LA CONSTRUCCIÓN DE LA CULTURA DE RACIONALIDAD EN UNA CLASE DE MATEMATICAS

Building a Culture of Rationality in a mathematics class

Rodríguez-Rubio, S.G. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav-IPN)

Resumen

Mediante una mirada longitudinal y dinámica de los datos recabados en una clase ordinaria de matemáticas (secundaria), y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada y el modelo de Toulmin para interpretar los argumentos, en la investigación se profundiza en el concepto de 'Cultura de Racionalidad' -relacionada con las normas de sustentación y de interacción que se dan en un aula de matemáticas ordinaria-, introducida por los autores en trabajos previos. Con base en las nociones propuestas en el presente documento, de sucesiones de argumentos productivos y sucesión de argumentos reproductivos, asociadas a las intervenciones de consolidación y de cambio, es posible dar cuenta de algunos procesos de construcción de la Cultura de Racionalidad en la clase y es posible también tipificar, con cierto detalle y precisión, la Cultura de Racionalidad que prevalece en el aula estudiada.

Palabras clave: *argumento, Cultura de Racionalidad, Teoría Fundamentada, interacción en el aula.*

Abstract

Taking a longitudinal and dynamic view of the data collected in a regular mathematics class (secondary school), and following the principles of the Grounded Theory and the Toulmin Model to interpret the arguments, the authors of the research delve into the concept of Culture of Rationality' –related to the norms for sustentation and interaction that arise in a regular math class-, introduced by the authors in previous papers. Based on the notions proposed in this paper, dealing with successions of productive arguments and succession of reproductive arguments associated with consolidation and change interventions, it is possible to account for some of the processes involved in building a Culture of Rationality in class. It is moreover possible to characterize, with certain detail and precision, the Culture of Rationality that prevails in the classroom studied.

Keywords: *argument, culture of rationality, grounded theory, in-class interaction.*

ANTECEDENTES Y EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La justificación es uno de los rasgos paradigmáticos de la actividad matemática. La comunidad de matemáticos ostenta prácticas habituales de justificación de las proposiciones, que se plasman a través de sus criterios de rigor (e.g., estrictamente hablando, actualmente sólo se aceptan como justificaciones válidas las demostraciones deductivas inscritas en teorías axiomáticas). Estas normas de sustentación definen una 'Cultura de Racionalidad' de los matemáticos en un período específico de la historia. La Cultura de Racionalidad de los matemáticos no es permanente, sino que se ha ido transformando, siendo un acompañante fiel de la evolución de la propia disciplina. Las comunidades que se congregan en los salones de clase de matemáticas también poseen prácticas rutinarias para fundamentar los hechos de la disciplina; en otras palabras, ellas igualmente comparten una Cultura de Racionalidad, la cual prevalece en el aula por un período de tiempo dado.

Rodríguez-Rubio, S.G. y Rigo-Lemini, M. (2017). La construcción de la cultura de racionalidad en una clase de matemáticas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 427-436). Zaragoza: SEIEM.

En sus propios términos, de esto ya han dado cuenta varios investigadores. Por ejemplo, Yackel y Cobb (1996) interpretan y explican algunos aspectos relacionados con las prácticas de sustentación que se dan en el aula. Acuñan para este propósito la noción de norma sociomatemática, que hace referencia a los criterios que un profesor y sus estudiantes negocian para determinar lo que cuenta, por ejemplo, como una explicación matemática aceptable. En el estudio, ellos muestran que este tipo de normas se constituyen de forma interactiva e ilustran en el aula cómo los agentes de clase regulan los argumentos matemáticos e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Por su parte Planas y Gorgorió (2001) se centran en averiguar las "posibles interferencias en el aprendizaje que en el aula pueden derivarse de las diferentes interpretaciones de las normas matemáticas" (p. 135).

Otros investigadores se han interesado por estudiar la racionalidad real de los alumnos al elaborar argumentos (e.g., Durand-Guerrier et al., 2012) o han analizado el comportamiento racional de los agentes en la clase de matemáticas (e.g., Boero y Morselli, 2009). Estos estudios han retomado el modelo de Habermas, integrado por tres componentes: racionalidad epistémica, racionalidad teleológica y racionalidad comunicativa.

Las interacciones entre los agentes de la clase desempeñan un rol importante en el establecimiento de las formas de sustentar las afirmaciones matemáticas que surgen en el aula. Al respecto, Krummheuer (1995) por ejemplo, centra su estudio en el análisis de los argumentos en clase, y apunta la necesidad de considerarlos bajo la óptica de la interacción social y no como procesos que se llevan a cabo por una sola persona. Cobb (1995) por su parte, identifica dos tipos de interacciones que se dan en clase, las unívocas, en las que la opinión de uno de los participantes es la que domina, y las multívocas, en las que hay desacuerdo entre los copartícipes porque cada uno supone que su razonamiento es válido y trata de explicarlo; éstas últimas son las que el autor considera que generalmente son más productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Jones y Herbst (2012) se enfocan en el papel del maestro en la enseñanza de la prueba y la demostración, centrando su atención en teorías que "iluminan la interacción profesor-alumno en el contexto de la práctica de enseñanza en el día a día de los profesores de matemáticas" (p. 262). En su trabajo se plantean contribuir en el examen de los marcos teóricos que ofrezcan elementos para comprender el desarrollo de la prueba y la demostración en las aulas de matemáticas de distintas latitudes.

A diferencia de los estudios que retoman una noción predeterminada de racionalidad, establecida sobre criterios dados de evaluación (Boero y Morselli, 2009), el objetivo general de la investigación consiste en afinar la categoría de Cultura de Racionalidad definida por los autores de este escrito en trabajos previos (Rigo, 2009; Rodríguez y Rigo, 2015a, 2015b); para este propósito se acude a la Teoría Fundamentada, específicamente al muestreo teórico. A partir de una re-visita a los datos empíricos, esta herramienta analítica permite profundizar en los conceptos (que previamente habían sido derivados de esos datos empíricos), dando la posibilidad de identificar otros distintos o de reconocer propiedades que antes no era posible distinguir. Así, con base en esos principios metodo-lógicos se introducen, en el presente documento, nuevos conceptos, el de sucesión de argumentos productivos y reproductivos e intervenciones de consolidación y cambio, que permitirán dar cuenta, hacia el final del escrito, de cómo en general se construye la Cultura de Racionalidad en el aula, y que actuarán como indicadores para caracterizar la Cultura de Racionalidad que prevalece en salón ordinario de matemáticas. Las preguntas orientativas que guiaron la investigación son entonces: ¿cómo se construye, en general, la Cultura de Racionalidad en una clase de matemáticas? y ¿con qué criterios se puede tipificar la Cultura de Racionalidad de una clase específica de matemáticas?

MARCO TEÓRICO INTERPRETATIVO

Análisis funcional de los argumentos con el Modelo de Toulmin

El modelo de Toulmin (1984) se utilizó como herramienta analítica para organizar, en forma de argumentos, las resoluciones que en clase se ofrecieron a las tareas ahí presentadas. De acuerdo a este modelo un argumento está integrado por una conclusión (C); en el estudio se consideran como conclusiones a las proposiciones de contenido matemático que hacen referencia a ideas completas, susceptibles de ser verdaderas o falsas y corresponden a los resultados de las tareas planteadas en la clase. En el argumento también participan las evidencias (E) que, en el estudio, coinciden con los sustentos proporcionados por los agentes de la clase para obtener la conclusión de la tarea, concordando con la resolución dada para resolverla; ésta incluye los procedimientos llevados a cabo por ellos, como la aplicación de alguna regla o la elaboración de cálculos que, como menciona Krummheuer (1995), se producen de manera persistente en la educación primaria y coinciden con el argumento. Otro componente del argumento son las garantías (G); se trata de reglas de inferencia, creencias generales, teoremas en acción y consideraciones que no se cuestionan y que responden a la pregunta ¿qué licencias de inferencia permite pasar de E a C? El respaldo (R) que apoya a la garantía es otro componente del argumento y ofrece su cimiento teórico, práctico o experimental. Mientras las conclusiones y las evidencias son explícitas, las garantías y los respaldos son implícitos y aquí han sido re-construidos a partir de las producciones de los agentes de la clase.

Sobre la Cultura de Racionalidad

El concepto de Cultura de Racionalidad se ha acuñado en el marco de la investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen. Las ideas iniciales relacionadas con el concepto de Cultura de Racionalidad han sido construidas en trabajos previos, con base en los resultados empíricos ahí recabados (e.g., Rodríguez y Rigo, 2015a, 2015b). En esos trabajos se han identificado dos componentes principales de la Cultura de Racionalidad:

Normas de sustentación. Prácticas habituales y más aceptadas de sustentación o de elaboración de argumentos que los agentes de clase llevan a cabo en el aula para soportar los hechos de las matemáticas (cf., normas sociomatemáticas de Yackel y Cobb, 1996).

Normas sociales sobre el reparto de responsabilidades y sobre las formas de interacción. Hace referencia al agente de clase que habitualmente le corresponde argumentar (i.e., dar las conclusiones y las evidencias, y eventualmente las garantías), y al que le toca sancionar los argumentos y las conclusiones dadas, y apunta también hacia las formas de interacción que para argumentar se dan cotidianamente en clase (cf., normas sociales de Planas y Gorgorió, 2001).

El concepto de Cultura de Racionalidad introducido en este trabajo no consiste en un conjunto de criterios evaluativos que se apliquen para medir o evaluar la racionalidad de una clase, a diferencia de otras investigaciones (Boero y Morselli, 2009); se trata de pautas orientativas y exploratorias que permiten descubrir la racionalidad que prevalece en un aula ordinaria de matemáticas para distinguir sus características y cualidades más sobresalientes, sin establecer ningún juicio de valor.

METODOLOGÍA

Técnicas analíticas empleadas

La investigación que aquí se reporta fue desarrollada siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), cuyo objetivo central consiste en construir, a partir de apoyos empíricos, conceptos teóricos que expliquen fenómenos sociales. Específicamente, en el trabajo se acude al muestreo teórico, técnica interpretativa que parte de conceptos construidos previamente (sobre datos empíricos) para realizar, con base en ellos y tomándolos como una guía, un nuevo análisis. Este análisis se puede hacer considerando nuevos datos empíricos o re-visitando los que previamente se tenían; la intención central de ese análisis consiste en poder adicionar otras propiedades y dimensiones de un concepto previamente construido, lo que da la posibilidad de que se vaya ‘saturando’, es decir, que se vaya puliendo y vaya ganando en profundidad y riqueza.

Específicamente, el muestreo teórico se aplica en este escrito al concepto de Cultura de Racionalidad antes expuesto, con sus dos componentes básicos; orientados por ese concepto, se regresa a los datos empíricos para re-interpretarlos ahora con una mirada longitudinal y dinámica, con el objeto de revelar propiedades y dimensiones de ese concepto que antes no resultaban visibles.

Métodos de recuperación de datos y sujetos que participaron en el estudio

Los datos empíricos provienen de un estudio de caso, conformado por la profesora Noemí, con dos años de servicio, y su grupo de trabajo integrado por 42 alumnos de primer grado de educación secundaria. La razón de su elección (de un total de tres profesores) obedeció a que era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática. Cuando fue observada, enseñaba el tema 'Reparto proporcional', para lo cual empleó un enfoque didáctico basado en la resolución de problemas. Para el análisis que aquí se expone se examinó la secuencia didáctica que versa sobre ese tema, y que tuvo una continuidad temática, didáctica y pedagógica; la secuencia fue impartida por la profesora en seis módulos de 50 minutos cada uno, los cuales fueron videograbados y transcritos. La secuencia didáctica se fragmentó en episodios, en cada uno se propusieron uno o varios argumentos (o resoluciones) para dar sustento a una conclusión, que como se dijo, coinciden con la solución a cada una de las tareas propuestas en clase. Para este reporte se analizaron 37 episodios y 74 argumentos.

ANÁLISIS EMPÍRICO

La re-interpretación de los datos dio inicio con un examen puntual de cada argumento, considerando sus componentes de acuerdo al modelo de Toulmin. Este análisis ha permitido, en la re-visita de los datos, caracterizar cada argumento acudiendo a dos componentes funcionales: las garantías y los respaldos. En la última columna de la Tabla 1 se describen las garantías que, en el marco del presente trabajo, se identificaron en la secuencia didáctica observada. Los respaldos que se distinguieron en esta investigación aparecen descritos en la 1ª y 2ª columna de dicha Tabla.

Tabla 1. Garantías y Respaldos identificados en la secuencia didáctica

Tipo de respaldo del argumento		Nombre de la garantía asociada al tipo de respaldo	
Matemático	Idea formal escolar de proporcionalidad	JE	*Justificación empírica*. Cuando se justifica una regla con base en el análisis de casos particulares.
		EP	*Explicitación de proceso*. Cuando se explicita el proceso que se llevó a cabo durante la instanciación de una regla.
		RIFE	*Repetición enriquecida de una instanciación de una regla* (e.g., cuando se da un cambio de registro). Esta garantía se presenta cuando se lleva a cabo la repetición de la aplicación de una regla en un argumento que tiene la misma conclusión que uno previo.
		IFE	I*nstanciación de una regla formal escolar* (cuando se aplica una regla que ya ha sido justificada en la clase o se ha explicitado el proceso de su aplicación)
	Idea intuitiva de proporcionalidad	II	*Instanciación de una regla intuitiva* (cuando se aplica la regla sólo con bases de conocimientos intuitivos. Esto se infiere a partir de lo que otros autores han denominado como estrategias espontáneas de '*building up*' (e.g., Hart, 1984), conforme a las cuales utilizan factores escalares sencillos en lugar recurrir al factor de proporcionalidad.
Extra-matemático	Idea operatoria de proporcionalidad	RIO	*Repetición de la instanciación operatoria de una regla* (cuando de utiliza la misma regla instanciada previamente para soportar la misma conclusión)
		IO	*Instanciación operatoria de una regla* (se hace la instanciación (o aplicación de la regla) bajo la consideración de que es válida por pertenecer a la disciplina)
		RP	*Razones prácticas* (el resultado es válido porque es fácil de obtener)

Una vez identificados y caracterizados los argumentos, con base en sus garantías y respaldos, se jerarquizaron como aparecen en la Tabla 1. Se utilizó un criterio basado en el tipo de respaldos; en el nivel más bajo se colocaron los argumentos con respaldo extra-matemático, asociados a ideas operatorias de la proporcionalidad, después se consideraron los argumentos con respaldos matemáticos, poniendo primero los soportados en ideas intuitivas de proporcionalidad y, finalmente, en la parte superior, se colocaron los argumentos orientados por ideas acordes con la proporcionalidad formal escolar.

Posterior al análisis puntual se delineó la trayectoria de los argumentos identificados en la secuencia didáctica, respetando el orden de aparición en clase. La representación de la trayectoria se organizó considerando los distintos componentes de los argumentos: la conclusión, las evidencias, las garantías, los respaldos y las reglas, tomándose también en cuenta los agentes que los ofrecieron. Una representación de esas trayectorias se despliega en la Tabla 2.

Tabla 2. Trayectoria de los argumentos y de participación

Respaldos		Garantías	Número del argumento																																			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Matemáticos	Formal Escolar	JE							PIM		PIM				VU			PIM	VU	PF																			
		EP		PIM																																			PIM
		RIFE															VU						PIM		VU		VU		PIM				PIM				PIM		
		IFE						PIM		PIM						VU					PIM	PIM		VU		VU		PIM				PIM		VU	PIM	PIM		PIM	
	Intuitiva	II	PIM											VU																									
Extra Mat	Operatoria	RIO					R3						R3																		R3								
		IO			R3							R3																		R3									
		RP				R3																																	
			A	M	A	M	M	A	M	A	A	A	M	A	M	A	M	M	M	M	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	2	1	2
			A					A						A		A		M	M	M	A	A		A		A				A				A		A		A	
			1					3						4		5		6	7	8	9	10		11		12				13				14		15		16	

Respaldos		Garantías	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	
Matemáticos	Formal Escolar	JE																										R3												
		EP						VU						VU																									
		RIFE		PIM		PIM					PIM										PIM		PIM															R3		
		IFE	PIM		PIM		VU		PIM	PIM		PIM	VU		PIM	PIM	PIM	PIM	VU	PIM		PIM							PF	PF	R3	R3	R3	R3	PIM	R3	R3		R3	
	Intuitiva	II																																						
Extra Mat	Operatoria	RIO																																						
		IO																					R3	R3	R3	R3														
		RP																																						
			A	M	A	M	M	M	A	A	M	A	A	M	A	A	A	A	A	A	M	A	M	M	M	M	M	M	A	A	M	M	M	M	A	M	A	M	M	AE
			1	2	1	2	1	2	1	2	3	1	1	2	1	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	1	1	2	1	2	3	EC
			A		A		M		A			A	A		A	A	A	A	A			A		A	A	A	M	M				M		A	A		A			AC
			17		18		19		20			21	22		23	24	25	26	27			28		29	30	31	32	33				34		35	36		37			C

Significados de las garantías: JE: Justificación empírica; EP: Explicitación de proceso; RIFE: Repetición enriquecida de la instanciación de una regla; IFE: Instanciación de una regla formal escolar; II: Instanciación de una regla intuitiva; RIO: Repetición de la instanciación operatoria de una regla; IO: Instanciación operatoria de una regla; RP: Razones prácticas.
Significados de las reglas: PIM: Propiedad isomórfica de la multiplicación; VU: Valor unitario; PF: Propiedad funcional; R3: Regla de tres.
C: Conclusión; AC: Agente de la clase que proporcionó la conclusión; EC: Evidencia que soporta la conclusión; AE: Agente que ofreció la evidencia.

Las distintas conclusiones que se ofrecieron en clase se presentan numeradas en la última fila de la Tabla 2; en la penúltima fila se hace referencia a los agentes que las proporcionaron. Asociadas a una conclusión, que recuerde el lector, coincide con la solución de la tarea, en clase se brindaron una o más evidencias (la resolución de la tarea), las que se numeran en la ante-penúltima fila; y cada evidencia la proporcionó un agente de clase (al que se hace referencia en la fila superior a las evidencias). Por ejemplo, para la conclusión 1, proporcionada por un alumno, se ofrecieron en clase 5 evidencias que ofrecieron un alumno, la maestra, un alumno y las últimas dos, la maestra.

En cada evidencia se activó una determinada regla: las reglas que se movilizaron en la secuencia didáctica fueron: la regla de tres (R3), la Propiedad isomórfica de la multiplicación (PIM) (Vergnaud, 1989) (factor escalar), el valor unitario (VU) y la propiedad funcional (PF) (Vergnaud, 1989) (constante de proporcionalidad). Las reglas aparecen en la casilla en la que se intersecta la fila de la garantía en la que se sustenta la evidencia, con la columna de la evidencia. Así por ejemplo, en el argumento 1, asociado a la primera conclusión, un alumno activó la PIM mediante la instanciación de una regla intuitiva (II); o en el argumento 17, asociado a la conclusión 7, la maestra movilizó el valor unitario (VU) y validó esa regla a través de una justificación empírica (JE).

Los respaldos y las garantías se nombran (por sus siglas) en la primera y segunda columna de la Tabla 2, organizadas como lo están en la Tabla 1. Los argumentos brindados a lo largo de la secuencia didáctica aparecen numerados en la segunda fila de la Tabla 2. Ahí se ve que el número total de argumentos identificados es 74. La Tabla 2 también está organizada de forma horizontal, lo que permite identificar episodios. Cada episodio está organizado a partir de una conclusión; en cada episodio los agentes de la clase soportan la conclusión con base en una o más evidencias, y relacionadas a ellas, como ya se dijo, pueden activarse una o más reglas distintas entre sí.

Considere ahora el lector el caso de una misma regla (la que aparece en distintas evidencias, mismas que pueden estar ligadas a una misma conclusión y pertenecer a un mismo episodio, o a conclusiones distintas y pertenecer a diferentes episodios). En estas circunstancias, de invarianza de reglas a lo largo de distintos argumentos, los respaldos pueden ser similares (como en el caso de los argumentos 7 y 9 pertenecientes al episodio 3, en donde la regla que se activa es la PIM y los respaldos son iguales ya que están soportados en consideraciones matemáticas y en una idea de proporcionalidad formal escolar), o pueden ser distintos (los argumentos 3 y 63 comparten la misma regla, la R3, pero los respaldos son distintos, ya que el primero es extra-matemático basado en una idea de proporcionalidad operatoria y el segundo es matemático que hace alusión a una idea de proporcionalidad formal escolar).

Esta condición particular, en la que se consideran argumentos que contienen la misma regla, involucra parejas de argumentos; de hecho, en lugar de parejas se puede pensar en sucesiones de más de dos argumentos. Por ejemplo, una sucesión de argumentos con invarianza de regla está representada por los argumentos 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62, que comparten R3.

Ahora bien. Estas sucesiones de argumentos que comparten la misma regla, pueden compartir también el mismo respaldo, como sucede con la sucesión antes expuesta, cuyos argumentos coinciden en un respaldo extra-matemático y en una idea operatoria de proporcionalidad. En estas sucesiones, definidas mediante un patrón específico: misma regla y mismo respaldo, es posible distinguir un fenómeno didáctico sobresaliente. Y es que esas sucesiones de argumentos representan potencialmente la oportunidad para que en clase se consolide una regla, de acuerdo a un determinado tipo de respaldo, que de alguna manera orienta la manera de sustentar el uso de esa regla. Se podría tratar de un 'momento de la técnica' (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); estos momentos resultan imprescindibles para que "el estudiante se familiarice con ciertas técnicas hasta alcanzar un dominio tan robusto de las mismas que llegue a utilizarlas como algo 'natural'" (p. 279) o hasta que dejen de ser problemáticas y se lleguen a rutinizar…" (p. 287). A partir de aquí "estas técnicas podrán ser consideradas de manera oficial como técnicas 'adquiridas' por los alumnos, pasando a formar parte del medio matemático de la clase" (p. 279). A este tipo de sucesiones, en este documento se les llama 'sucesiones de tipo reproductivo' porque, como se dijo, de alguna manera ayudan a consolidar el dominio de la regla en ciernes. Una sucesión de tipo reproductivo es la que aparece en el párrafo precedente. En la transcripción de clase (v. Tabla 2) se ejemplifica este tipo de sucesiones. Los argumentos 13, 14 y 15 conforman una sucesión de tipo reproductivo ya que comparten la misma regla (VU, que introduce un alumno) y el mismo respaldo (idea de la proporcionalidad formal escolar). En este caso los tres argumentos no comparten la misma conclusión (C5) y por tanto no están en el mismo episodio.

Hay, por otra parte, sucesiones de argumentos que comparten la misma regla pero distinto respaldo, donde el último tiene un nivel superior de complejidad que los precedentes; a estas se les llama sucesión de argumentos de tipo productivo. Un ejemplo es la sucesión antes descrita, 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62 articulada toda ella en torno a una aplicación operatoria de la Regla de tres pero complementada ahora con el argumento 63, en donde esa Regla se justifica empíricamente, dando lugar a un argumento sustentado matemáticamente. Estas sucesiones de argumentos son productivas porque para justificar la regla se ponen en juego elementos matemáticos más complejos, lo que incide de manera importante en la solidez del conocimiento que consiguen los alumnos. En la Tabla 3, los argumentos 12 y 13 son una sucesión de tipo productivo, ya que comparten la misma regla (UV), pero poseen respaldos distintos, uno soportado en una idea de la proporcionalidad intuitiva y otro, en una idea de la proporcionalidad formal escolar.

A las intervenciones de los agentes de clase que dan lugar a sucesiones de tipo reproductivo en este trabajo se les llama intervenciones de consolidación, porque ayudan a reforzar el dominio de una regla. A las que dan lugar a sucesiones de tipo productivo, se les llama intervenciones de cambio, porque modifican el nivel de complejidad de acuerdo al cual se sustentan las conclusiones. Intervenciones de consolidación se dan en la sucesión de los argumentos 13, 14 y 15, ya que en éstos como se dijo, se repite la misma regla con el mismo respaldo; la intervención de la maestra para proponer la evidencia del argumento 13 es de cambio, porque en ella se preserva la misma regla que en el argumento 12, pero los respaldos ya cambian: mientras este último se basa en una teoría de proporcionalidad intuitiva, el otro se apoya en una idea de proporcionalidad escolar.

Tabla 3. Transcripción y análisis de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y productivo

<table>
<tr><td colspan="5">Episodio 4. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 4 (C4), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 12 litros.</td></tr>
<tr><th>Conclusión</th><th>Evidencia</th><th>Garantía</th><th>Respaldo</th><th>Argumento</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C 4: A
Se divide 12 entre tres para saber cuánto equivale un litro</td><td>E 1: Alumno
<table><tr><td>Litros de agua de limón</td><td>No. de limones</td><td>Cucharadas de azúcar</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table>$3\overline{)12}$ = 4   12 –4 = 48   6 –4 = 24</td><td>G 1:
Instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad intuitiva</td><td>12</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra
Sacó el valor unitario. Si divide entre tres, tres entre tres nos da a uno…Si tú tienes…el valor de ingredientes para un litro de agua de limón…puedes tener el valor para cualquiera… como le decía a los otros grupos, cuando nos mandan a comprar tamales, no llegamos con el señor de los tamales y le decimos: ¿cuánto tengo que pagar por tres tamales?, entonces te vas con tu regla de tres, ah entonces por 12 que me pidió mi mamá yo tendría que pagar…No! preguntas: cuánto cuesta un tamal y entonces multiplicas por la cantidad de tamales que le vas a comprar…a esto le vamos a llamar el valor unitario…para un litro cuánto necesito de cada cosa.</td><td>G 2:
Justificación empírica de la instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="5">Episodio 5. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 5 (C5), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 10 litros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C 5: A
Para preparar 10 litros de agua de limón se necesitan 40 limones y 20 cucharadas de azúcar</td><td>E 1: Alumno
Sería lo de un litro que es cuatro limones y dos cucharadas…si multiplico los 10 litros por los demás que se necesitan [número de limones y de cucharadas de azúcar] son 40… 10 por 2 sería 20.</td><td>G 1:
Instanciación de una regla formal escolar (VU)</td><td>R 1:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>14</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra
<table><tr><td>Litros de agua de limón</td><td>No. de limones</td><td>Cucharadas de azúcar</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>10</td><td></td><td></td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table>Así es que necesitas 40 limones y 20 cucharadas de azúcar…ya tengo el valor unitario [se apoya de los datos de tabla que ella, posterior a la evidencia del alumno, elaboró para explicar]…10 por 4, cuarenta y 10 por 2, 20</td><td>G 2:
Repetición enriquecida de la instanciación de una regla (VU) para dar aval institucional</td><td>R 2:
Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>15</td></tr>
</table>

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Reconceptualización de la Cultura de Racionalidad

El análisis precedente, basado en el muestreo teórico, en el que se re-visitaron los datos empíricos a partir de una mirada longitudinal y dinámica, y siempre orientada por la categoría inicial de Cultura de Racionalidad, ha llevado a identificar nuevos conceptos: sucesión de argumentos de tipo productivo y de tipo reproductivo, y las intervenciones de consolidación y de cambio. Estas intervenciones lo que consolidan o cambian es la forma de argumentar o justificar. Es decir, consolidan o cambian los patrones de sustentación, incidiendo así directamente en la Cultura de Racionalidad, porque como se dijo inicialmente, esa Cultura de Racionalidad es un conjunto de patrones de sustentación y de patrones de interacción de acuerdo a los cuales los agentes de clase argumentan los resultados de las tareas que ahí se proponen. Las relaciones entre la categoría inicial de la Cultura de Racionalidad y las nuevas propiedades de la categoría aparecen en el Diagrama 1. Ahí se muestran los conceptos iniciales asociados a esa categoría: normas de sustentación y normas de interacción; las normas de sustentación contienen, entre otros, patrones de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo. Por su parte, las normas de interacción incluyen entre otros, patrones de intervenciones de consolidación y de cambio. Estas últimas están entrelazadas con las normas de sustentación como se muestra en el Diagrama 1. Todos estos conceptos están nucleados alrededor de lo que se perfila como la categoría central, la de Cultura de Racionalidad.

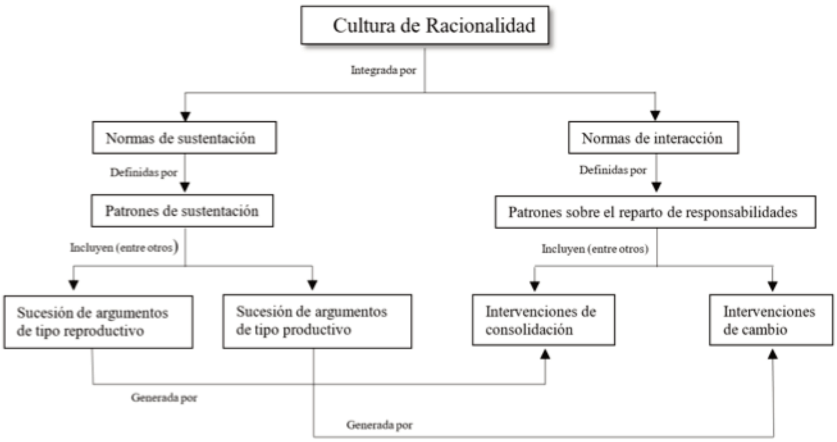

Diagrama 1. La Cultura de Racionalidad y conceptos relacionados

La Cultura de Racionalidad en el aula de matemáticas de la maestra Noemí

Los nuevos conceptos permiten dar cuenta de cómo eventualmente se construye la Cultura de Racionalidad en una clase, mediante sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo e intervenciones de consolidación y de cambio, lo que proporciona la oportunidad de desentrañar más agudamente aspectos de su naturaleza.

Pero las nuevas categorías identificadas en este trabajo también funcionan como indicadores que ofrecen la posibilidad de caracterizar de manera más detallada y escrupulosa la Cultura de Racionalidad que prevalece en un aula cualquiera; en particular, la Cultura de Racionalidad que impera en el aula observada.

En la clase observada es posible identificar, a nivel de episodio, que para una conclusión (de un episodio) se ofrecieron en la mayoría de los casos, más de una evidencia (¡incluso seis!), lo que permite suponer que los alumnos tienen la experiencia viva de que es posible sustentar una misma conclusión de varias formas. En la Tabla 3 se puede reconocer cómo de 37 conclusiones que surgieron en la secuencia didáctica, en 22 de ellas (casi 60%) se proporciona más de una evidencia, mientras que en el resto se ofrece sólo 1.

En la secuencia didáctica observada, de los 74 argumentos que allí se presentaron, 11 (cerca del 15%) fueron el remate de sucesiones productivas, mientras que 63 formaron parten de sucesiones reproductivas. Esta presencia de ambos tipos de sucesiones de argumentos aporta riqueza a la Cultura de Racionalidad, al conjugar lo procedimental con lo conceptual.

Con las categorías introducidas también se consigue distinguir el papel que juegan los agentes de la clase en la construcción de la Cultura de Racionalidad. En el caso de la clase analizada, es claro que es a los niños a los que les toca llevar a cabo las intervenciones de consolidación o presentar la sucesión de argumentos de tipo reproductivo, mientras que a la maestra le corresponde transformar el patrón de sustentación mediante intervenciones de cambio: de los 74 argumentos totales, los alumnos participaron en 34; de éstos, 33 argumentos forman parte de sucesiones reproductivas y sólo uno culminó una sucesión de tipo productivo; por su parte, la maestra participó en 40 argumentos; de éstos, 30 argumentos integran sucesiones de tipo reproductivo y 10 representaron la culminación de sucesiones productivas.

A nivel general se puede decir que en la clase observada se dan distintos tiempos de incubación o consolidación de una regla. Por ejemplo, la secuencia reproductiva asociada a la regla de tres es prolongada, es decir el período de fortalecimiento que da la maestra para que los alumnos se preparen en el dominio de esta técnica es largo, de hecho dura casi toda la secuencia didáctica y es sólo hasta el final que decide cambiar de patrón de sustentación, mediante una intervención de cambio, para justificarla empíricamente. A diferencia de esto, en otras reglas como la PIM, es en un mismo episodio que la maestra decide reemplazar el patrón de sustentación, de una instanciación intuitiva a una explicitación del proceso. Es posible que esto obedezca a que en la regla de tres ella consideró necesario darles tiempo a los estudiantes para que la asimilaran, para que la asumieran como una regla ‘natural’ -como dice Chevallard et al (1997)- y que en el caso de la PIM posiblemente la docente se percató que los alumnos previamente poseían ya un dominio de la regla y que no era necesario dar tanto tiempo de incubación.

Se puede decir, en general, que en la clase de la maestra Noemí los niños introducen las reglas (generalmente a nivel operatorio o intuitivo), marcando la pauta inicial de cómo sustentar, mientras que su mentora, bajo su criterio, los detiene el tiempo necesario para que las asimilen y las fortalezcan; el ciclo se cierra cuando ella ofrece, mediante una intervención de cambio, evidencias más sólidas y fundamentadas de las reglas. Así que los niños introducen y participan en el afianzamiento de la regla, esto es, se involucran en las intervenciones de consolidación, mientras la maestra es la que concurre en las intervenciones de cambio, al decidir cuándo y cómo modificar las formas de sustentación.

Lo anterior habla de una Cultura de Racionalidad en la que hay equilibrio entre las sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo, ya que se da el tiempo necesario para fortificar la regla con una cierta forma de sustentación y se da también el tiempo para profundizar en ese sustento. No obstante, es una Cultura de Racionalidad poco ‘constructivista’ o poco negociada, en el sentido de que es la maestra la que ofrece los argumentos más sólidos y fundamentados; es ella la que marca el ritmo y las orientaciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Las nuevas categorías asociadas a la Cultura de Racionalidad permiten explicar fenómenos relacionados con su construcción. Da cuenta de que la Cultura de Racionalidad no es fija en una clase, que se va movilizando constantemente, de acuerdo a la presencia de sucesiones productivas o reproductivas. Y da cuenta también del agente sobre quién recae, en sus intervenciones, la responsabilidad de sostener una manera de sustentar o de modificarla, ya para profundizar o bien para ofrecer argumentos más limitados conceptualmente. Esto seguramente dependerá del tema en cuestión, de las características de la maestra, en particular de su enfoque didáctico, así como de los estudiantes que ahí participen.

Las nuevas categorías dan la posibilidad también de tipificar la Cultura de Racionalidad prevalente en una clase de matemáticas. Por ejemplo, de la presencia de sucesiones de argumentos de tipo productivo en un episodio, se desprende la diversidad de evidencias que profundizan en las previas, lo que dicho en otras palabras, permite mostrar la existencia de distintas formas de sustentar y ahondar en una misma conclusión. De la presencia de la sucesión de argumentos de tipo reproductivo en clase, por otra parte, se deriva la multiplicidad de evidencias similares que permite consolidar una regla. Para el caso de que en clase sólo se ofrezca una evidencia para cada conclusión, se puede desprender como consecuencia la pobreza en la argumentación y posiblemente una ausencia de negociación en las políticas de racionalidad, las que pueden recaer sólo en una minoría de los agentes de la clase, con preponderancia quizás del profesor.

Si en una clase se presenta un desequilibrio entre sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo, posiblemente se consigue con esto una Cultura de Racionalidad raquítica, con pocas opciones de argumentación y de negociación. Un ejemplo típico son las clases de las escuelas de matemáticas, en donde generalmente se dan argumentos deductivos pero pocos argumentos de otros estilos (experimentación con software o analogías, por ejemplo); otro ejemplo prototípico es la clase de primaria o secundaria en la que prevalecen los argumentos por repetición o de tipo operatorio. A diferencia, el equilibrio entre los dos patrones de sucesiones de los argumentos conjugaría muy posiblemente aspectos procedimentales del aprendizaje con los conceptuales, lo que daría riqueza a la clase y a la racionalidad. Por otra parte, un desbalance de las intervenciones a favor de ciertos agentes, por ejemplo del profesor, impediría a los alumnos beneficiarse de los resultados cognitivos que propicia la acción y la interacción en la clase. Sería deseable que los profesores reflexionaran sobre el tipo de Cultura de Racionalidad que ellos, con conciencia o sin ella, promueven en su clase y determinaran si en realidad responde a sus objetivos didácticos.

Referencias

Boero, P. y Morselli, F. (2009). Towards a comprehensive frame for the use of algebraic language in mathematical modelling and proving. En M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proc. 33rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 185-192. Thessaloniki: PME.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25–129). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. In G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). New York: Springer.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company.

Jones, K. y Herbst, P. (2012). Theories and contexts. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 261-277). New York: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(1), 135-150.

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2015a). The culture of rationality in secondary school: An ethnographic approach. En Beswick, K., Muir, T., y Wells, J. (Eds.). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Hobart, Australia: PME.

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2015b). Cultura de racionalidad y procesos de enculturación en la escuela secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 477-484). Alicante: SEIEM.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Disertación doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.

Toulmin, S., Rieke, R. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan.

Vergnaud, G. (1989). Multiplicative structures. En J. Hiebert y Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.