

MODELIZACIÓN COMO PROCESO BÁSICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS: UN ANÁLISIS DE NECESIDADES

Modelling as a basic process when solving context problems: needs analysis

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C.

Universidad de Córdoba

Resumen

Este trabajo explora las necesidades formativas del alumnado de primer curso del grado en Educación Primaria en el ámbito de la modelización matemática y la resolución de problemas contextualizados. Se ha puesto el foco en el análisis de las estrategias seguidas por el alumnado para abordar un problema, así como en la detección de los errores cometidos; todo ello con el objeto de diagnosticar las necesidades de formación y elaborar un perfil del alumnado que permita adaptar su instrucción a su conocimiento. Los resultados ponen de manifiesto la necesidad de trabajar estrategias para resolver problemas, el pensamiento visual y el manejo de unidades de medida.

Palabras clave: Modelización matemática; Resolución de problemas; Análisis de errores.

Abstract

This work explores the formative needs of pre-service teachers in the field of mathematical modeling and solving contextualized problems. This study focuses on the analysis of students' strategies to address one of the problems, as well as on the detection of mistakes; all in order to diagnose the training needs and develop a student profile enabling to adapt their instruction to their knowledge. Results show the necessity of teaching solving problems strategies, visual thinking and measure units.

Keywords: Mathematical modelling; Problem solving; Analysis of errors;

Introducción

Esta comunicación presenta una investigación para explorar las necesidades formativas del alumnado de primero de grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, con respecto a la modelización como herramienta para la resolución de problemas contextualizados.

El interés en este análisis surgió en el contexto de una investigación más amplia, que estuvo motivada por la necesidad de conocer *qué Matemáticas* deben tener cabida en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria, teniendo en cuenta la gran diversidad de bagaje matemático que presenta el alumnado, procedente de diferentes bachilleratos y diversos ciclos formativos. Estas circunstancias invitaron a plantear una evaluación inicial de la competencia matemática del alumnado novel que permitiera diseñar un perfil de *qué Matemáticas* saben y facilitara plantear la instrucción matemática desde su propio conocimiento. El diseño de la prueba inicial se basó en el modelo de competencia matemática que evalúa PISA 2012 (OECD, 2013a) y los resultados pusieron de manifiesto dificultades para la resolución de los problemas planteados que no tenían que ver con el conocimiento de conceptos o procedimientos asociados a contenidos, sino que parecían estar vinculadas a un insuficiente dominio de ciertos procesos matemáticos, en concreto, a convertir situaciones de la vida real en Matemáticas (Figura 1).

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

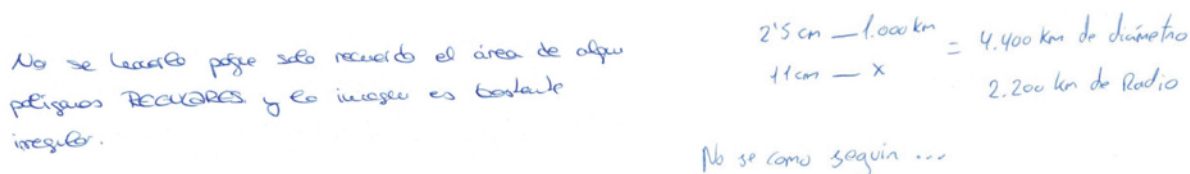


Figura 1. Ejemplos de respuestas al problema objeto de estudio (puede verse en el Apéndice I) que motivaron nuestra investigación

Desde los años ochenta han proliferado los autores que subrayan la importancia para la formación matemática de destrezas que no se reduzcan al trabajo con conceptos y procedimientos. Pollak (1987) propuso cinco objetivos para los estudiantes de Matemáticas, entre los que incluye convertirse en resolutores de problemas y aprender a comunicarse y a razonar matemáticamente. Poco más tarde, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) señaló que ‘saber’ Matemáticas es ‘hacer’ Matemáticas y que la instrucción debería enfatizar insistentemente el ‘hacer’ más que el ‘saber’” (p. 7), y propuso un conjunto de estándares para la formación matemática escolar que incluían procesos como resolución de problemas, comunicación, razonamiento y conexiones. Estas ideas se consagraron diez años más tarde (NCTM, 2000), con un nuevo conjunto de estándares donde estos procesos (junto con la destreza de representación) recibieron la misma relevancia que los contenidos para la formación matemática. Desde entonces, la importancia de los procesos en la formación matemática ha sido creciente. En este trabajo reconocemos esta relevancia en especial en el trabajo con problemas contextualizados. Gravemeijer y Doorman (1999) destacan la importancia de trabajar las matemáticas escolares en torno a problemas contextualizados por su poder motivacional, ya que los niños ven la utilidad de las Matemáticas en su vida cotidiana. Desde la posición de formación de maestros, el trabajo con este tipo de problemas se hace, por tanto, necesario, especialmente en lo que concierne a la transformación de situaciones reales en Matemáticas, es decir, la modelización. Surge la cuestión de cómo abordar el aprendizaje de la modelización para la formación de maestros, lo que reincide en la motivación inicial del planteamiento: un análisis pormenorizado de la resolución de problemas por parte de los alumnos puede dar información útil para profundizar en su formación. Por todo lo expuesto, esta investigación pretende categorizar las estrategias seguidas por el alumnado a la hora de afrontar un problema contextualizado y detectar los errores más frecuentes; todo ello con el objeto de diagnosticar necesidades de formación y trazar pautas para el planteamiento del trabajo en el aula.

MARCO TEÓRICO

La modelización matemática es uno de los aspectos de la educación matemática que se ha discutido y propagado con mayor intensidad durante las últimas décadas (Blum y Borromeo, 2009). Este hecho tiene repercusión a nivel de diseño de currículos nacionales y a nivel internacional, ya que la modelización es considerada una de las destrezas principales que componen la competencia matemática (NCTM, 2000; Niss y Hojgaard, 2011; OECD, 2013a). Existen diferentes autores que han discutido sobre qué debe entenderse por modelización. Castro y Castro (1997) defienden que la modelización es “fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real; pero [...] que conlleva la consideración del problema como un todo” (p. 110). Niss y Hojgaard (2011) interpretan la modelización como una competencia del individuo que es capaz de estructurar y matematizar la situación a modelar, trabajar con el modelo y analizar críticamente tanto los resultados como el proceso seguido, entre otras destrezas. En esta investigación se adopta la interpretación de Blum y Borromeo (2009), que definen la modelización como “el proceso de traducción entre el mundo real y las Matemáticas en ambos sentidos” (p. 1) para detectar las habilidades asociadas a este proceso que deben potenciarse en la formación de maestros. El desarrollo de estas habilidades implica una mayor comprensión de la realidad, fortalece las conexiones entre conceptos matemáticos y hace palpable la utilidad de las matemáticas en situaciones contextualizadas. Sin embargo, esta relevancia no se ve reflejada en la práctica

diaria del aula. Diversos autores (Freudenthal, 1973; DeLange, 1987; Burkhardt, 2004; Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) consideran que esto se debe al hecho de que la modelización no es solo difícil para los alumnos, sino también para los maestros, ya que la enseñanza se vuelve más abierta y menos predecible. Para los estudiantes, la dificultad principal es la complejidad que suele envolver las situaciones en las que es necesario introducir un modelo matemático. De hecho, la modelización está inseparablemente ligada a otras competencias matemáticas, como la comunicación, el diseño de estrategias de resolución de problemas o el trabajo matemático (Niss, 2003).

Borromeo (citado por Blum y Borromeo, 2009) analiza diferentes modelos teóricos relacionados con la modelización matemática, aunque se ha considerado particularmente útil el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007). Este modelo se articula en torno a siete fases de forma que (i) la situación-problema tiene que ser entendida, es decir, se tiene que construir un modelo de la situación (fase de comprensión y construcción); (ii) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada (fase de simplificación y estructuración), dando lugar a un modelo real de la misma; (iii) la fase de matematización transforma el modelo de la situación en un modelo matemático; (iv) la fase de trabajar matemáticamente produce resultados (matemáticos) que (v) se interpretan en el mundo real (fase de interpretación); (vi) una fase de validación de estos resultados puede indicar la necesidad de iniciar el bucle una segunda vez. El ciclo incluye una séptima etapa de exposición, que no se tiene en cuenta en esta investigación debido a las características de nuestro instrumento de recogida de información (prueba escrita).

El ciclo de modelización puede no definir una trayectoria lineal de pensamiento, es decir, un individuo puede resolver un problema pasando por diferentes fases del ciclo sin seguir el orden expuesto anteriormente. Borromeo (citado por Blum y Borromeo, 2009) asocia la trayectoria que sigue el individuo en la resolución del problema con diferentes estilos de pensamiento. Este enfoque, que resulta enriquecedor para el propósito del presente estudio, define tres estilos de pensamiento matemático. El primero de ellos es un pensamiento de tipo visual, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo real más que sobre el modelo matemático, muestra tendencia a abordar los problemas de forma global y prefiere las representaciones pictóricas. En el otro extremo está un pensamiento de tipo analítico, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo matemático más que sobre la realidad, muestra tendencia a utilizar representaciones simbólicas o verbales y prefiere estructurar paso a paso el procedimiento seguido. En un punto intermedio entre ambos extremos se encuentra el pensamiento de tipo integrado, mediante el cual el individuo es capaz de combinar elementos de los otros dos tipos de pensamiento.

Las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007) constituyen puntos de referencia para el análisis de las estrategias de modelización, que permiten estructurar la búsqueda y categorización de los errores. El estudio de dichas estrategias y de los errores junto con la identificación de los tipos de pensamiento proporcionan herramientas para un proceso de análisis-síntesis que permita elaborar el perfil y detectar necesidades formativas en los alumnos participantes. Existen diferentes investigaciones empíricas centradas en el análisis de soluciones a problemas que involucran destrezas de modelización y constituyen referencias para desarrollar este trabajo. En educación secundaria Socas, Ruano y Hernández (2016) analizaron, desde el enfoque Lógico Semiótico, los errores cometidos por los alumnos resolviendo problemas que involucraban modelización. Gallart, Ferrando y García-Raffi (2014) estudiaron las estrategias adoptadas para resolver problemas abiertos en términos de las trayectorias de modelización (Blum y Borromeo, 2009) y la eficacia del uso de este tipo de problemas para mejorar la competencia matemática PISA. Mousoulides, Christou y Sriraman (2008) obtuvieron un modelo teórico para el comportamiento de los estudiantes ante problemas que involucran modelización en torno a los procesos que siguieron, las habilidades que demostraron y otros factores externos. En formación de profesores de Matemáticas, Bukova-Güzel (2011) examinó los enfoques que planteaban los estudiantes en el diseño de problemas de modelización matemática y en qué medida implementaban el proceso de modelización al resolver los problemas que proponían. Hıdırođlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-

Güzel (2017) analizaron las soluciones que estudiantes para profesores de secundaria daban a un problema concreto diseñado para trabajar la modelización matemática, prestando especial atención a las fases de modelización propuestas por Blum y Leiss (2007). Estas investigaciones sirven de precedente para contextualizar e interpretar los resultados que se obtienen en el presente análisis.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Analizar las necesidades formativas respecto a las destrezas de modelización de los alumnos del primer curso de grado en Educación Primaria en virtud del marco teórico desarrollado. Más específicamente:

- Categorizar las estrategias con las que el alumnado abordó la modelización matemática e identificar el tipo de pensamiento (Borromeo, citado por Blum y Borromeo, 2009) que se refleja en estas estrategias.
- Detectar los errores cometidos en el proceso de modelización en términos del ciclo de Blum y Leiss (2007) y clasificarlos según los procedimientos elementales que estos no completan.
- Proporcionar un perfil del alumnado en función de la información recogida sobre su conducta y utilizar este perfil para detectar las necesidades formativas que permitan definir pautas de trabajo en el aula.

METODOLOGÍA

Participaron en el estudio un total de 227 alumnos del primer curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, que se enfrentaron a una prueba escrita consistente en cinco ítems liberados de pruebas PISA que en conjunto abarcan todos los bloques de contenidos del currículo de Educación Primaria y todos los procesos y capacidades PISA 2012. Los estudiantes tenían permitido el uso de la calculadora para resolver los problemas de la prueba. Para el presente estudio se analizaron las respuestas a un solo ítem que consistía en un problema cuya resolución requería destrezas de modelización (puede verse en OECD, 2013b, p.178).

El análisis se llevó a cabo mediante la revisión de las soluciones que dieron al problema cada uno de los participantes a partir de la descripción de la estrategia utilizada para resolver el problema, el tipo de pensamiento que dicha estrategia manifestaba, la identificación de los errores respecto a las fases del ciclo de modelización y la interpretación de los mismos en términos de los procedimientos elementales asociados los contenidos. Concretamente, para alcanzar el primer objetivo específico se describió cualitativamente la estrategia seguida por cada alumno, se agruparon estrategias similares seguidas por diferentes estudiantes y se utilizaron esos grupos para elaborar los descriptores de cada categoría (se pueden observar en la tabla 1). Para lograr el segundo objetivo se elaboró una lista de indicadores asociados a los procedimientos elementales necesarios para completar la modelización del problema: (I1) Aplica correctamente la escala (expresa datos necesarios en unidades reales); (I2) Descompone el mapa en figuras planas de área calculable; (I3) Calcula correctamente las áreas que muestra el dibujo hecho y las suma si fuera el caso; (I4) En la explicación relaciona el área de las figuras con el área total; (I5) Mide correctamente los datos del dibujo necesarios; (I6) Expresa correctamente el resultado al problema obtenido. La observación e interpretación de los errores cometidos por cada estudiante reveló la fase de Blum y Leiss (2007) que el alumno no dominaba y permitió identificar los procedimientos que dicho alumno no completó adecuadamente usando los indicadores que no se satisficieron. Para abordar el tercer objetivo, finalmente, se sintetizó la información recabada durante el análisis para trazar el perfil del alumnado y sus necesidades formativas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estrategias de modelización y tipos de pensamiento

Del total de los estudiantes que realizaron la prueba, 161 dejaron el problema en blanco o no dejaron evidencias de la estrategia seguida. Este hecho corrobora los resultados de Socas et al. (2016), dejando

patente que muchos estudiantes carecen de recursos para diseñar una estrategia de resolución en una situación contextualizada. Entre el resto de alumnos, sin embargo, se observó cierta riqueza en cuanto a las estrategias de modelización, que se detallan en la tabla 1. Algunas de las más significativas se pueden ver en la Figura 2.

Tabla 1. Estrategias de resolución observadas y tipos de pensamiento asociados. “V” indica los alumnos en los que predomina un pensamiento visual, “A” un pensamiento analítico e “I” un pensamiento integrado

	<i>Estrategia de estimación</i>	<i>Nº Personas</i>	<i>Pensamiento</i>		
			V	A	I
E1	Toma el área de un rectángulo que incluye completamente a la isla.	15	2	9	4
E2	Toma el área de un cuadrado que cubre parcialmente la isla, compensando el área de las zonas de mar dentro del cuadrado con el área de las zonas de la isla fuera de él.	12	1	11	0
E3	Toma el área de un rectángulo de características análogas a las del cuadrado anterior.	14	3	7	4
E4	Suma las áreas de diferentes polígonos en los que ha descompuesto la isla.	6	1	0	5
E5	Toma el área de un círculo de similares características a las de los polígonos de E2 y E3.	5	0	3	2
E6	Toma la diferencia entre el área de un rectángulo que incluye totalmente a la isla y el área de las zonas de mar (que ha estimado matematizando la zona con diferentes figuras).	5	1	0	4
E7	Traza una retícula de lado igual a la longitud de la escala gráfica, contabiliza los cuadrados interiores a la isla y matematiza los trozos de isla “sobrantes” usando polígonos.	2	2	0	0
E8	Descompone el rectángulo que incluye totalmente a la isla en cuatro rectángulos iguales, estima que el área de la zona de mar es igual al área de uno de los rectángulos y toma tres veces el área de esos rectángulos.	1	0	0	1
E9	Toma como área una medida unidimensional	8	4	4	0

La estrategia dominante consistió en aproximar el área de la isla mediante el área de una única figura plana, bien de un cuadrilátero o de un círculo (E1, E2, E3 y E5) con mayor o menor precisión. La mayoría de los estudiantes que implementaron esta estrategia exhibieron un pensamiento de tipo más analítico mostrando simplemente cálculos o texto y sin dejar evidencias de trabajo sobre la imagen (no trazaron la figura). En cambio, los alumnos que utilizaron estas estrategias asociadas a un pensamiento más visual mostraron haber trabajado con la escala gráfica directamente sobre la imagen o indicaron las medidas reales sobre la figura utilizada. Es destacable que los estudiantes que optaron por E1 denotaron un enfoque del problema simplista que proporcionaba un resultado sobredimensionado. La estrategia de descomposición en polígonos (E4) fue utilizada por 6 participantes. Salvo un caso que solo evidenció pensamiento visual (se limitó a descomponer la superficie de la isla sin efectuar cálculos), el uso de esta estrategia implica un pensamiento integrado. Igual sucede con la estrategia E6, que denota un enfoque similar. Las estrategias E7 y E8 son casos singulares, ya que solo fueron utilizadas por dos y un participante, respectivamente, y ninguna con éxito completo. Los alumnos que plantearon E7 no fueron capaces de completar los cálculos necesarios. Especialmente significativo es

el caso de la estrategia E8, en la que la estudiante estimó (sin dejar muestras de cómo) el área de la zona de mar por la cuarta parte del rectángulo en el que enmarcaba la imagen completa. Por último, las estrategias etiquetadas como E9 implican una concepción errónea del concepto de área, ya que la estiman utilizando longitudes. Dos de los participantes estimaron el área por medio de la longitud del perímetro y otros dos se limitaron a medir un “diámetro” de la isla y dieron el resultado de la medición como aproximación del área.

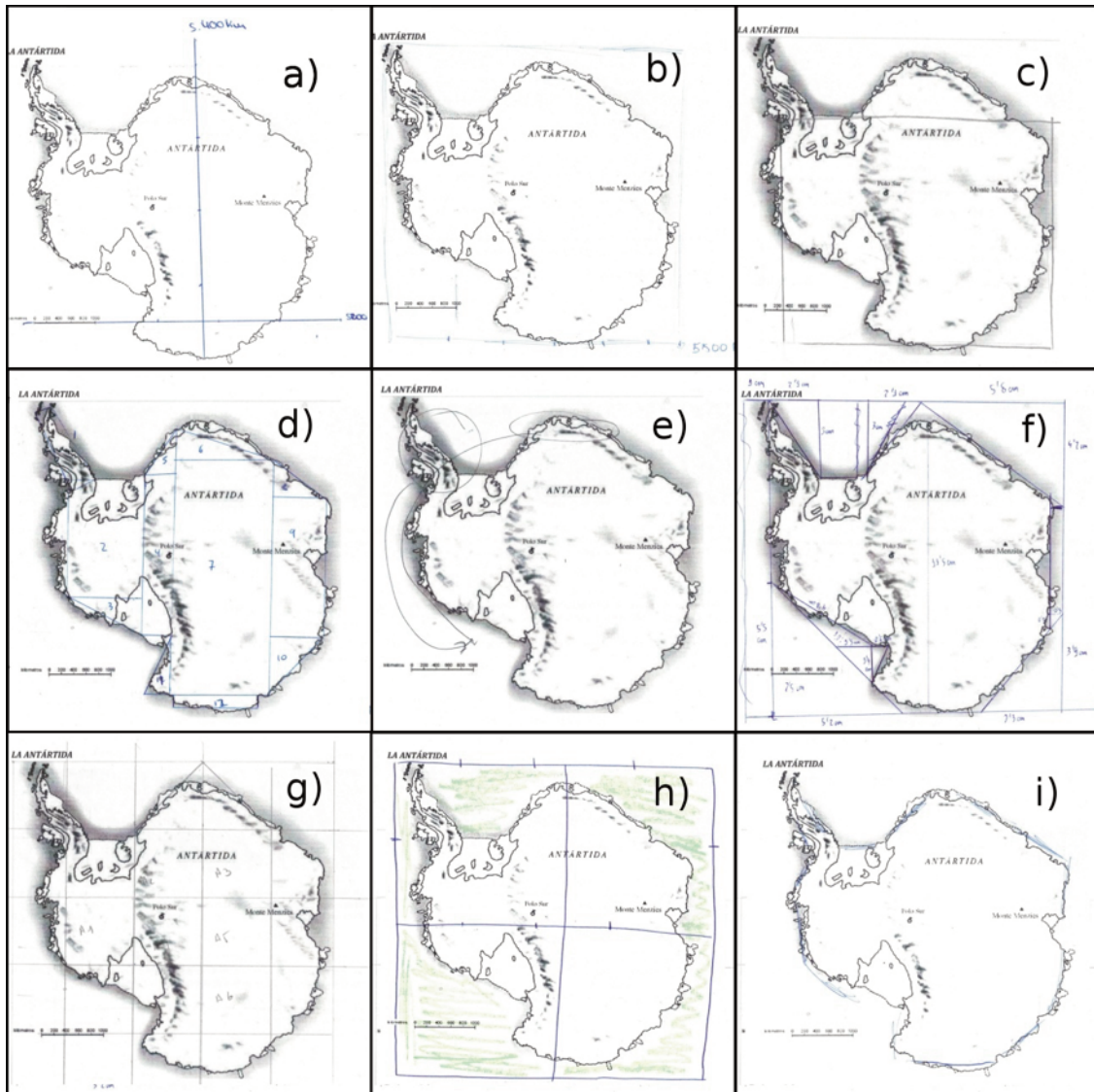


Figura 2. Algunos ejemplos de los esquemas de las estrategias de resolución al problema objeto de estudio. El alumno del dibujo f) no ha hecho ningún cálculo

Análisis de errores

La clasificación de los errores se ha hecho según las categorías que se detallan en la tabla 2. La primera categoría engloba un grupo de errores asociados a un uso incorrecto de las unidades de medida, tales como expresar áreas con unidades de longitud (error más frecuente, cometido por 17 personas), volumen u otro tipo y omitir las unidades. Esta categoría incluye también otro grupo de errores vinculados a mediciones inexactas (cometido por 10 personas). En la segunda categoría están incluidos errores tales como cálculos de áreas obtenidas sumando las dimensiones del rectángulo correspondiente, error obtenido por Socas et al. (2016), o aplicando fórmulas no válidas y estimación de áreas a través de longitudes de perímetros o de diámetros, así como la asunción de que una figura de dimensiones

$n \times n$ tiene área n . La tercera categoría está formada esencialmente por dos tipos de errores. El primero de ellos consiste en identificar con 1 cm la longitud total de la escala gráfica (2,5 cm) o la partición más pequeña de la misma (0,5 cm). Este tipo de errores puede verse ilustrado en las Figuras 3a) y 3b), respectivamente. El segundo incluye alumnos que no cometieron errores en el cálculo del área en centímetros cuadrados y transformaron de manera errónea las unidades: bien multiplicando por 1000 (sin evidenciar alguna lógica) o utilizando el factor de escala lineal cm – km en lugar del cuadrático. Errores de este tipo relacionados con el cambio de unidades también fueron identificados por Hidiroğlu et al. (2017). Por último, la cuarta categoría hace alusión a errores de cálculo, que fueron poco frecuentes posiblemente porque estaba permitido utilizar la calculadora durante la prueba.

Tabla 2. Categorías de los errores detectados y frecuencia

	<i>Categoría</i>	<i>Nº Personas</i>
C1	Errores asociados a la medida	33
C2	Errores asociados al concepto de área	17
C3	Errores asociados al cambio de escala	13
C4	Errores de cálculo	2

Los participantes que no alcanzaron la fase de comprensión dieron respuesta a preguntas que no esta-

Tabla 3. Fases de modelización y número de participantes que evidenciaron no completar la fase

<i>Fase</i>	<i>Nº Personas</i>
Fase 1: Comprensión / Construcción	3
Fase 2: Simplificación / Estructuración	17
Fase 3: Matematización	12
Fase 4: Trabajo matemático	27
Fase 5: Interpretar	23
Fase 6: Validar	7

ban formuladas, como distancias entre dos puntos de la isla o indicar las dimensiones de un polígono en lugar del área (Figura 3c)). Aquellos que evidenciaron no completar la fase 2 son, esencialmente, estudiantes que adoptaron la estrategia E1, el modelo de la situación que plantearon podía ser adecuado pero no mostraron haber hecho hipótesis para trabajar sobre el problema (Figura 3d)). En la categoría de los que no ejecutaron la fase 3 se incluyen aquellos que aproximaron áreas utilizando medidas de longitud (utilizaron un modelo matemático que no permite dar solución adecuada al problema), así como aquellos que presentaron cálculos relacionados con el cambio de escala pero no mostraron evidencias de haber transformado el modelo real en un modelo matemático. Los que no completaron la fase de trabajo matemático lo hicieron por diversas causas, algunos no hicieron todos los cálculos necesarios para resolver el problema, otros se equivocaron al trabajar con la escala, hay participantes que se limitaron a dibujar o describir verbalmente la estrategia pero no hicieron los cálculos, situación ya encontrada por Socas et al. (2016), y otros que hicieron mediciones incorrectamente. En la categoría de aquellos que no completaron la fase 5 destacan todos los que expresaron medidas de área en unidades incorrectas. Por último, los que no evidenciaron completar la fase de validación fueron quienes obtuvieron resultados de un orden de magnitud muy alejado de la realidad. Resultados similares se encontraron en el estudio llevado a cabo por Bukova-Güzel (2011), el cual resalta que los participantes de dicho estudio, también futuros maestros, mostraron mejor desempeño en la fase de comprensión, y más dificultades en la de interpretación y por Gallart et al. (2014) que encontraron la importancia de la fase de validación en el proceso de modelización matemática.

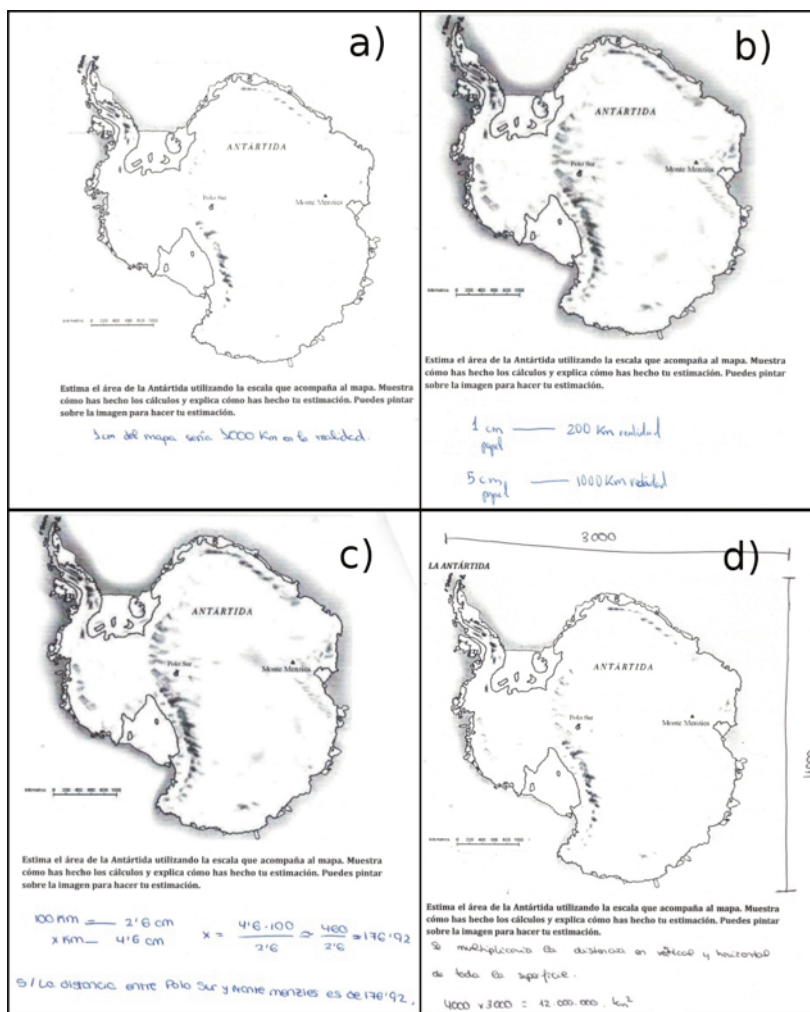


Figura 3. Algunos ejemplos de los esquemas de las estrategias de resolución al problema objeto de estudio

La discusión de los errores encontrados y de las fases de modelización que los alumnos no completaron dibuja una conexión entre estas dos categorizaciones, que en ocasiones se ha hecho explícita. En ningún caso se pretendió establecer una conexión definida entre errores y fases no completadas, pero el uso de los errores permitió dilucidar con mayor facilidad la fase en la que cada alumno tiene dificultades.

Perfil del alumno y necesidades formativas

En cuanto a las estrategias y a los tipos de pensamiento encontrados, el resultado más llamativo fue el número tan bajo de alumnos que abordaron el problema, lo que acentúa la necesidad observada de trabajar la modelización con maestros en formación inicial, como también apuntan Jacobs y Durandt (2017). Además, entre los alumnos que sí afrontaron el problema se ha observado que la estrategia más frecuente es excesivamente simplista. No obstante, entre el resto de participantes en el estudio sí se ha detectado variabilidad en cuanto a las estrategias seguidas (Tabla 1). En particular, es destacable que surgieron diferentes concepciones de área, como se puede observar en la Figura 2. Por otra parte, cabe resaltar que se han encontrado planteamientos de complejidad cognitiva que no se materializaron en una solución, habiendo casos en los que ni siquiera se hizo ningún cálculo (Figura 2f). El tipo de pensamiento dominante entre los participantes en el estudio que abordaron el problema es el analítico. Este hecho contrasta con que la mayoría de los errores se han encontrado relacionados con procedimientos matemáticos elementales como el trabajo con unidades de medida (tanto la interpretación como el cambio de unidades) y el uso de escalas, que ha puesto de manifiesto dificultades a la hora de trabajar con diferentes contenidos integrados (medición y proporcionalidad). Se han observado también algunos participantes con concepciones poco sólidas del concepto de área, utilizando fórmulas que no pueden

conducir a un área, dando áreas en unidades de longitud o estimando directamente áreas a través de longitudes. En lo que se refiere a las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007), destaca la existencia de respuestas que evidencian poca comprensión del problema planteado (Figura 3). Asimismo, cabe resaltar que las fases del ciclo en las que los estudiantes demostraron peor desempeño son la cuarta (trabajar matemáticamente) y la quinta (interpretación). Particularmente, se han observado numerosos casos en los que hay errores elementales de medición o de manipulación aritmética, así como de uso de escalas. También han sido frecuentes las carencias en cuanto a la interpretación del modelo, ya que ha habido una gran cantidad de estudiantes que proporcionaron un área en unidades incorrectas.

De este perfil se deduce que se deben trabajar con especial dedicación la medida (cambio de unidades, interpretación de unidades y refuerzo del concepto de unidad de medida) y el uso de escalas. Puede ser interesante trabajar de forma integrada diferentes contenidos como son la geometría, la medida y la proporcionalidad, los cuales aparecen juntos con facilidad y frecuencia en situaciones de la vida cotidiana. Dado que los participantes que mostraron mejor desempeño evidenciaron un tipo de pensamiento integrado y el estilo de pensamiento más frecuente fue el analítico, parece evidente la necesidad de potenciar el pensamiento visual a través de tareas y actividades de geometría sintética, de visión espacial y descomposición de figuras. También queda patente la necesidad de practicar de forma más acentuada los procedimientos elementales de cálculo, para evitar errores como los detectados, así como, para incrementar la motivación del alumnado hacia este tipo de tareas. Finalmente, resulta clave proponer tareas que doten al alumnado de herramientas para el diseño de estrategias de resolución de problemas, para lo que se puede hacer uso de las fases del ciclo de modelización con las que se ha trabajado en este estudio, y proponer diferentes estrategias e invitar al alumnado a razonar sobre cuál resultaría más idónea.

CONCLUSIONES

Se han analizado las destrezas de modelización de estudiantes para maestros en relación a las estrategias utilizadas y a los errores cometidos con el fin de perfilar sus necesidades formativas y se ha constatado la necesidad de reforzar el trabajo con unidades de medida, tareas de pensamiento visual y actividades que estimulen el desarrollo de estrategias para resolver problemas, sin descuidar el trabajo con las propiedades de las operaciones elementales de cálculo.

Esta investigación ha estado limitada por el problema utilizado, que ha permitido constatar necesidades formativas en relación a tan solo los procedimientos elementales que involucra, constituyendo así un factor de influencia (Mousoulides et al., 2008) sobre las habilidades que los estudiantes han mostrado y sesgando los resultados de la investigación. El número de participantes en el estudio, por otra parte, ha obligado a analizar gran cantidad de información que quizá haya impedido apreciar matices potencialmente útiles en el análisis de necesidades. De igual manera, una mayor riqueza de herramientas como las utilizadas por Mousoulides et al. (2008) o Gallart et al. (2014) o triangulaciones entre expertos nos proporcionarían una información más fiable sobre las destrezas de modelización de los alumnos. Estas limitaciones invitan a desarrollar un conjunto de estudios de caso para observar la actuación de grupos más reducidos con diferentes herramientas o triangulaciones entre diferentes grupos de expertos, que permita alcanzar mayor profundidad de análisis. Es de interés para esta línea de trabajo, por otra parte, el diseño de un conjunto de problemas exhaustivo en cuanto a las fases del ciclo de modelización y que minimice el sesgo de los resultados causado por el análisis de solo un problema. También sería útil analizar comparativamente las destrezas de modelización en relación al rendimiento en Matemáticas para contrastar el poder explicativo de la modelización respecto al desempeño matemático. Emplazamos alguna de estas investigaciones para el futuro.

Referencias

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 2007.
- Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (pp. 222-231). Chichester: Horwood.
- Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems, *Teaching Mathematics and Its Applications*, 30, 19-36.
- Burkhardt, H. (2004). Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers. En H.W.Henn, y W. Blum, (Eds), *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education: Pre-Conference Volume* 53-58. Dortmund, Germany.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- DeLange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: CD-Press
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.
- Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1-3), 111-129.
- Hidroğlu, Ç. N., Dede, A. T., Kula-Ünver, S. y Bukova-Güzel, E. (2017). Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 293-304.
- Jacobs, G. J. y Durandt, R. (2017). Attitudes of pre-service mathematics teachers towards modelling: a South African inquiry. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(1), 61-84.
- Mousoulides, N. G., Christou, C. y Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(3), 873-892.
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society,
- Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.
- OECD. (2013a). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- OECD. (2013b). *Estímulos PISA de Matemáticas Liberados*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Pollak, H. (1987). Notes from a talk given at the MSEB Frameworks Conference. Minneapolis, EEUU.
- Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21- 41.