

LA ESTIMACIÓN DE LA MEDIA: ANÁLISIS DEL LENGUAJE EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

The estimation of average: Analysis of language in Spanish high school textbooks

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos el lenguaje de la estimación de la media en tres libros de texto españoles de bachillerato publicados el pasado año. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje formal. El lenguaje numérico incluye los diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Palabras clave: *Inferencia, libros de texto, lenguaje matemático, bachillerato.*

Abstract

In this paper we analyse the language used in the chapter estimation of the mean in three Spanish high school textbooks published in the past years. The results show the great richness and variety of verbal expressions and a predominance of formal language. The numerical language is developed according to the introduction of different number systems and there is also an extensive use of tabular and graphical representations. Some differences in the books indicate the important role of the teacher to select and use these books in teaching.

Keywords: *Inference, textbooks, language of mathematics, high school.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la inferencia es un componente importante de las *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*, por su presencia constante en las pruebas de selectividad (López-Martín Batanero, Gea y Arteaga, 2016) y por la importancia que tiene en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016). Además, en segundo curso de Bachillerato de esta modalidad (MECD, 2015), en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes estándares de aprendizaje, que incluyen los contenidos y criterios de evaluación:

- 2.1. Valora la representatividad de una muestra a partir de su proceso de selección.
- 2.2. Calcula estimadores puntuales para la media, varianza, desviación típica y proporción poblacionales, y lo aplica a problemas reales.
- 2.3. Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción muestral, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales.
- 2.4. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.
- 2.5. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional y para la proporción en el caso de muestras grandes.
- 2.6. Relaciona el error y la confianza de un intervalo de confianza con el tamaño muestral y calcula cada uno de estos tres elementos conocidos los otros dos y lo aplica en situaciones reales.
- 3.1. Utiliza las herramientas necesarias para estimar parámetros desconocidos de una población y presentar las inferencias obtenidas mediante un vocabulario y representaciones adecuadas.
- 3.2. Identifica y analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico sencillo (p. 389):

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V. (2017). La estimación de la media: análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386). Zaragoza: SEIEM.

Este currículo se ha implementado en el segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales en 2016, por lo que se han editado nuevos libros de texto que tratan de responder al cambio de directrices. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Cordero y Flores (2007) resaltan su influencia en el discurso matemático escolar, que regula la enseñanza y aprendizaje. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007). Una característica importante del libro de texto de matemáticas, es el lenguaje (entendido en un sentido amplio, es decir, incluyendo tanto el lenguaje verbal, como el gráfico, simbólico y tabular) por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. Como parte de un proyecto de investigación más amplio en que pretendemos analizar la enseñanza de la inferencia en Bachillerato, en este trabajo nos fijamos el objetivo de analizar el lenguaje (en el sentido amplio anteriormente descrito) en el tema de estimación de la media en tres libros de texto de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales publicados según la nueva normativa.

FUNDAMENTOS

Marco teórico

Un reto en la enseñanza de las matemáticas es el uso de un lenguaje múltiple, que incluye el lenguaje verbal, los símbolos y expresiones algebraicas, las representaciones gráficas y las tablas (Scheleppegrell, 2007). Puesto que los objetos matemáticos no son directamente perceptibles, deben ser representados mediante diferentes representaciones (Duval, 2006). Dicho lenguaje es un elemento fundamental en el aprendizaje del alumno, puesto que éste debe asimilarlo, para ampliar su lenguaje cotidiano con otro de mayor nivel de abstracción. Sin embargo el lenguaje y representaciones matemáticos no están estandarizados, por lo que la representación simbólica o de otro tipo de un concepto puede variar entre países, niveles educativos o incluso textos (Adler, 1991)

Entre las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a la importancia que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático, pues se trata de “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)” (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Antecedentes

La investigación sobre la presentación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto es muy escasa (por ejemplo, Ortiz, 2014) y menor aún la relacionada con el lenguaje. Respecto a la probabilidad, Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad. Observan mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar en uno de los textos, con una gama más variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística.

Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado en el tema de probabilidad en dos series de libros de texto de Educación Primaria publicados entre 2008 y 2011. Diferencian entre expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, representaciones tabulares y gráficas. Sus resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje

coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se adapta a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. El trabajo anterior es completado por Ortiz, Albanese y Serrano (2016) quienes analizan el lenguaje de la probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados en 2015. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas.

En relación al lenguaje de la inferencia en libros de texto, García y García (2009) realizaron un estudio pormenorizado de los términos específicos relacionados con la inferencia estadística, clasificándolos en varias categorías, según tengan el mismo o distinto significado en los contextos matemático y cotidiano. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Su estudio se completa en García (2011), con el análisis de las definiciones sobre términos de inferencia, proporcionadas por 26 estudiantes de segundo curso de Bachillerato, donde se observan las dificultades que tienen para dar una definición adecuada en el contexto matemático, finalizando con una propuesta de enseñanza para superarlas.

Nuestro trabajo trata de completar los anteriores, analizando tres libros de texto de Bachillerato, siguiendo las categorías de análisis del trabajo de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013).

METODOLOGÍA

Se analizaron tres libros de texto de segundo curso de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias Sociales, publicados en 2016, de tres editoriales muy conocidas. Se trata de una muestra intencional, puesto que el estudio es exploratorio, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la media, estudiando las variables determinadas en Gómez et al. (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas.

Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. Por ejemplo, para la variable “expresiones verbales” se han diferenciado cuatro tipos: expresiones cotidianas, específicas de estadística, específicas de probabilidad y específicas de los juegos de azar. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados. A continuación se presentan los resultados, utilizando ejemplos de los textos cuando sea necesario.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron las expresiones verbales. Hemos tenido en cuenta, siguiendo a Shuard y Rothery (1984), las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad (Tabla 1).

Tabla 1. Frecuencia de expresiones distintas en los libros de texto según categoría

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Expresiones cotidianas	27	37	26
Específicas probabilidad	11	9	20
Específicas estadística	33	36	41
Juegos de azar	3	0	3

Hemos encontrado una gran variedad de términos: palabras que se usan para indicar resumidamente un procedimiento o hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad, o bien a ejemplos de material que se utiliza en los juegos de azar, acciones sobre dicho material y los resultados de las mismas. El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de la estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, donde había una predominancia de lenguaje cotidiano y juegos de azar. Es decir observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en Bachillerato. No obstante todavía hay una gran variedad de expresiones del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, lo que puede ocasionar conflictos semióticos (Godino et al., 2007), debido a problemas de ambigüedad (Barwell, 2005).

Entre las específicas de probabilidad, las más utilizadas están relacionadas con el cálculo de probabilidades, variable aleatoria, las distribuciones normal y binomial y las distribuciones muestrales. La distribución de medias muestrales se trata en los tres textos, pero las distribuciones de la suma y la diferencia de medias muestrales aparecen en unos textos y en otros no. El texto [T3], es el único que destaca la idea de incertidumbre como una característica de los estudios sobre poblaciones. Respecto al estudio de Ortiz et al. (2001), con textos de secundaria dirigido a alumnos de 14 años, el lenguaje ha variado bastante ya que aparecen conceptos más complejos.

Los términos específicos de estadística son muy variados, destacando los conceptos de población y muestra, estimación de la media, inferencia estadística, intervalos de confianza y el teorema central del límite, que aparecen en los tres textos. El texto [T3] es el único que menciona ejemplos de muestreos no aleatorios, y el texto [T2] introduce el concepto de “muestra aleatoria dirigida” que no hemos encontrado en libros de estadística de referencia, lo que puede provocar un conflicto semiótico en el alumnado que utiliza este texto. Destacar que en ningún texto se da una definición explícita del concepto de inferencia que es fundamental, y lo que hacen por ejemplo, los textos [T1] y [T3] es utilizar la palabra inferir como sinónimo de deducir que, según García y García (2009), está más relacionado con el contexto cotidiano, ya que en matemáticas son dos términos opuestos con significados distintos, lo que puede generar un conflicto semiótico en el alumnado, ya que puede conducirle a interpretaciones inadecuadas. Las expresiones relacionadas con los juegos de azar son muy escasas, al contrario que en Ortiz et al. (2016).

Al comparar el contenido de los textos con las indicaciones del currículo, se observa que en los textos se tratan más conceptos que los contemplados en los documentos curriculares, como por ejemplo, las distribuciones de la suma y diferencia de medias muestrales, el [T3] es el único que analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico, y en el texto [T2] no se hace ninguna referencia a expresiones relacionadas con las tecnologías y la simulación tal y como se recomienda en dichos documentos. En el texto [T1] se remite a una Web donde se encuentran “escenas” sobre los conceptos trabajados en el tema (T1. p.292); y en el texto [T3] en un apartado llamado MAT-TIC GeoGebra, propone realizar prácticas sobre los conceptos presentados en el tema (T3, p.305).

Lenguaje numérico

En segundo lugar se ha analizado el tipo de lenguaje numérico, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales, fracciones e irracionales, ampliándose por tanto los conjuntos numéricos encontrados en los estudios de Gómez et al. (2014), Ortiz, Albanese y Serrano (2016) y Ortiz, Batanero y Serrano (2001) (Tabla 2).

Tabla 2. Tipos de números incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Números enteros	x	x	x
Números decimales	x	x	x
Fracciones	x	x	x
Irracionales	x	x	x

Los números enteros se utilizan en el cálculo de frecuencias absolutas o para indicar el número de elementos de sucesos en experimentos aleatorios, así como para representar el tamaño de una muestra o el valor de una variable estadística o aleatoria y sus parámetros: “Una variable aleatoria x se distribuye normal $N(120,130)$ ” (T1, p.304). Los números fraccionarios suelen aparecer, por ejemplo, en el cálculo de los parámetros de la distribución de medias muestrales: “La población tiene $\mu = 19$ y $\sigma = 3$, $\rightarrow \bar{X} \equiv N(19, 3/\sqrt{64}) = N(19, 3/8)$ ” (T2, p.289). Los números decimales, aparecen sobre todo en el cálculo de probabilidades y en algunos casos se combinan con los enteros en la misma expresión: “ $P[70 < x < 80] = 0,2684$ ” (T1, p.288). Los números irracionales aparecen en el cálculo de la desviación típica de la distribución de las medias muestrales, mediante la fórmula: σ/\sqrt{n} . Utilizando el teorema central del límite, $\bar{X} \sim N(\mu = 5, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{150}})$, ” (T3, p.307). En la Tabla 2 se observa que los tres libros utilizan estos distintos tipos de números, mientras que en Ortiz et al. (2016) no aparecían los números irracionales.

Lenguaje simbólico

Hemos encontrado una gran variedad de lenguaje simbólico que incluye las expresiones de igualdad, desigualdad y operaciones aritméticas, al igual que en el trabajo de Ortiz et al. (2016) (Tabla 3).

Tabla 3. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad y desigualdad ($=, <$)	x	x	x
Operaciones aritméticas	x	x	x
Conjuntos (\in)	x		
Porcentajes , Aproximación (\simeq)	x	x	x
Es (\equiv)		x	
Es (\sim)			x
Implicación (\Rightarrow)	x	x	
Equivalencia			x
Sumatorio (Σ)	x	x	
Símbolos literales, notación funcional	x	x	x
Integral			x

También coincidiendo con dicho trabajo se utilizan símbolos literales y notación funcional, para expresar la relación entre la desviación típica de una distribución y el tamaño de la muestra: “Desv. típica para n dados = Desv. típica para un dado/ \sqrt{n} ” (T1, p. 285) o para expresar la fórmula de la media aritmética (T1, p.292). La implicación es utilizada para realizar cálculos encadenados: “Por tanto: $3 = 2,575 \cdot 8\sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} = 2,575 \cdot 8 / 3 = 6,87 \rightarrow n = 47,15$. Habrá que tomar una muestra de 48 individuos” (T1, p. 302) y también la equivalencia que aparece en un solo texto:

$$“ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) ” (T3, p. 306)$$

Es frecuente igualmente el uso de porcentajes para determinar el intervalo característico correspondiente a una probabilidad o para expresar el nivel de confianza en la estimación de la media poblacional: “*Determina un intervalo de confianza para la antigüedad media de la flota de vehículos con un nivel de confianza del 97 %*” (T2, p. 305).

En general se utiliza un lenguaje formal, donde el símbolo $\phi(a)$, representa la función de distribución o probabilidad de que la variable z sea menor o igual que un determinado valor en una distribución $N(0, 1)$: “*La función que acumula la probabilidad hasta el valor $Z = a$, se denomina función de distribución y se escribe $\phi(a) = P[z \leq a]$* ” (T3, p.281). Son así mismo formales, la expresión utilizada para representar el proceso de tipificación de la variable: “*Si x es $N(\mu, \sigma)$, entonces $z = (x-\mu)/\sigma$ es $N(0, 1)$* ” (T1, p.290), o la expresión que indica la distribución normal de la diferencia de medias muestrales, $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, de las muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 que se pueden extraer de dos poblaciones de medias μ_1 y μ_2 y desviaciones típicas σ_1 y σ_2 :

$$“\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \equiv N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)” \text{ (T2, p.291)}$$

El símbolo sumatorio aparece en la fórmula del cálculo de la media aritmética o también para justificar el cálculo de la probabilidad de que la suma de los elementos de una muestra esté, a priori, en un cierto intervalo, ya que: “ $\sum x_i$ es $N(n\mu, \sigma/\sqrt{n})$ ” (T1, p.292). El símbolo aproximado \simeq aparece en los tres textos, por ejemplo para indicar la aproximación de la distribución binomial por la normal cuando n es suficientemente grande (T2, p.288), o para señalar que se puede tomar la desviación típica de la muestra como estimador de la desviación típica de la población, siempre que el tamaño de la muestra no sea pequeño: “*Si el tamaño de la muestra, n , no es pequeño, podemos tomar $s_n \simeq s_{n-1}$. Por tanto, tomaremos aquí, siempre, s_n como estimador de σ* ” (T1, p. 295). Otro símbolo que aparece en un solo texto es \equiv para indicar que una variable aleatoria sigue una distribución normal: “ $X \equiv N(n\mu, \sigma/\sqrt{n})$ ” (T2, p.288) o el símbolo \sim para indicar lo mismo en otro texto: “ $X \sim N(\mu = 9, \sigma = 1,2)$ ” (T3, p.283).

También encontramos el lenguaje conjuntista, por ejemplo el símbolo \in , en un problema donde conocida la media de la estatura de los soldados de un regimiento, se pregunta por la probabilidad de que la media de una muestra en una guardia esté comprendida en un determinado intervalo: “ $\checkmark P \bar{x} \in (174,4; 175,6]$?” (T1, p.294). Un único texto utiliza el símbolo de la integral para calcular la probabilidad de cualquier intervalo $[a, b]$ de la recta real, en el caso de una variable aleatoria continua: “*Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable continua, entonces $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$* ” (T3, p.279).

En la Tabla 3 se observa que, en general, los tres libros de texto utilizan un lenguaje simbólico muy formalizado, y solo hay pequeñas diferencias: el uso del lenguaje conjuntista que solo aparece en [T1] o los símbolos \equiv y \sim que aparecen en [T2] y [T3] respectivamente o la integral que solo aparece en [T3]. Se observa que hay un aumento considerable de la formalización respecto a Ortiz et al. (2016), lo cual es razonable pues estamos en el curso previo al ingreso en la universidad.

Lenguaje tabular

Se han encontrado diferentes tipos de tabla: a) Listado de datos sobre una variable que se supone sigue una distribución normal y se pregunta “cuál de estas dos ciudades tiene un clima más frío”, como el ejemplo de la Figura 1.a (T3, p.326) o tablas de frecuencias (T1, p.297); b) tablas de resultados donde por ejemplo se comparan la media y la desviación típica de cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados, Figura 1.b (T1, p. 285); c) tablas de la $N(0, 1)$ donde aparecen las probabilidades de que $P(z \leq k)$ para valores de k de 0 a 4 que el alumno ha de leer para poder calcular probabilidades (T1, p.286) o para calcular el valor crítico correspondiente a una determinada probabilidad: “*Se halla el valor crítico $z_{\alpha/2}$ y se busca su valor en la tabla de la $N(0, 1)$. $F(Z_{0,025}) = 1 - 0,025 = 0,975 \rightarrow P(Z < Z_{0,025}) = 0,975 \rightarrow Z_{0,025} = 1,96$* ” Figura 1.c (T2, p. 294); d) tablas

de datos obtenidos de simulaciones o experimentos que pueden estar o no agrupadas (Figura 1.d (T2, p.305); e) tablas de intervalos característicos correspondientes a una determinada probabilidad (T1, p. 300); f) tablas de distribuciones normales con datos de parámetros estadísticos y de probabilidad para hallar el intervalo característico en cada caso, o con datos de distribución y tamaño de la muestra para indicar como se distribuyen las medias muestrales en cada caso (T1, p.304), o tablas de datos sobre el tamaño de dos muestras y sus respectivos parámetros estadísticos, por ejemplo sobre el peso de los hijos de dos grupos de mujeres embarazadas, donde se pide a partir de dichos datos decidir cómo influye que la madre sea fumadora en el peso de su hijo al nacer (T2, p. 298).

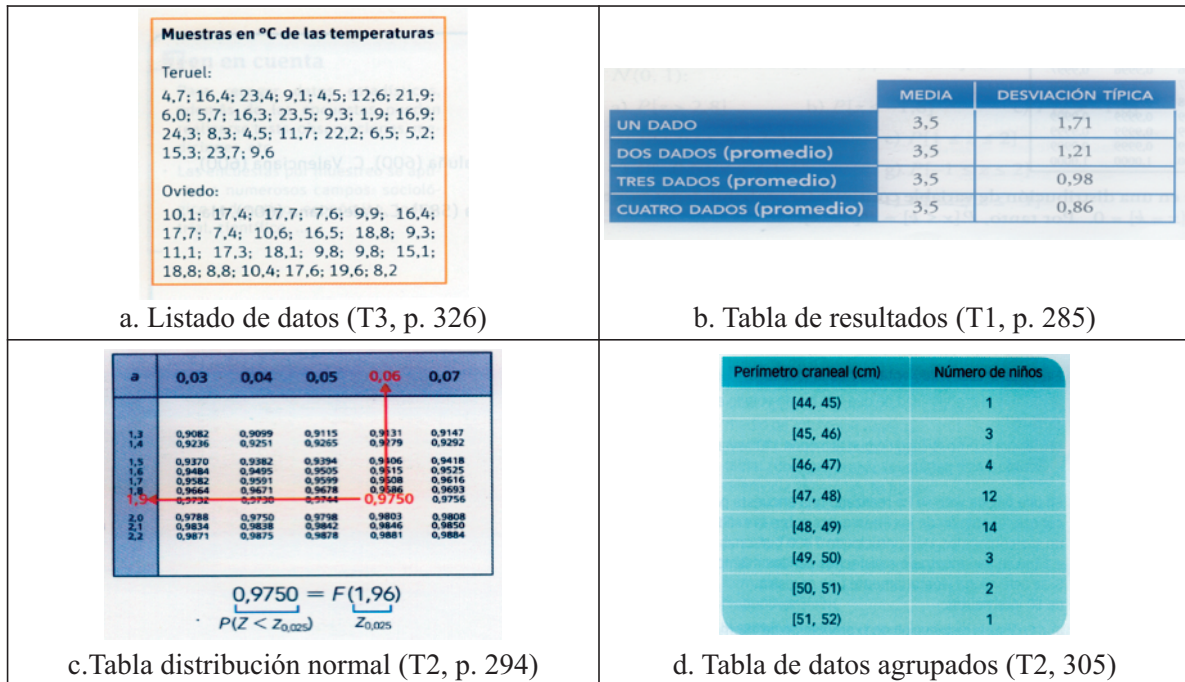


Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos

En la Tabla 4 resumimos los resultados relativos a esta variable, observando pocas diferencias entre los textos analizados. Hacemos notar la dificultad procedimental que implica para el alumno la lectura y en algunos casos la construcción de todos estos tipos de tablas, puesto que cada una de ellas tiene sus propios convenios, lo que puede convertirse en un conflicto para el alumnado. Se observa que el texto [T1] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje tabular. En este estudio también aparece una mayor diversidad de lenguaje tabular y de mayor complejidad que en Ortiz et al. (2016).

Tabla 4. Lenguaje tabular

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Listado de datos		X	X
Tabla de frecuencias	X	X	X
Tabla de resultados distribución de probabilidad	X	X	
Tabla de frecuencias con datos agrupados	X	X	
Tabla de $N(0,1)$	X	X	X
Tabla de valores críticos	X	X	X
Tabla de intervalos característicos	X		X
Tabla de parámetros de distribuciones y probabilidad	X		
Tabla de parámetros de distribuciones y tamaño muestra	X	X	X
Tabla para organizar los cálculos	X		

Lenguaje gráfico

Se han encontrado una gran variedad de gráficos, sin especificar si han sido elaborados o no por un programa o paquete estadístico: Diagrama de barras, donde se representan el promedio de los resultados al lanzar cuatro dados, (T1, p.285) o diagrama de barras agrupados, Figura 2.a (T3, p. 326), lo que supone un mayor nivel de complejidad, según Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), al representar conjuntamente dos distribuciones de datos. Gráfica de distribución normal, donde se representa el nivel de confianza, $1 - \alpha$, el valor crítico $z_{\alpha/2}$ y el nivel de significación α , Figura 2.b (T2, p.293); gráfica de comparación de varias distribuciones donde se representan cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados y se comparan la media y la desviación típica, Figura 2.c (T1, p.291); gráfico donde se muestran los intervalos de confianza correspondientes a 20 muestras de 45 latas de refrescos y donde se observa que el 95% de ellos proporcionan intervalos que contienen el verdadero valor de μ , Figura 2.d (T3, p.317). También hay gráficas donde se representa la aproximación de una distribución binomial por una normal y donde se observa que cuanto mayor es n , mejor aproximación se obtiene, Figura 2.d (T2, 275). En algunas gráficas (por ejemplo, Figuras 1a y 1c), la ausencia de títulos y etiquetas en los ejes puede causar conflictos en la identificación de las variables representadas o las escalas de medida.

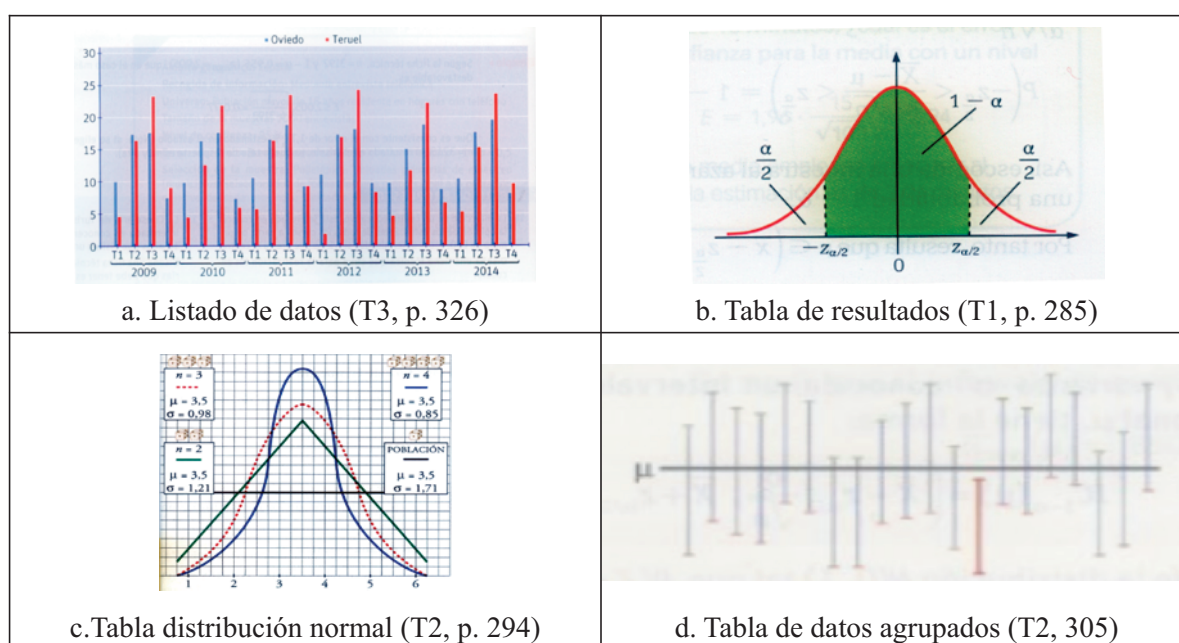


Figura 2. Distintos tipos de gráficas encontradas en los textos

En la Tabla 5 se observan algunas diferencias entre los libros. El texto [T3] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje gráfico, con la salvedad de que a los intervalos característicos los nombra como intervalos centrados en la media, el libro [T2] presenta los mismos gráficos excepto el diagrama de barras agrupado y ya con menor variedad está el [T3]. En [T1] y [T3] aparecen fotos de matemáticos importantes relacionados con el origen de la distribución normal, la estimación y la inferencia estadística, y en todos ellos, sobre todo en [T2] y [T3], fotos e imágenes relacionadas con el tema o con el contexto de los problemas. En el estudio de Ortiz et al. (2016) también aparecen diagramas de barra y agrupados y representaciones icónicas, como imágenes y dibujos; sin embargo, en nuestro estudio encontramos otro tipo de gráficos más complejos relacionados con la inferencia estadística, diferencias lógicas al tratarse de un nivel educativo superior.

Tabla 5. Lenguaje gráfico

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Diagrama de barras	x		x
Diagrama de barras agrupado			x
Gráfica normal	x	x	x
Aproximación binomial por normal	x	x	x
Gráfica comparación distribuciones	x		x
Gráfico intervalos característicos	x	x	x
Gráfico intervalos de confianza	x	x	x
Fotos matemáticos	x		x
Fotos e imágenes	x	x	x

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos, quienes, además de los conceptos y propiedades, han de aprender el uso de símbolos, tablas y gráficos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que sí aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). En contra de lo especificado en las orientaciones curriculares hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología o la simulación, y dos que no proponen el análisis de los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico.

Puesto que el estudio es exploratorio, estos resultados deben ser valorados con precaución y sería necesario ampliar el estudio con otros textos. Por otro lado, el profesor debe buscar estrategias que permitan a los estudiantes consolidar un lenguaje matemático más avanzado e interpretar así los significados más complejos de la inferencia estadística. Esto requiere que los profesores cuiden el lenguaje formal que se utiliza en el aula, mediante el cual se construye el conocimiento matemático, (O'Halloran, 2000), evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar conflictos semióticos en el alumnado.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyectos EDU2013-41141-P, EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- Adler, A. (1991). Mathematics and creativity. En T. Ferris (Ed.), *The world treasury of physics, astronomy, and mathematics* (pp. 435–446). Boston, MA: Little Brown.
- Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 118–126.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- García, I. (2011). Análisis de los términos de Inferencia Estadística en Bachillerato. *Números*, 77, 51-73.
- García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en Bachillerato. *Educación Matemática*, 21(3), 95-126.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the “voice” of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- López-Martín, M., Batanero, C., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2016). Análisis de los problemas de inferencia propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Vidya*, 36(2), 409-428.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 3.
- O’Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359–388.
- Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.
- Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM
- Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Schelepppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23, 139-159.
- Shuard, H., y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

ANEXO: Textos empleados en el análisis

- [T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.
- [T2]. Gámez, J., Marín, S., Martín, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.
- [T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.