

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y ARGUMENTACIÓN EN PROCESOS DE PRUEBA EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Configural reasoning and argumentation in proof processes in geometrical context

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar el cambio del estatus de las afirmaciones que conforman la argumentación en la resolución de problemas de probar en geometría (Duval, 2016b), y el papel que desempeñan en el proceso de resolución. Analizamos las respuestas de estudiantes de 4º de educación secundaria obligatoria a cuatro problemas en los que se presentaba una configuración geométrica y una tesis que debían demostrar. Los resultados indican dos características del proceso de prueba: (1) la realización de un cambio en el estatus de las afirmaciones involucradas en la resolución de los problemas, y (2) el progreso en la argumentación desde un modo de acumulación a un modo de sustitución (Duval, 1999a). Sin embargo, estas características, no garantizan que se dé el “truncamiento” del razonamiento configural que genera la prueba formal, que puede ser explicado por el papel desempeñado por la subconfiguración relevante identificada.

Palabras clave: *razonamiento configural, prueba, argumentación, estatus.*

Abstract

The aim of this study is to analyze the status change of the propositions that make up the argumentation in solving proof problems into geometry context (Duval, 2016b), and its role played in the resolution process. We analyze the answers of students of compulsory secondary education to four proof problems which presented a geometrical configuration that deduced a thesis to be demonstrated. The results obtained reveal two characteristics of the proving process: (1) the realization of a change into the status of the propositions involved in the problems resolution, and (2) an argumentation that should be developed from the accumulation mode to the substitution one (Duval, 1999a). However, these characteristics of the resolution process do not guarantee the configural reasoning “truncation” which generates the formal proof and might be explained by the role played by the relevant subconfiguration identified.

Keywords: *configural reasoning, proof, argumentation, status.*

INTRODUCCIÓN

En los problemas de geometría de probar en entorno de lápiz y papel, se proporciona información mediante un enunciado (hipótesis) relacionada con una configuración geométrica, solicitándose probar un hecho geométrico contenido en dicha configuración (tesis). Entendemos configuración geométrica como la representación plana de objetos geométricos. En la resolución de este tipo de problemas se realiza una interacción de la configuración geométrica y las subconfiguraciones identificadas durante el proceso de resolución con afirmaciones matemáticas. Duval (1998, 2016a) pone de relieve la importancia de los procesos de visualización en esta interacción, considerando tres tipos de aprehensiones: aprehensión perceptiva (identificación simple de una configuración), aprehensión discursiva (asociación de la configuración identificada con conceptos/afirmaciones matemáticos, como teoremas,

definiciones, axiomas...) y aprehensión operativa (modificación de la configuración original, para identificar subconfiguraciones relevantes en el proceso de prueba). Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) denominan razonamiento configural al razonamiento desarrollado a partir de las coordinaciones entre las aprehensiones operativa y discursiva puestas de manifiesto durante la resolución de problemas de probar en geometría. El razonamiento configural puede desembocar en tres situaciones o desenlaces que denominan: (1) truncamiento, desenlace que ocurre cuando la coordinación proporciona la “idea” que resuelve el problema, conformando un razonamiento que conduce a la resolución del problema mediante un proceso deductivo; (2) conjetura sin demostración, el razonamiento permite generar una solución al problema, pero basada en conjeturas no probadas, como por ejemplo, inferencias realizadas en base a percepciones erróneas de la configuración presentada en el problema; y (3) bucle, que se da cuando se establecen afirmaciones matemáticas que no permiten el avance hacia la solución, de forma que los resolutores vuelven a la situación inicial una o varias veces, ante la imposibilidad de avanzar en la resolución del problema. Por tanto, decimos que el razonamiento configural desemboca en bucle, cuando se da una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución. Diversas investigaciones (Prior y Torregrosa, 2013; Clemente y Llinares, 2013; Clemente y Llinares, 2014; Llinares y Clemente, 2014) ponen de manifiesto que el análisis mediante el razonamiento configural puede permitirnos identificar y comprender distintos factores que pueden desencadenar un razonamiento lógico-deductivo que permite concluir el proceso de resolución de problemas de probar con éxito.

En el proceso de resolver problemas de probar de geometría podemos distinguir diferentes formas que adopta el discurso (Clemente y Llinares, 2015): (i) El proceso seguido hasta que se consigue la solución mediante un razonamiento (entendido como obtención de información nueva a partir de información dada o conocida), y (ii) La comunicación de la resolución en forma de discurso teórico. En esta segunda parte de la resolución de los problemas de probar, la generación de un discurso teórico, hemos de considerar el estatus como el papel específico que desempeña cada una de las afirmaciones matemáticas que lo componen (Duval, 1998), y si se produce o no un cambio en dicho papel para una misma afirmación matemática (cambio de estatus). En este sentido, cada “paso” (o nivel local) en que se divide el nivel global de la organización del discurso, que permite el avance hacia la resolución del problema, ha de involucrar, al menos, tres afirmaciones matemáticas relacionadas por su estatus (Duval, 2016b): hipótesis o conclusión previa; definición, teorema, propiedad o inferencia de información a partir del contexto de resolución; y conclusión local.

En la resolución de los problemas de probar es destacable la importancia de la argumentación, entendida como el proceso utilizado para convencer, y por argumento todo aquello involucrado dentro del proceso de argumentación (ejemplos, definiciones, etc.) para validar o refutar una afirmación (Duval, 1999b). Una forma de argumentación habitual es el proceso discursivo, entendido como la construcción de un discurso argumentativo que nos transmite el proceso de resolución del problema, y por tanto, pone de manifiesto el razonamiento desarrollado. Duval (1999a) considera que el proceso discursivo puede desarrollarse a partir de lo que denomina “modos de expansión del discurso”, entendidos como la forma de enlazar las afirmaciones del discurso generado. Establece dos modos de expansión del discurso: “acumulación” y “sustitución”. En el primero se genera un discurso a partir de la acumulación de información sin un orden lógico, expresado en forma de afirmaciones no necesariamente conectadas entre sí. En el modo de sustitución, se genera un discurso progresivo y ordenado a partir de inferencias lógicas de las afirmaciones matemáticas involucradas, en el que cada afirmación puede considerarse consecuencia lógica de la anterior, pudiendo desempeñar diferentes roles dentro del proceso de razonamiento.

El objetivo del presente trabajo es identificar relaciones entre los cambios de estatus de las afirmaciones matemáticas que componen el proceso discursivo de los estudiantes al resolver problemas de prueba en contexto geométrico, los modos (Duval, 1999a) en que dicho proceso se desarrolla y los desenlaces del razonamiento configural.

MÉTODOS

Participantes y Contexto

En la presente investigación participaron 15 alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, con edades comprendidas entre 15 y 16 años, formando grupos de 3 alumnos (G01, G02, G03, G04, G05). Ninguno de ellos había recibido instrucción específica acerca del proceso de demostración matemática, aunque se dedicó una sesión de 55 minutos al repaso de conceptos geométricos elementales que debían conocer de cursos anteriores, en relación a las características, propiedades, clasificación y criterios de congruencia y semejanza de los triángulos.

Instrumento

Los estudiantes resolvieron cuatro problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica asociada a un enunciado (hipótesis), y se les pedía probar un hecho geométrico (tesis). Con ello pretendíamos determinar cómo los estudiantes desarrollaban procesos coordinados de aprehensiones discursivas y operativas, identificando subconfiguraciones que guiasen su razonamiento estableciendo una cadena de argumentaciones (proceso discursivo) que concluyese con la tesis a probar.

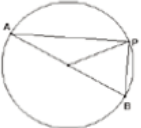

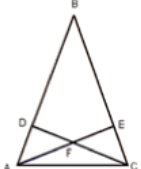
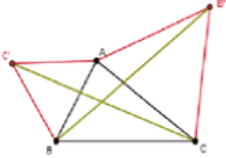
<p>Problema 1 (P1) Demuestre que el ángulo APB (\hat{P}) es recto considerando la siguiente figura.</p> 	<p>Problema 2 (P2) Sabido que el segmento \overline{PQ} es bisectriz del ángulo \hat{P} y que es perpendicular al segmento \overline{MN}, demuestre que los ángulos \hat{M} y \hat{N} son iguales ($\hat{M} = \hat{N}$).</p> 
<p>Problema 3 (P3) Los segmentos \overline{AE} y \overline{DC} son dos alturas del triángulo $\triangle ABC$ y los segmentos \overline{AD} y \overline{CE} son iguales. Demuestre que los segmentos \overline{AF} y \overline{CF} son iguales.</p> 	<p>Problema 4 (P4) Sobre los lados \overline{AB} y \overline{AC} del triángulo $\triangle ABC$ se construyen los triángulos equiláteros $\triangle ABC'$ y $\triangle ACB'$. Demuestre que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son iguales.</p> 

Figura 1. Problemas de probar que componen el cuestionario del estudio

Los problemas fueron seleccionados teniendo en cuenta que los participantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para su resolución, y considerando la existencia de al menos una subconfiguración relevante que pudiera generar ideas para guiar el proceso de prueba. En este sentido, las figuras se han considerado teniendo en cuenta que las posibles subconfiguraciones relevantes formen parte de la configuración inicial, no siendo necesario introducir nuevos elementos. En el problema 4 (P4) se da un solapamiento entre las subconfiguraciones relevantes a identificar, hecho que requiere acciones cognitivas más complejas para poder visualizarlas por separado.

Análisis

El análisis de las respuestas a los problemas se llevó a cabo en tres etapas. En la primera de ellas, se transcribieron y segmentaron las respuestas dadas por los estudiantes en unidades de análisis con la finalidad de identificar los ciclos coordinados de aprehensiones operativa/discursiva desarrollados durante la prueba y las diferentes subconfiguraciones relevantes consideradas durante el proceso de resolución. En la segunda, se identificaron los desenlaces del razonamiento configural. En la tercera, se procedió a la identificación de los modos de expansión del discurso (Duval, 1999a) y el estatus otor-

gado a las afirmaciones involucradas en el proceso discursivo generado durante la resolución del problema, con el propósito de identificar relaciones entre su desarrollo, el cambio de estatus de las afirmaciones (Duval 2016b) y los desenlaces del razonamiento configural detectados.

RESULTADOS

Los resultados serán presentados en dos apartados en función de las características identificadas en los procesos discursivos desarrollados para los desenlaces bucle y conjetura sin demostración del razonamiento configural. Así tendremos los apartados: “bucle y proceso discursivo” y “conjetura sin demostración y proceso discursivo”. El porcentaje de aparición del desenlace bucle ha sido del 5% del total de los problemas analizados, mientras que el de conjetura sin demostración ha supuesto el 20%.

Bucle y proceso discursivo

A continuación, se muestra el resultado del análisis de la respuesta de G01 al problema 4 (P4) cuyo razonamiento configural desemboca en bucle, ya que la coordinación entre aprehensiones operativa/discursiva no genera una solución al problema, sino que lleva de nuevo a los estudiantes a la situación inicial, debido a la no utilidad de las afirmaciones planteadas en la resolución del problema, conduciéndoles a una situación de bloqueo.

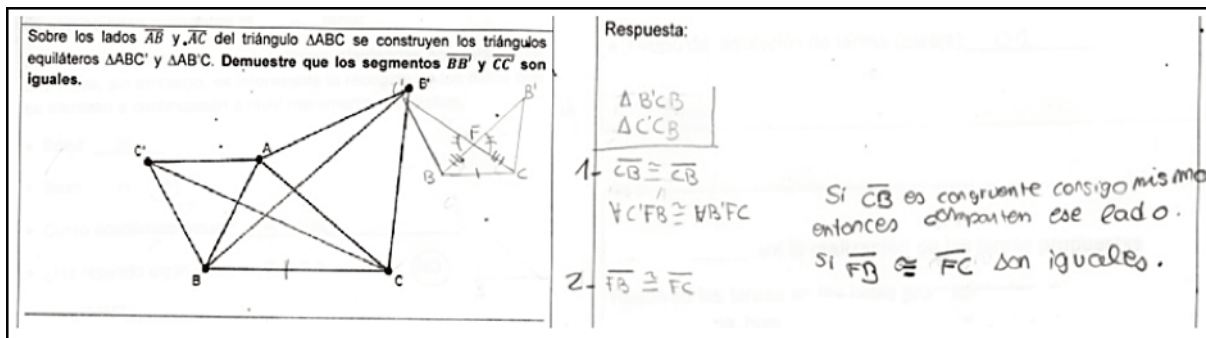


Figura 2. Respuesta al problema 4 (P4) dada por G01

Los estudiantes inician el razonamiento configural identificando y dibujando la subconfiguración formada por los triángulos $\triangle C'FB$ y $\triangle B'FC$ (AO_0) (Figura 2). A partir de la subconfiguración detectada, realizan tres ciclos de coordinación de aprehensiones operativa/discursiva para obtener información adicional. La Figura 3 describe estos tres ciclos.

En el primer ciclo ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$), consideran el segmento \overline{CB} como lado común de los triángulos identificados, asociando este hecho geométrico (de forma implícita) con la propiedad reflexiva, que les permite establecer la congruencia de dicho segmento “consigo mismo”. En el segundo ciclo ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$), consideran la congruencia de los ángulos $\sphericalangle C'FB$ y $\sphericalangle B'FC$ opuestos por el vértice F a partir de la propiedad de que ángulos opuestos por el vértice son congruentes. En el tercer ciclo ($AO_3 \leftrightarrow AD_3$), consideran los segmentos \overline{FB} y \overline{FC} como congruentes de forma errónea.

Una vez establecen las tres afirmaciones matemáticas (segmento \overline{CB} común, ángulos opuestos por el vértice F congruentes y congruencia de \overline{FB} y \overline{FC}), no continúan con la resolución del problema, entrando en una situación de bloqueo, por lo que el razonamiento configural desemboca en “bucle”. Este bloqueo en el razonamiento, se debe a que establecen una afirmación matemática errónea (“ $\overline{FB} \cong \overline{FC}$ ”) y otra sin utilidad, ($\sphericalangle C'FB$ y $\sphericalangle B'FC$). Esta forma de proceder globalmente considerada, indica que el grupo ha intentado asociar algún criterio de congruencia de triángulos con la subconfiguración inicial identificada (triángulos $\triangle C'FB$ y $\triangle B'FC$), para demostrar la tesis planteada, ya que ambos triángulos contienen los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ de los que se debe demostrar su congruencia. Para ello, han pretendido verificar condiciones en la subconfiguración inicial identificada para aplicar un criterio de congruencia, a partir de la realización de tres ciclos coordinados de aprehensiones operativa/discursiva.

Sin embargo, las condiciones extraídas, no verifican ningún criterio de congruencia para la subconfiguración identificada, por lo que entran en un estado de bloqueo.

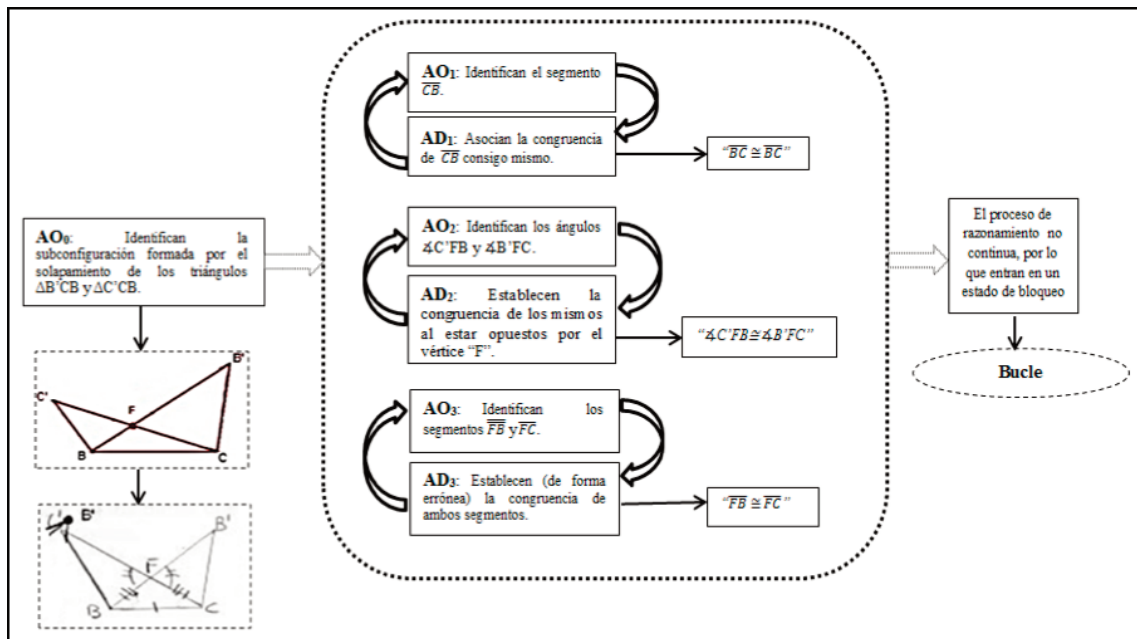


Figura 3. Razonamiento configural desarrollado por G01 al resolver P4
 AO_i: Aprensión operativa; AD_i: Aprehensión discursiva.

Las dobles flechas representan coordinaciones entre las diferentes aprehensiones

Considerando el nivel global de la organización del discurso (Figura 4) vemos que los estudiantes solo acumulan información.

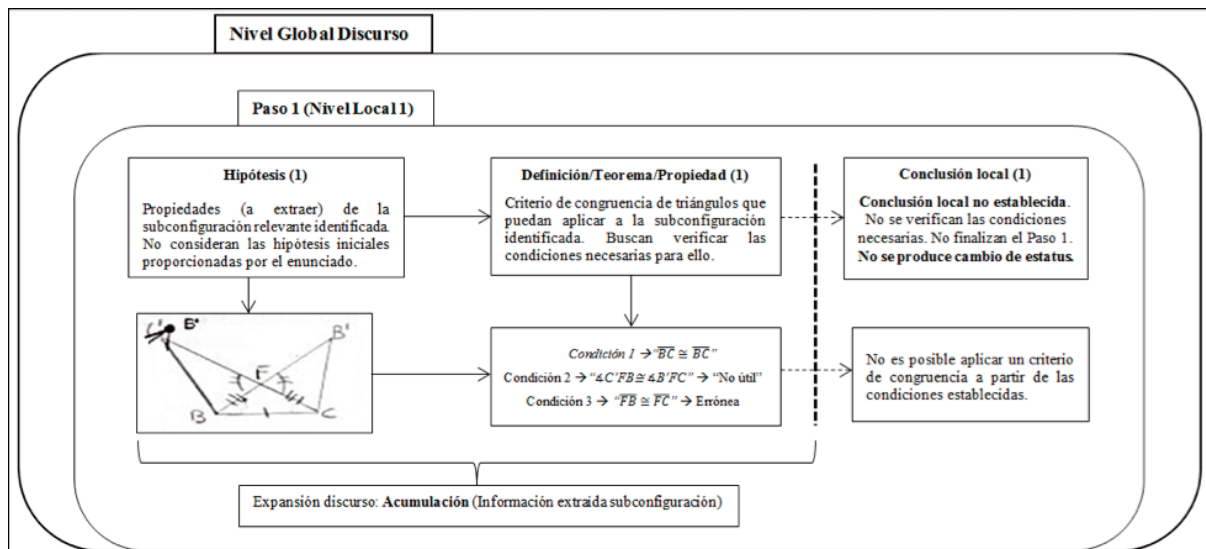


Figura 4. Organización del discursivo y modos de expansión para P4


Las afirmaciones matemáticas establecidas se sitúan dentro del mismo nivel local de organización del discurso. Como estas afirmaciones no verifican ningún criterio de congruencia a aplicar a la subconfiguración identificada, los estudiantes no generan más discurso. Al no producirse el discurso teórico, no se produce un cambio en el estatus de las afirmaciones involucradas.

A modo de resumen, los estudiantes extraen información de la subconfiguración identificada con el objeto de aplicar un criterio de congruencia, estableciendo en la información “acumulada”, una afirmación errónea y otra que no es útil.

Conjetura sin demostración y proceso discursivo

En los razonamientos que desembocan en “conjetura sin demostración” encontramos que algunas de las afirmaciones matemáticas establecidas tras cada ciclo coordinado de aprehensiones operativa/discursiva se basan en conjeturas no demostradas previamente (erróneas o no). Por ejemplo la respuesta de G03 al problema 3 (P3) (Figura 5).

Los segmentos \overline{AE} y \overline{DC} son dos alturas del triángulo $\triangle ABC$ y los segmentos \overline{AD} y \overline{CE} son iguales. Demuestre que los segmentos \overline{AF} y \overline{CF} son iguales.



Respuesta:

Al trazar la altura del triángulo y que es una recta perpendicular forma dos triángulos iguales, partiendo el triángulo $\triangle AFC$ en dos, entonces tenemos un ángulo rectángulo en lado en común y al trazar dos rectas secantes que se cortan se crean dos ángulos iguales dos lados y teniendo dos ángulos y un lado congruentes por el criterio ALA se demuestra en que los segmentos \overline{AF} y \overline{CF} son iguales.

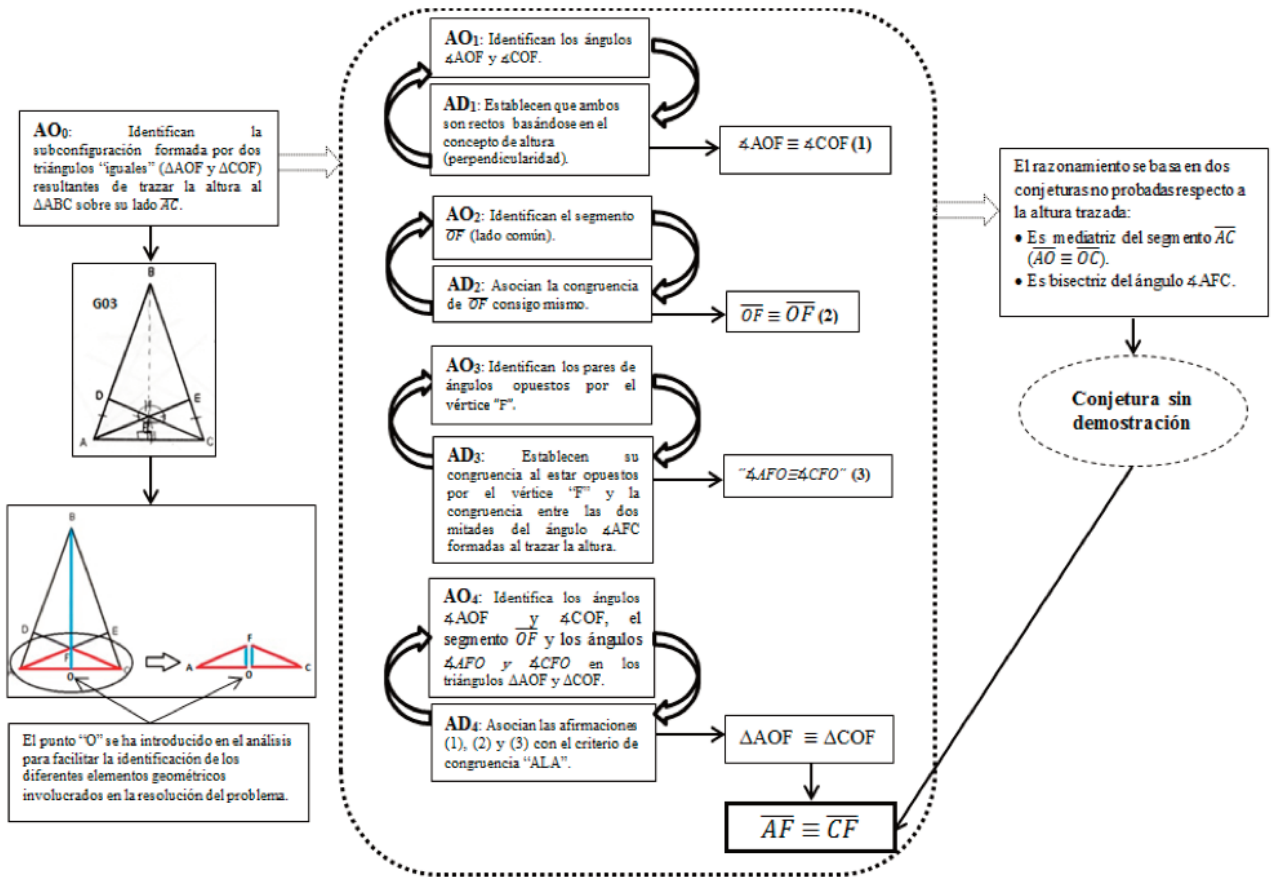


Figura 5. Respuesta y razonamiento configural de G03 al resolver P3

Los estudiantes comienzan el razonamiento configural (Figura 5) dibujando la altura del triángulo $\triangle ABC$ sobre el segmento \overline{AC} , que les lleva a identificar dos triángulos rectángulos ($\triangle AOF$ y $\triangle COF$) con un lado en común (\overline{OF}). Conjeturan (sin demostrar) que la altura trazada divide el segmento \overline{AC} en dos partes iguales (mediatriz) y el ángulo $\angle AFC$ en dos ángulos iguales (bisectriz), lo que les lleva a establecer que los triángulos identificados ($\triangle AOF$ y $\triangle COF$) tienen dos ángulos congruentes ($\angle AOF \cong \angle COF$ y $\angle AFO \cong \angle CFO$) y un lado en común (\overline{OF}), permitiéndoles aplicar el criterio de congruencia “A-L-A”, estableciendo la congruencia de ambos triángulos y por tanto de los segmentos \overline{AF} y \overline{CF} , demostrando así la tesis planteada.

Estos estudiantes basan su razonamiento en dos conjeturas (altura de cualquier triángulo es mediatriz \overline{AC} y bisectriz del ángulo $\sphericalangle AFC$) no demostradas previamente, ya que no se indica en ningún momento que el triángulo es isósceles, caso para el que las conjeturas serían válidas. Es por ello que el razonamiento configural generado por los estudiantes se apoya en una conjetura sin demostrar

La Figura 6 muestra la organización del discurso para la respuesta analizada:

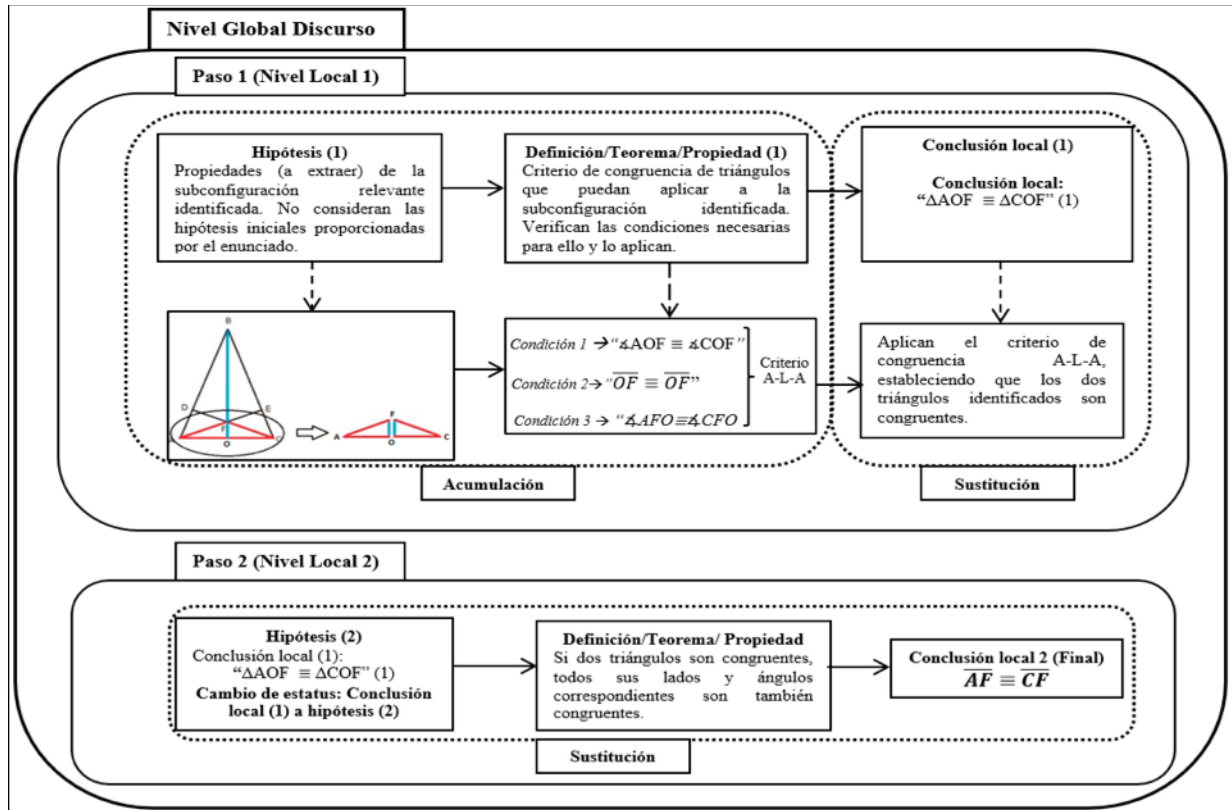


Figura 6. Organización del discurso y modos de expansión para P3

En este caso, encontramos que el nivel global del proceso discursivo se compone de dos niveles locales. Los estudiantes no consideran en ningún momento los datos (hipótesis) proporcionados por el enunciado. Comienzan con la extracción de información de la subconfiguración relevante identificada con el fin de encontrar condiciones a verificar para aplicar un criterio de congruencia de triángulos. Dichas condiciones, debido al trazado de la altura en la configuración inicial, se hacen relativamente "evidentes" y fácilmente verificables considerando las dos conjeturas anteriormente descritas. En consecuencia, aplican el criterio de congruencia A-L-A (ángulo-lado-ángulo), que permite al grupo concluir (localmente), que los dos triángulos considerados son congruentes.

En el segundo paso (Figura 6), la hipótesis inicial (2) es la congruencia de los triángulos (conclusión local (1)), a partir de la que "infieren" que todos los lados y ángulos de dos triángulos congruentes son congruentes también, concluyendo que los segmentos \overline{AF} y \overline{CF} son congruentes (conclusión local (2)). Por tanto, la conclusión (local) del "paso 1" pasa a desempeñar el rol de hipótesis del "paso 2", permitiendo a los estudiantes finalizar este paso 2 estableciendo la conclusión final (conclusión local del paso 2), mediante un cambio de estatus.

Esta manera de proceder de los estudiantes en este caso muestra que, inicialmente, los alumnos "acumulan" información al inicio del "paso 1", puesto que extraen información (condiciones a verificar) a partir de la subconfiguración identificada, sin un orden lógico, únicamente con el objeto de poder aplicar un criterio de congruencia (aunque fundamentado en conjeturas no demostradas). Luego, los estudiantes ordenan dicha información cambiando su estatus lógico al considerar algunos de esos he-

chos como premisas en el criterio de congruencia de triángulos mediante el modo de “sustitución”. Esto es así ya que establecen la congruencia de los triángulos identificados a partir de la aplicación del criterio A–L–A, es decir, la conclusión establecida es consecuencia lógica de los hechos geométricos generados previamente (aunque con conjeturas sin demostrar) y el criterio de congruencia aplicado. Por ello, en el “paso 1” se dan la acumulación y la sustitución. En el “paso 2”, únicamente se da el modo de sustitución, ya que solo se establecen relaciones lógicas a partir de la información generada en el “paso 1” (congruencia de triángulos) para finalizar en una afirmación con estatus de conclusión local (2) (lados congruentes). De esta forma, la expansión del discurso por sustitución sigue un orden lógico, donde cada afirmación involucrada es consecuencia de la anterior, concluyendo en la tesis solicitada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es analizar el cambio de estatus de las afirmaciones que conforman el proceso discursivo en la resolución de problemas de prueba en geometría y la forma en que se desarrolla dicho proceso para identificar relaciones con los desenlaces bucle y conjetura sin demostración del razonamiento configural.

En los problemas analizados los estudiantes no consideran la información proporcionada por el enunciado (hipótesis iniciales). Este hecho parece relacionado con la subconfiguración identificada en la resolución de los problemas. En el problema 4 (P4), los estudiantes consideran la complementaria de la subconfiguración relevante necesaria para resolver el problema. En el problema 3 (P3), los estudiantes trazan la altura al triángulo inicial, identificando los triángulos ΔAOF y ΔCOF a partir de lo que establecen dos conjeturas sobre las que basan su razonamiento. En el primer caso, la subconfiguración está formada por dos triángulos con unas características más familiares para los estudiantes que los que forman la subconfiguración relevante. En el segundo caso, es evidente que lo han identificado con el triángulo isósceles “tipo”, lo que les hace trazar la altura y establecer dos conjeturas (sin demostración previa) válidas para este tipo de triángulos. Por tanto, se hace patente la influencia de las configuraciones “prototípicas” (Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017; Mesquita, 1998) en la identificación de subconfiguraciones relevantes, lo que puede desembocar en un razonamiento no basado en las condiciones (datos) impuestas por el enunciado.

En relación al cambio de estatus, los resultados sugieren que cuando no se da el cambio de estatus de las afirmaciones que componen el discurso, los estudiantes no son capaces de continuar con la resolución del problema, por lo que se produce una situación de bloqueo en el razonamiento configural desarrollado (bucle). En cambio, cuando el razonamiento configural se basa en una “conjetura sin demostración”, sí que se produce un cambio de estatus en las afirmaciones matemáticas que componen el razonamiento. Aunque las afirmaciones matemáticas asociadas a las subconfiguraciones identificadas pueden no ser válidas (no demostradas previamente), no impide la construcción de un proceso deductivo que desemboca en una conclusión. Por tanto, el cambio de estatus de las afirmaciones involucradas en el desarrollo de la prueba es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el razonamiento configural desemboque en una solución válida.

Por otro lado, respecto a los modos de expansión del discurso y en consonancia con los resultados de Robotti (2012), tenemos que: (1) el modo de “acumulación” se relaciona directamente con afirmaciones enunciadas para recabar información (enunciado o de la subconfiguración identificada) sin importar la que sea ni el orden en el que se obtiene, careciendo, por tanto, de valor lógico. En cambio, cuando se da (2) el modo de “sustitución”, las afirmaciones matemáticas forman parte de un proceso lógico-deductivo, aunque en el caso presentado, basado en conjeturas no demostradas previamente. Las afirmaciones matemáticas establecidas durante la “fase de acumulación” son necesarias para iniciar el razonamiento, aunque para concluirlo se ha de manifestar la fase de “sustitución”, en el que las afirmaciones adquieren un valor lógico.

En consecuencia, para generar un razonamiento que finalice en una solución, son necesarios tanto un cambio de estatus en las afirmaciones involucradas en el discurso, como un proceso de argumentación (proceso discursivo) que vaya desde el modo de acumulación al de sustitución. Sin embargo, puede no ser suficiente la acumulación de información y el cambio de estatus de las afirmaciones geométricas para concluir con éxito el problema, ya que la subconfiguración relevante desempeña un papel importante en el proceso de razonamiento. Por tanto, el cambio de estatus de los hechos geométricos acumulados o derivados de las hipótesis del problema no garantizan que se dé el “truncamiento” del razonamiento configural que genera la prueba formal. En este sentido, la argumentación se presenta como un nexo o enlace entre los diferentes ciclos de aprehensiones discursivas y operativas y el discurso generado en la resolución de problemas de prueba en contexto geométrico, hecho que sería interesante desarrollar en trabajos posteriores.

Referencias

- Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). Bilbao: SEIEM.
- Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM
- Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 9-27.
- Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2015). La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México, 2015.
- Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática*, v.31, n° 57, 497-516.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.
- Duval, R. (1999b). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Duval, R. (2016a). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-61). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
- Duval, R. (2016b). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
- Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250.
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 339-368.

- Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 433-45.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.