ANÁLISIS DE PROCESOS DIDÁCTICOS PARA LOGRAR CONVENCIMIENTO EN UN CONOCIMIENTO MATEMÁTICO BIEN FUNDAMENTADO

Analysis of didactic processes to achieve convincement of well-grounded mathematical knowledge

Martínez Navarro, B. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Resumen

Con base en los principios de la Teoría Fundamentada en este escrito se analiza la interacción -a distancia- entre un tutor y un estudiante. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones entre el convencimiento que experimenta un estudiante en torno a una respuesta, la adecuación de dicha respuesta a la acepción matemática aceptada y su fundamento. Se desprende de este análisis una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, se identifican procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado.

Palabras clave: *convencimiento, comprensión, procesos didácticos, argumentación matemática.*

Abstract

Based on the principles of Grounded Theory, this paper analyzes the interaction –distance- between a tutor and a student. At an initial level, a microanalysis is performed of the relations that exist among the convincement experienced by a student with respect to an answer, the adjustment of that answer to the accepted mathematics meaning and its foundation. A characterization of arguments stems from the analysis. Then at a second level, processes are identified in which a student experiences convincement of a well-grounded knowledge.

Keywords: *convincement, understanding, didactic processes, mathematical argumentation.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En investigaciones diversas se ha destacado el peso que tiene el convencimiento en los hechos de las matemáticas que los agentes de clase vivencian durante los procesos didácticos. Por ejemplo, Krummehuer (1995) resaltó el convencimiento asociado a los soportes de los argumentos, para cuyo análisis utilizó el Modelo de Toulmin; despunta en su aplicación la omisión de los calificadores modales Q, ausencia que señalaron Inglis, Mejía Ramos y Simpson (2007). Estos autores sostienen que una mejor categorización de la argumentación matemática la proporciona el uso del esquema completo de Toulmin (que incluye a los calificadores Q). En su propuesta los investigadores mostraron que estudiantes de posgrado talentosos frecuentemente usan garantías no deductivas que reducen su incertidumbre sobre la conclusión de un argumento, pero no la anula (p. 9). Esos estudiantes, continúan los autores, eliminan su incertidumbre en una conclusión solo si se desprende de una prueba formal. El estudio permitió a Inglis et al, incluir al razonamiento informal (e. g. intuitivo o inductivo) como parte de la gama completa de la argumentación matemática; les permitió también desprender como consideración didáctica que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades de los estudiantes para igualar “adecuadamente” tipos de garantías con calificadores modales Q (p.3). Afín a esta sugerencia educativa, un artículo reciente sobre los estados de confianza que se dan en estudiantes de niveles básicos, realizado

Martínez Navarro, B. y Rigo Lemini, M. (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 335-345). Zaragoza: SEIEM.

por Foster (2016), sugiere que un alumno "bien calibrado" en un tema es aquel que confía en sus respuestas correctas y duda de las que no lo son. Foster advierte, sin embargo, que en escenarios reales un estudiante puede mostrar altos niveles de confianza y competencia en un procedimiento sin entender las matemáticas que hay detrás de dicho procedimiento. Al respecto, el autor apunta que se deben encontrar maneras para que los profesores puedan apoyar a que sus alumnos experimenten altos niveles de confianza y competencia en los conceptos que hay detrás de sus procedimientos (p. 286). En correspondencia con los temas relativos al convencimiento antes descritos, y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) (Corbin y Strauss, 2015), el objetivo general de este escrito es explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado. Para tal fin se examina, de acuerdo a dos niveles de análisis, una interacción a distancia entre un tutor y un estudiante en un contexto de álgebra de niveles básicos. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones que en un argumento se pueden dar entre el convencimiento de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y su fundamento. De este análisis se desprende una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, en el que se incorpora el proceso al análisis, se da cuenta de estrategias que permitieron a un profesor que un estudiante llegara a experimentar confianza en un conocimiento bien fundamentado. Así, en el escrito se busca responder ¿Cómo se pueden explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado? ¿Cómo se pueden caracterizar los argumentos que emergen de esos procesos?

MARCO TEORICO

Para analizar las participaciones de los estudiantes se recurrió al Modelo de Toulmin. En este modelo, un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D), garantías (W), un soporte (B), y calificadores (Q). Enseguida se expone la interpretación de esos elementos en este escrito.

Los calificadores Q

Toulmin, Rieke y Janik (1984) consideran que Q consiste en "el grado de confianza que puede ser adjudicado a las conclusiones dados los argumentos disponibles para apoyarlas" (p. 85, 1984). En esta interpretación de Q se supone implícitamente un sujeto experto que califica. A diferencia, en el presente escrito se acepta explícitamente que es el sujeto que argumenta el que califica la fuerza de los componentes del argumento, y se considera que ese sujeto (que participa en un foro virtual) vivencia un estado de convencimiento, o bien de presunción o duda en un enunciado matemático –los que Rigo (2013) denomina "estados epistémicos de convencimiento"–, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1 (Martínez y Rigo, 2014).

Tabla 1: Instrumento teórico-metodológico para distinguir estados epistémicos

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: – *Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. – *Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. – *Claras y precisas.*
Consistencia	La persona muestra consistencia en distintas intervenciones.

Garantías (W): adecuación entre las acciones y el significado matemático aceptado

El contenido matemático de los fragmentos elegidos para este estudio es el de la resolución de ecuaciones lineales. En este escrito se considera al Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005) como el procedimiento paradigmático escolar para encarar ese tipo de tareas. De acuerdo a ese modelo, los aspectos de la variable como incógnita específica que un estudiante debe poner en juego cuando se resuelven ecuaciones lineales son: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de valores específicos (aspecto I1); determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos (aspecto I4) y sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero (aspecto I3). En este escrito, las garantías (W) que subyacen las acciones de los estudiantes revelan si esas acciones son acordes a los aspectos antes mencionados.

El soporte del argumento B

Al resolver una ecuación lineal los estudiantes pueden fundar sus argumentos en diferentes soportes; los soportes pueden estar conformados por constituyentes diversos, uno de los cuales coincide con lo que Rigo (2013) llama “esquemas epistémicos” de sustentación. Según la autora, mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como las instanciaciones de reglas generales, otros se articulan en torno a consideraciones extra-matemáticas, como los esquemas operatorios que se activan cuando se introduce una regla sin justificación, basada posiblemente en la autoridad que se le otorga a las matemáticas. Por tanto, se pueden presentar soportes matemáticos y soportes extra-matemáticos para los argumentos.

Otro de los constituyentes hace referencia al carácter aritmético o algebraico del argumento. En este escrito se sugiere (cf. Martínez y Pedemonte, 2014) que la resolución de una ecuación se basa en el álgebra cuando el sistema de referencia en los datos contiene literales, y el “núcleo del argumento” (i.e., sus D y su C) presenta una estructura de tipo deductivo, la que es posible explicitar a través de las garantías, ya que éstas descubren la estructura que articula el argumento. Se dirá que una resolución se soporta en la aritmética cuando el sistema de referencia en los datos se da por ensayo y error numérico, y el núcleo del argumento presenta una estructura inductiva. Otro indicador para determinar si el soporte contiene constituyentes aritméticos o algebraicos está relacionado con los elementos conceptuales que el alumno pone en juego cuando realiza el aspecto I3. I3 presupone el desarrollo, aunque sea sólo de manera intuitiva y tácita, del siguiente argumento: a) Considerar en la ecuación $ax + b = 0$ un valor específico para x, i.e., que $x = r$, $r \in \mathbb{R}$; b) Instanciar en la ecuación, i.e., $a(r) + b = 0$; c) Realizar operaciones aritméticas; d) Derivar (eventualmente) una tautología aritmética: $m = m$; e) Desprender de d) que a) es una suposición correcta (de otro modo no se derivaría de ella una tautología), y que $a(r) + b = 0$ es una proposición verdadera, esto es, que r hace verdadera a la proposición $ax + b = 0$ (la cual es abierta, ya que carece de un valor de verdad), y que por tanto, r es una solución para dicha ecuación. Cuando el alumno procesa I3 con la conciencia de lo que significa que un valor específico $r \in \mathbb{R}$ “satisface una ecuación y resuelve el problema” (Ursini et al, 2005, p. 27), esto es, cuando tiene algunas intuiciones relacionadas con los pasos a) al e) del argumento antes expuesto, en este documento se considera que I3 coadyuva a su comprensión de la variable y que el soporte de su argumento contiene un constituyente algebraico. Cuando I3 queda sólo como un argumento incomprensible y rutinario para el estudiante que va sólo del paso a) al d) y él lo aplica solamente con el propósito de verificar (“en la aritmética”, terreno seguro para el alumno) si los valores obtenidos son correctos, aquí se considera que ese aspecto I3 coadyuva poco a la comprensión de la variable y que el soporte de su argumento incluye constituyentes aritméticos.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El estudio, inspirado en los procedimientos de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), se llevó a cabo en un diplomado -a distancia- cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Los datos que se usaron para el estudio quedaron registrados en la plataforma Moodle para su posterior análisis y forman parte de la interacción que un tutor mantuvo con sus estudiantes (en particular, con Belarmina). El tutor, quien propuso y guió las actividades, es uno de los autores de este trabajo. En trabajos anteriores, los autores han desarrollado los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos utilizando como herramienta analítica “comparaciones constantes” entre conjuntos de datos. Como parte de los productos, se diseñó un instrumento para sugerir cuándo una persona está convencida. De acuerdo a Corbin y Strauss, el desarrollo de una teoría formal se basa en añadir propiedades y dimensiones a conceptos conocidos y agregar nuevos conceptos que no se pudieron derivar de estudios previos. En el trabajo actual, se utiliza la categoría de argumento para estructurar los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos. Para tal fin, se consideraron los contextos de interacción, interacción que se separó en fragmentos (distinguidos con un numeral) y se organizó en argumentos, los cuales se analizaron conforme al Modelo de Toulmin. En un primer nivel de estudio, se realiza un micro análisis de las relaciones que en un argumento se puedan dar entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático (Q), la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (revelada en W), y el fundamento del mismo (que se desvela en B). Las relaciones entre Q, W y B se concentran en una tabla, con el fin de obtener una perspectiva general y de tipificar los argumentos (v. Tablas 2,3,4). En un segundo nivel, el proceso se incorporó al análisis de datos. Los procesos son cambios adaptativos en el flujo de la acción interacción que se adoptan como respuesta a variaciones en las condiciones. Dichos cambios se consideran necesarios para alcanzar un objetivo. El análisis de los datos tomando en cuenta el proceso requiere que el analista siga el curso de la acción/interacción, tenga en cuenta cualquier cambio y lo relacione con las condiciones. En este estudio, el objetivo del profesor consistió en que la estudiante experimentara convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado, y las medidas que él adoptó como respuesta a las condiciones cambiantes tuvieron como objeto esa finalidad. De modo que, a diferencia de otras investigaciones, en ésta se consideran las relaciones entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y el fundamento del mismo, relaciones que se suponen como parte de un proceso dinámico en el que pueden modificarse como respuesta a condiciones cambiantes. Como resultado de este nivel de análisis se identifican y se da cuenta de procesos generales en los que el alumno puede llegar a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado. Cabe mencionar que aun cuando los procedimientos de la Teoría Fundamentada pueden dar licencia para generalizar los resultados, el objetivo de este documento es tratar de construir explicaciones iniciales para una interacción en la cual un tutor logró que una estudiante experimentara convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado.

MICROANÁLISIS DE RELACIONES ENTRE CONVENCIMIENTO EN ENUNCIADOS MATEMÁTICOS, SU ADECUACIÓN Y FUNDAMENTO. PRIMER NIVEL ANALÍTICO

1a participación de Belarmina: expresión de una tendencia algebraica y operatoria

A manera de diagnóstico, el tutor propuso resolver a los estudiantes: Rosa tiene una balanza en equilibrio, de un lado una pesa de 5 kg y del otro una pesa de 2kg y un bulto de fierro. ¿Cómo puede hacer para saber el peso del fierro? En la Figura 1 se muestra la respuesta de Belarmina.

1.1	$5=2+x$ donde x es el bulto de fierro	**D1.** a: $5=2+x$ donde x es el bulto de fierro; b: $x=5–2$ →	**C1.** 3kg
1.2	entonces $x=5-2=3$kg.	**W1.** a: La solución de la ecuación se encuentra al lado derecho del signo igual (I1); b: Trasposición de términos (I4)	
		B1. a: Esquemas operatorios y álgebra (I1); b: Esquemas operatorios y álgebra (I4)	

Figura 1. Análisis de la primera participación de Belarmina. Argumento 1

En su primera intervención, Belarmina experimentó seguridad en la aplicación de I1e I4, la cual se deja ver en el uso del enfatizador "es" en 1.1, al actuar con base en las expresiones que derivó y mostrar determinación por publicar su respuesta. La aplicación de I1 e I4 la hizo conforme a esquemas operatorios (que se revelan por el carácter implícito de las reglas que enunció) y a una perspectiva algebraica, que se refleja a través de la estructura deductiva y el sistema de referencia algebraico en los datos.

Intervención del tutor: Cuestionamiento del soporte

2.2	Una vez planteada la ecuación acostumbramos a usar "trasposición de términos", pero ¿por qué funciona? Para averiguarlo realicemos la siguiente actividad.
2.3	Da clic en el interactivo, arma la ecuación en la balanza y llega a la solución. Describe paso por paso cómo llegaste a la solución. Por ejemplo: $-2x-4=4x-4$; Para dejar sola a la x realizo lo siguiente: 1.- Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: $-2x=4x$; 2.- Sumo a los dos miembros $2x$. La ecuación nos queda: $0=6x$; 3.- Divido a los dos miembros entre 6. La ecuación nos queda: $0=x$. La solución es 0.

Como respuesta a Belarmina, el tutor cuestionó (v. 2.2) el constituyente operatorio sobre el cual la estudiante apoyó I4 (v. B1b). En la Figura 2 aparece lo que la alumna respondió.

2a participación de Belarmina: Seguridad en el sustento algebraico y operatorio

3.1	Para dejar sola a la x en: $-4x-4=8x-4$
3.2-3.3	Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: $-4x=8x$
3.4-3.5	Sumo a los dos miembros $4x$. La ecuación nos queda: $0=12x$
3.6-3.7	Divido a los dos miembros entre 12. La ecuación nos queda: $0=x$
3.8	La solución es x!!!

D3. La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3) → **C3.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)

W3. Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1)

B2. a: Razones matemáticas y álgebra (I1)
b: Razones operatorias y aritmética (I3)

Figura 2. Análisis de la segunda participación de Belarmina. Argumento 2

Belarmina desarrolló I4 con base en las reglas promovidas por el tutor (v. W2b-f), y apoyada en un soporte algebraico y matemático (v. B2b-f), extendiendo su comprensión en este aspecto. Pero nuevamente, la alumna también afianzó su argumento en esquemas operatorios (B2g) cuando en el paso de D2g a C2 dio una interpretación incorrecta del signo igual (v. W2g) que la llevó a contravenir I1. Sobre la aplicación de W2g (relacionada con I1) e I4, Belarmina experimentó seguridad que mostró con el uso de enfatizadores (!!!), al actuar siguiendo las reglas que enunció y al mostrar determinación e interés por publicarlas. Como respuesta, el tutor cuestionó el uso implícito de la garantía W2g relacionada con I1: 1. ¿Qué entiendes por la solución de una ecuación? 2. ¿La solución de una ecuación puede expresarse con literales? ¿Por qué? En la Figura 3 se analizan las respuestas dadas por Belarmina.

3a participación de Belarmina: Duda asociada a la aparición de razones matemáticas

4.1	1.- [La solución es] Encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad
4.2	2.- Tutor, tengo duda en esta pregunta pero checando la pregunta de arriba entonces no se puede expresar con literales porque vamos a encontrar su valor. Corríjeme.

D3. La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3) → **C1.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)

W3. Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1)

B3. a: Razones matemáticas y álgebra (I1)
b: Razones operatorias y aritmética (I3)

Figura 3. Análisis de la tercera participación de Belarmina. Argumento 3

En su participación, Belarmina parafraseó con seguridad I3 (ver en 4.1 el uso indicativo de los verbos y el empleo de I3 para derivar otra regla) en su versión aritmética, lo cual hizo conforme a esquemas operatorios y aritméticos. De esta versión escolar de I3, la estudiante dedujo con duda (ver 4.2) una conclusión C3 acorde con I1, conforme a una garantía soportada en razones matemáticas y algebraicas, ayudando a su comprensión de I1. Con el fin de que la estudiante aplicara las proposiciones que enunció, el tutor preguntó: 1.- ¿Cuál es el valor de la incógnita?; 2.- ¿Cómo comprobamos que ese valor es solución de la ecuación? En la Figura 4 se analizan las respuestas de Belarmina.

4a participación de Belarmina: Duda al aplicar una nueva regla

5.1	1.- [El valor de la incógnita] sería 0	**D4.** a: D2g y C3; b: Sustituimos el valor en la ecuación; c: $-4x-4=8x-4$; d: $-4(0)-4=8(0)-4$; e: $-0-4=0-4$; f: $-4=-4$; g: Existe igualdad	**C4.** Sería 0
5.2	2.- Espero y estar bien, si no, me corrigen. [Para comprobar] lo sustituimos en la ecuación.		
5.3	$-4x-4=8x-4$; $-4(0)-4=8(0)-4$; $-0-4=0-4$; $-4=-4$	**W4.** a: W3 (I1); b-g: Versión aritmética de I3 (I3)	
5.4	Existe una igualdad en ambos lados.	**B4** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-g: Razones operatorias y aritmética (I3)	

Figura 4. Análisis de la cuarta participación de Belarmina. Argumento 4

En 5.1, Belarmina aplicó C3, relacionado con I1, con cierta inseguridad (ver el uso del mitigador “sería”) que en su participación anterior soportó en razones matemáticas y bajo una perspectiva algebraica. En 5.3 la estudiante aplicó D3, relacionado con I3, bajo esquemas operatorios y aritméticos y lo hizo con duda (ver 5.2). A continuación, el tutor solicitó resolver: Bety tuvo que cobrar $178 de un billete de $200. Ella le preguntó al cliente si traía cambio y él le dijo que traía $3. Ella aceptó. ¿Cuánto tiene que regresar? Esta tarea, similar a la que Belarmina enfrentó en su primera participación, la planteó el tutor para identificar posibles cambios que se dieron en su resolución después de la interacción. En la Figura 5 se analiza cómo Belarmina enfrentó la tarea.

5a participación de Belarmina: Seguridad en un soporte algebraico

6.1	procedemos a despejar la incógnita;	**D5.** a: $200+3=178+x$; b: $203=178+x$; c: $203-178=178-178+x$	**C5.** $x=25$
6.2	$200+3=178+x$;		
6.3	$203=178+x$; $203-178=178-178+x$;	**W5.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-c:Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)	
6.4	$x=25$ que es el cambio que tiene que regresar Bety	**B5** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-c: Razones matemáticas y álgebra (I4)	

Figura 5. Análisis de la quinta participación de Belarmina. Argumento 5

Belarmina aplicó I1 (aún cuando D5c pudo activar W2g) e I4 (esta vez con las propiedades de la igualdad), aspectos que previamente re-construyó con el tutor bajo un soporte matemático. En esta participación, ella los administró con seguridad, estado que dejó ver mediante el uso de enfatizadores (“procedemos”, “es”), de acciones congruentes con lo que enunció y la determinación e interés que exhibió al publicar su respuesta. Sin embargo, la estudiante dejó de aplicar I3, la cual construyó y empleó en sus contribuciones precedentes (v. D3 y D4). Así que el tutor cuestionó su solución C5: ¿Cómo podemos comprobar que el valor que obtuviste para la incógnita es solución de la ecuación? La respuesta a esta pregunta se expone en la Figura 6.

6a participación: Seguridad al aplicar una nueva regla

7.1	Sustituyendo lo que vale x, que en este caso es 25, en la ecuación 200+3=178+x	**D6.** a: 200+3=178+x; 200+3=178+25; 203=203 →	**C6.** x=25
7.2	200+3=178+25; 203=203	**W6.** a: Si al sustituir un valor en una ecuación existe una igualdad, entonces ese valor es solución de la ecuación	
7.3	de esta manera podemos comprobar que es correcto porque en ambos lados es la misma cantidad.	**B6** a: Esquemas operatorios y Aritmética	

Figura 6. Análisis de la sexta participación de Belarmina. Argumento 6

En esta participación, Belarmina parafraseó tácitamente la versión aritmética de I3 y la aplicó en D6 bajo esquemas operatorios y aritméticos. En esta ocasión, ella mostró seguridad en esa versión de I3, al utilizar enfatizadores (e. g. “es”) cuando la enunció, actuar conforme a ella (en 7.1 y 7.2) y mostrar determinación e interés por explicitarla. Enseguida, el tutor le pidió resolver:$-4x - 16 = 9x + 1$. En la Figura 7 aparece lo que la alumna respondió.

7a participación: Omisión de un procedimiento aritmético

8.1	Tutor, esta es mi respuesta	**D7.** a: $-4x-16=9x+1$; b: $-4x-16+16=9x+16+1$; c: $-4x=9x+17$; d: $-4x-9x=9x-9x+17$; e: $13x=17$ →	**C7.** X=17/13
8.2	Ecuación: $-4x$-16=9x+1		
8.3	$-4x-16+16=9x+16+1$ (propiedad usada suma); $-4x=9x+17$; $-4x-9x=9x-9x+17$ (propiedad usada resta); $13x=17$ (propiedad usada división)	**W7.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-e: Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)	
8.4	X=17/13	**B7** a: Razones matemáticas y Álgebra (I1) b-e: Razones matemáticas y Álgebra (I4)	

Figura 7. Análisis de la séptima participación de Belarmina. Argumento 7

Para resolver la ecuación, Belarmina activó los aspectos I1 e I4 siguiendo con puntualidad el procedimiento sustentado algebraicamente que construyó con el tutor. Como en las ocasiones previas, asociado a este esquema la estudiante pareció experimentar convencimiento; se ve al usar el indicativo de los verbos cuando presentó su respuesta (“esta es”), actuar conforme a las reglas que enunció y mostrar determinación e interés por publicar y explicar su respuesta. Pero nuevamente, ella dejó de aplicar I3.

ANÁLISIS DE RESULTADOS. TIPIFICACIÓN DE ARGUMENTOS

Para obtener una perspectiva general, en las Tablas 2, 3 y 4 se sintetizan las relaciones que en un argumento se pueden encontrar entre los estados epistémicos que un estudiante experimenta en torno a un enunciado matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (W) y los esquemas epistémicos que representan el marco general en el que se funda su argumento (que revela B). Se desglosan los aspectos I4, I1 e I3.

Tabla 2: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I4

Categoría / Argumento	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	Seguridad	Seguridad	No aplica	No aplica	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Acorde	No aplica	No aplica	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio Álgebra	Matemática Álgebra	No aplica No aplica	No aplica No aplica	Matemática Álgebra	No aplica No aplica	Matemática Álgebra

Tabla 3: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I1

Argumento \ Categoría	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	Seguridad	Seguridad	Duda	Duda	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Discorde	Acorde	Acorde	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Operatorio	Matemática	Matemática	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 4: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I3

Argumento \ Categoría	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	No aparece	No aparece	Seguridad	Duda	No aparece	Seguridad	No aparece
Adecuación	No aparece	No aparece	Acorde	Acorde	No aparece	Acorde	No aparece
Soporte	No aparece	No aparece	Operatorio	Operatorio	No aparece	Operatorio	No aparece
	No aparece	No aparece	Aritmética	Aritmética	No aparece	Aritmética	No aparece

En las Tablas 2 y 3 se observa que inicialmente el tutor identificó convencimiento en respuestas correctas pero basadas en esquemas extra-matemáticos y dirigió sus acciones para que la estudiante experimentara convencimiento no sólo en respuestas correctas sino además bien fundamentadas. Este hecho sugiere redefinir el constructo "bien calibrado" de Foster, el cual involucra sólo el convencimiento y la adecuación de las respuestas. Tomar en cuenta el soporte del argumento, en este estudio, da lugar a una gama más amplia de argumentos. Con esta perspectiva, el objeto de la instrucción es que los estudiantes experimenten seguridad cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas matemáticos (SAM para abreviar), y que duden cuando actúan de forma discorde a un aspecto (fundado ya sea en esquemas matemáticos o extra-matemáticos: DDM o DDEM para abreviar) o cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas extra-matemáticos (DAEM para abreviar). Los argumentos 5 y 7 para los aspectos I1 e I4 son ejemplos de argumentos SAM; el argumento 4 para el aspecto I3 es DAEM. Los argumentos antes descritos se nombran aquí como *argumentos consistentes*. Dado que en una interacción el objetivo del profesor es construir junto con sus estudiantes un argumento SAM, se puede llamar a éste *argumento objetivo*. Los argumentos que presentan una variación con respecto a los argumentos consistentes, en este escrito se conocen como *argumentos inconsistentes*. Por ejemplo, en el Argumento 1 para los aspectos I1 e I4 se asocia seguridad a una respuesta correcta basada en esquemas extra-matemáticos (SAEM para abreviar), en el Argumento 2 para el aspecto I1 se asocia seguridad a una respuesta discorde fundada en esquemas extra-matemáticos (SDEM para abreviar) o en el Argumento 3 para el aspecto I1 se asocia duda a una respuesta acorde fundada en esquemas matemáticos (DAM para abreviar).

ANÁLISIS DE RESULTADOS. DEFINICIÓN DE PROCESOS

Una vez definida la anterior tipificación de argumentos, una pregunta natural es ¿Bajo qué condiciones pueden surgir los distintos tipos de argumentos? El objetivo del tutor para que la estudiante experimentara seguridad en un conocimiento bien fundamentado lo llevó a realizar acciones que eventualmente modificaron el comportamiento de la alumna. A continuación se elabora un diagrama para explicar bajo qué condiciones pueden surgir dichos comportamientos.

Un diagrama se puede utilizar como un método para visualizar relaciones entre conceptos y explicar fenómenos (Corbin y Strauss, 2015). Los diagramas se construyen para cada fenómeno con una categoría en cada caja. La condición inicial se coloca en la parte superior del diagrama, las consecuencias en la parte inferior y las acciones/interacciones en el medio. Debajo de cada categoría se enumeran las propiedades. Las flechas indican el curso de las acciones/interacciones. En el Diagrama 1, la condición inicial es la elaboración de un argumento por parte del estudiante ante una actividad propuesta por el profesor. Esta condición da lugar a que el profesor identifique el tipo de argumento que construyó el estudiante. Con base en lo anterior, el profesor publica una intervención la cual puede consistir en una actividad que se desarrolla en un contexto (e.g. la balanza, resolución de problemas o de ecuaciones) y con un nivel de dificultad (e.g. ecuaciones con una incidencia de la literal o con dos incidencias); en un cuestionamiento a la conclusión, garantía o soporte del argumento del estudiante o en la introducción y solicitud de aplicación de nuevas reglas. Ante estas nuevas condiciones, el estudiante puede construir un nuevo argumento el cual puede ser un argumento objetivo (SAM) o no, y mostrar o no cambios con respecto al anterior. A continuación, el profesor puede realizar una nueva intervención y el ciclo se repite. En lo que sigue, se utiliza este diagrama para explicar las trayectorias de interacción entre Belarmina y el tutor.

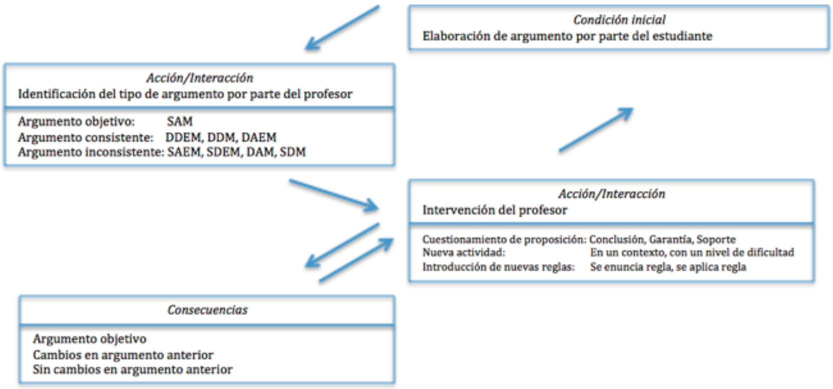

Figura 8. Diagrama 1: Proceso de los argumentos

La trayectoria de I4 comenzó con la solicitud del tutor para resolver una situación problemática que involucró una ecuación lineal con una incidencia de la literal. Como respuesta, Belarmina construyó un argumento en su primera participación. Esta condición inicial llevó al tutor a identificar una estructura SAEM en dicho argumento. Para seguir con el diagrama, a continuación el tutor publicó una intervención. Específicamente, él cuestionó el soporte extra-matemático B1b del argumento y publicó una nueva actividad en la que modificó el contexto (de la resolución de problemas a la balanza) y la dificultad (de una incidencia de la literal a dos) para introducir nuevas reglas (W2b-f) relacionadas con las propiedades de la igualdad. Estas nuevas condiciones, llevaron a la estudiante a construir en su segunda participación el argumento objetivo SAM para I4. Esto revela la prontitud con la que la estudiante asimiló las garantías (W2b-f) relativas a I4 y que un aumento de comprensión puede ir acompañado de seguridad. Una vez que la estudiante construyó el argumento objetivo SAM bajo las condiciones antes mencionadas, el tutor realizó nuevas intervenciones en las que él cambió el contexto (primero, de la balanza a la resolución de problemas y luego, de la resolución de problemas a la resolución de ecuaciones) y la dificultad (primero, de dos a una incidencia de la literal en las ecuaciones y luego, de una a dos incidencias) de las actividades. Cada vez que el tutor modificó las características de las actividades, la estudiante construyó argumentos que él identificó como SAM para I4. A esta trayectoria en la que para construir el argumento SAM no se registran cambios en los estados epistémicos en este escrito se llamará *trayectoria suave*.

Para el aspecto I1, en su primera participación Belarmina experimentó seguridad cuando aplicó la regla W1a según la cual la solución está a la derecha del signo igual apoyada en un esquema operatorio que, en conjunción con la trasposición de términos, la llevó a obtener una respuesta acorde con I1. Enseguida el tutor identificó un argumento SAEM en esa primera participación. Cuando el tutor cuestionó el soporte de I4 y colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad para introducir nuevas reglas relacionadas con las propiedades de la igualdad, la estudiante construyó un argumento SAM para dicho aspecto I4, pero ella mantuvo su seguridad en torno a la regla W1a relacionada con I1 y la aplicó, lo que la condujo a trasgredir I1 y, en suma, a construir una argumento que el tutor identificó como SDEM para I1 en su segunda participación. Lo anterior revela que la consistencia para un aspecto puede no transferirse automáticamente a otro aspecto. La identificación del argumento SDEM llevó al tutor a publicar una nueva intervención en la que cuestionó la garantía W1a. Esto condujo a la estudiante a construir en su tercera participación un argumento en el que ella explicitó reglas W3 acordes con I1 bajo esquemas matemáticos ayudando a su comprensión. Sin embargo aquí Belarmina dudó. Enseguida el tutor identificó aquí un argumento DAM para I1. Esto desvela que el actuar conforme a un conocimiento bien fundamentado no va necesariamente aparejado de un fomento en la seguridad, porque lo primero va acompañado de reacomodos cognitivos que suelen propiciar estados de inseguridad. Ante estas nuevas condiciones, el tutor realizó una nueva intervención en la que solicitó a la estudiante aplicar la regla W3 que ella construyó, pero la duda de Belarmina continuó en su cuarta participación y el tutor identificó nuevamente una estructura DAM en el argumento. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto (de la balanza a la resolución de problemas) y la dificultad (de dos incidencias de la literal a una). Como respuesta, la estudiante elaboró un argumento en su quinta participación cuya estructura el tutor identificó como SAM para I1, la cual se mantuvo en su séptima participación aun cuando el tutor modificó nuevamente la actividad. A trayectorias en las que para construir el argumento SAM se dan cambios sucesivos en los estados epistémicos se llamarán aquí *trayectorias intrincadas*.

Hasta aquí se han definido procesos que culminan en un argumento SAM. Pero pueden encontrarse trayectorias que finalizan con alguna variación de ese argumento. Considérese la trayectoria de I3. La estudiante dejó de poner en juego I3 hasta su tercera participación cuando, como respuesta al cuestionamiento que el tutor hizo a la garantía W1a relacionada con I1, la estudiante parafraseó la versión aritmética de I3 en un argumento con una estructura que el tutor identificó como SAEM para ese aspecto. Así que el tutor solicitó a Belarmina aplicar dicha versión aritmética de I3, la cual ella empleó en su cuarta participación, pero lo hizo con duda, en un argumento que el tutor identificó como DAEM. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad, pero la estudiante dejó de acudir a I3 en su quinta participación. Ante estas condiciones, en una nueva intervención, el tutor cuestionó la solución C5 que Belarmina obtuvo. Como respuesta, en su sexta participación, la estudiante aplicó la versión aritmética de I3 pero esta vez con seguridad en un argumento que el tutor identificó como SAEM. Sin embargo, cuando el tutor colocó una nueva actividad, ella dejó de aplicar nuevamente I3 en su séptima participación. A estas trayectorias en las que los estados epistémicos cambian pero la adecuación de la respuesta y su fundamento permanecen sin variaciones se llamarán en este escrito, *trayectorias improductivas.*

CONSIDERACIONES FINALES

Con base en el marco teórico-interpretativo y siguiendo los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada se analiza la interacción entre un profesor y una estudiante que participan en un foro virtual sobre álgebra básica. En un primer nivel, se revela que a lo largo de una interacción se puede identificar una diversidad de argumentos. Por ejemplo, se puede asociar duda a una respuesta acorde fundada en razones matemáticas o asociar convencimiento a una respuesta discorde a un aspecto basado en consideraciones extra-matemáticas. Lo anterior motivó una tipificación de argumentos para niveles básicos. Sin embargo se propone que, como uno de los objetivos del profesor es que los estudiantes experimenten convencimiento en un conocimiento bien fundamentado, se relacione a los argumentos SAM con la comprensión (cf. la idea de estado 'bien calibrado' de Foster, 2016). En un segundo nivel se definen distintos procesos que puede desarrollar un profesor a lo largo de una interacción. En dicha interacción pueden surgir procesos en los que el alumno, durante la dinámica de ese proceso, llegue a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado (v. trayectoria suave o intrincada). En esos procesos la seguridad coligada a una respuesta incorrecta basada en esquemas extra-matemáticos, por ejemplo, puede requerir cuestionar el soporte, la construcción de nuevas reglas y su aplicación; la inseguridad aunada a una respuesta bien fundada puede requerir de su aplicación en diferentes contextos.

Referencias

Corbin, J., y Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 271-288.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Martínez, B. y Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca, España: SEIEM.

Martínez, V. y Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 125-149.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 71-91.

Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México D.F., México: Editorial Trillas.