INTERACCIÓN ENTRE PARES: TERRENO DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DE 'EMPATÍA MATEMÁTICA'

Peer Interaction: Arena of Mathematical Learning and 'Mathematical Empathy'

Gómez-Lázaro, H.D. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I. P. N., México.

Resumen

El trabajo versa sobre el intercambio de resoluciones a una tarea de comparación de razones que llevan a cabo parejas de estudiantes de tercer grado de secundaria. Siguiendo los principios de la teoría fundamentada y del análisis de los argumentos de Toulmin, en el documento se argumenta que para que una interacción sea provechosa son necesarios los conocimientos matemáticos así como una actitud de 'empatía matemática'. Se sugieren también algunas 'características notables' para que una interacción sea cognitivamente útil y enriquecedora para la pareja, características que pueden ser interesantes referencias para futuras investigaciones y de utilidad para los docentes.

Palabras clave: *interacción entre pares, convencimiento, comparación de razones, empatía matemática.*

Abstract

The paper reports on exchanges amongst peers in 3rd year of secondary school, concerning their resolutions of a task on ratio comparison. Following the principles of Grounded Theory and Toulmin's argument analysis, the paper argues that the mathematical knowledge and an attitude of 'mathematical empathy' are necessary if an interaction is to be fruitful. The paper moreover suggests some of the notable characteristics needed for an interaction to be cognitively useful and fruitful, characteristic that may be interesting references for future research and useful to teachers.

Keywords: *peer interactions, convincement, ratio comparison, mathematical empathy.*

ANTECEDENTES, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

El trabajo que aquí se expone versa sobre el intercambio de resoluciones de una tarea de comparación de razones, que llevan a cabo parejas de estudiantes de 3er grado de secundaria, y se basa en el supuesto de que la interacción entre pares es propiciatoria de ciertos aprendizajes pero sólo bajo ciertas condiciones. Distintos investigadores sobre el tema (Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han descrito los diversos factores que intervienen para que una interacción entre parejas de estudiantes resulte provechosa, aceptando que no siempre se presentan casos de éxito.

Sobre el aprendizaje que se da en el marco de la interacción entre pares, Smith (2015) revisa las diferentes modalidades que existen, complementando el trabajo desarrollado por Topping (2005). Ambos autores manejan diferentes tipos de interacción entre pares tales como la tutoría, asistencia, instrucción, agrupamiento, monitoreo o revisión. Estos trabajos cierran con una serie de sugerencias didácticas dirigidas a docentes o tutores, a quienes se les propone seguir reportando las dificultades encontradas, para que esto permita el re-diseño de nuevos cursos a docentes o el diseño y aplicación de nuevas estrategias. Goos, Galbraith y Renshaw (2002) también se centran en la investigación sobre la interacción entre pares y sobre la relación que guarda ésta con la zona de desarrollo próximo descrita por Vigotsky. Ellos puntualizan cómo es que las interacciones entre alumnos no siempre son productivas, aduciendo

Gómez-Lázaro, H.D. y Rigo-Lemini, M. (2017). Interacción entre pares: terreno de aprendizaje matemático y de 'empatía matemática'. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 277-286). Zaragoza: SEIEM.

que las interacciones llegan a producir conflictos y que sus alcances llegan a ser limitados. Con base en evidencias empíricas de casos de interacción entre pares que resultan ser obstáculos para sus aprendizajes, y en el mismo tenor que los anteriores autores, Stacey (1992) asevera que “dos cabezas no siempre son mejores que una”.

Con el objetivo de profundizar en el tema se busca responder a la pregunta sobre ¿Cuáles son las características notables de las interacciones entre pares, que las hacen cognitivamente provechosas?; en el trabajo se argumenta que para que una interacción sea provechosa no sólo se necesita poner en la mesa de discusión conceptos y elementos de la matemática, sino también y de manera muy importante, lo que en este documento se denomina ‘empatía matemática’, la cual está relacionada, entre otras cosas, con la posibilidad que tienen los participantes de apuntar hacia los sustentos (garantías y respaldos) de los argumentos a rebatir para conseguir el convencimiento del interlocutor. En la comunicación también se argumenta que una interacción puede promover el aprendizaje de conocimientos matemáticos y de actitudes de ‘empatía matemática’ sólo bajo la guía de tutores sensibilizados al respecto y cuando la interacción entre pares cumple con lo que aquí se llaman ‘características notables’. Para sustentar de manera rigurosa lo que aquí se arguye, se introduce un análisis de caso realizado con las herramientas propuestas por Toulmin, a partir de las cuales se definen conceptos teóricos siguiendo los principios de la teoría fundamentada.

MARCO TEÓRICO

Sobre comparación de razones. En el trabajo de Gómez y García (2014) y en el de Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo (2013) se sugieren variables que determinan las estrategias de resolución de tareas de comparación de razones, entre ellas están las de contexto, que los autores le llaman variable de los referentes. Por otra parte, se lleva a cabo un proceso de homogeneización de las normalizaciones cuando, considerando los datos y cuidando el factor de escala o la equivalencia, se cambia la forma en que originalmente se presentan las razones –e.g., en forma de porcentaje, fracción o número decimal- para poder hacerlas comparables (Cf. Fernández Lajusticia, 2009). Lamon (1999) por su parte, considera que para el razonamiento proporcional es fundamental una perspectiva relativa, en la que se incluyen relaciones multiplicativas, a diferencia de las perspectivas absolutas, en la que están involucradas solamente las estructuras aditivas.

Análisis funcional de los argumentos propuestos por Toulmin. En el ámbito de la investigación educativa que emplea el modelo de Toulmin (Pinochet, 2015), se afirma que un argumento se refiere a los discursos que un estudiante produce cuando trata de justificar sus conclusiones o explicaciones. Toulmin (2003) establece que se puede diferenciar la *afirmación* (C, por *claim*) cuyo valor se trata de establecer y los elementos justificatorios que se alegan como base de la afirmación, a los que denomina *datos* (D). Al presentar un conjunto determinado de datos como base para una afirmación estos pueden ser cuestionados. Para sostener la postura, aparecen proposiciones de diferente tipo: reglas, principios enunciados, etc., que permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional; éstas son las *garantías* (W, por *warrant*). La garantía es incidental, explicativa y general; mientras que a los datos se apela explícitamente, a las garantías se apela implícitamente. Detrás de las garantías puede haber otras certezas que las impregnan de autoridad y de vigencia: el *respaldo* de las garantías (B, por *backing*). El tipo de respaldo alegado por las garantías varía de un campo de argumentación a otro y se puede presentar más de un tipo de respaldo por garantía. Éstos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos y no siempre son explícitos. Por otra parte, los cualificadores modales (Q por q*ualifier*) son elementos del modelo de Toulmin que indican el grado de fuerza con el que se sostiene la garantía. Para desarrollar el análisis de datos utilizando este método propuesto por Toulmin, en el presente trabajo se consideraron como afirmaciones a las respuestas que defendieron los estudiantes; como datos, los procedimientos o sustentos con los que los alumnos respaldaron la respuesta que defendieron; como garantías a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo (Ver: *Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea*); como respaldos a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como cualificadores modales a los estados internos de convencimiento (que en lo que sigue se definen como ‘estados epistémicos de convencimiento’), los que se identifican con base en los criterios que aparecen en la Tabla 1.

Sobre los estados epistémicos. Como parte importante del análisis que se desarrolla aquí, se utiliza la propuesta de Martínez y Rigo (2014) para el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas. A esos estados internos les denominan ‘estados epistémicos’, e indican que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En suma, proponen un instrumento para distinguir estados epistémicos en que consideran que se vivencia un grado de certeza, de presunción o duda, cuando se dan muestras de cubrir, en algún grado, los criterios que describen: Mitigadores o Enfatizadores del Lenguaje, Acción, Determinación, Interés o Consistencia. En la tabla 1 aparece el instrumento completamente desglosado.

Tabla 1. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). Cuando recurre a mitigadores del lenguaje el grado de compromiso es menor (e.g., convendría)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico durante un proceso de argumentación son: – Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. – Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. – Claras y precisas.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

INSTRUMENTOS Y MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN EMPÍRICA

La investigación está inspirada en los principios de la teoría fundamentada (*Grounded Theory*) (Corbin y Strauss, 2015). Fieles a esos principios, la elaboración y el desarrollo de conceptos se ha hecho con base en los datos empíricos recabados en la investigación, mediante comparaciones constantes entre dichos datos, y aplicando continuamente un proceso iterativo de triangulación entre los conceptos de los investigadores, los datos empíricos y los términos teóricos tomados de la bibliografía.

La investigación consta de tres fases. En la primera se aplicó un cuestionario; del análisis de resultados se desprendió un conjunto de categorías de resolución. En la segunda fase se llevaron a cabo interacciones en las que parejas de estudiantes intercambiaron las resoluciones de la tarea que individualmente expusieron en el primer cuestionario. En la tercera fase los alumnos resolvieron de manera personal un cuestionario semejante al inicial.

Primera Fase: Cuestionario y Sujetos

Figura 1. La tarea de comparación de razones

Se aplicó a cada estudiante un cuestionario inicial que incluye una tarea de comparación de razones (con reajustes de la propuesta en Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo 2013) (ver figura 1). Se pregunta ¿Cuál de las ofertas es la que más conviene? Como se puede observar, cada oferta se presenta con una normalización diferente, además de que la primera se diferencia de las otras dos por el referente del número de videojuegos que se ofertan en conjunto y por el referente del ordinal del videojuego sobre el que recae la oferta. Una resolución correcta conlleva un proceso de relativización para homogeneizar normalizaciones y referentes. Este instrumento se aplicó a los estudiantes de dos grupos de tercero de secundaria (de edades entre 14 y 15 años) de dos escuelas técnicas con un buen nivel de desempeño general (una que está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México y otra dentro del 25%), con el objeto de que se tuvieran respuestas correctas y alumnos con capacidad de argumentar y contra-argumentar; el tercero de secundaria se eligió porque de acuerdo con el currículum, los alumnos ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando en temas de proporcionalidad.

Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea

Tabla 2. Claves de categorización de las resoluciones de la tarea

CO	MC	RJC	ROD	OC	Clave
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	S/Problemas	R7
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Valor unitario	$R6^{VU}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Building up	$R6^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	C/Problemas	R6
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R5_O$
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O	Building up	$R5_O^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R5_J$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$	Building up	$R5_J^{Bu}$
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R4
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$	Building up	$R4^{Bu}$
A_O	R_C	Rf_J	Rf_O		R3
A_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R2_O$
A_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R2_J$
A_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R1
R_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A6
R_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A5_O$
R_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A5_J$
R_O	A_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		A4
A_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A3
A_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A2_O$
A_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A2_J$
A_O	A_C	$-Rf_JJ$	$-Rf_O$		A1

En la primera fase del estudio se identificaron sub-categorías que hacen referencia a las estrategias más frecuentemente empleadas por los alumnos al resolver la tarea. Las sub-categorías identificadas son: *Compara ofertas* (C_O): implica que en la resolución se lleva a cabo una comparación relativa entre las ofertas (R_O si se lleva a cabo; A_O si no se realiza). *Manipula componentes* (MC): implica la manipulación multiplicativa de los componentes internos de la tarea (e.g., que proponga costo por juego y luego trate de escalar el número de juegos para comparar) (R_C si manipula; AC no lo hace). *Referente juegos en conjunto* (RJC): Hace referencia al número de juegos en conjunto por oferta ($-Rf_J$ significa que muestra dificultades al descomponer el número de juegos que se ofertan y utiliza un referente inadecuado para comparar, e.g., escala a 3 o 4 juegos; Rf_J indica que no se dejan ver dificultades). *Referente del ordinal al que se le aplica el descuento* (ROD): Hace referencia al número ordinal del juego sobre el que recae la oferta ($-Rf_O$ aparece cuando la resolución denota dificultades con la posición numérica del objeto sobre el que recae la oferta, e.g. indica que un juego extra a los ofertados conservaría el descuento; Rf_O indica que no se revelan dificultades). OC alude a *otras consideraciones*, ya sea que se haya utilizado la estrategia building up, que se hayan identificado algunos problemas ajenos a la razón y proporción o que no se hayan identificado dificultades de ningún tipo.

El tipo de resolución como categoría se utilizó como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron en cada una de las fases de la investigación sobre el tema de comparación de razones, asociado como garantía del argumento que se expuso. En la tabla 2 se muestra como se obtienen las claves de categorización de las resoluciones de la tarea con la combinación de todos los casos posibles y aparecen sombreadas las caracterizaciones de los tipos de resolución a las que recurrieron los alumnos cuyas interacciones aquí se analizan.

Segunda Fase: Interacciones, método y sujetos

En esta fase se determinó trabajar con la segunda escuela antes mencionada, ya que ahí se presentaron procesos de resolución más variados que en la otra. Con base en las categorías definidas en la fase anterior, se eligieron de entre los alumnos a cinco parejas con la característica de que mantuvieran posturas encontradas en relación a la resolución o solución de la tarea y que en su cuestionario inicial hayan ofrecido explicaciones amplias de lo que ahí habían hecho, con la intención de detonar durante la interacción el intercambio de ideas y procedimientos. En la interacción se solicitó que cada quien tratara de convencer a su compañero de que el procedimiento realizado por ellos en el cuestionario inicial era el más adecuado. El autor 1 actuó como mediador de las intervenciones.

Tercera Fase: Cuestionario final individual

Se propuso a los estudiantes que resolvieran de manera individual y por escrito una tarea semejante a la planteada en el cuestionario inicial, con la finalidad de detectar las posibles modificaciones en sus procedimientos de resolución y en sus cualificadores modales después de la interacción.

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES

Categorías para el análisis de las interacciones

Las categorías con las que se interpretan las interacciones fueron resultado de un proceso de triangulación, como ya se explicó. No obstante, para fines de claridad se exponen antes del análisis.

Con base en una re-definición de la idea de *account* (recogida de Krummheuer, 1995, quien la toma de Garfinkel) y en los datos empíricos recabados en la investigación, en este documento se define la noción de ‘*account completo*’ (a diferencia del ‘*account parcial*’ caracterizado en otro escrito de los autores) que se da cuando a partir de un intercambio comunicativo el incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla se presenta, de manera sincrónica, con el incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha. En este escrito se dice que cuando se da un proceso de *account completo* se ha generado una actitud de 'empatía matemática'. Con base en los grados de *accountability*, en la investigación se distinguen tres tipos de intercambio (productivo, de menor productividad y neutrales), de los cuales aquí sólo se describe uno:

I*ntercambio productivo (IP).* Se presenta cuando (al menos) uno de los participantes pone en juego un account completo y por tanto una actitud de empatía matemática.

Análisis empírico de las interacciones. Interacción Raúl-José

Con base en los conceptos antes expuestos (intercambios productivos y no productivos, y *account*) se presenta en lo que sigue un análisis de la interacción de una pareja de alumnos, análisis del cual se desprenden algunas 'características notables' que pueden eventualmente promover el éxito en las interacciones entre pares (ver *Resultados de la investigación*).

En la tabla 3 aparece el análisis funcional de los argumentos desarrollados durante la interacción que se dio entre José y Raúl. Se respeta el espíritu analítico propuesto por Toulmin; sin embargo, aparece en forma tabular para dar cuenta de las relaciones que guardan las garantías y los respaldos en los que Raúl apoya sus afirmaciones, en relación con las garantías y respaldos en los que José sustenta sus contra-argumentos, y en los que se apoya el investigador.

Raúl, primera intervención. Los procedimientos de Raúl se encuentran muy apegados a perspectivas de tipo absoluto y aditivo (las garantías, tanto de su cuestionario inicial como las de sus intervenciones subsecuentes, corresponden a la categoría $A5_O$); pareciera que el principal problema de este alumno consiste en que no considera el referente del número de juegos en su conjunto ($-Rf_J$); esto lo llevó a segmentar las ofertas y a pensar que tiene sentido, en el contexto de la tarea, el comprar juegos sueltos, posicionándose así en una postura absoluta a partir de la cual pierden significado las comparaciones multiplicativas y, por supuesto, la proporcionalidad. En su primera intervención Raúl preservó las garantías y los respaldos que ya estaban presentes en el argumento de su cuestionario; ahí se observa lo dicho: él ignoró las ventajas que le ofrece cada oferta, considerando que es indistinto comprar cualquier número de juegos. A pesar de que en esa intervención intentó mostrar un alto grado de presunción, al usar un lenguaje corporal muy expresivo, una postura erguida y abierta, alto volumen de voz, cubriendo criterios de acción y determinación, es posible que en el fondo no haya estado tan convencido de su argumento matemático, ya que su estrategia, no sólo en esta intervención sino a lo largo de toda su participación, consistió en ofrecer argumentos matemáticos (los ya comentados, que por cierto no son los más correctos y eficientes) complementados con razones extra-matemáticas (e.g, 'en la oferta 3×2 te regalan uno') como 'para reforzar', contraponiéndose así al criterio de consistencia.

Raúl y el investigador. El investigador contra-argumentó a Raúl con la intención de hacerle ver que podía escalar el número de juegos hasta conseguir un número adecuado para comparar todas las ofertas. Sin embargo, los planteamientos del investigador no apuntaron ni a las garantías ni a los respaldos de tipo matemático empleados por el alumno, es decir, no pusieron en entredicho que en el marco de la tarea, carece de sentido el concebir los juegos aisladamente, dejando de considerar las relaciones que éstos guardan con el resto de juegos incluidos en cada oferta; el investigador, por otra parte, tampoco cuestionó las garantías y los respaldos de tipo extra-matemático argüidos por Raúl.

Por lo antes dicho, se puede entender perfectamente que, como respuesta a las intervenciones del investigador, Raúl en su segunda participación (Ri2) no sólo no cuestionó su estrategia de adiciones sucesivas, sino que la fortaleció. Esto se observa en la afirmación RC3, en la que tiene frente a él dos soluciones a la tarea que resultan contradictorias entre sí. Raúl acepta sin conceder el argumento matemático propuesto por el investigador, pero apoya decididamente el suyo apelando a recursos extra-matemáticos ("nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta"), siendo consistente con su anterior respuesta y complementando y reforzando esa postura. En su siguiente intervención

Tabla 3. Análisis Funcional. Interacción Raúl-José

<table>
<tr><th>S.</th><th>Datos</th><th>Cualificadores Modales</th><th>Gar.</th><th>Respaldo</th><th>Afirmación</th></tr>
<tr><td>Rin</td><td>RD1:
<table><tr><td colspan="3">$1000 por juego.</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo de dos juegos</td><td>Costo de tres juegos</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1500</td><td>2500</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1300</td><td>2300</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>2000</td></tr></table></td><td></td><td>RW1: A5o</td><td>RBm1:
Estrategia de tipo absoluto. Ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe1:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC1:
3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno.</td></tr>
<tr><td>Ri1</td><td>RD2:
<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>Total</td><td>Ícono</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>¡Gratis!</td><td>2000</td><td>☺</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>2500</td><td>☹</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>2300</td><td>☺</td></tr></table>“sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original” “por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos.”</td><td>RQ2:
Alta presunción:
Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto.
Utiliza íconos que reflejan su pensar sobre las ofertas.
Acción; Determinación; Consistencia.</td><td>RW2: A5o</td><td>RBm2:
Estrategia absoluta, ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe2:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC2:
En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.</td></tr>
<tr><td>Ii1</td><td>Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?</td><td>IQ1:
Consolida el argumento de R y no cuestiona RW1 ni RW2.</td><td>IW1: A5o</td><td>IBe1:
Incita a completar estrategia Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri2</td><td>RD3:
Ok… si queremos cuatro… otros 1000, entonces serían supuestamente 3000…
<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>J4</td><td>Total</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>Gratis</td><td>1000</td><td>3000</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>500</td><td>3000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>300</td><td>2600</td></tr></table></td><td>RQ3:
Presunción:
Acción; Consistencia; Determinación. “Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está” No cuestiona su procedimiento.
Lenguaje corporal abierto y muy expresivo.
Mitigadores del lenguaje: “En este caso te convendría…”</td><td>RW3: A5o</td><td>RBm3:
Estrategia de adiciones sucesivas, no relativiza.

RBe3:
No acepta resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.</td><td>RC3:
En este caso te convendría mejor la número tres.
Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón dónde está marcada la oferta 3x2).</td></tr>
<tr><td>Ii2</td><td>¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?</td><td></td><td>IW2: A5o</td><td>IBm2:
Incita a completar estrategia tipo Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri3</td><td>RD4:
Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos… Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)… entonces son 4500… ¡sí! mmm… (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro… ya, 3900…</td><td>RQ4:
Alta presunción:
Acción.
Determinación.
No muestra cambios de perspectiva sobre el referente del número de juegos en conjunto.</td><td>RW4: A5o</td><td>RBm4:
Completa análisis por adiciones sucesivas.

RBe4:
Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento.</td><td>RC4:
Sí quiero llevarme seis juegos conviene más la tercera oferta.</td></tr>
<tr><td>Jr</td><td>JD1:
(Raúl) no sabía explicarlo y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.</td><td></td><td></td><td></td><td>JC1: No me convence el procedimiento de Raúl.</td></tr>
<tr><td>Jin</td><td>JD2:
<table><tr><td colspan="4">Descarta la 2a por la 3a;
propone precio: $1000</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo x2</td><td>Costo x3</td><td>Costo x4</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>$2000</td><td>$4000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>$1300</td><td></td><td>$2600</td></tr></table></td><td></td><td>JW2: $R5_J^{Bu}$</td><td>JBm2:
Estrategia Building up incorrecta, normaliza e identifica la diferencia entre porcentajes.</td><td>JC2: Es mejor la oferta 70% en 2° porque pagas menos por 4 juegos.</td></tr>
<tr><td>Ji1</td><td>JD3a:
Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serian 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serian 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres.

JD3b:
La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.</td><td>JQ3:
Certeza:
Acción; Determinación; Consistencia; Interés.
Cambia la perspectiva de resolución.</td><td>JW3: $R6^{VU}$</td><td>JBm3a:
Estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar.

JBm3b:
Descarta una oferta por comparación de porcentajes.

JBe3:
Indica “no te van a dar nada gratis” y “hay un presupuesto para cada videojuego”</td><td>JC3:
650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: “te convendría”</td><td>RW5: A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: “te convendría”</td><td>RW5: A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rf</td><td>RD6:
Se infiere propuesta de precio: $1000
<table><tr><td>Oferta</td><td>No. de juegos</td><td>Costo</td><td>Costo por juego</td></tr><tr><td>4x3</td><td>4</td><td>3000</td><td>750</td></tr><tr><td>1 1/4</td><td>4</td><td>2500</td><td>625</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>4</td><td>2600</td><td>650</td></tr></table>Por obvias razones es mejor un %75 que un 70% solamente.</td><td>RQ6:
Casi certeza con enfatizadores de lenguaje “por obvias razones”</td><td>RW6: $R6^{Bu}$, $R6^{Vu}$</td><td>RBm6:
Estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.</td><td>RC6:
Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente</td></tr>
</table>

Participantes: R: Raúl; J: José. Segmentos: in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. Análisis funcional: C: afirmación; D: dato; Q: cualificador; W: garantía; B: respaldo afirma “Si quiero llevarme seis juegos entonces conviene más la tercer oferta” (RC4); no obstante, no parece tomar conciencia de la contradicción entre esa postura y la asumida por él, porque da la impresión de que no comprende lo que está en el fondo de la resolución que le propone el investigador, la que acepta por concesión y por tratarse de “un caso particular y específico” distinto al que él plantea. Hasta este momento la postura de Raúl parece inamovible; en él no hay incremento en el conocimiento ni generación de duda.

José y Raúl. A diferencia de la intervención del investigador, José puso el acento justo en la garantía inconveniente (RW2: A5O) que implícitamente asume Raúl, conforme a la cual él considera que puede comprar cualquier número de juegos; se enfoca también en los respaldos de Raúl (RBm3 y RBm4) que refuerzan su estrategia de adiciones sucesivas. José muestra que es capaz de cuestionar el procedimiento y los argumentos de Raúl, y muestra también que ha escuchado atentamente a su compañero y que tiene la sensibilidad para entender sus argumentos: con su propuesta de utilizar el valor unitario como estrategia que respeta las relaciones de proporcionalidad (JW3, JBm3a) apunta hacia la garantía con la que Raúl sustenta su estrategia de resolución de tipo aditivo y cuando indica, entre otras cosas, que “no te van a dar nada gratis” (JBe3) apunta directamente hacia el respaldo extra-matemático de Raúl (RBe2).

A pesar de lo anterior, Raúl sigue empeñado en defender su postura y se niega a aceptar frente a su compañero que fue convencido; sin embargo, se infiere que en Raúl existen indicios de duda debido al contraste entre la manera en la que él sostiene la afirmación RC3 “yo sé que van a escoger ésta” (con cierta firmeza) y la forma de sustentar el argumento extra-matemático RC5, en el que utiliza “te convendría”, que es un mitigador del lenguaje que denota duda (Martínez y Rigo, 2014). Aunque Raúl entiende la parte matemática, está muy apegado a su respuesta y hace lo necesario, como pasar por encima de argumentos matemáticos y argüir razones extra-matemáticas, para soportar su respuesta. Sin embargo, este asomo de duda se convierte en conocimiento y seguramente en alta presunción cuando muestra, en su cuestionario final, una respuesta contundente en la que utiliza las estrategias que le explicó José: utiliza el valor unitario (retomando la garantía de José JW3a: R6VU) y compara porcentajes como lo hace su compañero en su intervención (JBm3b). Abandona además todas sus posturas retóricas y sus argumentos extra-matemáticos, centrándose sólo en los argumentos matemáticos. Lo anterior permite sugerir un posible cambio de estado epistémico a raíz del cambio de estrategia con la que se le cuestionan sus afirmaciones, garantías y respaldos.

José. En José también se observa una evolución. Él pasa de una resolución basada en Building up (con error) y descarte de ofertas por comparación de porcentajes, a una del tipo de valor unitario que utiliza al tomar la decisión de afrontar el reto que Raúl le plantea. En ese sentido, se considera que la explicación de Raúl es un detonador importante en este proceso de trabajo matemático. Aunque en su cuestionario final José regresa a la estrategia Building Up, su comprensión de las posibles resoluciones de este tipo de tarea de comparación de razones queda al descubierto cuando opta por una estrategia que no deja lugar a dudas para tratar de convencer a su compañero.

Consideraciones sobre la interacción. Lo antes dicho deja ver que la interacción de José (en relación a Raúl) es de tipo productivo, que la de Raúl (en relación a José) resultó un detonador y que la del investigador es neutral. Como se puede colegir de los datos empíricos antes expuestos, en la interacción de tipo productivo se presentan las siguientes condiciones: Raúl (R) incluyó en su planteamiento algo que para José (J) representó un reto; R puso en duda su planteamiento en algún momento; J se interesó por asumir el reto de convencer a R; y de manera muy relevante y significativa, J puede identificar las garantías y los respaldos en los que el R soporta su argumento, y contra-argumentar en consecuencia; finalmente, R utiliza los procedimientos explicados por su compañero para resolver una tarea similar.

En relación al *account* que vivencia José se puede decir que es de tipo completo, ya que él se convence a sí mismo y convence a su compañero de que su procedimiento de resolución es el más adecuado para resolver este tipo de tareas, al tiempo que incrementa su comprensión y la de su compañero, ya que Raúl, como se vio, utiliza los procedimientos de José en el cuestionario final. Con todo ello, José no sólo muestra que es capaz de utilizar el lenguaje matemático de su compañero y también el coloquial. Revela que en el fondo, José es sensible a las dificultades que en el ámbito matemático exhibe su compañero, relacionadas con el tema de la comparación de razones que se pone en juego al resolver la tarea, y que es sensible también a ciertas necesidades afectivas de Raúl. A esa sensibilidad que un alumno muestra hacia el otro, en la que se complementa lo disciplinar con lo afectivo, en este documento se denomina 'empatía matemática'.

RESULTADOS: CARACTERÍSTICAS NOTABLES PARA UNA INTERACCIÓN PRODUCTIVA

A partir de los datos empíricos recabados y del análisis del caso aquí expuesto, se sugiere que una interacción entre dos estudiantes A y B es productiva si se presentan las 'características notables' que a continuación se describen:

- Que B exponga argumentos que representen un reto para A.
- Que A escuche, entienda y se ponga en el lugar de B, comprometiéndose a superar el reto que le presenta su compañero.
- Que a partir de lo anterior, A sea capaz de identificarlas garantías y los respaldos sobre los cuales B sostiene sus argumentos y los refute sin dejar lugar a dudas.
- Que B escuche y entienda a su compañero y, en ese proceso, incremente su comprensión y cambie su convencimiento y que dé muestras de ello, utilizando alguno(s) argumentos que le ha explicado A.
- Que a partir de una actitud de empatía matemática, uno de los participantes (A) obtenga *account* completo, es decir, que en el proceso de tratar de convencer y de incrementar la comprensión del otro (B) se incremente su propia comprensión y su convencimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

Sobre los resultados de un trabajo previo, en el que se desvelan las características de las resoluciones de alumnos de 14 y 15 años de edad sobre una tarea de comparación de razones, y siguiendo los principios de la teoría fundamentada, la presente investigación hace una propuesta para identificar, definir y sistematizar características notables que hacen que un proceso de interacción, en el que dos alumnos intercambian resoluciones de dicha tarea, resulte productivo, neutral o no productivo, así como identificar, re-definir y caracterizar los procesos denominados *account* y *empatía matemática*. Como se ha visto a lo largo de este escrito, estas categorías teóricas permiten avanzar algunas explicaciones posibles sobre un fenómeno interesante en la didáctica de las matemáticas, pero poco aclarado en la literatura, relacionado con el éxito (o fracaso) de las interacciones entre pares; estas categorías permiten también sugerir una serie de estrategias, dirigidas al profesor, para promover interacciones provechosas entre sus alumnos. Sin duda, los procesos socio-educativos aquí estudiados resultan opciones muy ricas y propicias para el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es importante considerar los diversos pormenores que se pueden presentar, ya que no son una alternativa que garantiza el éxito. Entre otras cosas, los docentes deben de tener 'sensibilidad matemática' para identificar los componentes de los argumentos de los alumnos, pero también una 'sensibilidad emocional' para identificar y promover actitudes de empatía matemática entre ellos.

Referencias

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for development Grounded Theory*. 4e. Los Angeles: Sage.

Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*, Valencia, España: Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González; M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 49*, (pp. 193-223).

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM

Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência & Educação, Bauru, 21*(2), 307-327.

Smith, T. (2015). *Peer Interaction. Research Starters: Education* (Online Edition). Recuperado de: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ers&AN=89164361&lang=es&site=edslive>.

Stacey, K. (1992) Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *The Journal of Mathematical Behavior, 11*(3) 261-275

Topping, K. (2005). Trends in Peer Learning. *Educational Psychology, 25*(6). 631-645

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University Press.