Una Construcción Alternativa al Continuo de Cantor:

El Continuo Intuicionista

Angela Patricia Valencia Salas, angelapatriciav@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de caldas

1. Introducción

Durante el desarrollo de las matemáticas, el concepto de continuo ha tomado diversas facetas no sólo para comunidades específicas, si no en la forma de ser abordado desde distintos contextos, entre ellos la matemática y la filosofía. Muchas de esas concepciones muestran al continuo como una propiedad atribuible al tiempo, al espacio y a los objetos que pertenecen a estos. Es también es concebido como la posibilidad de prolongar indefinidamente un proceso, como un dominio numérico o como un concepto libre, general, dominio de libre devenir. Durante el programa de aritmetización del análisis se producen cambios en la práctica de las matemáticas, lo que señala el curso de la idea de continuo. Oostra (2004) menciona que desde esta misma época y por iniciativa de Cantor, en la matemática se identifica el continuo con el sistema de los números reales.

Paralelamente a los trabajos desarrollados por Cantor, ciertas comunidades de matemáticos desarrollan programas alternativos a los propuestos en la matemática clásica, programas que nacen de inquietudes acerca de la eficacia del lenguaje matemático, las construcciones de las matemáticas para poder capturar los conceptos, la posibilidad de identificar los conceptos matemáticos con los objetos matemáticos, entre otros. A demás de ello encontramos cómo la mayoría de las visiones del continuo previas al programa de aritmetización que podrían considerarse sintéticas, en alguna medida, se detienen y dan paso a una concepción analítica de este, que según Zalamea (2001), sólo describe un aspecto fundamenta del continuo, la idea de saturación, pero que deja de lado lo que Charles S. Peirce denominó como características fundamentales del continuo: genericidad, reflexividad y modalidad, que se constituyen en aspectos sintéticos característicos del continuo Peirceano y en general de lo que seria en continuo en su totalidad.

Estos aspectos según Zalamea completarían, diversificarían y enriquecerían la percepción usual del objeto analítico Cantoriano. A partir de ello retomamos una construcción alternativa al continuo de Cantor, brindada por Luitzen E. Jan Brouwer (1881-1966) con el fin de identificar qué elementos de su elaboración del concepto de continuo, permite identificar aspectos sintéticos de este, reflejados en la identificación de las características fundamentales del continuo Peirceano, en esta construcción.

El continuo Peirceano. Zalamea (2001) menciona que las ideas globales y locales que posee Pierce sobre el continuo matemático y filosófico, posibilitan retomar la problemática del continuo y construir una visión sintética de este concepto (concepto para Pierce genérico) que completa, diversifica y enriquece su percepción usual, acotada al objeto analítico Cantoriano (p.12).

El continuo Peirceano, es un concepto sintético, totalmente general, que no puede reducirse a un sólo contexto de formalización. Zalamea (2001), señala que es un concepto que para Pierce yace intrínsecamente en cualquier otro concepto general: *"Pierce insiste en que el continuo tiene que entenderse sintéticamente, como un todo general que no puede ser reconstruido analíticamente como una summa interna de puntos"* (p.12). Esa insistencia en concebir el continuo como un todo general, es lo que caracteriza fundamentalmente esta visión de continuo.

Según Zalamea (2001) los rasgos más sobresalientes del continuo peirceano se abordan desde dos lugares específicos, que se entrelazan entre sí. El primer lugar describe tres características "globales" del continuo peirceano. Cada una de estas características posee una subdeterminación que caracterizan cada una de estos aspectos globales (p. 53) y el segundo desde una metodologías locales para abordar localmente el continuo. Estas cuatro metodologías (relaciones genéricas, lógica de la vaguedad, lógica de vecindades, cirugía de lo posible), permiten, como señala Zalamea (2001) unificar una visión general y abrir nuevas compuertas a la investigación dirigidas a observar la naturaleza del continuo (p. 75). En este trabajo sólo se retoman las características globales del continuo peirceano, como observables en la elaboración del continuo intuicionista, siendo estas las siguientes:

Genericidad y supermultitud: El principal rasgo o por lo manos el más sobresaliente del continuo peirceano (carácter general) es un sustantivo equivalente a generalidad. Lo general en Pierce, se basa en el concepto de lo libre, lo que está alejado de ataduras que particularizan, determinan y dan existencia a los objetos de manera actual (p.55). Zalamea (2001) menciona que como consecuencia inmediata de la genericidad del continuo, consiste en que el continuo debe ser supermultitudinario, en el sentido en que su tamaño debe ser totalmente genérico y por tanto no debe poder ser acotado por ningún tamaño actualmente determinado. Este carácter de supermultitud indica en Peirce que la recta real cantoriana sería un primer embrión de continuo. Finalmente la generalidad del continuo implica, que este no puede ser reconstruido a partir de lo particular o de lo existente, y que debe ser pensado en un verdadero ámbito general de posibilidades. (p. 59)

Reflexibilidad e inextensibilidad: Zalamea (2001) señala que esta propiedad indica que el continuo es tal que cada una de sus partes tiene otra parte similar al todo. Para Pierce la reflexibilidad implica que el conjunto no puede estar compuesto de puntos, dado que los puntos al no poseer partes, no pueden tener partes similares al todo. Junto con ello la inextensibilidad del continuo consiste que el continuo no puede estar compuesto de puntos (p. 61)

Modalidad y plasticidad: Zalamea (2001) explica que la modalidad interpreta al continuo como un ámbito extenso e inagotable de todas las posibilidades (p.15). Antes de su descomposición y recomposición analítica en la forma de Cantor, debe darse una visión global y sintética del continuo. Peirce menciona que el continuo es todo lo que es posible, en cualquier dimensión en que sea continuo. Esta característica es lo que Zalamea (2001) llama modalidad. Esa flexibilidad en el tránsito entre las diversas posibilidades del ser, requiere que el concepto de continuo sea plástico.

2. Metodología

La investigación fue carácter descriptivo dado que su propósito era principalmente describir rasgos del continuo intuicionista o Brouweriano, para luego identificar algunos los elementos que permitirían reconocer aspectos sintéticos del continuo Peirceano en este modelo. Para la realización de ello se establecieron 5 fases:

1 fase. Búsqueda de la bibliografía que dé cuenta de lo que es el continuo de Brouweriano: En esta fase se realizó una búsqueda de documentos como artículos, trabajos de investigación, libros, entre otros, que nos proporcionara información teórica sobre corrientes de pensamiento en matemáticas (formalismo-logicismo), sobre lógica clásica e intuicionista y finalmente sobre el continuo de Cantor y de Brouwer.

2 fase. Descripción de las temáticas a trabajar en el desarrollo de la investigación: En esta fase se hizo una descripción lo más detallada posible de lo que es el continuo de cantor y de lo que es el continuo intuicionista, identificando rasgos característicos de cada uno de estos modelos, mostrando qué del concepto de continuo modela cada uno.

3 fase. Determinar los posibles elementos que permitieran describir algunos aspectos sintéticos del continuo Peirceano en el continuo intuicionista: En esta fase se establecieron los posibles lugares desde donde se podrían identificar algunos aspectos sintéticos. Estos lugares permitieron dar cuenta de cómo la genericidad y reflexividad juegan un papel importante en la concepción de continuo en el modelo de continuo intuicionista.

4 fase: Realización de la descripción y comparación con el continuo de cantor de los electos que permiten identificas aspectos sintéticos del continuo: En esta fase se describieron los elementos encontrados: Concepción del concepto de continuo, Caracterización local del concepto de continuo, Discusión presente en torno al principio del tercio excluso, Cardinalidad del continuo en su respectivo contexto de formalización, que permitirían identificar aspectos sintéticos del concepto de continuo.

5 fase. Conclusiones de la comparación de los dos modelos: En este lugar, después de realizada la comparación, se hizo un análisis de los resultados obtenidos de esta, con fines de describir esos aspectos sintéticos del continuo intuicionista, generando con ello una reflexión posterior sobre el carácter general del continuo.

3. Análisis de datos

Después de la recolección de la información se identificaron los siguientes elementos que permitirían identificar aspectos sintéticos del continuo Peirceano en el continuo de Brouwer: *Concepción del concepto de continuo, Caracterización local del concepto de continuo, Discusión presente en torno al principio del tercio excluso, Cardinalidad del continuo en su respectivo contexto de formalización*. En esta comunicación sólo se hablará de los dos primeros, dado la gran importancia que revisten en el proceso de capturar la esencia del continuo de los intuicionistas en un modelo determinado.

Concepción del concepto de continuo: En la obra de Brouwer se observa el uso de la noción del tiempo como base primordial de su elaboración del continuo. El tiempo es el único elemento "a priori" del continuo. Este se basa en lo que Brouwer denomina "intuición primordial o primigenia", que consiste en la capacidad de conciencia de la relación entre antes-después, pasado-presente. Respeto a lo anterior Montesinos (2002) menciona que: *"La intuición primordial ... como unidad de lo continuo y lo discreto, la posibilidad de pensar a la vez en singularidades unidas por un "entre" que nunca se agota por inserción de nuevas singularidades ... por tanto es imposible tomar alguno de ellos como autosuficiente construir el otro a partir de ahí" (p. 47)*

En este ir y venir entre lo continuo basado en la idea de tiempo y lo discreto domo posibles marcas sobre el continuo es lo que le permite a Brouwer asumir al continuo como un dominio de "libre devenir" y no como un agregado o summa de elementos fijos. Zalamea (2001) menciona que uno de los rasgos que caracteriza la idea de un continuo sintético es la *Genericidad*, que refiere a lo libre, lo no particularizante, a la iniciación de un gran espacio de posibilidades no actualizadas ni determinadas. Esto se en Brouwer cuando presenta esa posibilidad de ir y venir, entre lo continuo y lo discreto, tomando como base su *Intuición Primigenia.*

Caracterización local del concepto de continuo. La actualización de Brouwer del continuo, que pretende capturar su idea general de continuo parte de una noción primordial sobre los números naturales. . La noción de número natural esta envuelta en una serie de propiedades que son posibles inspeccionarlas al momento de examinarlas en cada uno de los elementos producidos por la inspección. La aritmética que Brouwer utiliza para los enteros y racionales no difiere de la clásica, pero al entrar en la etapa siguiente, los números reales, las cosas cambian radicalmente. En el continuo Brouweriano los números reales están definidos por sucesiones de libre elección o "*free-choice sequence".* Estas son producto de una libre elección y son construidas paso a paso por actos de elección. Otras son determinadas por una ley que representan números reales individuales que marcan el continuo. En esta elaboración tanto la definición de sucesión de Cauchy y el de sucesión que se prolonga al infinito (spi) son de suma importancia, trate de visualizar el crecimiento y el aspecto dinámico del continuo matemático, basado en la intuición del tiempo.

Heyting (1976) menciona que el mayor interés que ofrece el concepto de spi radica en la forma de generalidad que elle trae: *"Toda sucesión de Cauchy de números racionales representa el continuo de los generadores de numero real mucho mejor que una sucesión determinada por una ley no especificada, ya que corresponde al concepto intuitivo de continuo como una posibilidad de determinación gradual de puntos."* (p. 43)

Este aspecto dinámico, la forma de generalidad de la noción intuicionista de continuo, a su vez refleja lo libre de este concepto, muestra una vez más el carácter general de este ya que no hay modelo determinado que lo refleje. Además de ello Brouwer diseña una teoria de las especies y despliegues que es base fundamental de la definición final del continuo. Un ejemplo dado por Heyting de despliegue se encuentra aquel que representa el conjunto de los generadores de número real:

"Supongamos que $r_1, r_2, ...$ designe una enumeración de números racionales.

- Λ_M : Todo número natural forma una sucesión admisible de un miembro; si $a_1, a_2, ..., a_n$ es una sucesión admisible $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ es una sucesión admisible si y solo si $\left| r_{a_n} - r_{a_{n+1}} \right| < 2^{-n}$
- Γ_M : A la sucesión $a_1, a_2, ..., a_n$ (si es que es admisible) se le asigna el número racional r_{a_n}

Los elementos de M son los generadores de numero real $r_{a_1}, r_{a_2}, ...$ para todo generador de numero real, c; puede encontrarse un miembro de M, m tal de sea $c = m$; y en este sentido M representa el *continuo de los generadores de número real*." (p. 44, 45)

De esta definición se generan algunos teoremas relacionados con el continuo por ejemplo: Todos los números reales forman una especie, que no esta definida como especie de despliegue que su es el continuo (monodimensional, de los números reales). El continuo no posee otras subespecies que el mismo la especie nula u otra es aquella en que el continuo no es un finito numerable.

En primer lugar encontramos la necesidad de capturar en una actualización (especie monodimensional) ese carácter libre y dinámico de la intuición primigenia del continuo. Esto nos refleja reflexividad un el continuo intuicionista ya que a partir del intento por reflejar la síntesis global del continuo en la actualización a partir de la creación de las sucesiones de libre elección. Lo anterior muestra que el continuo intuicionista es tal que cada uno de sus partes posee a su vez otra parte similar al todo.

También encontramos cómo en el tratamiento de los generadores de número real producen solamente aproximaciones tan cercana como uno lo desee al número real a las que se les puede verificar algunas propiedades para el n-ésimo término. En otras palabras se puede construir de cierta manera un conjunto de racionales cerca de algún real por ejemplo π lo que nos muestra que es posible tener la vecindad de un punto pero no la actualización de esta, es decir un punto. Esto refleja el carácter inextensible del continuo ya que este continuo no está constituido por puntos sino por vecindades.

Por otro lado la matemática intuicionista hace uso de algunas herramientas heurísticas brindadas por la matemática clásica en la elaboración y demostración de sus teoremas. Aunque muchas a veces muchos teoremas demostrados en la matemática clásica no son demostrables en la matemática intuicionista como por ejemplo el teorema de la existencia de un punto de acumulación en todo conjunto acotado de números reales. Este teorema es conocido como teorema de Bolzano – Weierstrass. Otro templo producido por Brouwer muestra cómo para los intuicionistas no existen funciones reales discontinuas definidas en todo un intervalo cerrado del continuo real. Esto nos brinda de cierto modo un grado de generalidad y riqueza en las construcciones intuicionistas ya que enriquecen de alguna manera las construcciones conjuntistas obtenidas en la matemática clásica. Lo anterior les brinda a las matemáticas intuicionistas cierto carácter categórico en el sentido de la relacionalidad del conocimiento generado.

4. Concusiones

En cuanto a los contextos teóricos en los que se desarrolla el concepto de continuo podemos concluir que debido a que la concepción que cada corriente tiene de las matemáticas, influye de manera definitiva en la construcción de su edificio matemático. Esto se refleja en la utilización única y definitiva de la Teoría de conjuntos como base de las matemáticas, como herramienta para manipular y hablar de los objetos matemáticos para los formalistas y logicistas, mientras que para los intuicionistas, no asumen que sea posible enumerar completa y precisamente en una lista todos los conceptos fundamentales básicos y todos los métodos elementales de deducción, que tienen que servir en el sentido dicho como base de las derivaciones matemáticas. Lo anterior facilitaría el enriquecimiento de supuestos inicialmente fijados, a partir de la formulación y aceptación de otros supuestos nuevos.

La lógica Clásica en la que navega el concepto de continuo Cantoriano, es una lógica bivalente, que según Brouwer no es útil, en este caso para concebir el continuo, como algo libre y totalmente general, ya que ese tipo de lógica no permite describir el transitar, entre lo actual y lo general de este concepto.

El continuo descrito por Brouwer es totalmente sintético, ya que lo concibe como un todo general imposible de concebir como una colección de puntos, creado mediante la abstracción matemática y existe únicamente en la mente del hombre.

Después de realizar toda la búsqueda bibliográfica y su posterior análisis, se lograron identificar lugares específicos en cada una de las construcciones en donde se visualizaban diferencias muy marcadas en relación al manejo del concepto de continuo. Estos elementos fueron los siguientes: Concepción del concepto de continuo, Caracterización local del concepto de continuo, Discusión presente en torno al principio del tercio excluso y Cardinalidad del continuo en su respectivo contexto de formalización. Estos elementos lograron vislumbrar algunos aspectos sintéticos del continuo por su descripción del carácter general y supermultitudinario de este concepto.

El presente trabajo también logró generar reflexiones de tipo epistemológico y ontológico sobre los objetos con los que se trabajan en matemáticas. Eso al identificar la gran influencia que tiene la forma cómo uno concibe los conceptos matemáticos, en la formulación, razonamiento y determinación de estos. Ejemplo de ello es la imposibilidad de pensar objetos confirmados por puntos cuando la naturaleza de los objetos es sintética, cosa que también pasa a la inversa.

Bibliografía

ALVAREZ, C., BARAHONA, A. la continuidad en las ciencias. Universidad autónoma de México. Fondo de cultura económica. México. 2002.

BOYER, C. Historia de la matemática. Alianza editorial. Madrid. 1994.

BUNGE, M. Intuición y razón. Sudamericana. Buenos aires.1996.

CASABAN, E. Sobre la naturalización de la lógica (pp. 59-75). En: revista de filosofía. (Vol. 28.num. 1). Universidad de Valencia. 2008.

COLLETTTE, J. Historia de las matemáticas. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1985.

DOU, A. Fundamentos de las matemáticas. Labor. Madrid. 1970.

GODEL, K. ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?. En Obras completas. Mosterin, J. alianza editorial. Madrid. 1981.

GONZALES, W. Matemáticas intuicionistas y lenguaje. Comunicación presentada en las "XXI reuniones filosóficas", celebradas en Pamplona los días 4, 5, 6 de marzo de 1985. Documento en línea.

HEYTING, A. Introducción al intuicionismo. Tecnos. Madrid. 1976

LAVINE, S. Comprendiendo el infinito. Fondo de cultura económica. México. 2005.

MARTIN, A. Pierce y los modelos matemáticos del continuo. Documento en línea: www.monadas.net/amartin/textos/peirce.PDF

MONTESINOS, J. Brouwer y el intuicionismo. En: las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos. Livola libros ediciones. La Laguna. España. 2000.

NEWMAN, J. Sigma, el mundo de las matemáticas. Vol. 5. Los postulados matemáticos y el entendimiento humano. Misses, Von (1983). *Los postulados matemáticos y el entendimiento humano.* En Newman, James Roy (comps.), Sigma el mundo de las matemáticas. Barcelona, 1997.

OOSTRA, A. C. S. Pierce y el análisis. Una primera lectura del continuo peirceano. Documento en línea: 2004. www.unav.es/gep/Articulos/PeirceYElAnalisis.pdf. 2004.

OOSTRA A. Sobre lógicas multivaluadas. Memorias del XVI encuentro de geometría y IV de aritmética. Ibagué, Colombia. 2004.

PEREZ DE LABORDA, A. ¿Salvar lo real? Materiales para una filosofía de la ciencia. Encuentro ediciones .Madrid. 1983.

SUPPES, P. Teoría axiomática de conjuntos. Norma. Cali. 1968.

ZALAMEA, F. El continuo peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX. Bogotá. UNAL. 2001.

ZALAMEA, F. Tiempo continuidad y ámbito de lo posible: una mirada unitaria desde el sistema pragmático peirceano y desde la lógica matemática contemporánea. En: Palimpsestus. Revista facultad de ciencias humanas. UN. 2001

ZALAMEA, F. Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas. Documento en construcción. Universidad Nacional de Colombia. Departamento de matemáticas. 2008.