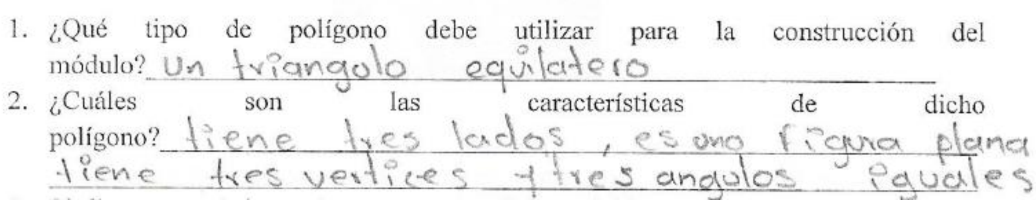
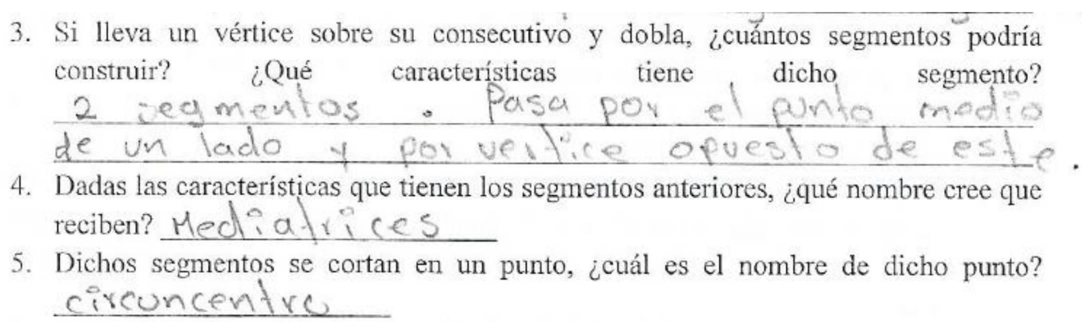

1. ¿Qué tipo de polígono debe utilizar para la construcción del módulo? Un triangolo equilatero
2. ¿Cuáles son las características de dicho polígono? tiene tres lados, es una figura plana tiene tres vertices y tres angulos iguales

Figura 64. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

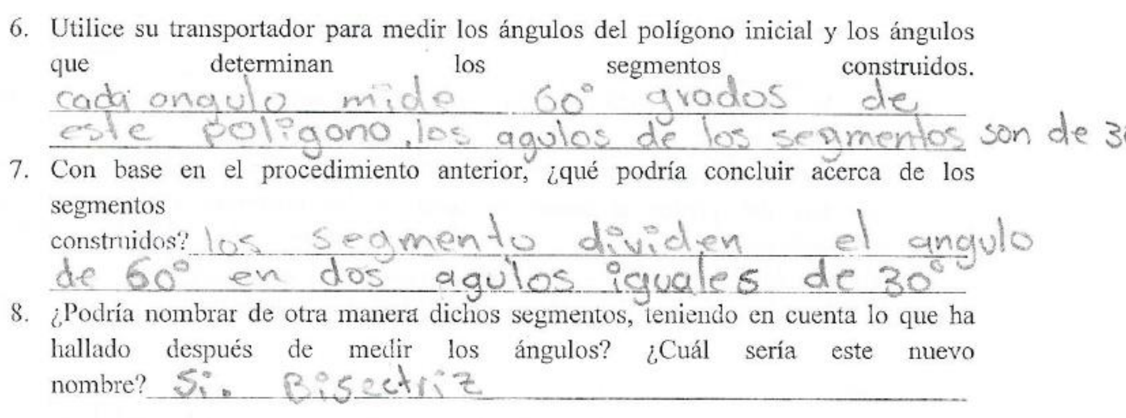
Al realizar un doblez en el que se lleva un vértice sobre otro vértice, reconoce que se trata de una mediatriz por ser un axioma del doblado de papel, de modo que a partir de dicha información y teniendo en cuenta que la figura inicial es un triángulo equilátero, responde con acierto las preguntas a continuación, mostrando que comprende las características de la mediatriz.



3. Si lleva un vértice sobre su consecutivo y dobla, ¿cuántos segmentos podría construir? ¿Qué características tiene dicho segmento? 2 segmentos . Pasa por el punto medio de un lado y por vertice opuesto de este .
4. Dadas las características que tienen los segmentos anteriores, ¿qué nombre cree que reciben? Mediatrices
5. Dichos segmentos se cortan en un punto, ¿cuál es el nombre de dicho punto? circuncentro

Figura 65. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

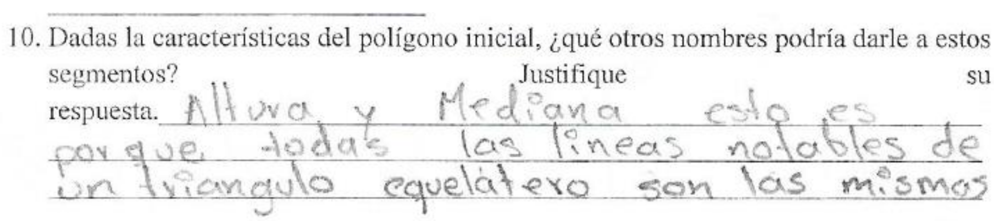
Se puede observar en las siguientes figuras que la estudiante reconoce las características de la bisectriz y nombra el punto donde estas se cortan; verbalmente enuncia que "*no tengo necesidad de medir los ángulos porque sé que se trata de un triángulo equilátero y estos tiene sus ángulos de igual medida y 180° dividido entre tres es igual a 60*°"; sin embargo, sigue la instrucción y mide los ángulos con el uso del transportador.



6. Utilice su transportador para medir los ángulos del polígono inicial y los ángulos que determinan los segmentos construidos. cada angulo mide 60° grados de este poligono, los agulos de los segmentos son de 3[illegible]
7. Con base en el procedimiento anterior, ¿qué podría concluir acerca de los segmentos construidos? los segmento dividen el angulo de 60° en dos agulos iguales de 30°
8. ¿Podría nombrar de otra manera dichos segmentos, teniendo en cuenta lo que ha hallado después de medir los ángulos? ¿Cuál sería este nuevo nombre? Si. Bisectriz

Figura 66. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

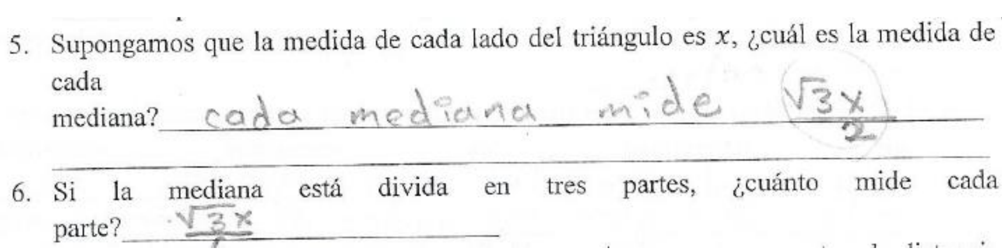
Valeria puede nombrar de otra manera la bisectriz y la mediatriz, argumentando su respuesta, tal como se muestra en la pregunta número 10: "*altura y mediana, esto es porque todas las líneas notables de un triángulo equilátero son las mismas*".



10. Dadas la características del polígono inicial, ¿qué otros nombres podría darle a estos segmentos? Justifique su respuesta. Altura y Mediana esto es porque todas las lineas notables de un triángulo equilátero son las mismos

Figura 67. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Halla correctamente la medida de las medianas en función del lado x del triángulo inicial, empleando algunos cálculos y el teorema de Pitágoras del cual se hizo alusión en la actividad de enseñanza 1. Es importante resaltar que la estudiante ya es capaz de utilizar este teorema, dado que en la actividad anterior había mencionado que no lo recordaba. Dado que reconoce que la mediana es también una mediatriz, utiliza el teorema de Pitágoras para hallar dicha medida, como se muestra en la respuesta que dio en la pregunta número 5, en la cual escribe el resultado que obtuvo: "*cada mediana mide* $\frac{\sqrt{3}}{2}x$".

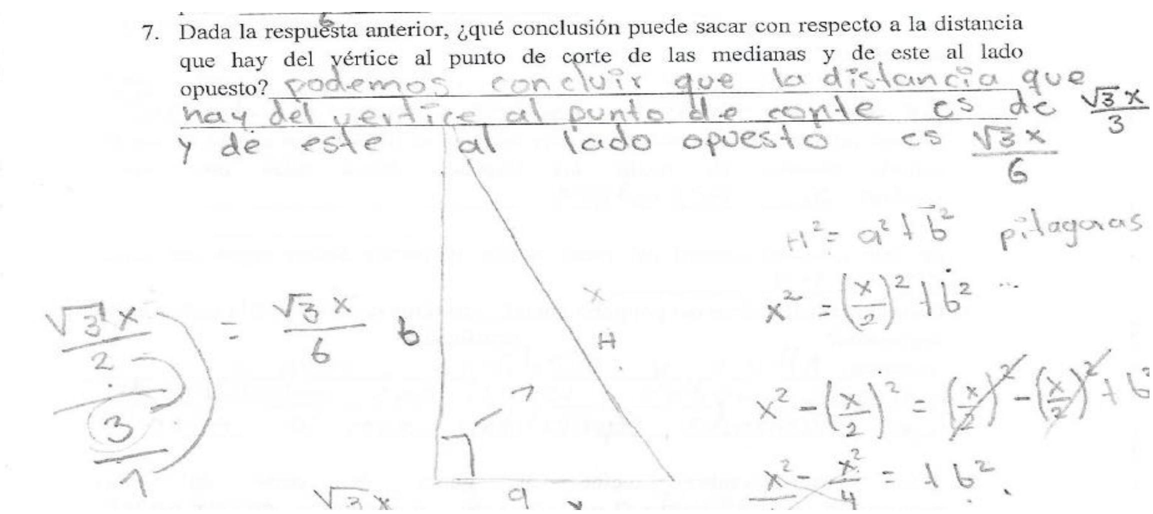


5. Supongamos que la medida de cada lado del triángulo es x, ¿cuál es la medida de cada mediana? cada mediana mide $\frac{\sqrt{3}x}{2}$

6. Si la mediana está divida en tres partes, ¿cuánto mide cada parte? $\sqrt{3}x$

Figura 68. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria logra hallar la medida de la distancia que hay entre el vértice y el punto donde se cortan las medianas y el punto donde se estas se cortan y el lado correspondiente, como se muestra en la respuesta de la pregunta número 7: *"la distancia que hay del vértice al punto de corte mide* $\frac{\sqrt{3}}{3}x$*, y del lado opuesto mide* $\frac{\sqrt{3}}{6}x$*".*


7. Dada la respuesta anterior, ¿qué conclusión puede sacar con respecto a la distancia que hay del vértice al punto de corte de las medianas y de este al lado opuesto? podemos concluir que la distancia que hay del vertice al punto de corte es de $\frac{\sqrt{3}x}{3}$ y de este al lado opuesto es $\frac{\sqrt{3}x}{6}$

$H^2 = a^2 + b^2$ pitagoras

$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + b^2$

$x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + b^2$

$x^2 - \frac{x^2}{4} = b^2$

Figura 69. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Durante el desarrollo de esta actividad, se pudo observar que la estudiante Valeria resuelve con facilidad las preguntas relativas a las líneas notables; de hecho, con respecto al desarrollo de la actividad número uno, se nota una mayor apropiación de las características de dichas líneas.

A continuación, se muestran los descriptores que caracterizan el nivel de comprensión de la estudiante en esta segunda actividad. Se puede concluir que Valeria ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión**.**

Dimensiones	Nivel
Contenido	**Aprendiz** - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los ángulos de un

	triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 11. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 2 de Valeria.

Actividad de enseñanza 3.

Durante el desarrollo de esta actividad, se observó que Valeria sigue instrucciones correctamente, de modo que pudo realizar con facilidad y habilidad los dobleces para la construcción de las líneas notables en un triángulo escaleno. En la siguiente figura, se puede notar que Valeria comprende que solo en el caso de los triángulos equiláteros las mediatrices pasan por los vértices, afirmando que: *"No. En los escalenos no pasa por ningún vértice. En los triángulos* *equiláteros los dobleces pasan por los vértices."* Es importante anotar que Valeria visualiza que las mediatrices en su triángulo, el cual es obtusángulo, no se cortan al interior de este.

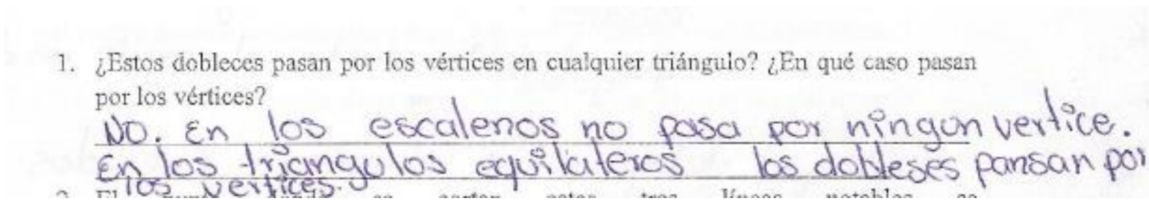

1. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? ¿En qué caso pasan por los vértices?
NO. En los escalenos no pasa por ningun vertice. En los triangulos equilateros los dobleses pansan por los vertices.

Figura 70. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria enuncia correctamente las diferencias que visualiza entre las mediatrices de un triángulo equilátero, un triángulo isósceles y un triángulo escaleno, al afirmar que *"en el triángulo equilátero pasa la mediatriz por los vértices y por el punto medio del lado opuesto, en el triángulo escaleno las mediatrices no pasan por el vértice. En el triángulo isósceles una de las tres mediatrices pasa por un vértice"*

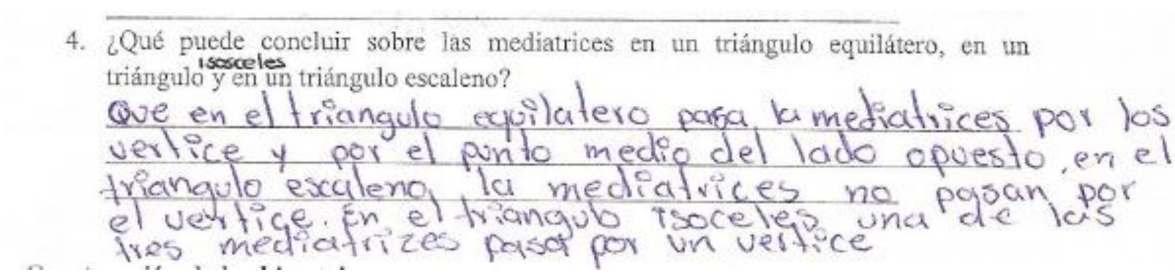

4. ¿Qué puede concluir sobre las mediatrices en un triángulo equilátero, en un triángulo isosceles y en un triángulo escaleno?
Que en el triangulo equilatero pasa la mediatrices por los vertice y por el punto medio del lado opuesto, en el triangulo escaleno, la mediatrices no pasan por el vertice. En el triangulo isoceles una de las tres mediatrizes pasa por un vertice

Figura 71. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Se observa que la estudiante describe correctamente cuáles son las características de las bisectrices, al afirmar que *"pasan por los vértices y que parte el ángulo en dos ángulos iguales".* Además, visualiza que en todos los triángulos las bisectrices necesariamente deben pasar por el vértice, como se muestra en la siguiente figura:

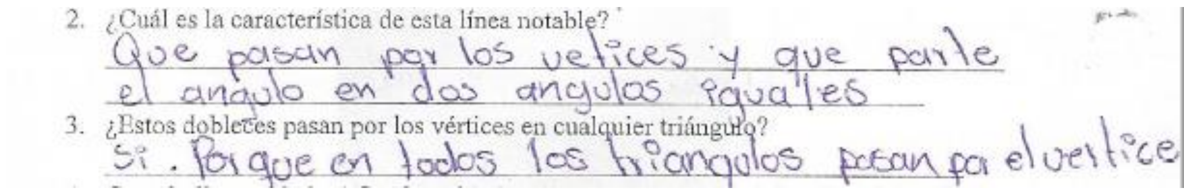

2. ¿Cuál es la característica de esta línea notable?
Que pasan por los vetices y que parte el angulo en dos angulos iguales
3. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo?
Si. Porque en todos los triangulos pasan por el vertice

Figura 72. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria realiza con destreza los dobleces pedidos y puede visualizar características de estos, como se puede corroborar en la respuesta a la pregunta número 4, en la que afirma que: *"el doblez parte al ángulo C en dos ángulos iguales"*.

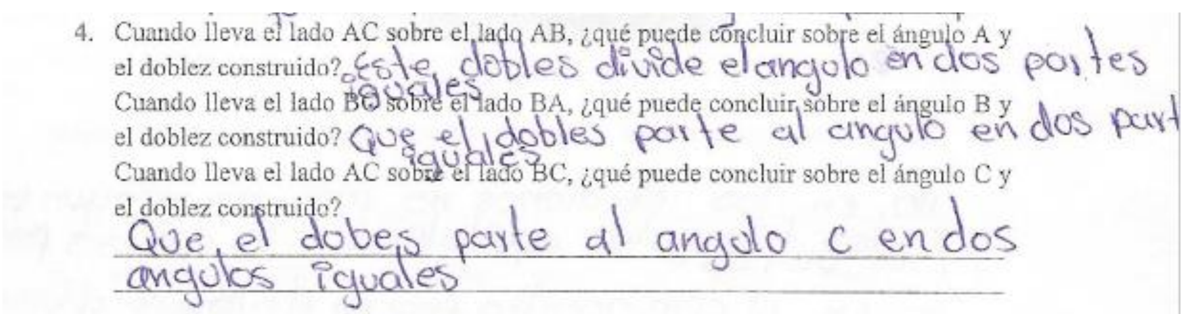
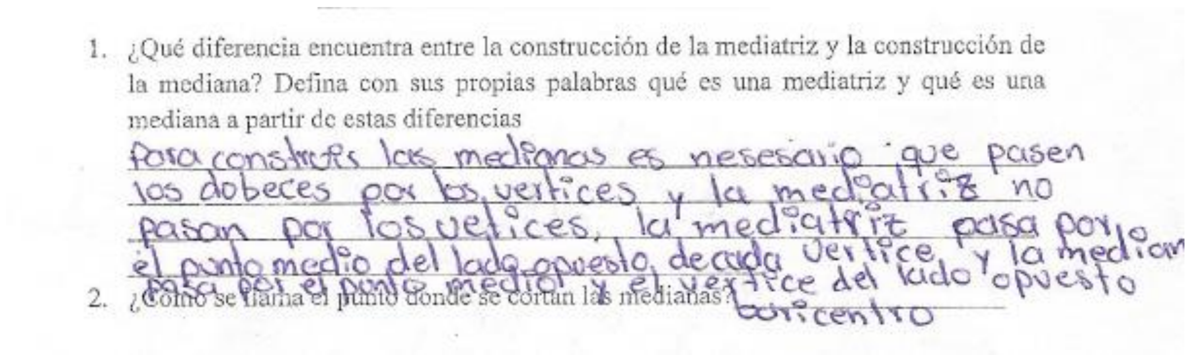

4. Cuando lleva el lado AC sobre el lado AB, ¿qué puede concluir sobre el ángulo A y el doblez construido? Este dobles divide el angulo en dos partes iguales
Cuando lleva el lado BC sobre el lado BA, ¿qué puede concluir sobre el ángulo B y el doblez construido? Que el dobles parte al angulo en dos part iguales
Cuando lleva el lado AC sobre el lado BC, ¿qué puede concluir sobre el ángulo C y el doblez construido?
Que el dobes parte al angulo C en dos angulos iguales

Figura 73. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

La estudiante describe cuáles son las diferencias entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana, dado que logra afirmar en la pregunta número 1 que: "*para construir las medianas es necesario que pasen los dobleces por los vértices y la mediatriz no pasan por los vértices".* Se puede inferir, además, que aunque reconozca las características de cada una y pueda definirlas como*: "la mediatriz para por el punto medio del lado opuesto de cada vértice y la mediana pasa por el punto medio y el vértice del lado opuesto",* le falta determinar la perpendicularidad entre la mediatriz y el lado correspondiente a ella.



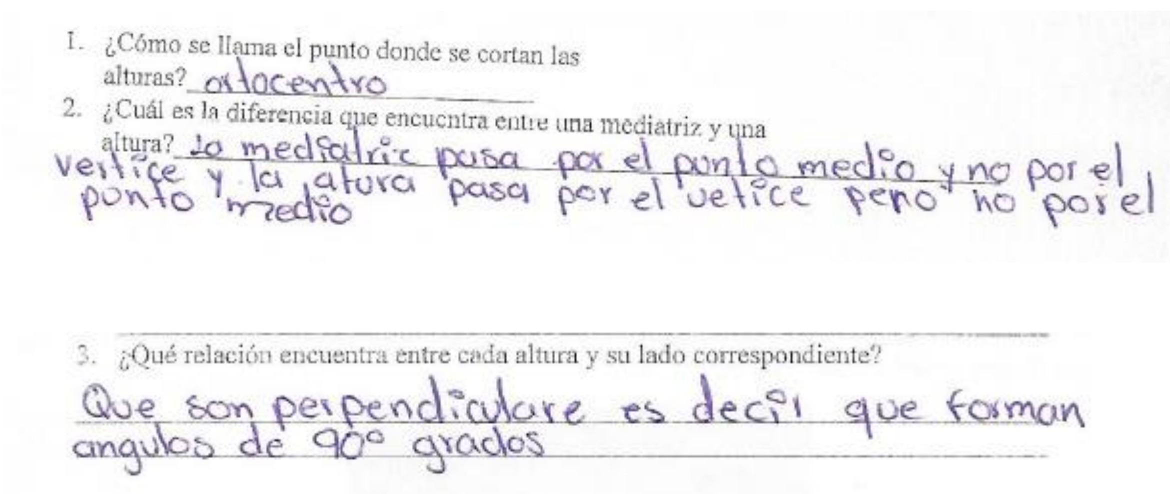
1. ¿Qué diferencia encuentra entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana? Defina con sus propias palabras qué es una mediatriz y qué es una mediana a partir de estas diferencias

Para construrs las medianas es nesesario que pasen los dobeces por los vertices y la mediatriz no pasan por los vetices, la mediatriz pasa por el punto medio del lado opuesto de cada vertice y la mediana pasa por el punto medio y el vertice del lado opuesto

2. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las medianas? baricentro

Figura 74. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria reconoce las diferencias entre una mediatriz y una altura y las enuncia así: *"la mediatriz pasa por el punto medio y no por el vértice y la altura pasa por el vértice pero no por el punto medio".* Además, visualiza la relación que hay entre cada altura y su lado correspondiente pues afirma que *"son perpendiculares es decir que forman un ángulo de 90° grados".*

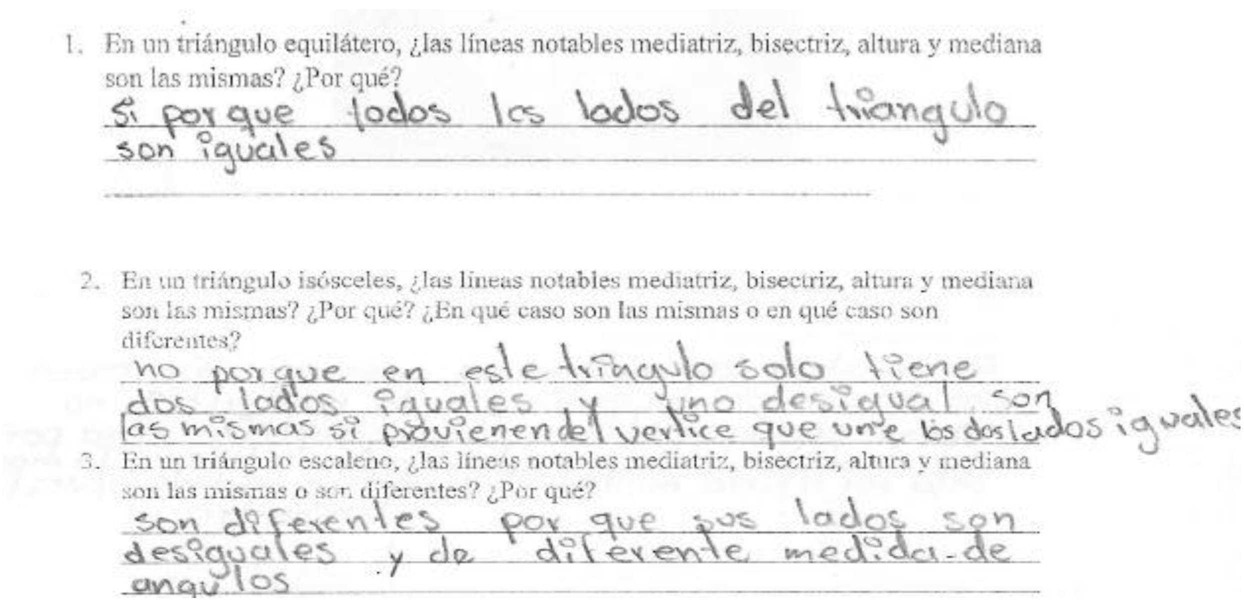


1. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? ortocentro
2. ¿Cuál es la diferencia que encuentra entre una mediatriz y una altura? la mediatric pasa por el punto medio y no por el vertice y la atura pasa por el vetice peno no por el ponto medio
3. ¿Qué relación encuentra entre cada altura y su lado correspondiente?

Que son perpendiculare es deci que forman angulos de 90° grados

Figura 75. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Valeria concluye que en un triángulo equilátero las líneas notables coinciden y afirma que: "*si porque todos los lados del triángulo son iguales*". Así mismo, reconoce que en un triángulo isósceles las líneas notables no necesariamente coinciden y solo lo hacen en un caso en particular, de modo que puede inferir que: *"no porque en este triángulo solo tiene dos lados iguales, son las mismas si provienen del vértice que une los dos lados iguales.* En cuanto a las líneas notables en un triángulo escaleno, Valeria afirma que *"son diferentes porque sus lados son desiguales y de diferente medida de ángulos"*



1. En un triángulo equilátero, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué?

Si porque todos los lados del triángulo son iguales

2. En un triángulo isósceles, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? ¿En qué caso son las mismas o en qué caso son diferentes?

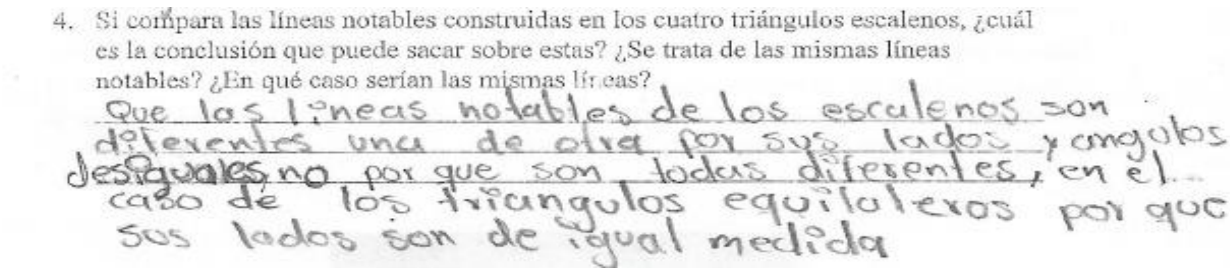
no porque en este triángulo solo tiene dos lados iguales y uno desigual son las mismas si provienen del vertice que une los dos lados iguales

3. En un triángulo escaleno, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas o son diferentes? ¿Por qué?

son diferentes por que sus lados son desiguales y de diferente medida de angulos

Figura 76. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Finalmente, la estudiante puede concluir con respecto a la pregunta número 4 que *"las líneas notables de los escalenos son diferentes una de otra por sus lados y ángulos desiguales, no porque son todas diferentes, en el caso de los triángulos equiláteros porque sus lados son de igual medida".*


4. Si compara las líneas notables construidas en los cuatro triángulos escalenos, ¿cuál es la conclusión que puede sacar sobre estas? ¿Se trata de las mismas líneas notables? ¿En qué caso serían las mismas líneas?

Que las lineas notables de los escalenos son diferentes una de otra por sus lados y angulos desiguales, no por que son todas diferentes, en el caso de los triangulos equilateros por que sus lados son de igual medida

Figura 77. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

A continuación, se muestran los descriptores que caracterizan el nivel de comprensión de la estudiante en esta tercera actividad.

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Aprendiz** Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un

	lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 12. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 3 de Valeria.

En esta tercera actividad, se observa que Valeria ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión, a excepción de aquellos relativos a la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos y a la utilización de instrumentos para la medida de ángulos, debido a que para el desarrollo de esta actividad no se tuvieron en cuenta.

Proyecto final de síntesis.

A través de este proyecto final de síntesis, se pudo evidenciar que Valeria fortaleció su proceso de comprensión con respecto a las definiciones de las líneas notables, en la medida en que pudo comunicar las características de dichas líneas a sus compañeros de clase, mediante el doblado de papel. En general, se pudo observar que Valeria:

- Comprendió las características de las líneas notables.
- Pudo definir las líneas notables a partir de la visualización de sus características.
- Se expresó espontáneamente de modo que sus compañeros pudieran comprender las características de las líneas notables.
- Mostró a sus compañeros que, mediante el doblado de papel, se podrían visualizar fácilmente las características de cada una de las líneas notables.

Valeria respondió adecuadamente las inquietudes de sus compañeros de clase, como se puede observar en la siguiente descripción de preguntas y respuestas.

Estudiante: "¿Cuál es la diferencia entre una mediana y una mediatriz?"

Valeria: "la mediatriz es perpendicular al lado y la mediana no, además la mediatriz no necesariamente pasa por el vértice al lado opuesto y la mediana si".

Estudiante: "¿cuáles son las diferencias entre un triángulo isósceles y un triángulo equilátero?"

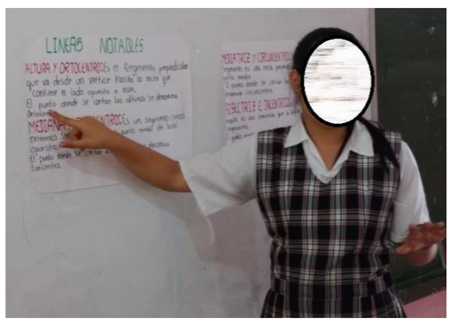


Figura 78. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Valeria: "la diferencia es que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y el equilátero tiene tres lados iguales, se dice que un triángulo equilátero también es isósceles pero un triángulo isósceles no es un triángulo equilátero".

Estudiante: "¿cómo se construye con doblado de papel una altura, que es la más complicada?"

Valeria: "se lleva un lado sobre sí mismo y se va deslizando hasta que el doblez pase por el vértice del lado opuesto"

Figura 79. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En esta fase de proyecto final de síntesis y en todo el proceso del desarrollo de la guía de enseñanza, se pudieron reconocer unos descriptores que, de acuerdo a las dimensiones de comprensión, ubican a Valeria en un nivel de comprensión final, el cual se describe a continuación.

Dimensiones	Nivel
Contenido	**Maestría** - Explica el concepto de mediana y de baricentro. - Explica el concepto de mediatriz y de circuncentro. - Explica los conceptos de bisectriz y de incentro. - Explica los conceptos de altura y de ortocentro.
Método	**Maestría** - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las medianas de un triángulo. - Usa la construcción de las medianas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las mediatrices de un triángulo. - Usa la construcción de las mediatrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las bisectrices de un triángulo. - Usa la construcción de las bisectrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las alturas de un triángulo. - Usa la construcción de las alturas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.

Praxis	**Maestría** Explica las características de la mediana en diversas construcciones con doblado de papel. .Explica las características de la mediatriz en diversas construcciones con doblado de papel. Explica las características de la bisectriz en diversas construcciones con doblado de papel. Explica las características de la altura en diversas construcciones con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Maestría** Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediana y de baricentro, y las usa en diferentes contextos. Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediatriz y de circuncentro, y las usa en diferentes contextos. Expresa las definiciones formales de los conceptos de bisectriz y de incentro, y las usa en diferentes contextos. Expresa las definiciones formales de los conceptos de altura y de ortocentro, y las usa en diferentes contextos.

Tabla 13. Descriptores de categoría por nivel. Proyecto final de síntesis de Valeria.

Entrevista.

Durante el proyecto final de síntesis, se pudo evidenciar que Valeria comprendió las características de los triángulos y tuvo la posibilidad de explicar a sus compañeros las propiedades de las líneas notables de modo que al finalizar la actividad la mayoría pudo definir correctamente dichas líneas. En general, Valeria explicó en la entrevista las siguientes ideas:

"*Mi aprendizaje sobre la geometría no ha sido muy bueno porque en los años anteriores no estudiábamos mucho esta parte y por lo general era sobre los polígonos y olvidada todo fácilmente, también hallábamos áreas de figuras y su perímetro, pero yo solo me acordaba del perímetro porque las fórmulas para el área se me olvidaban. Este año aprendí más y pude entender bien la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. El doblado de papel fue una buena herramienta porque primero todos tenemos una hoja de papel y segundo porque es más fácil manipularlo que un compás, además los* *dobleces trazados permiten ver mejor las características de dichas líneas. Al realizar una comparación entre el uso del compás y el doblado de papel pienso que es más fácil y práctico el doblado de papel. Mediante el doblado de papel pude ver fácilmente las características de las líneas notables y así poder definirlas, comprendí las características de cada una y pude explicárselas a mis compañeros en el proyecto final de síntesis".*

Mediante el desarrollo de la guía de enseñanza, la observación y la entrevista, se pudo corroborar que Valeria comprendió las características de los triángulos evidenciado el paso del nivel de novato y aprendiz, al nivel de maestría, en todas las dimensiones.

Lucas

Fase de exploración.

En el desarrollo de la actividad propuesta, se puede observar que el estudiante reconoce las características de los triángulos y es capaz de nombrarlos según algunos de sus atributos; es decir, según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. Así mismo, se encontró que tiene dificultades para reconocer los ángulos según su posición pues aunque reconozca cuándo son adyacentes, no lo hace cuando son consecutivos. Frente a las definiciones de polígono, de polígono cóncavo y del convexo, tuvo falencias en establecer sus características principales. En la siguiente figura se pueden corroborar estas afirmaciones.

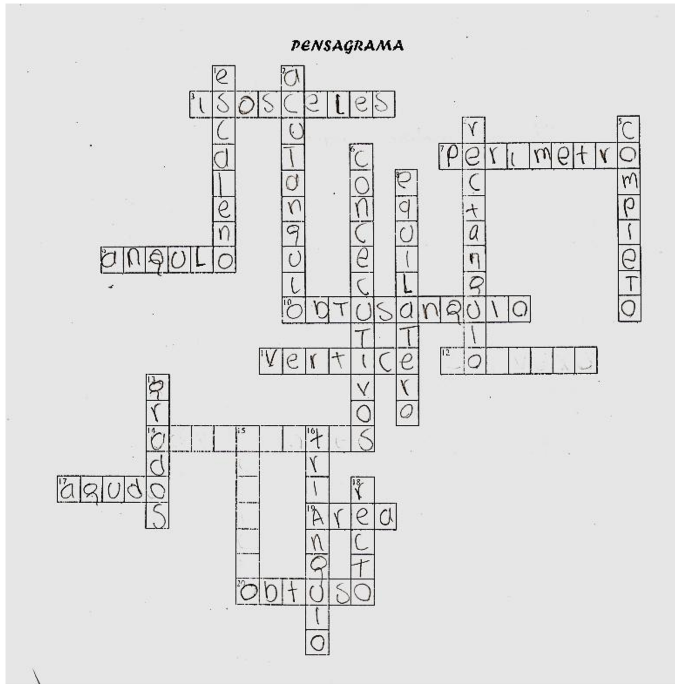


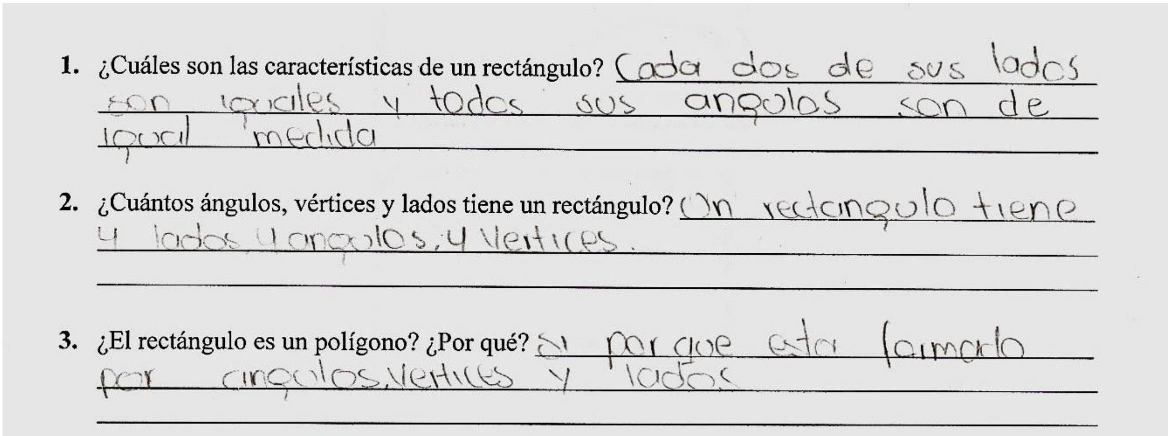
Figura 80. Pensagrama, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

En cuanto a la actividad desarrollada por una autoridad académica, la cual estuvo conformada por sus dos padres, no hubo respuesta de ellos pues tienen estudios básicos incompletos. Por otro lado, se observa que el estudiante Lucas logra nombrar algunos objetos geométricos, según las características establecidas en las preguntas; sin embargo, la investigadora puede inferir que el estudiante no tiene una comprensión global y flexible de las generalidades de los triángulos.

Fase de investigación guiada.

Actividad de enseñanza 1.

Durante la primera actividad, se observó que Lucas reconoce las características del rectángulo y las logra enunciar; esto se evidencia cuando responde "*un rectángulo tiene 4 lados, 4 ángulos, 4 vértices"*; así mismo, menciona que "*cada dos de sus lados son iguales y todos sus* *ángulos son de igual medida*”.

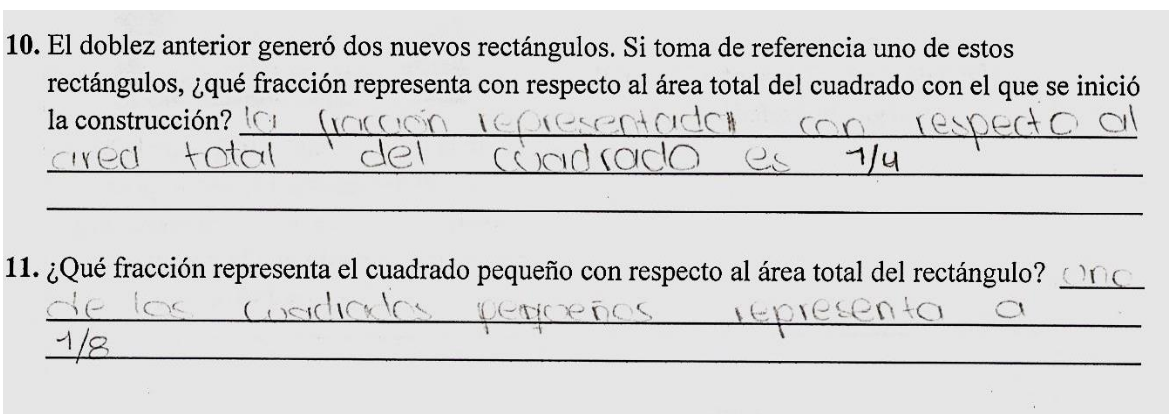

1. ¿Cuáles son las características de un rectángulo? Cada dos de sus lados son iguales y todos sus angulos son de igual medida

2. ¿Cuántos ángulos, vértices y lados tiene un rectángulo? Un rectangulo tiene 4 lados, 4 angulos, 4 Vertices.

3. ¿El rectángulo es un polígono? ¿Por qué? Si por que esta formado por angulos, Vertices y lados

Figura 81. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

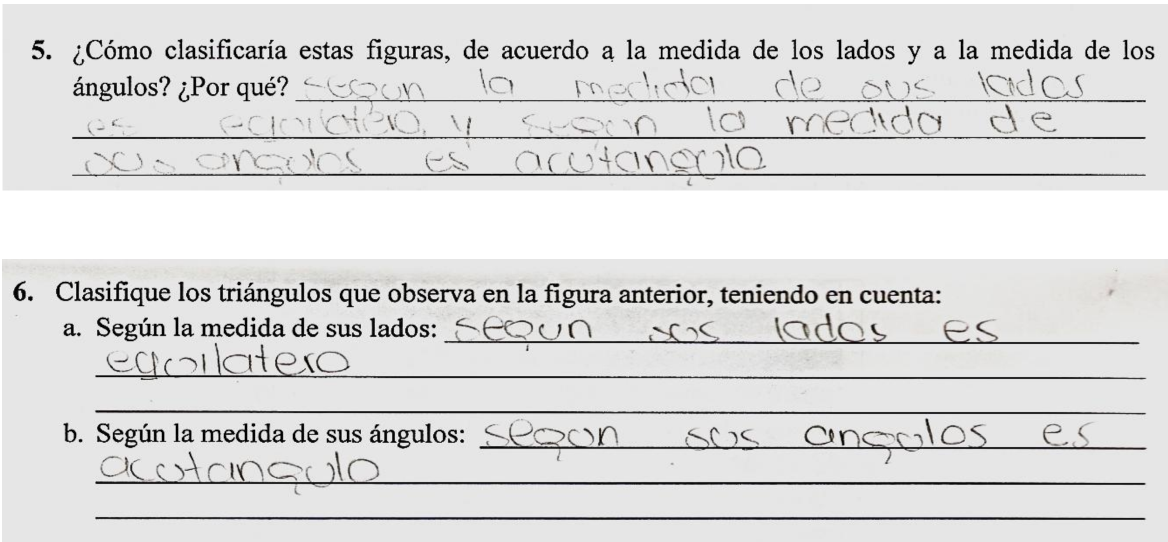
Responde adecuadamente las preguntas relacionadas con las fracciones del área y utiliza números fraccionarios para comunicarlas. Esto se observa en la figura 82.


10. El doblez anterior generó dos nuevos rectángulos. Si toma de referencia uno de estos rectángulos, ¿qué fracción representa con respecto al área total del cuadrado con el que se inició la construcción? la fracción representada con respecto al area total del cuadrado es 1/4

11. ¿Qué fracción representa el cuadrado pequeño con respecto al área total del rectángulo? Uno de los cuadrados pequeños representa a 1/8

Figura 82. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Las preguntas relacionadas con la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, fueron respondidas de manera correcta, mostrando que el estudiante tiene idea de estas clasificaciones, tal como se muestra en las siguientes figuras. En particular, en la pregunta 6, Lucas responde correctamente, pero le faltó ser más explícito en la justificación de las respuestas dadas.

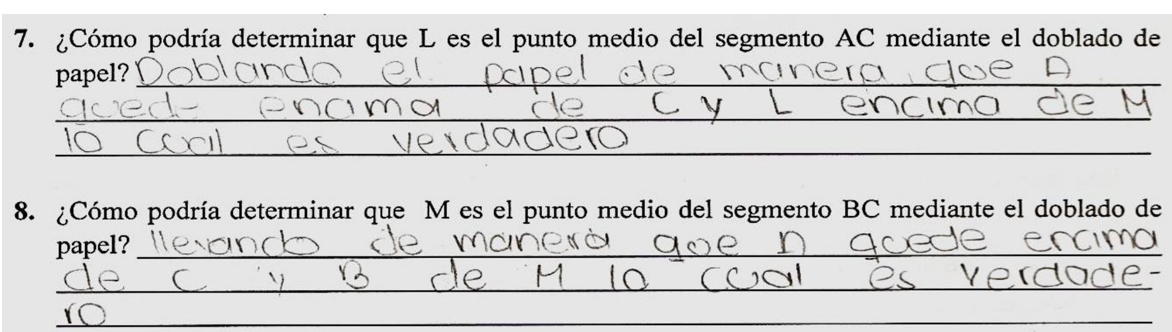


5. ¿Cómo clasificaría estas figuras, de acuerdo a la medida de los lados y a la medida de los ángulos? ¿Por qué? segun la medida de sus lados es equilatero, y segun la medida de sus angulos es acutangulo

6. Clasifique los triángulos que observa en la figura anterior, teniendo en cuenta:
   a. Según la medida de sus lados: segun sus lados es equilatero
   b. Según la medida de sus ángulos: segun sus angulos es acutangulo

Figura 83. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante describe muy vagamente por qué el punto L es el punto medio del segmento AC, a través del doblado de papel, como se observa en la respuesta a la pregunta número 7: "*doblando el papel de manera que A quede encima de C y L encima de M lo cual es verdadero*"; después de repetir el procedimiento varias veces, el estudiante manifiesta la misma definición en la respuesta de la pregunta 8. "*llevando de manera que D quede encima de C y B de M lo cual es verdadero".*



7. ¿Cómo podría determinar que L es el punto medio del segmento AC mediante el doblado de papel? Doblando el papel de manera que A quede encima de C y L encima de M lo cual es verdadero

8. ¿Cómo podría determinar que M es el punto medio del segmento BC mediante el doblado de papel? llevando de manera que D quede encima de C y B de M lo cual es verdadero

Figura 84. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En las siguientes figuras se puede evidenciar que el estudiante reconoce las características de las líneas notables de los triángulos, dada una revisión previa de los aportes de información planteados en la guía. Realiza el procedimiento de doblar el papel hasta que puede obtener conclusiones de dichos dobleces y responder las preguntas planteadas, como se muestra en la respuesta a la pregunta número 9, en la que afirma que el segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: *"mediana".* Por otro lado, la respuesta a la pregunta número 11*: "doblando el papel de forma que B quede encima de C y nos da 90°*, permite corroborar que Lucas reconoce algunas características que se visualizan al realizar este doblez. La respuesta a la pregunta número 12 en la que Lucas afirma que a los segmentos anteriormente nombrados como medianas *"otro nombre sería mediatrices"*, permite evidenciar que reconoce las características de los dobleces que ha llevado a cabo y es capaz de relacionarlos con una línea notable. Asimismo, la respuesta a la pregunta número 14 *"como altura"*, posibilita inferir que Lucas reconoce las características de la altura de un triángulo y las relaciona con el doblez que ha realizado inicialmente.

9. El segmento que une cada punto medio de los lados con el vértice opuesto de la figura ABC se denomina: Medianas

11. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado de papel, que los segmentos AM y CB forman ángulos de 90°? Doblando el papel de forma que B quede encima de C y nos da 90°

12. Dadas estas características, ¿qué otro nombre podría darle a dichos segmentos? otro nombre sería mediatrices

14. Si los ángulos que forman los segmentos AM y CB miden 90°, ¿cómo podría nombrar estos segmentos? Como altorentos

Figura 85. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Aparte de reconocer las características de las líneas notables anteriormente mencionadas, tanto la respuesta a la pregunta número 16: *llevando el vértice A sobre el vértice B y queda dividido en dos partes”*, como la respuesta a la pregunta número 17: “*si porque las bisectrices son las rectas que dividen los ángulos del triángulo en partes iguales*”, señalan que Lucas reconoce las características de la bisectriz y las relaciona con los dobleces que ha realizado, aunque la respuesta a la pregunta 17 no es coherente frente a lo que se le preguntó.

16. ¿Cómo podría determinar, utilizando el doblado, que el segmento AM divide en dos ángulos iguales al ángulo BAC? llevando el vertice A sobre el vertice B y queda dividido en 2 partes

17. ¿Cómo podría nombrar, de otro modo, al segmento AM? ¿Podría nombrar el segmento BL de la misma manera? ¿Por qué? Si porque las Bisectrices son las rectas que dividen los angulos del triangulo en partes iguales.

Figura 86. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante reconoció las características de las líneas notables en un triángulo e identificó que solo en el caso de los triángulos equiláteros estas líneas coinciden, tal como se muestra en la siguiente figura:

20. En un triángulo equilátero, ¿se podría decir que las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas son iguales? ¿Por qué? Si por que al hacer los dobleces todos coinciden.

Figura 87. Actividad de enseñanza 1, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En esta primera actividad de la fase de investigación guiada, se pueden reconocer unos descriptores principales que, de acuerdo a cada una de las dimensiones, ubican a Lucas en unos niveles de comprensión determinados:

Dimensión	**Nivel**
Contenido	**Aprendiz** - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo. - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo. - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos.
Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los lados y los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede

	clasificar los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Comunica, usando un lenguaje adecuado, la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. - Expresa el concepto de área usando un lenguaje adecuado. - Expresa el concepto de área usando un lenguaje adecuado. **Novato** - Expresa con dificultad los conceptos de mediana y de baricentro. - Expresa con dificultad los conceptos de mediatriz y de circuncentro. - Expresa con dificultad los conceptos de bisectriz y de incentro. - Expresa con dificultad los conceptos de altura y de ortocentro.

Tabla 14. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 1 de Lucas.

Se puede inferir que el estudiante ha logrado avanzar en su proceso de comprensión de los conceptos asociados a los triángulos; de acuerdo a las dimensiones y a sus diferentes categorías, el estudiante alcanza indicadores de aprendiz y de novato.

Actividad de enseñanza 2.

Durante la segunda actividad, se observó que Lucas clasifica los triángulos según la medida de sus lados; esto se corrobora cuando responde en la pregunta número 1 que: *"triángulo* *equilátero"* y, posteriormente, en la pregunta número 2, que *"las características de dicho polígono son que todos sus lados y ángulos son de igual medida"*

1. ¿Qué tipo de polígono debe utilizar para la construcción del módulo? Triangulo equilatero
2. ¿Cuáles son las características de dicho polígono? las caracteristicas de dicho poligono son que todos sus lados y angulos son de igual medida

Figura 88. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Lucas reconoce algunas características de la mediana mediante el doblado de papel y nombra correctamente el punto donde estas se cortan, como se puede observar en la respuesta a la pregunta número 3 en la que afirma que: "*se puede construir un segmento, la característica es que divide el triángulo en dos"*; no obstante, el estudiante no es explícito en establecer que el triángulo se divide en dos partes, dos partes iguales o en dos partes que tienen ciertas características. Verbalmente y en la respuesta a la pregunta 4, Lucas afirma que dichos dobleces generan la mediana del triángulo. Es importante resaltar que, en esta parte de la guía, se hacía alusión al concepto de mediatriz (por su construcción con doblado de papel); sin embargo, dado que el triángulo es equilátero, el estudiante mencionó las características de la mediana.

3. Si lleva un vértice sobre su consecutivo y dobla, ¿cuántos segmentos podría construir? ¿Qué características tiene dicho segmento? Se puede constroir on segmento, la caracteristica es que divide el triangulo en 2
4. Dadas las características que tienen los segmentos anteriores, ¿qué nombre cree que reciben? la mediana
5. Dichos segmentos se cortan en un punto, ¿cuál es el nombre de dicho punto? El baricentro

Figura 89. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Utiliza adecuadamente instrumentos de medida de ángulos para hallar sus medidas y, posteriormente, determinar que el doblez realizado es una bisectriz, según lo aprendido en la actividad anterior, lo cual se puede evidenciar en la respuesta a la pregunta número 8 en la que responde que el doblez sería: "*la bisectriz*". Después de realizar una medición de los ángulos y corroborar numéricamente que se trata de ángulos de igual medida, Lucas respondió en la pregunta número 6 que *"los ángulos del polígono miden 60º cada uno, los ángulos que determinan el segmento construido miden 30º".*

6. Utilice su transportador para medir los ángulos del polígono inicial y los ángulos que determinan los segmentos construidos. los angulos del poligono miden 60° cada uno, los angulos que determinan el segmento constuido miden 30°
8. ¿Podría nombrar de otra manera dichos segmentos, teniendo en cuenta lo que ha hallado después de medir los ángulos? ¿Cuál sería este nuevo nombre? la Bisectriz

Figura 90. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Reconoce que en el triángulo equilátero las cuatro líneas notables coinciden, cuando escribe en la pregunta 10: "*las mediatrices y alturas ya que ambos segmentos son perpendiculares al lado del triángulo y los divide en partes iguales*", de modo que puede concluir que una mediatriz es a la vez altura.

10. Dadas la características del polígono inicial, ¿qué otros nombres podría darle a estos segmentos? Justifique su respuesta. las mediactrices y alturas ya que ambos segmentos son perpendiculares al lado del triangulo y los divide en partes iguales
11. ¿Qué otro nombre recibe el punto de corte de estas segmentos? Circuncentro y ortocentro

Figura 91. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

A Lucas se le dificulta hallar la medida de las medianas en función de x; por tanto, la pregunta 5 no la respondió, lo que evidencia la dificultad para la realización de cálculos, teniendo en cuenta que se dieron sugerencias y orientaciones en los aportes de información.

4. ¿El doblez que hizo al llevar cada vértice al punto donde se cortan las medianas determina que cada una de ellas quede dividida en cuántas partes? en 3 partes
5. Supongamos que la medida de cada lado del triángulo es x, ¿cuál es la medida de cada mediana?
6. Si la mediana está divida en tres partes, ¿cuánto mide cada parte? Cada parte mide un 1/2

Figura 92. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Debido a la confusión que tuvo el estudiante en las respuestas anteriores, la pregunta número 7 tampoco se respondió; esto se evidencia en la figura 99.

7. Dada la respuesta anterior, ¿qué conclusión puede sacar con respecto a la distancia que hay del vértice al punto de corte de las medianas y de este al lado opuesto?

Figura 93. Actividad de enseñanza 2, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Se pudo observar durante el desarrollo de esta actividad, que el estudiante Lucas, a diferencia de la primera actividad, puede expresar con mayor espontaneidad y de forma adecuada las definiciones de las líneas notables y reconocer el punto donde estas se cortan, mediante el doblado de papel, aun cuando presenta dificultades para hallar medidas en función del lado x del triángulo inicial.

A continuación, se muestran los descriptores que caracterizan el nivel de comprensión del estudiante en esta segunda actividad, en la cual se observa que ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión. Cabe aclarar que no se muestran descriptores relacionados con el concepto de área, o con los cálculos de la medida de las medianas, dado que estas actividades solo se plantearon en esta parte del trabajo.

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Aprendiz** - Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Utiliza instrumentos de medida para medir los ángulos de un triángulo, y clasificarlo según este atributo. - Usa el doblado de papel para comparar las medidas de los ángulos de un triángulo. - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Utiliza con destreza el doblado de papel de modo que puede clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos. - Visualiza las características de la mediana en la construcción con doblado de papel.

	- Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 15. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 2 de Lucas.

Actividad de enseñanza 3.

Durante el desarrollo de esta actividad, se observó que Lucas sigue instrucciones correctamente, de modo que pudo realizar con facilidad y habilidad los dobleces para la construcción de las líneas notables en un triángulo escaleno. La siguiente figura permite demostrar que Lucas comprende que solo en el caso de los triángulos equiláteros las mediatrices pasan por los vértices, enunciando que *"no pasan por los vértices de cualquier triángulo, pasarían en el caso del triángulo equilátero"*

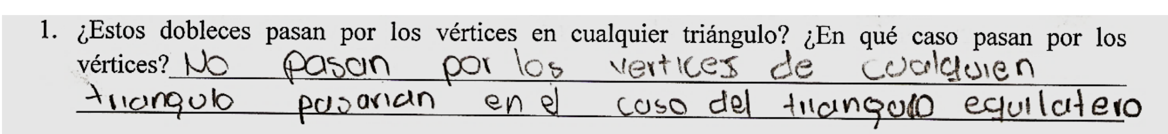
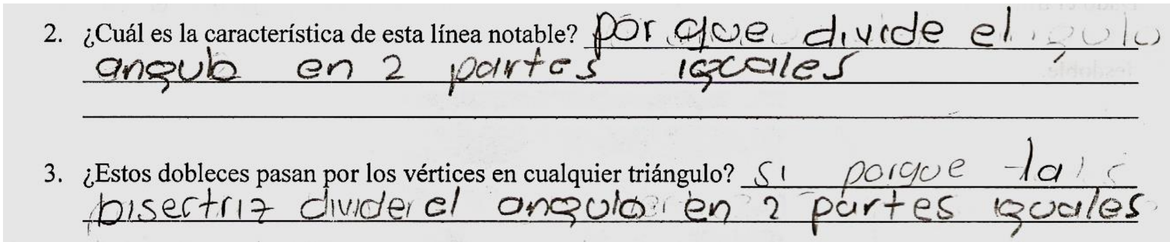

1. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? ¿En qué caso pasan por los vértices? No pasan por los vertices de cualquien triangulo pasarian en el caso del triangulo equilatero

Figura 94. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Se observa que Lucas visualiza las características de las bisectrices al afirmar que estas *"dividen el ángulo en dos partes iguales"*; además, reconoce que en todos los triángulos pasa por el vértice debido a su característica de dividir en dos ángulos iguales.

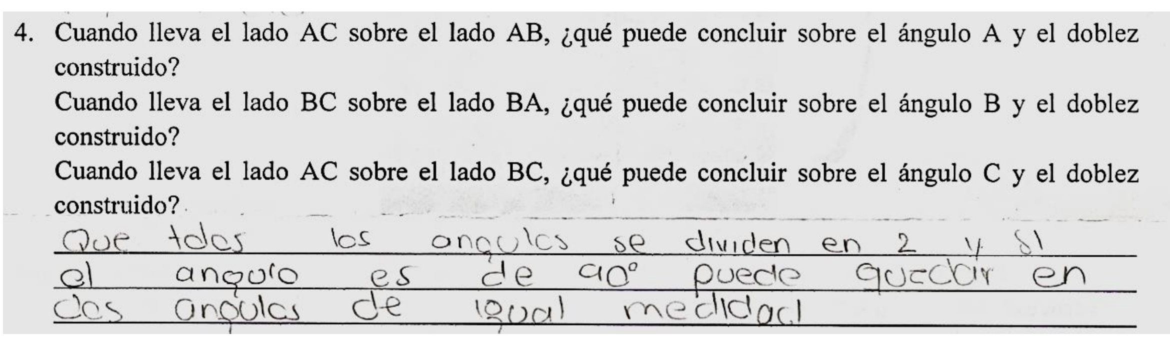


2. ¿Cuál es la característica de esta línea notable? por que divide el angulo en 2 partes iguales

3. ¿Estos dobleces pasan por los vértices en cualquier triángulo? si porque la bisectriz divide el angulo en 2 partes iguales

Figura 95. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

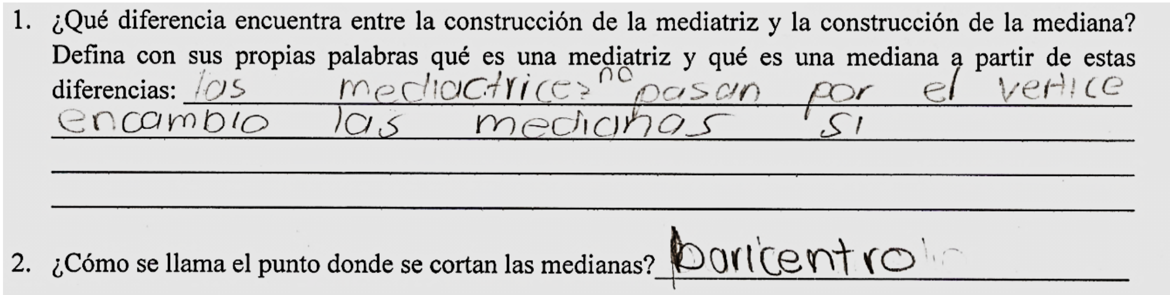
Lucas realiza con destreza los dobleces solicitados y puede visualizar características de estos, como se puede observar en la respuesta a la pregunta número 4, en la que afirma que: *"todos los ángulos se dividen en 2 y si el ángulo mide 90° puede quedar en dos ángulos de igual medida"*.



4. Cuando lleva el lado AC sobre el lado AB, ¿qué puede concluir sobre el ángulo A y el doblez construido?
Cuando lleva el lado BC sobre el lado BA, ¿qué puede concluir sobre el ángulo B y el doblez construido?
Cuando lleva el lado AC sobre el lado BC, ¿qué puede concluir sobre el ángulo C y el doblez construido?
Que todos los angulos se dividen en 2 y si el angulo es de 90° puede quedar en dos angulos de igual medidad

Figura 96. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

El estudiante logra visualizar las diferencias entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana, de tal manera que puede afirmar que: "*las mediatrices no pasan por el vértice y las medianas si"*. Esto se puede observar en la figura 103.

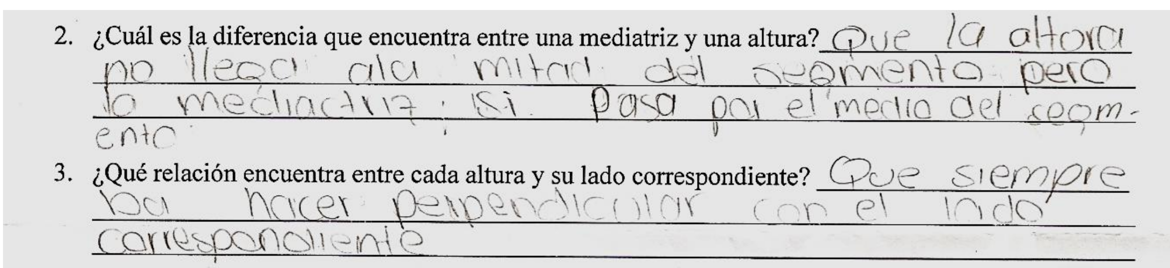


1. ¿Qué diferencia encuentra entre la construcción de la mediatriz y la construcción de la mediana? Defina con sus propias palabras qué es una mediatriz y qué es una mediana a partir de estas diferencias: los mediactrices no pasan por el vertice encambio las medianas si

2. ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las medianas? baricentro

Figura 97. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Lucas describe las diferencias entre una mediatriz y una altura como se muestra en la siguiente figura en la que afirma que: "*la altura no llega a la mitad del segmento pero la mediatriz si pasa por el medio del segmento*"; de esta manera, se puede inferir que Lucas reconoce las características de la mediatriz y de la altura con un lenguaje muy básico y reconociéndolas en los dobleces que lleva a cabo.

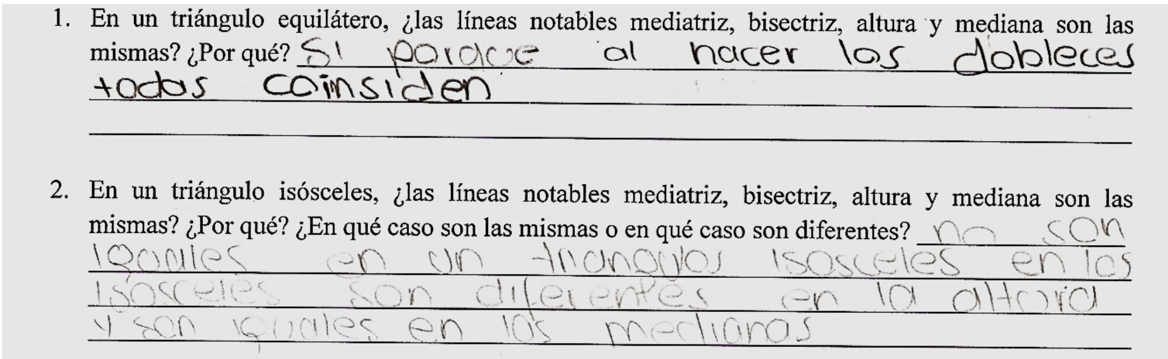


2. ¿Cuál es la diferencia que encuentra entre una mediatriz y una altura? Que la altura no llega ala mitad del segmento pero la mediactriz si pasa por el medio del segmento

3. ¿Qué relación encuentra entre cada altura y su lado correspondiente? Que siempre va hacer perpendicular con el lado correspondiente

Figura 98. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Lucas reconoce que solo en el triángulo equilátero las cuatro líneas notables coinciden, pues en la respuesta a la pregunta número 1 afirma que: *"si, porque al hacer los dobleces todos coinciden".* Además, se puede observar que, al referirse a un triángulo isósceles, no tiene claridad frente a las definiciones de las líneas notables; así lo muestra la respuesta a la pregunta número 2, cuando el estudiante manifiesta que: "*no son iguales en un triángulo isósceles, en los isósceles* *son diferentes en la altura y son iguales en las medianas*"; lo cual muestra las confusiones que tiene Lucas en este apartado.

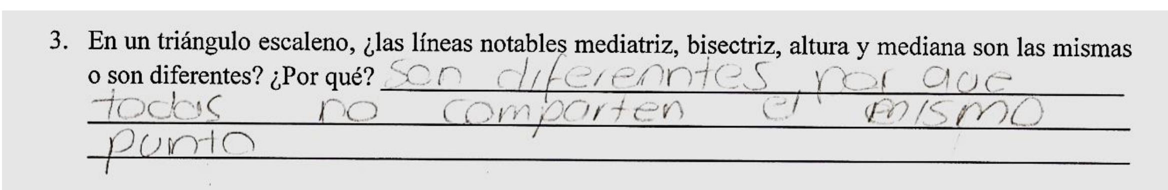


1. En un triángulo equilátero, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? Si porque al hacer los dobleces todos coinsiden

2. En un triángulo isósceles, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas? ¿Por qué? ¿En qué caso son las mismas o en qué caso son diferentes? no son iguales en un triangulos isosceles en los isosceles son diferentes en la altura y son iguales en las medianas

Figura 99. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

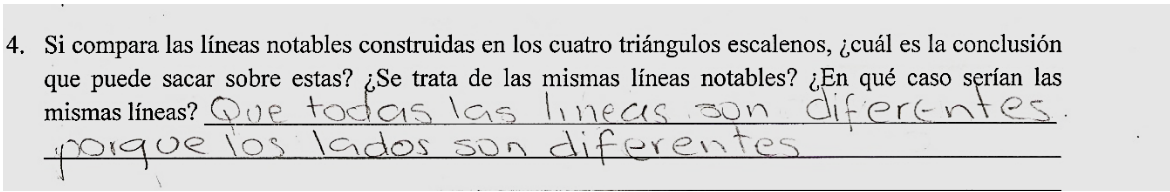
Con respecto al triángulo escaleno, afirma que las líneas notables no coinciden, dado que *"son diferentes porque todas no comparten el mismo punto"*; en esta respuesta se observa que el estudiante presenta imprecisiones para explicar por qué las líneas notables son diferentes en los triángulos escalenos.



3. En un triángulo escaleno, ¿las líneas notables mediatriz, bisectriz, altura y mediana son las mismas o son diferentes? ¿Por qué? son diferentes por que todas no comparten el mismo punto

Figura 100. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Finalmente, Lucas puede concluir que las líneas notables no coinciden en un triángulo escaleno, mientras que, en el triángulo equilátero, sí, pues afirma que: *"todas las líneas son diferentes porque los lados son diferentes"*. Acá se puede observar más precisión con respecto a la explicación de por qué las líneas notables son diferentes en un triángulo de este tipo.



4. Si compara las líneas notables construidas en los cuatro triángulos escalenos, ¿cuál es la conclusión que puede sacar sobre estas? ¿Se trata de las mismas líneas notables? ¿En qué caso serían las mismas líneas? Que todas las lineas son diferentes. porque los lados son diferentes

Figura 101. Actividad de enseñanza 3, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

A continuación, se muestran los descriptores que describen el nivel de comprensión del estudiante en esta tercera actividad.

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Aprendiz** - Reconoce el concepto de mediana en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las medianas en un triángulo - Reconoce el concepto de mediatriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las mediatrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de bisectriz en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las bisectrices en un triángulo. - Reconoce el concepto de altura en un triángulo. - Reconoce el punto donde se cortan las alturas en un triángulo.
Método	**Aprendiz** - Construye las medianas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las mediatrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las bisectrices de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel. - Construye las alturas de un triángulo y halla el punto donde se cortan mediante el doblado de papel.
Praxis	**Aprendiz** - Visualiza las características de la mediatriz en la construcción con doblado de papel. - Visualiza las características de la bisectriz en la construcción con

	doblado de papel. - Visualiza las características de la altura en la construcción con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Aprendiz** - Expresa los conceptos de mediana y de baricentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de mediatriz y de circuncentro usando un lenguaje adecuado. - Expresa los conceptos de bisectriz y de incentro usando un lenguaje adecuado - Expresa los conceptos de altura y de ortocentro usando un lenguaje adecuado.

Tabla 16. Descriptores de categoría por nivel. Actividad de enseñanza 2 de Lucas.

En esta tercera actividad, se observa que Lucas ha logrado todos los descriptores del nivel de aprendiz para cada dimensión, a excepción de aquellos relativos a la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos y a la utilización de instrumentos para la medida de ángulos, debido a que para el desarrollo de esta actividad no se tuvieron en cuenta.

Proyecto final de síntesis.

Durante el desarrollo de este proyecto, se pudo evidenciar que el estudiante avanzó en su proceso de comprensión, en lo relativo a las líneas notables y a la forma de comunicarlas a sus pares; algunos aspectos que se pueden resaltar son:

- Reconoció las características de las líneas notables mediante el doblado de papel.
- A partir de la visualización, comprendió las definiciones de las líneas notables.
- Se mostró seguro a la hora de explicar los conceptos y los procedimientos con el doblado de papel a sus compañeros.

– A través del doblado de papel, expuso a sus compañeros las características de las líneas notables, de modo que pudieran construir una definición.

Lucas responde adecuadamente las preguntas realizadas por sus compañeros y algunas se describen a continuación:

Estudiante: "¿cuál es el procedimiento para construir una bisectriz con doblado de papel?"

Lucas: "se debe llevar un lado sobre otro lado y doblar".

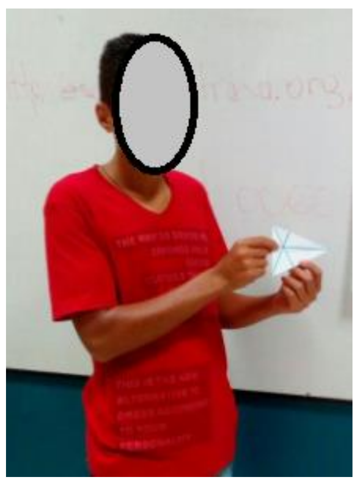


Figura 102. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E. Tomás Eastman.

Estudiante: "¿cómo se construye una mediana con doblado de papel?"

Lucas: "se debe buscar el punto medio de un lado, que es llevando un vértice sobre otro y luego se dobla de modo que este doblez pase por el punto medio el vértice del lado opuesto".

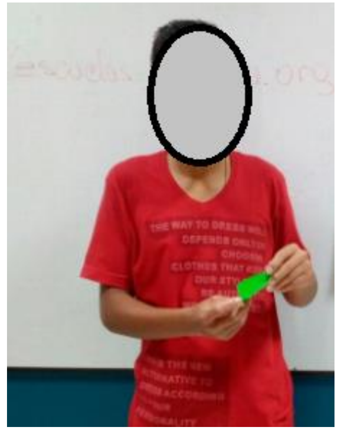


Figura 103. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

Lucas: "¿creen que el doblado de papel es útil para la construcción de las líneas notables?"; "¿es fácil observar las características de las líneas notables mediante el doblado de papel?".

Estudiante: "si es útil porque es más fácil tener a la mano una hoja de papel que un compás. Si podemos ver más fácil las características utilizando el doblado de papel porque los dobleces quedan bien hechos en cambio con el compás es más difícil".

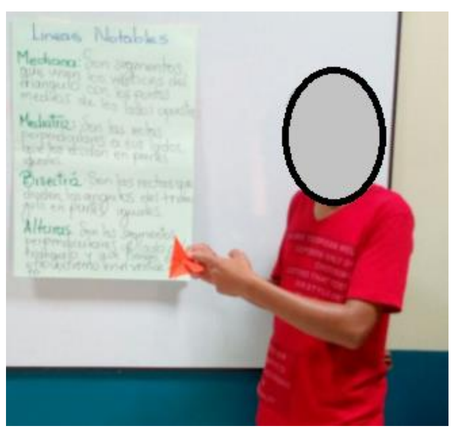


Figura 104. Proyecto final de síntesis, estudiante del grado 8° de la I.E Tomás Eastman.

En esta fase de proyecto final de síntesis y en todo el proceso del desarrollo de la guía de enseñanza, se pudieron reconocer unos descriptores que, de acuerdo a las dimensiones de comprensión, permiten ubicar a Lucas en un nivel de comprensión final, el cual se describe a continuación.

Dimensiones	**Nivel**
Contenido	**Maestría** - Explica el concepto de mediana y de baricentro. - Explica el concepto de mediatriz y de circuncentro. - Explica los conceptos de bisectriz y de incentro. - Explica los conceptos de altura y de ortocentro.
Método	**Maestría** - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las medianas de un triángulo. - Usa la construcción de las medianas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las mediatrices de un triángulo. - Usa la construcción de las mediatrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las bisectrices de un triángulo. - Usa la construcción de las bisectrices de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras. - Explica cómo puede usar el doblado de papel para construir las alturas de un triángulo. - Usa la construcción de las alturas de un triángulo, en la caracterización de diferentes figuras.
Praxis	**Maestría** - Explica las características de la mediana en diversas construcciones con doblado de papel. - Explica las características de la mediatriz en diversas construcciones con doblado de papel. - Explica las características de la bisectriz en diversas construcciones

	con doblado de papel. - Explica las características de la altura en diversas construcciones con doblado de papel.
Formas de comunicación	**Maestría** - Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediana y de baricentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de mediatriz y de circuncentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de bisectriz y de incentro, y las usa en diferentes contextos. - Expresa las definiciones formales de los conceptos de altura y de ortocentro, y las usa en diferentes contextos.

Tabla 17. Descriptores de categoría por nivel. Proyecto final de síntesis de Lucas.

Entrevista.

Durante el desarrollo de esta entrevista, se pudo observar que Lucas comprendió las características de los triángulos, en particular pudo comprender las definiciones de las líneas notables. A continuación, se describen de manera general sus respuestas.

"Comprendí que los triángulos se clasifican según la medida de sus lados en equiláteros, isósceles y escalenos, y según la medida de sus ángulos en acutángulos, obtusángulos y rectángulos; aprendí que un cuadrado es un rectángulo pero que un rectángulo no es necesariamente un cuadrado. Con respecto a las líneas notables comprendí sus definiciones mediante el doblado de papel, ya que se pueden observar fácilmente todas sus características y diferencias; con la última actividad pude comprender que no en todos los triángulos las líneas notables son las mismas, esto solo pasa si el triángulo es equilátero y en el caso de los triángulos isósceles son las misma si es relativa al lado desigual, es decir por ejemplo si la mediana es la que pasa por el punto medio del lado desigual, es la misma bisectriz, altura y mediatriz.

Mediante el proyecto final de síntesis pude darme cuenta que sí había comprendido todo lo de las líneas notables porque pude explicárselo a mis compañeros fácilmente"

A través del análisis de los métodos de recolección de la información, se pudo observar que Lucas comprendió las características de los triángulos en la medida en que hubo un avance y pudo pasar del nivel de novato y aprendiz, al nivel de maestría, en todas las dimensiones del marco de la EpC.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se destacan los aspectos más relevantes que surgen del trabajo de investigación, a través de las conclusiones, las cuales se determinan a partir de la respuesta a la pregunta problematizadora, el alcance de los objetivos tanto del general como de los específicos, el aporte que brinda a la Educación Matemática y las posibles líneas de investigación que el estudio puede abrir. Al finalizar el capítulo, se presentan unas recomendaciones para que los profesores puedan aplicar la guía de enseñanza en sus aulas de clase.

Conclusiones con respecto a la pregunta de investigación

Es importante recordar que la pregunta de investigación que se pretendió resolver en este estudio fue la siguiente: ¿cómo comprenden los estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, los conceptos relacionados con las características de los triángulos, cuando realizan construcciones con doblado de papel, desde el marco de la EpC?

A través del desarrollo de cada una de las actividades que fueron propuestas en la guía de enseñanza (ver capítulo 4) y mediante el uso de unos descriptores que surgieron a partir de la revisión detallada de la prueba diagnóstica, los cuales, según el marco de la EpC, se asociaron a unos niveles de comprensión[3] y a unas dimensiones de comprensión[4], se visualizó y analizó cómo comprendieron los estudiantes los conceptos asociados a los triángulos, en la medida en que iban pasando de una fase a otra, pues se observó que el proceso fue diferente al iniciar la fase

[3] Ingenuo, novato, aprendiz y maestría.
[4] Contenido, método, praxis y formas de comunicación.

de exploración que al finalizar la de investigación guiada y, a su vez, los niveles alcanzados en esta última fase fueron diferentes a los obtenidos en el proyecto final de síntesis, de modo que, pudieron demostrar un avance en la comprensión de cada uno de los conceptos que fueron enseñados. En esta última fase y a través de la entrevista final, se pudo evidenciar que los estudiantes participantes lograron:

- Aclarar las inquietudes de sus compañeros de clase con respecto a las características de los triángulos.
- Determinar mediante el doblado de papel la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.
- Usar un vocabulario matemático adecuado para la explicación de las características de las líneas notables.
- Definir las líneas notables de acuerdo a sus características, las cuales pudieron visualizar a través del doblado de papel.
- Determinar en qué triángulo las líneas notables coinciden y en qué caso no y por qué.

Así mismo, a través de la tabla de descriptores que, como se dijo anteriormente, se diseñó a la luz del marco teórico de la EpC de los resultados obtenidos en el desarrollo de la guía de enseñanza propuesta y en lo analizado en la prueba diagnóstica diseñada e implementada al principio de esta investigación, se pudo ubicar a cada estudiante participante en un nivel determinado de acuerdo a su comprensión; en esta ubicación se tuvieron presentes las dimensiones establecidas en el marco teórico y las seis categorías formuladas a partir de los contenidos que fueron objeto de aprendizaje en este trabajo de investigación.

Así, se pudo establecer que Juan, Valeria y Lucas comprendieron a nivel ingenuo, novato, aprendiz o maestría, características de los triángulos, en particular, su clasificación según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos; de este modo, se determinó si se les dificultó realizar dicha clasificación o si, por el contrario, los clasificaron; se percibió que los estudiantes, en un nivel mayor, sí pudieron explicar a sus pares dicha clasificación usando adecuadamente lenguaje matemático. Con respecto al concepto de mediana y baricentro, el concepto de mediatriz y circuncentro, el concepto de bisectriz e incentro y el concepto de altura y ortocentro, se determinó si se les dificultó reconocer su significado o si, en cambio, reconocieron dichos conceptos; en este caso, si lograban explicar a sus pares y darle relevancia en su entorno serían ubicados en un nivel mayor. Lo anterior es un ejemplo de cómo se pudo dar respuesta a la pregunta de investigación, es decir, al cómo comprenden los estudiantes las características de los triángulos mediante el doblado de papel.

Conclusiones con respecto a los objetivos

Es fundamental corroborar el cumplimiento de los objetivos propuestos en este trabajo de investigación. Por tal motivo, a continuación, se hace alusión a dicho cumplimiento tanto del objetivo general como de los objetivos específicos.

Con relación al objetivo general.

Para desarrollar este estudio, fue necesario proponer un objetivo general que relacionara los conceptos abordados, la enseñanza de estos a partir del contexto en el cual se desenvuelve el estudiante y el marco teórico de referencia; por esta razón, se planteó el siguiente objetivo general: analizar cómo comprenden los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, los conceptos relacionados a las características de los triángulos, cuando realizan construcciones con doblado de papel, desde el marco de la EpC.

Para lograr este objetivo, en primer lugar, se analizó con detenimiento el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, para poder emplear adecuadamente las tres fases que fueron fundamentales en el desarrollo de esta propuesta: la fase de exploración, la fase de investigación guiada y la fase de proyecto final de síntesis. En segundo lugar, las actividades de la primera fase se diseñaron con el fin de identificar los conocimientos previos de los estudiantes acerca de los polígonos y de las características generales de los triángulos, a través de la lectura de un cuento "El gran reto" y de la elaboración de un pensagrama, el cual se desarrolló inicialmente como una actividad de trabajo en clase y, posteriormente, en el hogar, con ayuda del acudiente o padre de familia como autoridad académica.

La fase de investigación guiada se centró en el desarrollo de unas actividades que consistieron en la construcción de dos módulos mediante el doblado de papel y, a partir de sus mosaicos de pliegues, responder un conjunto de preguntas relativas a las características de los triángulos que llevaran a los estudiantes a afianzar conceptos, y a comprender los nuevos. En la fase de proyecto final de síntesis, los estudiantes expusieron a sus compañeros de clase las características de las líneas notables, las cuales se pudieron visualizar mediante el doblado de papel; a partir de sus construcciones y utilizando un lenguaje matemático, los estudiantes tuvieron la posibilidad de definir estas líneas notables.

En tercer lugar, se construyó una rúbrica de descriptores que relacionaba las dimensiones de comprensión con los niveles del marco de la EpC, con la que se pretendía caracterizar el proceso de comprensión de los conceptos relativos a los triángulos en los estudiantes del grado octavo, cuando realizan construcciones con doblado de papel. Con esta rúbrica, se hizo una evaluación formativa de todo el proceso vivido por los estudiantes, cuando desarrollaron las actividades propuestas en la guía de enseñanza.

Por ello, se puede concluir que el objetivo general del estudio se logró, debido a que se analizó minuciosamente el avance en la comprensión que tuvo cada uno de los estudiantes participantes, teniendo como referencia cada uno de los descriptores diseñados según el marco de la EpC y empleando como herramienta el doblado de papel.

Con relación a los objetivos específicos.

Teniendo como base el objetivo general se plantearon los siguientes objetivos específicos:

–Describir el proceso de comprensión de los conceptos relacionados a las características de los triángulos, en los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara, cuando avanzan de un nivel a otro desde el marco de la EpC.

–Utilizar el doblado de papel como medio para la comprensión de los conceptos relacionados con los triángulos, en los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara.

–Evaluar una guía de enseñanza con actividades que incorporen el doblado de papel como medio para la comprensión de los conceptos relacionados con los triángulos, en los estudiantes del grado octavo, de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara.

Debido a que se pudo dar respuesta a la pregunta de investigación y se dio consecución al objetivo general y, dada su estrecha relación con los objetivos específicos, se puede decir que estos también se cumplieron. De esta manera, se concluye que se describió el proceso de comprensión de los conceptos relacionados a los triángulos, en algunos estudiantes del grado octavo, a partir del uso de descriptores de acuerdo a los niveles y dimensiones de comprensión de la EpC, lo cual se puede visualizar en el capítulo 5. A su vez, la herramienta principal para el desarrollo de las actividades propuestas en la guía de enseñanza fue el doblado de papel, de modo que los estudiantes pudieron visualizar las características de los triángulos y, posteriormente, ser capaces de explicárselas a sus compañeros mediante el proyecto final de síntesis, como un medio para evaluar la comprensión alcanzada. Finalmente, la construcción de una guía de aprendizaje, con actividades que incorporan el doblado de papel como medio para la comprensión, bajo las fases del marco de la EpC, y su puesta en escena y evaluación continua durante el trabajo de campo, permitieron dar consecución al tercer objetivo general.

Conclusiones con relación a la Educación Matemática

Con relación a la Educación Matemática, este trabajo de investigación no se desvincula de lo propuesto en el plan general de matemáticas de la Institución Educativa Tomás Eastman, de modo que se tuvieron en cuenta los conceptos relativos al grado donde se implementó el trabajo de campo. Por otro lado, el marco teórico que se tomó de referencia es aplicable a todas las áreas del conocimiento en la medida en que pretende analizar el cómo comprenden los estudiantes determinados conceptos, en este caso conceptos geométricos, y cómo la enseñanza de estos puede articularse a otras áreas que subyacen a la realidad escolar como, por ejemplo, a la educación artística.

A su vez, se procura dar un aporte a la Educación Matemática, de modo que se utilicen herramientas que estén al alcance de todos los estudiantes; en este caso, se hizo uso del doblado de papel, el cual es un medio útil que permite visualizar las características de los dobleces y asociarlos a las líneas notables de un triángulo cualquiera.

Por último, las actividades propuestas en la guía de enseñanza y su rúbrica de evaluación, son un aporte que permite a los docentes emplear una metodología que conlleve a los estudiantes a la comprensión de las características de los triángulos por medio del doblado de papel de manera paulatina, además de permitirles evaluar dicha comprensión a través del proyecto final de síntesis. Es relevante aclarar que dichas actividades se desarrollaron con estudiantes de la Institución Educativa Tomás Eastman del municipio de Santa Bárbara; sin embargo, en la posteridad, serán implementadas en la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Jericó.

Conclusiones con relación a posibles líneas de investigación

A partir de la propuesta desarrollada, se abre un abanico de posibilidades para otras líneas de investigación tales como:

- Elaboración de guías de enseñanza para la comprensión de diferentes conceptos matemáticos, a partir del desarrollo de las tres fases propuestas en el marco de la EpC y según el contexto en el cual se desenvuelve el estudiante.
- En una mayor profundidad, se puede pensar en una propuesta que, desde el marco de la EpC y el uso del doblado de papel, pueda abordar conceptos geométricos de áreas y volúmenes.
- De igual forma, se puede implementar una propuesta desde la geometría para la modelación de situaciones que impliquen la elaboración de módulos mediante el doblado de papel, cuyo análisis permita calcular volúmenes en función del lado de la hoja que se utilizó inicialmente.

Recomendaciones

La puesta en escena del trabajo de campo y la evaluación continua de la guía de enseñanza, nos permiten establecer unas recomendaciones para mejorar la implementación de esta, de tal manera que propicie una comprensión de los conceptos asociados a las características de los triángulos, mediante el doblado de papel. Estas recomendaciones se presentan a continuación:

- La fase del proyecto final de síntesis fue desarrollada en equipo por dos estudiantes participantes y, el tercero, lo debió ejecutar de manera individual; esto nos permite sugerir que este proyecto debería realizarse individualmente, para poder conocer las conclusiones a las cuales pueden llegar los estudiantes de forma independiente y realizar un análisis individual de la comprensión.
- El proyecto final de síntesis puede ser pensado a la luz de la elaboración de un módulo que contenga triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, y finalizar la construcción del cuerpo geométrico. En nuestro caso, solo nos centramos en la construcción de los módulos y dejamos de lado la construcción final de los sólidos.
- Se sugiere que se realice una entrevista al iniciar el proceso de investigación y otra al finalizarlo, de modo que se puedan observar con mayor detenimiento los cambios en la comprensión de los conceptos abordados.
- Para el diseño de los descriptores, es importante tener en cuenta los indicadores de logro propuestos en el plan general de matemáticas de las instituciones educativas para que, de esta manera, no se desvincule el contexto en el cual se desenvuelve el estudiante.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación es un logro personal y grupal; agradecemos a aquellas personas que hicieron parte de esto.

A nuestra asesora ZAIDA MARGOT SANTA RAMÍREZ, quien con su constante dedicación nos brindó orientaciones pertinentes para el desarrollo de este trabajo de investigación.

A la UNIVERSIDAD DE MEDELLIN, por abrirnos sus puertas para poder formarnos durante dos años, en la investigación y en el saber específico.

A la GOBERNACION DE ANTIOQUIA, por habernos permitido acceder al programa de becas y así poder hacer parte de un grupo de docentes formados a nivel de maestría.

A la INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMÁS EASTMAN del municipio de Santa Bárbara, por brindarnos el tiempo y el espacio para la ejecución del trabajo de investigación.

A los LECTORES de este trabajo de investigación, por el tiempo dedicado a hacer la revisión y por las sugerencias pertinentes a dicho trabajo.

A nuestras FAMILIAS quienes estuvieron ahí, apoyándonos y dándonos aliento cuando nos sentíamos decaídos, fueron nuestra gran inspiración.

Referencias bibliográficas

Abrate, R.; Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). *Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática.* Revista Iberoamericana de Educación (Online). Vol. 39, N°1. Recuperado el 21 de julio de 2017 en http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Acosta, M. Joya, A. Ortiz, L. Ramírez, M. Sánchez, C. Sabogal, Y. Patiño, O. (2016), *Proyecto Saberes Matemáticas 8°*, Bogotá, Colombia: Santillana.

Alemán, J. (2012). *La geometría con Cabri: una visualización a las propiedades de los triángulos*. Maestría. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Blythe, T. y Perkins, D. (1998). *La Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente.* Buenos Aires- Barcelona- México: Paidós.

Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles con las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215 – 256). Buenos Aires: Paidós

Calderón, G. (1997). *El doblado de papel en la enseñanza de la geometría* (Maestría). Instituto politécnico nacional.

Cañadas, M.C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M.J., Molina, M., Peñas, M., Villegas, J.L. (2009). *Geometría Plana con Papel.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Castiblanco, A. (2004). Recuperado el 21 de julio de 2017 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Castilla Peñate, J. A. (2016). *La expresión matemática de la longitud de la circunferencia en el marco de la enseñanza para la comprensión* (Universidad de Antioquia)

Clemens, S. R., O'Daffer, P. G., & Cooney, T. J. (1998). *Geometría*. Pearson Educación

Cortázar, J (1864). *Tratado de Geometría Elemental*. Madrid, España.

Etcheverry, N., Reid, M., y Botta, R. (2009). *Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri.* Iberoamericana de Educación Matemática, 102-116.

Gallardo , J., González, J. L., y Quispe, W. (2008). *Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción.* México.

Gamboa, R. (2009). *Algunas reflexiones sobre la didactica de la geometria*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2009. Año 4. Número 5. pp 113-136.

Gamboa Araya, R., y Ballestero Alfaro, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes*. Revista Electrónica Educare, XIV (2), 125-142.

González Molina, J. D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independecia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café.*

Henao, J., y Blanquicet, J. (2014). *Propuesta didáctica para la comprensión del concepto de triángulo en el marco del modelo de Van Hiele para grado octavo* (Maestría). Universidad de Antioquia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, DF.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele*. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*, pp.295-384. Sevilla: Alfar. Recuperado el 12 de marzo 2015, de: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Kline, M (1972).*pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid, Epaña: Alianza Editorial

Londoño Cano, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.*

Marín Sánchez, J. O.(2015) *Elaboración de una propuesta de aula desde un enfoque del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los estudiantes del grado VIII de la Institución Educativa San Agustín* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín).

Martínez, P. (2016). *El Método de Estudio de Caso. Estrategia metodológica de la investigación científica.* Universidad del Norte.

Meel, D. (2003). *Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, 221-278.

MEN. (1994). *Ley 115 de 1994: Ley general de educación.* Bogotá: Arfo. Título I, Artículo 5, numeral 5).

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje, volumen 2.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Monsalve, O, y Jaramillo. (2003), C. *El placer de doblar papel*. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas.

Morales, E. (2009). *Los conocimientos previos y su importancia para la comprensión del lenguaje matemático en la educación superior*. Universidad, Ciencia y Tecnología, 13(52), 211-222. Recuperado el 21 de julio de 2017, en http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212009000300004&lng=es&tlng=es.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone, *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* (pp. 69-94). Buenos Aires: Paidós.

Pirie, S., y Kieren, T. (1991a). *A Dynamic Theory of Mathematical Understanding: Some Features and Implications*. (ERIC Document Reproduction Service No ED 347 067)

Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Recuperada de la base de datos DIALNET (57811_pogre_paula.pdf)

Pogré, P. y Lombardi, G. (2004). *Escuelas que enseñan a pensar. Enseñanza para la comprensión. Un marco teórico para la acción.* Buenos Aires: Papers Editores.

Reyes, L. E., Rodríguez, F. M. (2014) *Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico.* Universidad Autónoma de Guerrero

Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. Sigma: Revista de Matemáticas, 21, 175 – 192.

Santa, Z. Y Jaramillo C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (31), pp. 338 362. Recuperado de: http:// revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_contentytask=viewyid=169yIt emid=1

Santa Ramírez, Z.M., Jaramillo López, C.M. y De Carvalho Borba, M. (2015). Doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 46, 154-168. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233

Santa Ramírez, ZM (2016). *Producción de conocimiento geométrico escolar* en un *colectivo de profesores-con-doblado-de-papel*.

Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Utrecht, Holanda (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991). Holanda: Universidad de Utrecht.

Zambrano, R., Morales, M., Rincón, A., y Barón, A. (1998). *Matemáticas. Bogotá (Colombia): El Ministerio.*

Anexo 1.

Cartas de permiso de los padres de familia

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMÁS EASTMAN
UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
2017

Consentimiento de uso de fotografías de niños, niñas y jóvenes en documentos académicos en el proyecto de Maestría de Enseñanza de las Matemáticas: comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la Comprensión

Yo, Gilberto Arroyave doy mi consentimiento como padre/madre para que las fotografías y videos que sean obtenidos de los procesos de formación de mi hijo/hija Cristian Arroyave Valencia de la Institución Educativa Tomás Eastman en el grado 8C, puedan ser utilizadas solo con propósitos pedagógicos, didácticos y en el desarrollo del proyecto **comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la comprensión**; este proyecto es ejecutado por la profesora MERY ESTER FLÓREZ con la autorización del rector y apoyado por la Universidad de Medellín; se espera que de este espacio de formación pueden generarse procesos, artículos e informes de investigación.

Entiendo que mi decisión es voluntaria y que, si así lo considero, puedo decidir no permitir que la imagen o video de mi hijo (a) sean compartidos por medio alguno en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi familia sea regresada a mí o sea destruida.

Procedimiento:

Como padre de familia en este proceso de formación e investigación:
Entiendo que mi hijo (a) podrá ser fotografiado y grabado en video como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje que realiza la maestra en la Institución Educativa.

Riesgos: no hay riesgos asociados considerando que la Institución Educativa es de mi confianza, así como la Universidad de Medellín como ente de Educación Superior de alto reconocimiento nacional.

Consentimiento del participante: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en permitir la difusión de imágenes que pueden identificar a mi hijo(a) como estudiante que aprende en procesos de formación de sus profesores.

Nombre y firma del padre o de la madre

Gilberto Arroyave — Gilberto Arroyave
Firma — Fecha

Nombre y firma del docente del menor

Mery Ester Flórez Pérez — Mery Flórez
Firma — Fecha

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMÁS EASTMAN
UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
2017

Consentimiento de uso de fotografías de niños, niñas y jóvenes en documentos académicos en el proyecto de Maestría de Enseñanza de las Matemáticas: comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la Comprensión

Yo, Neida Lucía Ocampo Cardona doy mi consentimiento como padre/madre para que las fotografías y videos que sean obtenidos de los procesos de formación de mi hijo/hija Mariana Grajales Villada de la Institución Educativa Tomás Eastman en el grado 8º C, puedan ser utilizadas solo con propósitos pedagógicos, didácticos y en el desarrollo del proyecto **comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la comprensión**; este proyecto es ejecutado por la profesora MERY ESTER FLÓREZ con la autorización del rector y apoyado por la Universidad de Medellín; se espera que de este espacio de formación pueden generarse procesos, artículos e informes de investigación.

Entiendo que mi decisión es voluntaria y que, si así lo considero, puedo decidir no permitir que la imagen o video de mi hijo (a) sean compartidos por medio alguno en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi familia sea regresada a mí o sea destruida.

Procedimiento:

Como padre de familia en este proceso de formación e investigación:
Entiendo que mi hijo (a) podrá ser fotografiado y grabado en video como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje que realiza la maestra en la Institución Educativa.

Riesgos: no hay riesgos asociados considerando que la Institución Educativa es de mi confianza, así como la Universidad de Medellín como ente de Educación Superior de alto reconocimiento nacional.

Consentimiento del participante: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en permitir la difusión de imágenes que pueden identificar a mi hijo(a) como estudiante que aprende en procesos de formación de sus profesores.

Nombre y firma del padre o de la madre

Neida Lucía Ocampo Cardona Neida Lucía Ocampo

Firma Fecha

Nombre y firma del docente del menor

Mery Ester Flórez Pérez Mery Flórez

Firma Fecha

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TOMÁS EASTMAN
UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
2017

Consentimiento de uso de fotografías de niños, niñas y jóvenes en documentos académicos en el proyecto de Maestría de Enseñanza de las Matemáticas: comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la Comprensión

Yo, Erica Liliana Bravo doy mi consentimiento como padre/madre para que las fotografías y videos que sean obtenidos de los procesos de formación de mi hijo/hija Michael Varela de la Institución Educativa Tomás Eastman en el grado 8, puedan ser utilizadas solo con propósitos pedagógicos, didácticos y en el desarrollo del proyecto **comprensión de las características de los triángulos desde el marco de la enseñanza para la comprensión**; este proyecto es ejecutado por la profesora MERY ESTER FLÓREZ con la autorización del rector y apoyado por la Universidad de Medellín; se espera que de este espacio de formación pueden generarse procesos, artículos e informes de investigación.

Entiendo que mi decisión es voluntaria y que, si así lo considero, puedo decidir no permitir que la imagen o video de mi hijo (a) sean compartidos por medio alguno en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada con mi familia sea regresada a mí o sea destruida.

Procedimiento:

Como padre de familia en este proceso de formación e investigación:
Entiendo que mi hijo (a) podrá ser fotografiado y grabado en video como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje que realiza la maestra en la Institución Educativa.

Riesgos: no hay riesgos asociados considerando que la Institución Educativa es de mi confianza, así como la Universidad de Medellín como ente de Educación Superior de alto reconocimiento nacional.

Consentimiento del participante: entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en permitir la difusión de imágenes que pueden identificar a mi hijo(a) como estudiante que aprende en procesos de formación de sus profesores.

Nombre y firma del padre o de la madre

Erica Liliana Bravo Erika Bravo.

Firma Fecha

Nombre y firma del docente del menor

Mery Ester Florez Perez Mery flórez.

Firma Fecha