COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD CLÁSICA Y FRECUENCIAL POR FUTUROS PROFESORES

Prospective teachers' understanding of classical and frequentist approaches to probability

Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas de 60 futuros profesores de Educación Primaria en España al trabajar, en parejas y de modo individual, sobre una situación de enseñanza basada en los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad. De los resultados obtenidos destacamos su escaso razonamiento combinatorio mostrado en la dificultad de enumerar correctamente los sucesos que conforman el espacio muestral, así como la dificultad en estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso en cierto número de ensayos.

Palabras clave: *probabilidad (significado clásico y frecuencial), futuros profesores.*

Abstract

In this paper, we analyse the responses of 60 primary education prospective teachers in Spain, part of which work in pairs and others individually, on a teaching situation based on the classical and frequentist approach of probability. We emphasize the participants' scarce combinatorial reasoning suggested by the difficulty of correctly enumerating the events that make up the sample space, as well as the difficulty in estimating the expected frequency of times that a number occurs in a certain number of runs.

Keywords: *probability (classic and frequency meaning), prospective teacher.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la probabilidad se inicia actualmente en España en la Educación primaria para fomentar la experiencia del alumno, que es la clave para su desarrollo cognitivo y emocional en esta etapa. Los conocimientos a desarrollar se refieren a la identificación de situaciones aleatorias, la estimación y cálculo de la probabilidad de un suceso y a establecer conexiones entre la realidad y el conocimiento matemático en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida (MECD, 2014). Además, se sugiere trabajar con los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

El profesor, encargado de impartir estos conocimientos, ha de diferenciar y dominar elementos que caracterizan estas aproximaciones y ser capaz de relacionarlas, comprendiendo las exigencias de cada enfoque y la diferencia entre estimación a partir de la frecuencia relativa y probabilidad teórica (Batanero, 2005). El objetivo de este trabajo es evaluar este conocimiento en una muestra de futuros profesores. Para ello se analizan sus respuestas escritas a una actividad práctica que se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), completando su análisis y analizando únicamente el componente matemático, dentro del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor utilizado por estos autores. En lo que sigue se exponen los fundamentos, método, resultados y conclusiones de nuestro estudio.

Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

FUNDAMENTOS

El concepto de probabilidad ha recibido diferentes interpretaciones a lo largo de su historia, siendo dos de los principales los enfoques clásico y frecuencial, por su papel en el currículo de Educación Primaria (MECD, 2014).

La definición clásica de la probabilidad surge desde los juegos de azar, debida, en particular, a la correspondencia entre Pascal y Fermat en la década de 1650, aunque la primera definición formal de este concepto es debida a de Moivre (1967) en *The Doctrine of Chances*:

> Si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (p. 1).

La definición más conocida bajo esta aproximación es aportada por Laplace (1995) como: "una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles" (p. 28). Como establecen Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición es circular pues el término "equiprobable" se incluye en la definición y solo se puede aplicar a experimentos con un número finito de posibilidades. Sin embargo, se usa mucho en la escuela a propósito de los juegos, motivadores y fáciles de aplicar, pero el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es muy limitado.

El enfoque frecuencial surge al tratar de superar los inconvenientes y controversias filosóficas del enfoque clásico. El primer autor que sugiere que la probabilidad de un suceso se puede estimar con la precisión que se desee a partir de la frecuencia relativa, observada en una serie grande de ensayos del mismo experimento, fue Bernoulli (1987), quien demuestra la ley débil de los grandes números, que establece esta convergencia. La demostración de Bernoulli se consideró en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Además, amplía la posibilidad de aplicar el cálculo de probabilidades, pues no se exige la equiprobabilidad de los sucesos elementales (Batanero, 2005). La utilidad de esta definición en la enseñanza es clara pues, permite establecer la unión entre la estadística y la probabilidad al utilizar el concepto de frecuencia relativa de la estadística aplicándolo en el cálculo de probabilidades (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Además, gracias a la tecnología, es muy sencillo aplicar este enfoque usando la simulación para repetir un cierto experimento un número grande de veces y observar empíricamente la convergencia. Se aborda así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva de la misma.

Sin embargo, esta definición presenta algunos problemas pues, al partir de la frecuencia relativa, no obtenemos un valor exacto de la probabilidad sino una estimación de la misma, por tanto, puede variar cada vez que tratamos de estimarla. La segunda cuestión es que, en la mayor parte de los casos, es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y hay circunstancias (por ejemplo, en medicina, en inversiones, etc.) donde con seguridad sabemos que las condiciones de una y otra repetición son diferentes. Por último, es difícil comprender cuál es el número de experimentos que debemos realizar para que el valor de la probabilidad estimado sea válido o considerado bueno.

Investigaciones previas

Como se indica en Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016), la investigación sobre formación de profesores para enseñar probabilidad es muy escasa. Sin embargo, el futuro profesor, como recomienda el currículo, ha de enseñar en la Educación Primaria con estos dos enfoques y requiere un conocimiento adecuado para ofrecer una enseñanza de calidad a sus alumnos (Vasquez y Alsina, 2015). Estos autores construyen un cuestionario para analizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor, encontrando un conocimiento muy deficiente de la probabilidad en una muestra de 93 profesores de primaria chilenos. Resultados similares son obtenidos por Mohamed (2012) en su investigación con 283 futuros profesores de Educación Primaria pues, estos estudiantes presentan dificultades y utilizan heurísticas erróneas en conocimientos fundamentales del tema, entre otros, cita la confusión entre suceso seguro y posible, la falta de razonamiento combinatorio o ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios, de percepción de la independencia y dificultades asociadas al experimento compuesto. Azcárate (1995), por su parte, estudió las respuestas a un cuestionario de 57 futuros profesores de Educación Primaria, indicando que la mayoría relacionaron la aleatoriedad con la causalidad, no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiar los fenómenos aleatorios. También observó el predomino de esquemas causales, así como dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial en la cuantificación de probabilidades y en la idea de juego equitativo.

Serrano (1996) planteó otro cuestionario a 130 futuros profesores para evaluar tres componentes de su conocimiento sobre la probabilidad: a) las propiedades atribuidas a las secuencias de resultados aleatorios; b) la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial; y c) el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Encontró una fuerte presencia de la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y del enfoque en el resultado (Konold, 1989), es decir, interpretar un problema de probabilidad en forma no probabilística.

La influencia de desarrollar actividades de simulación en la formación de los futuros profesores fue estudiada por Batanero, Cañizares y Godino (2005) en una muestra de 132 participantes. Se observó que la heurística de la representatividad, el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y el enfoque en el resultado disminuyen bastante después del desarrollo de estas tareas, al dar oportunidad a los estudiantes de interaccionar con el problema gracias a la tecnología.

El trabajo más completo sobre conocimiento de la probabilidad por futuros profesores es el de Gómez (2014) que, con base a un estudio detallado del currículo y los libros de texto, construye un cuestionario con una metodología rigurosa que aplica a 157 futuros profesores. Además, evalúa el conocimiento diferenciado de las aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. En los resultados obtenidos, los futuros profesores presentaron un conocimiento adecuado respecto al enfoque clásico de la probabilidad; por ejemplo, al enumerar el espacio muestral y en el cálculo de probabilidades sencillas. Presentaron mayores dificultades en el desempeño del enfoque frecuencial, donde muchos participantes no perciben la variabilidad de las pequeñas muestras o caen en el sesgo de equiprobabilidad.

Ninguno de los trabajos anteriores trata de analizar la forma en que los futuros profesores de Educación Primaria integran los significados clásico y frecuencial de la probabilidad. Si hemos encontrado algunas investigaciones con estudiantes, como el de Smith y Hjalmarson (2013), que investiga la comprensión de los procesos aleatorios por los profesores y la de Sánchez y Valdés (2017), en que analiza el trabajo de 30 estudiantes cuando abordan una situación de muestreo en que deben predecir o bien la composición de la población, o bien los resultados en diferentes muestras, donde se caracteriza las ideas informales de aleatoriedad, variabilidad e independencia.

Para completar las investigaciones previas, en este trabajo analizamos las respuestas escritas de una muestra de futuros profesores cuando se enfrentan a un problema con datos empíricos sobre un juego que contradicen las probabilidades calculadas en sentido clásico. La actividad se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), quienes también la utilizaron en la formación de profesores pero en la pizarra por el profesor. En dicho estudio se describe este proceso de resolución colectiva, junto a las sugerencias esporádicas de alumnos aislados. En nuestro caso, completamos este análisis y estudiamos las respuestas en un pequeño grupo de estudiantes que las resuelven individualmente por escrito y las comparamos con otro grupo que las resuelven en pareja, para comparar cuál de estos tipos de agrupaciones produce mayor número de respuestas correctas.

METODOLOGÍA

El estudio se llevó a cabo en una muestra de 60 estudiantes de segundo curso del Grado de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Granada, como actividad práctica al finalizar la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria. En esta asignatura se abordan los fundamentos de la Didáctica de las matemáticas, así como los aspectos cognitivos y didácticos referidos al sentido matemático en los distintos núcleos temáticos; además, los estudiantes habían cursado en primer curso los contenidos relativos a la probabilidad durante aproximadamente una semana.

Raquel es maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus estudiantes asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación, Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de estudiantes que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Número de veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas: ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 1. Ficha de trabajo de los estudiantes

Para explicar la actividad y facilitar la recogida de datos, se diseñó una ficha de trabajo que incluía la secuencia de enseñanza de la probabilidad llevada a cabo por una maestra (tomada de la investigación de Rivas y Godino, 2015), que se muestra en la Figura 1. Las preguntas que debían responder por escrito los futuros profesores, referidas a dicha secuencia de enseñanza son:

1. Analiza la actividad 1. Indica quién tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.
2. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?
3. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

Recogidas las respuestas se realizó un análisis cualitativo de las mismas, partiendo de las categorías descritas por Rivas y Godino (2015) que se completaron mediante un proceso cíclico.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resolución del problema desde el significado clásico de probabilidad

Para resolver la primera actividad mostrada en la Figura 1, se puede utilizar la enumeración sistemática del espacio muestral del juego y representar los sucesos posibles en una tabla de doble entrada o diagrama de árbol. Dado que no todas las sumas de puntos de los dados tienen la misma probabilidad de ocurrir, son más probables las sumas intermedias, que justamente corresponden a las posibilidades de ganar el jugador A, siendo menos probables las posibilidades extremas, que corresponden a las posibilidades de ganar el jugador B. Aplicando el principio de indiferencia, pues todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad de ocurrir, se deduce que B gana 16 veces de 36 y A gana 20 veces de 36 (ver ejemplo de respuesta correcta en la Figura 2). Utilizando la regla de Laplace, como cociente entre casos favorables y posibles, se obtienen las probabilidades teóricas de A: P(A)= 20/36=0,55 y B: P(B)= 16/36= 0,45. Por tanto, el jugador A tiene ventaja en este juego.

A continuación, se describen las respuestas de los futuros profesores a la tarea, categorizadas según su corrección o tipo de error cometido, así como las estrategias o recursos que fueron utilizados.

R1. Respuesta correcta. Los futuros profesores identifican correctamente los sucesos correspondientes a las sumas en las que ganan A y B, y calculan las probabilidades correspondientes aplicando la regla de la suma, o bien el suceso complementario. Mostramos en la Figura 2 un ejemplo en que el estudiante usa una tabla de doble entrada para formar el espacio muestral producto, marcando con colores los sucesos favorables al jugador A o B, y al margen de la tabla calcula las probabilidades aplicando la regla de Laplace. Otros estudiantes utilizan otros recursos para hacer la enumeración sistemática de casos posibles teniendo en cuenta el orden.

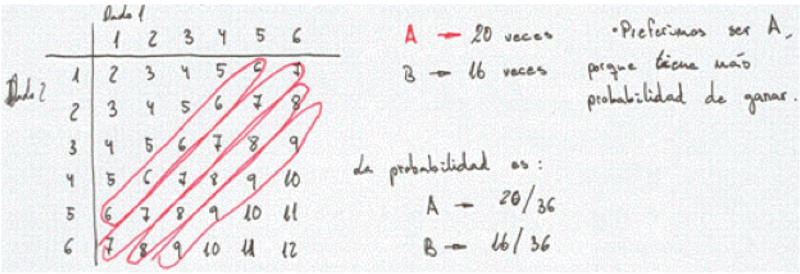

Figura 2. Enumeración sistemática del espacio muestral mediante la tabla de doble entrada

R2. Respuesta correcta relacionando los dos enfoques de la probabilidad. Un estudiante calcula la probabilidad de ganar el juego los jugadores A y B, pero también indica que si se tienen en cuenta los resultados de la suma, sin considerar los diferentes resultados para obtenerla, aparentemente ganaría B y se cometería un error. Se trata de una solución correcta y más avanzada que la anterior, puesto que pone en relación los dos enfoques de la probabilidad. Como se muestra en la Figura 3, el estudiante analiza, en primer lugar, los resultados empíricos del juego (donde B gana) e indica que este resultado lleva a cometer un error, pues en la probabilidad teórica, el que gana el juego es A con probabilidad 20/36 frente a B, con probabilidad 16/36.

R3. Parcialmente correcta. Cuando el estudiante afirma que A tiene ventaja sobre B, observando que es más probable que al lanzar dos dados la suma de puntos sea favorable al jugador A, pero el argumento utilizado no es totalmente correcto, como se muestra en el siguiente ejemplo: “A tiene ventaja porque aunque tiene sólo un 36% (aproximado) de posibilidades de ganar sería raro que salieran dos números pequeños o dos números grandes, que son los números que necesita B para ganar.” Este estudiante da una respuesta correcta, pero su argumentación no lo es, ya que por un lado considera los sucesos equiprobables (Lecoutre, 1992) y deduce que A tiene una probabilidad de ocurrencia de 4/11 (un 36% aproximadamente) y B de 7/11 (un 64% aproximadamente). Por otro lado, indica que es difícil o raro que salgan dos números pequeños o dos grandes en el lanzamiento de los dados para que gane B, lo que muestra una limitación en su razonamiento según el sesgo de disponibilidad, descrito por Kahneman, Slovic y Tversky (1982).

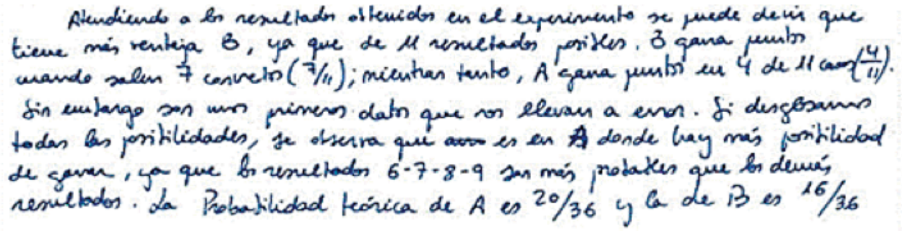
Atendiendo a los resultados obtenidos en el experimento se puede decir que tiene más ventaja B, ya que de 11 resultados posibles, B gana puntos cuando salen 7 concretos (7/11); mientras tanto, A gana puntos en 4 de 11 casos (4/11). Sin embargo son unos primeros datos que nos llevan a error. Si desglosamos todas las posibilidades, se observa que ahora es en A donde hay más posibilidad de ganar, ya que los resultados 6-7-8-9 son más probables que los demás resultados. La Probabilidad teórica de A es 20/36 y la de B es 16/36

Figura 3. Respuesta a la cuestión 1 mediante lenguaje verbal y simbólico

R4. Respuesta incorrecta con sesgo de equiprobabilidad. Muchos estudiantes indican que B tiene ventaja en el juego, pues consideran que todas las posibles sumas de los dos dados tienen igual probabilidad de ocurrencia, es decir, son consideradas sucesos equiprobables (Lecoutre, 1992). La diferencia con el caso anterior, es que también fallan en identificar el jugador que tiene ventaja en el juego.

R5. Respuesta incorrecta por error de orden (espacio muestral reducido). Un estudiante muestra en su respuesta el error de orden (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1997) al considerar como único suceso la ocurrencia de dos sumas con distinto orden de sumandos. En el caso que nos ocupa, este error es comprensible, pues la suma tiene la propiedad asociativa pero, a pesar de ello, hay que diferenciar los resultados según el orden en que ocurren en los dados para el cálculo de probabilidades pues, si se comete este error, el espacio muestral queda reducido.

En la Figura 4 se muestran los resultados obtenidos a esta cuestión, donde se observa que la mayoría de futuros profesores contestaron correctamente (40% de los estudiantes en forma individual y el 90% de quienes responden en pareja), aunque solo uno relaciona los dos significados de probabilidad en su respuesta. Los resultados son mejores en aquellos que trabajan en parejas.

En las respuestas incorrectas, el error más frecuente es el sesgo de equiprobabilidad (50% de los estudiantes que responden de modo individual y el 5% de quien responde en pareja) y solo un estudiante respondió incorrectamente por error del espacio muestral reducido. Pocos estudiantes responden de modo parcialmente correcto (5% de estudiantes de manera individual y 5% en pareja) y sus argumentos muestran el sesgo de equiprobabilidad. Al comparar los resultados de esta pregunta con la experiencia de aula de Rivas y Godino (2015), destacamos que en ambos trabajos predominan los mismos errores, el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido, aunque los autores no indican la frecuencia en sus estudiantes.

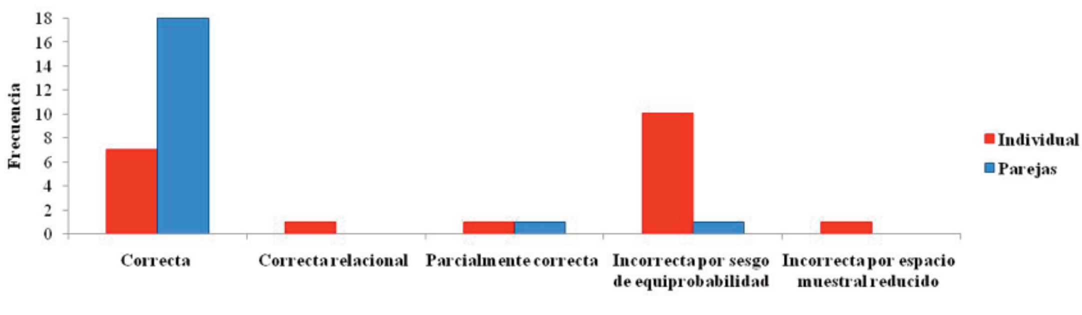

Figura 4. Frecuencia de respuestas de los estudiantes a la primera tarea

De los recursos utilizados por los futuros profesores para responder a la cuestión, en la Figura 5 se muestran las diferentes representaciones utilizadas, así como su tendencia de uso según los estudiantes respondieron en parejas o individualmente. Las representaciones más utilizadas fueron el lenguaje verbal y simbólico y la tabla de doble entrada o los esquemas/tablas de recuento de resultados, el diagrama de árbol sólo fue utilizado por un estudiante.

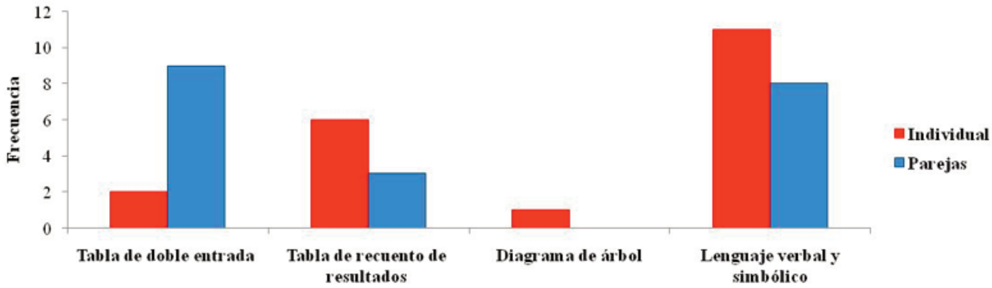

Figura 5. Frecuencia de recursos utilizados por los estudiantes en la primera tarea

Resolución del problema desde el significado frecuencial de probabilidad

Se espera que los futuros profesores posean una comprensión, al menos intuitiva, de la ley de los grandes números y argumenten que la variabilidad de éxito en la ganancia en 10 jugadas no se tiene que repetir si el experimento se realizase unas 100 veces. Además, como la frecuencia esperada de un suceso S en n repeticiones de un experimento ($F_e(S)$) viene dada por su probabilidad ($P(S)$) mediante la expresión: $F_e(S) = n * P(S)$, los futuros profesores debieran obtener las frecuencias esperadas utilizando dicha fórmula, puesto que calcularon la probabilidad teórica de cada jugador en la cuestión anterior. Por otro lado, si se piensa en lanzar los dos dados 36 veces, y teniendo en cuenta los casos favorables para cada suma, se deduce que *A* ganaría 20 veces de 36 frente a 16 de cada 36 que ganaría *B*; o lo que es igual, 5 veces de 9 para *A* frente a 4 veces de 9 para *B*. A continuación, se describen las categorías de respuestas de los futuros profesores a esta actividad.

R1. Respuesta correcta. La mayoría de estudiantes utilizaron los resultados de la pregunta 1 para dar un valor correcto a la frecuencia esperada de resultados en que gana *A* y *B*, utilizando uno u otro de los métodos expuestos anteriormente. Como se muestra en el siguiente ejemplo, se indican las probabilidades teóricas y frecuencias esperadas en nueve experiencias, por tanto, se ha usado el cálculo de probabilidades del primer apartado: “*A* = 0,55; 5 de cada 9. *B* = 0,44; 4 de cada 9”.

R2. Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad. La mayoría de futuros profesores que mostraron el sesgo de equiprobabilidad en la primera actividad lo mantuvieron al resolver estas cuestiones, como se muestra en la siguiente respuesta: “Las sumas de los valores de *B* seguirían saliendo con más frecuencia acercándose a 7/11 de posibilidades que salieran. Con más frecuencia ganaría *B* que *A*”.

R3. Incorrecta por espacio muestral reducido. Se encontraron más respuestas en esta categoría que en la cuestión anterior, al pedir a los futuros profesores estimar los resultados para los jugadores *A* y *B* con muchas tiradas. En su mayoría, utilizan las respuestas de la pregunta 1, donde omiten posibilidades en la enumeración del espacio muestral quedando reducido a sólo 11 posibilidades (cuando, sin tener en cuenta el orden deberían ser 21 y 36 teniéndolo en cuenta).

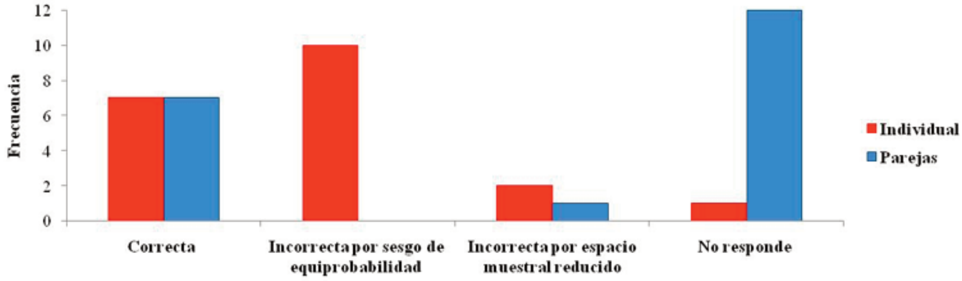

Figura 6. Frecuencia de respuestas de los estudiantes a la segunda tarea

En la Figura 6 se puede observar la dificultad de los futuros profesores en afrontar con éxito la tarea. En relación a la actividad anterior, los errores son más abundantes, así como la ausencia de respuesta (25 de los 60 estudiantes). Los estudiantes que contestaron correctamente, 21 de los 60, supone sólo la tercera parte, y no hay respuestas parcialmente correctas. El error más frecuente fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en 10 estudiantes de la muestra y 4 estudiantes contestaron incorrectamente por espacio muestral reducido. Rivas y Godino (2015) no plantean esta pregunta.

Relación entre los significados clásico y frecuencial de la probabilidad

Al comparar los datos que se presentan en la secuencia de enseñanza (se reúnen los resultados de las 10 experiencias de los 10 grupos que organizó la maestra) y el caso teórico (analizado en la primera pregunta), se pueden observar grandes diferencias (Figura 7).

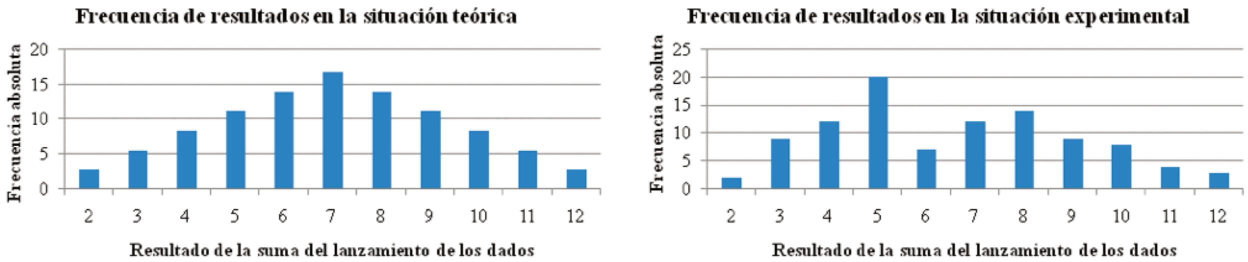

Figura 7. Distribución de frecuencias en 100 experiencias del juego (teóricas y en el caso planteado)

Se espera que el estudiante rechace la posibilidad de estimar las probabilidades de ganar cada jugador mediante la frecuencia relativa y que argumente que no serían suficientes los datos de esta tabla pues la estimación de la frecuencia teórica es mala. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas de acuerdo a las siguientes categorías:

R1. Respuesta correcta. La mayoría de futuros profesores responde correctamente, indicando que no es suficiente la tabla con los datos de toda la clase para obtener conclusiones del experimento realizado. Los argumentos se basan en el número de veces que gana *B* en dicha tabla, pues es superior al de *A*, con lo que la probabilidad teórica y su estimación empírica no coinciden.

R2. Parcialmente correcta. Algunos estudiantes responden correctamente a una de las dos preguntas planteadas, por lo que poseen un conocimiento adecuado pero sólo en parte. En el siguiente ejemplo se muestra la respuesta de un estudiante que considera que las tiradas de los dados en la tabla son suficientes para determinar un ganador en el juego pero, por otro lado, responde correctamente que no se debe considerar la probabilidad de ganar *A* según la frecuencia relativa, pues ésta indica solo las veces que gana *A* y no su probabilidad:

> — Sí, considero que las tiradas que se hacen son suficientes para determinar un ganador.
>
> — No, porque la probabilidad es la opción que se tiene de sacar "x" resultados y la frecuencia es el número de veces que se repite un valor, es decir, las veces que gana.

R3. Respuesta incorrecta. Serían los estudiantes que responden incorrectamente a las dos preguntas del apartado, como en la siguiente respuesta, donde se muestra la poca capacidad argumentativa del estudiante: "Sí, porque realiza bastantes tiradas y obtiene buenos resultados. Sí, porque es el número de veces que gana".

En la Figura 8 se muestra la frecuencia de estudiantes que respondió a la tercera pregunta, de las cuales 48 fueron correctas, lo que muestra una buena comprensión de la relación entre la probabilidad en sentido clásico y su estimación frecuencial. Encontramos respuestas parcialmente correctas en seis estudiantes que, aunque responden bien una de las preguntas, son inconsistentes en sus argumentaciones. Los resultados son mejores en aquellos que trabajan en parejas.

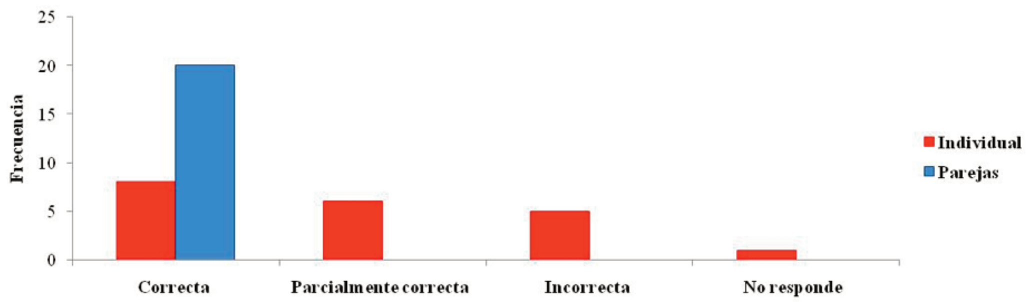

Figura 8. Respuestas de los estudiantes a la tercera tarea

CONCLUSIÓN

La secuencia de enseñanza escogida para este estudio ha promovido el trabajo de los futuros profesores con la estimación de resultados y la argumentación de las decisiones y estrategias heurísticas, además de poner en relación los significados clásico y frecuencial de la probabilidad. Según Batanero (2005), ambos significados han de ser comprendidos por los estudiantes, para que puedan ser enseñados de manera significativa al alumnado.

Los futuros profesores mostraron falta de capacidad de enumeración sistemática de sucesos, error típico del razonamiento combinatorio de acuerdo a Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997), así como dificultad en estimar la frecuencia esperada de veces que ocurre un suceso en cierto número de tiradas. Al comparar los resultados con la experiencia en aula de Rivas y Godino (2015), hacemos notar que en ambos trabajos predominan los mismos errores en el cálculo de probabilidades: el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido.

Todos estos resultados nos plantean una problemática como es la formación de los profesores que han de enseñar la probabilidad bajo estos dos enfoques en la Educación Primaria (MECD, 2014). Como sugieren Ortiz, Mohamed y Serrano (2013), debemos proponer a los futuros profesores situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas de los conceptos probabilísticos que transmitimos en los cursos de formación; en este sentido, la experiencia propuesta en este trabajo contribuye a la adquisición del significado de estos enfoques.

Así mismo, Huerta (2015) plantea la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica, como un contexto apropiado para la formación de futuros maestros y profesores en didáctica de la probabilidad. Como indica el autor, la resolución de problemas es adecuada por tratarse de estudiantes que deben dominar el contenido, pero además, para entender "aspectos que relacionan el proceso de resolución de problemas de probabilidad con la construcción del pensamiento matemático (probabilístico) del estudiante, y para aprender a ser gestores del proceso de resolución de problemas en las aulas" (Huerta, 2015, p. 107). Experiencias como la descrita en este trabajo tratan de acercarse a este enfoque, donde su resolución y reflexión didáctica pueden contribuir en su formación docente.

Agradecimientos

Proyecto de investigación EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo de investigación FQM126 de la Junta de Andalucía.

Referencias

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247- 263.

Batanero, C., Cañizares, M. J., y Godino, J.D. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability.* New York: Springer.

Bernoulli, J. (1987). *Ars Conjectandi- 4ème partie*. Rouen: IREM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases.* New York, NY: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.

Laplace P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilities*. Paris: Jacques Gabay.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568.

MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York, NY: Chelsea Publishing.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1997). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2013). Componentes del conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 431-438). Bilbao: SEIEM.

Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López-Martín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 339-346). Granada: Grupo de IVALDvestigación en Educación Estadística.

Sánchez, R. y Valdés, J. C. (2017). Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11*, (en prensa).

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Smith, T. M. y Hjalmarson, M. A. (2013). Eliciting and developing teachers’ conceptions of random processes in a probability and statistics course. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(1), 58-82.

Vásquez, C. y Alsina, C. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48.