USO DE UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE SOBRE FRACCIONES PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE

Using a learning trajectory for fractions to develop the skill of noticing

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

Mirar profesionalmente es una de las competencias que un maestro debe desarrollar. Las investigaciones en formación de maestros han mostrado que esta competencia puede empezar a desarrollarse en los programas de formación inicial. En este estudio, analizamos las respuestas de 31 estudiantes para maestro a dos tareas en las que debían interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria usando una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones. Nuestros resultados indican que la trayectoria de aprendizaje de las fracciones dotó a los estudiantes para maestro de un discurso matemático profesional para interpretar el pensamiento de los estudiantes de primaria ayudándoles a focalizar su atención en los detalles de las respuestas de los estudiantes.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, pensamiento fraccionario, formación de maestros, trayectoria de aprendizaje.*

Abstract

Noticing has been identified as one of the key skills that a teacher must develop. Research on teacher education has shown that noticing could be developed in teacher education programs. In this study, we analyse answers of 31 pre-service primary school teachers to two tasks in which they had to interpret primary school students' fractional thinking using a learning trajectory of fractions. Our results show that the learning trajectory provided pre-service teachers with a professional mathematical discourse to interpret students' mathematical thinking and helped them focus their attention on the details of students' answers.

Keywords: *professional noticing, fractional thinking, teacher education, learning trajectory*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas obligan a los maestros a distinguir y elegir entre aquellas que pueden tener un mayor potencial para desarrollar el aprendizaje de sus estudiantes. En este contexto, la competencia mirar profesionalmente es relevante para el maestro (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Para Mason (2011) "mirar profesionalmente implica un cambio o un movimiento en la atención" (p. 45) identificando distintas maneras de prestar atención: i) holding holes implica atender a algo pero sin discernir detalles, ii) discernir detalles (discerning details) implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) reconocer relaciones (recognizing relationships) implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) percibir propiedades (perceiving properties) consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y, v) razonar en función de las propiedades (reasoning on the basis of agreed properties) implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás (Mason 2011, p.47). Jacobs, Lamb y Philipp

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

(2010) se han centrado en un aspecto particular de esta competencia: mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Estos autores han conceptualizado esta competencia a través de tres destrezas interrelacionadas: identificar detalles matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes (discernir detalles), interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes teniendo en cuenta los detalles matemáticos identificados previamente (establecer relaciones), y decidir cómo continuar teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes (percibir propiedades).

En las últimas décadas se ha desarrollado una extensa agenda de investigación internacional con el objetivo de identificar diferentes contextos favorables para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016). Estos estudios han mostrado que esta competencia puede ser desarrollada por los estudiantes para maestro en los programas iniciales de formación, aunque esta no es una tarea sencilla sin unas referencias que guíen qué y cómo mirar (Levin, Hammer y Coffey, 2009; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Schack et al., 2013; Tyminsky, Land, Drake, Zambak y Simpson, 2014; Wilson, Sztajn, Edgington, y Confrey, 2014). En este sentido, investigaciones recientes han mostrado que las trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos son un instrumento capaz de ayudar a los maestros a focalizar la atención sobre aspectos relevantes en las respuestas de los estudiantes e interpretar su pensamiento matemático (Edgington, Wilson, Sztajn, y Webb, 2016; Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012; Wilson, Mojica y Confrey, 2013).

Nuestro estudio se centra en esta línea de investigación y trata de analizar cambios en la manera en la que los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en un módulo de formación diseñado para desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento fraccionario de los estudiantes, usando una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones. Nuestra hipótesis de trabajo es que la trayectoria de aprendizaje sobre fracciones puede actuar como marco teórico de referencia para ayudar a los estudiantes para maestro a reconocer lo que es relevante de las respuestas de los estudiantes.

Una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones

Simon (1995) conceptualizó una trayectoria de aprendizaje como un camino hipotético por el que los estudiantes podrían avanzar en su aprendizaje que está formada por tres elementos: *un objetivo de aprendizaje, la descripción de un proceso de aprendizaje y actividades de enseñanza*. En este estudio hemos elaborado una trayectoria de aprendizaje considerando, y adaptando al contexto español, las investigaciones sobre cómo se desarrolla el pensamiento de los estudiantes de Educación Primaria en el dominio de las fracciones (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe y Olive, 2010).

En la trayectoria diseñada, el objetivo de aprendizaje proviene del currículum de educación primaria: dar sentido a la idea de fracción y su interpretación como parte-todo y comprender el significado de las operaciones de fracciones. Por lo que respecta al proceso de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones, hemos considerado seis niveles de comprensión. Presentamos las principales características de los cuatro primeros niveles, que son las implicadas en las dos tareas de esta comunicación, atendiendo a la comprensión de los elementos matemáticos que los caracterizan: i) nivel 1, no reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, ii) nivel 2, reconocen que las partes pueden ser diferentes en forma pero congruentes en relación al todo en contexto continuo (identifican y representan fracciones en contexto continuo), iii) nivel 3, identifican y representan fracciones en contexto discreto, reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes y consideran una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como unidad iterativa iv) nivel 4, resuelven las operaciones con fracciones y problemas aritméticos sencillos con ayuda de una guía (Ivars, Fernández y Llinares, 2016).

Además, se incluyen actividades de identificación, comparación y representación de fracciones y operaciones con fracciones como actividades de aprendizaje para apoyar la transición de los estudiantes de educación primaria a través de los niveles del proceso de aprendizaje establecidos en la trayectoria de aprendizaje.

MÉTODO

Participantes e instrumento

En este estudio participaron 31 estudiantes para maestro (EPM) de tercer curso del grado de Maestro en Educación Primaria que se encontraban cursando una asignatura relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Uno de los objetivos de esta asignatura es desarrollar la competencia mirar profesionalmente. Las tareas de este estudio estaban incluidas en el módulo de enseñanza-aprendizaje de las fracciones. Estos EPM habían cursado previamente dos asignaturas de contenido matemático, una sobre sentido numérico y otra sobre sentido geométrico.

El módulo de fracciones constaba de 7 sesiones. En la primera sesión se presentaron los elementos matemáticos implicados en las actividades de fracciones a través de la resolución de actividades de educación primaria (identificación de fracciones, representación de fracciones, comparación, operaciones con fracciones…). En la sesión 2, se analizaron resoluciones de estudiantes de primaria (video) a este tipo de actividades con el fin de identificar qué elementos matemáticos estaban implicados en sus respuestas. En la sesión 3 se les presentó la trayectoria de aprendizaje (objetivo, niveles de comprensión y actividades para el desarrollo de la comprensión). En las sesiones 4, 5 y 6 los EPM resolvieron 3 tareas donde tenían que analizar respuestas de estudiantes con distinto nivel de comprensión usando la trayectoria de aprendizaje (una de identificación de fracciones, otra de comparación de fracciones y la última de operaciones con fracciones). En la sesión de evaluación (sesión 7), los EPM resolvieron una tarea similar a la de las sesiones 4, 5 y 6.

Los datos de este estudio son las respuestas de los EPM a la tarea de la sesión 4 (tarea de identificación de fracciones – *Tarea 1*) y a la tarea de la sesión de evaluación (*Tarea 2*). Ambas tareas seguían una estructura similar, se presentaban diferentes respuestas de estudiantes de primaria a una actividad que evidenciaban características de los distintos niveles de comprensión sobre fracciones de la trayectoria de aprendizaje y, a continuación, los estudiantes para maestro debían responder a las siguientes preguntas:

- Describe la tarea en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los elementos matemáticos que el resolutor debe usar para resolverla?
- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista.

En la tarea 1 (la Figura 1 recoge parte de esta tarea), los elementos matemáticos involucrados son: las partes de un todo han de ser congruentes (elemento 1) y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte (elemento 2). Las respuestas de los estudiantes de educación primaria reflejaban diferentes características de los niveles de la trayectoria de aprendizaje (Ivars et al., 2016): Xavi y Víctor (pareja 1) no tienen en cuenta que las partes del todo deben ser congruentes al decir que l*as figuras A, B, C y D representan ¾* (nivel 1). Joan y Tere (pareja 2) identifican que las partes deben ser congruentes en contextos continuos, pero no reconocen que una parte puede ser dividida en otras partes. Esta última característica se evidencia cuando dicen que la Figura E no representa 3/4 porque está dividida en 24 partes iguales y hay 18 sombreadas (nivel 2). Finalmente, Álvaro y Félix (pareja 3) consideran que las partes deben ser congruentes y que una parte puede estar dividida en otras partes (escogen las Figuras B, D, E y F como representaciones de ¾) (nivel 3). Para resolver esta primera tarea (sesión 4) los estudiantes para maestro disponían de un documento teórico en el que se reflejaban las características de la trayectoria de aprendizaje.

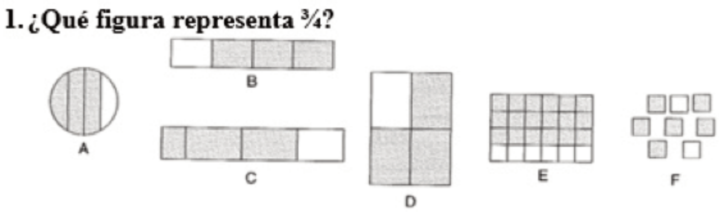


Figura 1. Actividad de identificación de fracciones (Battista, 2012)

La tarea 2 consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a dos actividades con fracciones, la primera de ellas era una actividad de identificación de fracciones y la segunda una actividad de reconstrucción de la unidad en la que, además de los elementos matemáticos 1 y 2 implícitos en la tarea 1, está implicado el elemento matemático 3, considerar una parte como unidad iterativa que les permite construir otras fracciones (Figura 2).

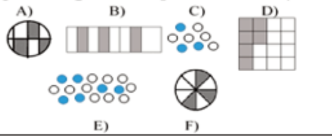
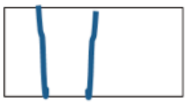
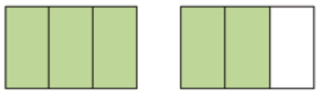
	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
¿Qué figuras representan 3/8? 	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*
Esta figura representa 5/3 de la unidad. Representa la unidad 	*Esto son 3 partes* 	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 	*Si nos muestran 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

Figura 2. Tarea 2: identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

En relación a las respuestas de los estudiantes, el estudiante 1 muestra características del Nivel 1 de la trayectoria de aprendizaje ya que, en la primera actividad identifica A y B como 3/8 mostrando que no tiene en cuenta que las partes en que se divide el todo han de ser congruentes en contexto continuo, ni tampoco en discreto (no considera la figura C como 3/8). Al no considerar D y E como 3/8 indica que no que no usa la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. Además, en la segunda actividad no tiene en cuenta la congruencia de las partes (no divide la figura en partes congruentes) y tampoco identifica ni utiliza la fracción unitaria como unidad iterativa.

El estudiante 2 muestra características del nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje porque, en la primera actividad, usa adecuadamente la idea de que las partes deben ser congruentes en contextos continuos (reconoce que en A y B las partes no son congruentes, pero sí lo son en F), pero no en discretos (no considera C como 3/8). Como no señala las figuras D y E como 3/8 entendemos que no considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. En la segunda actividad no reconoce el rectángulo como la representación de 5/3 por lo que evidencia la no comprensión de 5/3 como 5 veces 1/3, no siendo capaz por tanto de reconstruir la unidad. Finalmente, la respuesta del estudiante 3 muestra características del Nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje porque, en la primera actividad, utiliza la idea de que las partes deben ser congruentes, en contextos continuos (no considera como representación de 3/8 las figuras A y B y sí la figura F) y en discretos (considera C como 3/8). También considera que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte, ya que elige las representaciones D, y E, como 3/8. Además, en la segunda actividad considera la representación de 5/3 como 5 veces 1/3, por lo que divide la figura en 5 partes congruentes utilizando la idea de que las partes deben ser congruentes para encontrar la fracción unitaria (1/3) para después utilizarla como unidad iterativa para representar 5/3 (iterando 5 veces 1/3) lo que le permite reconstruir la unidad (3 veces 1/3).

Datos y análisis

Las respuestas de los EPM a las dos tareas fueron analizadas por tres investigadores individualmente considerando cómo i) usaron los elementos matemáticos del concepto de fracción para describir las respuestas de los estudiantes de primaria (discernir detalles), ii) interpretaron la comprensión de los estudiantes de primaria usando los elementos matemáticos identificados (establecer relaciones entre los elementos identificados en las respuestas de los estudiantes y el nivel de comprensión propuesto en la trayectoria de aprendizaje) y iii) proponían actividades para que el estudiante progresara en su comprensión. Posteriormente se compararon los análisis individuales discutiéndose las diferencias y similitudes hasta que se consensuó un acuerdo. En esta comunicación solo nos centramos en los cambios en relación a la destreza interpretar entre la tarea 1 y la 2, por lo que se muestran únicamente las categorías obtenidas en este análisis (Tabla 1).

Tabla 1. Categorías obtenidas tras el análisis sobre cómo los EPM interpretaban la comprensión

Categorías (interpretar comprensión)	Subcategorías	Descripción
No relacionan		No relacionan los elementos matemáticos de las respuestas de los estudiantes con los niveles de comprensión
Establecen relaciones	Elemento matemático 1 (E1) *Con evidencias*	Relacionan el elemento matemático 1 con el nivel de comprensión del estudiante aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Con evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión del estudiante, aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Añadiendo información*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión de los estudiantes, aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes, pero añaden información.
	Elementos matemáticos 1 y 2 (E1y2) *Sin evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1 y 2 con el nivel de comprensión de los estudiantes sin aportar evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación
	Elementos matemáticos 1, 2 y 3 (E1, 2 y 3) *Con evidencias*	Relacionan los elementos matemáticos 1, 2 y 3 con el nivel de comprensión de los estudiantes aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para justificar su interpretación.

RESULTADOS

El análisis realizado a la tarea 1 y la tarea 2 nos permitió establecer comparaciones entre las respuestas de los EPM a cada una de ellas e identificar cambios en la manera en que los estudiantes para maestro reconocían evidencias de la comprensión de los estudiantes de primaria usando como referencia teórica la trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones (Tabla 2).

En la tarea 1, 30 de los 31 EPM fueron capaces de relacionar los elementos *las partes de un todo deben ser congruentes* (elemento 1) y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte (elemento 2) identificados en las respuestas de los estudiantes con los niveles de comprensión propuestos en la trayectoria de aprendizaje. Sin embargo, el análisis realizado reveló que no todos los EPM que establecieron relaciones en la tarea 1 lo hicieron del mismo modo. Los resultados señalan diferencias en el discurso escrito por los EPM que nos permiten identificar tres subcategorías: ocho EPM generaron un discurso matemático menos detallado en el que no se incluían evidencias de las respuestas de los estudiantes como justificación de su interpretación (*Sin evidencias*), dos EPM generaron un discurso matemático más elaborado en el que se incluían evidencias de las respuestas de

Tabla 2. Número de EPM en cada categoría identificada en relación a cómo interpretaban el pensamiento fraccionario de los estudiantes en las tareas 1 y 2

TAREA 1 \ TAREA 2		No relacionan	Establecen relaciones (E1) Con evidencias	Establecen relaciones (E1y2) Con evidencias	Establecen relaciones (E1,2y3) Con evidencias	Total Tarea 1
No relacionan				1		1
Establecen	Añaden				2	2
relaciones	Sin evidencias			3	5	8
(E1y2)	Con evidencias	2	1	7	10	20
Total Tarea 2		2	1	11	17	

los estudiantes para justificar su interpretación, pero también añadieron información que no se podía inferir desde las respuestas de los estudiantes y, finalmente, 20 EPM generaron un discurso matemático más elaborado aportando evidencias desde las respuestas de los estudiantes (*Con evidencias*).

Sin embargo, los resultados de la tarea 2 muestran que 29 de los 31 EPM fueron capaces de establecer relaciones y además lo hicieron utilizando un discurso matemático elaborado en el que aportaban evidencias de las respuestas de los estudiantes de educación primaria para justificar sus interpretaciones (*Con evidencias*). Mostramos como ejemplo extractos de las respuestas del E03 en los que se observa cómo cambió el discurso entre la tarea 1 y la tarea 2.

En la tarea 1 la estudiante para maestro E03 describió el pensamiento fraccionario de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 (las partes de una fracción deben ser congruentes y una parte puede estar dividida en otras partes) y los diferentes niveles de la trayectoria de aprendizaje, pero no aportó evidencias de las respuestas de los estudiantes, sino que simplemente elaboró un listado de características:

> Víctor y Xavi: No tienen en cuenta la congruencia de las partes. Desconocen el contexto discreto. Conocen el contexto continuo. Se encuentran en el nivel 1.
>
> Joan y Tere: Tienen en cuenta la congruencia de las partes. Desconocen el contexto discontinuo. Se encuentran en el nivel 2.
>
> Félix y Álvaro: Tienen en cuenta la congruencia de las partes. Conocen el contexto discreto. Consideran un grupo de partes como una parte. Se encuentran en el nivel 3.

Aunque esta EPM estableció relaciones entre los diferentes elementos matemáticos y los distintos niveles de la trayectoria de aprendizaje, no proporcionó detalles específicos de las respuestas de los estudiantes para apoyar su interpretación. Sin embargo, en la tarea 2, generó un discurso en el que establecía relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de comprensión en la trayectoria de aprendizaje incluyendo evidencias desde las respuestas de los estudiantes (énfasis añadido):

> Estudiante 1: En el problema 1 no tiene en cuenta que todas las partes han de ser congruentes porque escoge las figuras A y B. Solo reconoce el contexto continuo porque no escoge ni la opción C ni E. No reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes ya que, no escoge ni al D ni la E. Por lo tanto, no comprende la idea de equivalencia 6/18 = 3/8. En el problema 2 no tiene en cuenta que las partes han de ser congruentes. No reconoce la unidad porque divide el rectángulo en 3 partes en vez de dividirlo en 5 partes y coger 3. El estudiante 1 estaría en el nivel 1 pues no sabe que todas las partes han de ser congruentes.
>
> Estudiante 2: En el problema 1 tiene en cuenta que las partes han de ser congruentes porque descarta las figuras A y B. Desconoce el contexto discreto ya que no sabe interpretar la figura C ni E. No ve que una parte puede estar dividida en otras partes y que 6/16 es equivalente a 3/8 (idea de equivalencia). En el problema 2 tiene en cuenta la congruencia de las partes. No reconoce la unidad puesto que ha

> sombreado 5/3 en vez de 3/3. No tienen en cuenta que el todo no varía y por eso ha dibujado dos rectángulos de 3/3 cada uno. El estudiante 2 estaría en el nivel 2. Solo conoce el contexto continuo y sabe que las partes han de ser congruentes.
>
> Estudiante 3:En el problema tiene en cuenta que las partes deben ser congruentes y descarta las figuras A y B. Conoce ambos contextos continuo y discreto. Comprende que una parte puede estar dividida en otras partes y a que ve 6/16 como 3/8 en las figuras D y E (idea de equivalencia comprendida). En el problema 2, tiene en cuenta la congruencia de las partes. Reconoce la unidad porque sombrea 3/3. Conoce que el todo no varía y por eso divide el todo dado en 5 partes y luego coge la unidad (3/3). El estudiante 3 estaría en el nivel 3. Sabe que las partes han de ser congruentes, sabe trabajar en ambos contextos, conoce la idea de equivalencia, sabe trabajar con diferentes fracciones como unidad iterativa y reconoce que el todo no varía.

El cambio en el discurso entre la tarea 1 y 2 parece sugerir que las tareas propuestas en el módulo en las que los EPM tenían que usar una trayectoria de aprendizaje para interpretar el pensamiento matemático de estudiantes de primaria les ayudó a estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional con el que interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes.

Por otra parte, no todos los EPM, que en la tarea 1, fueron capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes estableciendo relaciones entre los dos elementos matemáticos involucrados y los niveles de comprensión, fueron capaces de hacerlo en la tarea 2 (Tabla 2). De los 29 EPM que establecieron relaciones en la tarea 2, solo 17 lo hicieron con los tres elementos matemáticos implicados en la tarea. Los otros EPM relacionaron únicamente el elemento 1 y el elemento 2 con los niveles de la trayectoria de aprendizaje. Mostramos, a modo de ejemplo un extracto de las respuestas de un EPM que en la tarea 1 estableció relaciones entre los dos elementos matemáticos implicados en las respuestas de los estudiantes y los niveles de comprensión caracterizados en la trayectoria de aprendizaje. Sin embargo, este mismo EPM en la tarea 2 únicamente estableció relaciones con estos mismos elementos (elementos 1 y 2) pero no fue capaz de considerar el elemento 3 implicado en la tarea de reconstruir el todo cuando se da la representación de una fracción impropia. En el siguiente extracto se observa como el EPM interpretó la comprensión del estudiante 1 en la tarea 2 estableciendo relaciones con los elementos matemáticos 1 y 2.

> El estudiante 1: En el problema 1 no reconoce que las partes deben ser congruentes ya que dice que las figura A y B son 3/8 (cuando A y B no tienen partes congruentes). Además, no reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes (figuras D y E por ej.). Por lo que tienen dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes. En el problema 2 no reconoce que las partes deben ser congruentes ya que no divide la figura en 3 partes iguales. Muestra dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes.
>
> Estudiante 1: Se encuentra en nivel 1 dado que no reconoce que las partes deben ser congruentes (por las figuras A y B cuyas partes no son congruentes y porque en el rectángulo no ha dibujado partes congruentes). Además, tampoco reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes (figuras C, D y E). Ni reconoce una parte como una unidad iterativa (iterar el 1/3 5 veces en la fracción impropia).

Sin embargo, cuando interpretó la comprensión de los estudiantes 2 y 3, escribió lo siguiente:

> El estudiante 2: Problema 1: reconoce que las partes deben ser congruentes porque dice que las figuras A y B, no tienen partes congruentes y la figura F sí que las tiene. No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes (no ven la figura C como 3/8, no ven la figura D (6/18) como 3/8 o tampoco ven la figura E (6/16) como 3/8. En el problema 2: reconoce que las partes deben ser congruentes. Además, reconoce una parte como una unidad iterativa, por ello, sabe representar la fracción impropia.
>
> Estudiante 2, está en el nivel 2 ya que reconoce que las partes deben ser congruente (dice que las figuras A y B no lo son) y también divide el rectángulo [todo] en partes iguales [en el problema 2]. Sigue sin reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes (no reconoce las figuras C, D y E). En cambio, representa bien 5/3 de la figura.

> Estudiante 3: Problema 1: Reconoce que las partes deber ser congruentes. Figuras A y B las partes no son congruentes y en la figura F las partes sí lo son. Reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte porque reconoce las figuras C, D y E como 3/8. Problema 2: reconoce que las partes deben ser congruentes ya que divide en partes iguales el rectángulo. Muestra dificultades con la fracción unitaria, por ello no sabe representar la fracción impropia 5/3 y representa 3/5.
>
> Estudiante 3: está en el nivel 3 ya que considera que una parte puede estar dividida en otras partes, figuras C, D y E y que las partes deben ser congruentes (figura F). Sin embargo hace mal la fracción propia.

El EPM interpreta que el estudiante 2, "reconoce una parte como una unidad iterativa, por ello, sabe representar la fracción impropia" y que el estudiante 3 "muestra dificultades con la fracción unitaria, por ello no sabe representar la fracción impropia 5/3 y representa 3/5", lo que indica que el EPM toma la parte (5/3) por el todo (3/3) evidenciando dificultades con la reconstrucción de la unidad desde una parte a un todo donde la parte es $f > 1$.

Este tipo de respuestas subrayan las dificultades que deben afrontar los EPM a la hora de considerar el elemento matemático 3 (considerar una parte como una unidad iterativa, de manera que permita construir otras fracciones), como un paso necesario para reconstruir el todo cuando se les proporciona una fracción impropia. Estos EPM establecieron relaciones en las dos tareas entre los elementos matemáticos 1 y 2 y los niveles de comprensión descritos en la trayectoria de aprendizaje, sin embargo, tuvieron dificultades para interpretar las respuestas de los estudiantes de primaria en las tareas que implicaban el elemento considerar una parte como una unidad iterativa (tareas de reconstruir la unidad).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es analizar cambios en la manera en la que los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes utilizando una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones en un módulo diseñado para desarrollar la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento fraccionario en estudiantes de primaria.

Los resultados de esta investigación muestran cambios en el discurso elaborado por los EPM entre la tarea 1 y la tarea 2 tras la participación en el módulo diseñado. En primer lugar, la trayectoria de aprendizaje les ayudó a estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional. En segundo lugar, algunos de estos cambios estuvieron vinculados a los elementos matemáticos que intervenían en la tarea, mostrando la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro y el desarrollo de la destreza de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Estas dos ideas las elaboramos a continuación.

Respecto a la primera idea, en la tarea 1, 20 EPM desarrollaron un discurso estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos 1 y 2 (*las partes de un todo deben ser congruentes, elemento 1, y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte, elemento 2*) que intervenían en la tarea de identificar fracciones y los niveles de comprensión de los estudiantes caracterizados en la trayectoria de aprendizaje, aportando evidencias desde las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, en la tarea 2, fueron 29 EPM los que establecieron estas relaciones incluyendo también evidencias de las respuestas de los estudiantes. Este cambio en el discurso sugiere que la trayectoria de aprendizaje utilizada como marco de referencia para interpretar el pensamiento de los estudiantes les permitió focalizar su atención (Mason, 2002) centrándose en los detalles de las respuestas de los estudiantes. Además, pone de manifiesto que la trayectoria de aprendizaje dotó a los EPM de elementos para generar un discurso matemático específico para interpretar el pensamiento de los estudiantes (Wickstrom, Baek, Barrett, Cullen y Tobias, 2012). Los resultados indican que la trayectoria de aprendizaje sobre fracciones, utilizada como marco de referencia para interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes, es una buena herramienta para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, ya que permitió a los EPM estructurar su mirada y les dotó de un lenguaje profesional con el que interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria.

En relación a la segunda idea, el hecho de que en la tarea 2 sólo 17 EPM de los 31 fueran capaces de establecer relaciones entre el elemento matemático 3 y los niveles de la trayectoria de aprendizaje en la actividad de reconstruir el todo, pone de manifiesto el vínculo entre el conocimiento de matemáticas de los EPM y su capacidad de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de educación primaria. Las evidencias aportadas sugieren que estos EPM tuvieron dificultades para resolver la actividad de reconstrucción de la unidad mostrando, por tanto, la falta de conocimiento matemático específico necesario. Este hecho implica, que disponer del conocimiento matemático específico necesario para resolver la actividad sobre fracciones, resulta un factor determinante para que los EPM reconozcan evidencias de la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones adecuadas entre dichas respuestas y su nivel de comprensión (es decir, desarrollen la destreza de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes).

Aunque hemos mostrado cómo el uso de una trayectoria de aprendizaje ayudó a los EPM a generar un discurso sobre el pensamiento fraccionario de los estudiantes, apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, investigaciones previas han identificado la destreza proponer decisiones de acción, como la más difícil de desarrollar por los EPM (Choy, 2016; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Ivars y Fernández, 2016). Por tanto, y en relación a futuras investigaciones, sería interesante comprobar la influencia del aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje en la toma de decisiones de acción.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España) EDU2014-54526-R y por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para la Formación de Profesorado Universitario (España) FPU14/07107 (primer autor).

Referencias

Battista, M.T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.

Choy, B.H. (2016). Snapshots of mathematics teacher noticing during task design. *Mathematics Education Research Journal, 28*(3), 421-440.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747-759.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Narratives and the development of the skill of noticing. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 19–26. Szeged, Hungary: PME.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Pre-service teachers' learning to notice students' fractional thinking: The design of a learning environment through a Learning Trajectory. ERME. *European Society for Research in Mathematics Education*. Berlin. https://www.hu-berlin.de/de/einrichtungen-organisation/wissenschaftliche-einrichtungen/zentralinstitute/pse/erme/scientific-programme-1/papers

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs y R.A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. (pp.35-50). New York: Routledge.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education 13*(6), 1305–1329.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(5), 379-397.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer Science & Business Media.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S. y Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J.J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Springer International Publishing.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-595.

Wickstrom, M., Baek, J., Barrett, J. E., Cullen, C. J. y Tobias, J. M. (2012). Teacher's noticing of children's understanding of linear measurement. En L.R. Van Zoest, J.J. Lo y J.L. Kratky (Eds.), *Thirty-fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121.

Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(2), 149-175.