ALGUNAS DIDÁCTICAS DE CAMPO EN LA ENSEÑANZA DE HERRAMIENTAS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA INGENIERÍA

Luis Fernando Plaza Gálvez
Unidad Central del Valle del Cauca (Colombia)
lplaza@uceva.edu.co, lufepla@gmail.com

Palabras clave: didáctica, ecuación diferencial, ingeniería, modelamiento matemático

Key words: didactic, differential equation, engineering, mathematical modeling

RESUMEN: Por medio del presente trabajo, se pretende implementar algunas estrategias didácticas, que permitan poner en práctica el uso de herramientas para llevar cabo modelación matemática de fenómenos y/o procesos, en un programa de Ingeniería, entre los que se tiene: la ley de enfriamiento de Newton y el vaciado de tanques (tipo a) y el crecimiento de aves (tipo b). Para realizar el anterior procedimiento se usará la hoja de cálculo de Excel, la diferenciación numérica y mediante la teoría de mínimos cuadrados (Regresión) se originaran ecuaciones diferenciales, resueltas por el método de separación de variables. Al analizar el respectivo Coeficiente de Determinación (R2) se logra llegar a la expresión matemática deseada.

ABSTRACT: By means of this paper, it treat to implement some didactic strategies that enable implement the use of tools to carry out mathematical modeling of phenomena and / or processes in an engineering program, among which is: the law of cooling Newton and emptying of tanks (type a) and growth in birds (type b). To perform the above procedure the Excel spreadsheet is used, numerical differentiation and by the theory of least squares (regression) the differential equations solved by the separation of variables were originated. When analyzing the respective coefficient of determination (R2) is achieved to the desired mathematical expression.

INTRODUCCIÓN

El mayor propósito presente en este trabajo, es generar en el docente del área de Matemáticas de los programas de Ingeniería, un carácter innovador, por medio de estrategias didácticas a implementar, permitiendo a sus estudiantes observar el real uso de la matemática aplicada a modelos que deban ser implementados como tarea externa de aula. El informe de reporte de investigación va dirigido especialmente a estudiantes de un nivel básico de los programas de Ingeniería, que tengan entre sus haberes, inicialmente estar inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden, donde al menos tengan conceptos básicos de Mínimos cuadrados, por medio de los diferentes tipos de regresión que nos brinda la herramienta de la Estadística Inferencial. El modelamiento matemático permite crear lazos entre la matemática y la ingeniería generando motivación en los procesos de aprendizaje.

MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

Los modelos matemáticos pueden asumirse como método de enseñanza y de investigación (Hein y Biembengut, 2006) en la que induce a los estudiantes un incremento del concepto matemático, permitiendo interpretar, formular y resolver problemas de ingeniería en especial. Adicionalmente algunos estudios realizados (Camarena, 2009 y 2012), han caracterizado el modelamiento matemático como estrategia didáctica en la formación de futuros ingenieros como contexto de las ciencias. Aquí se evidencia en algunos casos la desvinculación que hay entre los cursos básicos de matemáticas y los posteriores en Ingeniería, originándose una necesidad cuando el profesional necesita resolver un problema en el mercado laboral. Algunos autores (Rodríguez, 2010) han trabajado las ecuaciones diferenciales como herramienta de enseñanza en Modelamiento matemático y utilizando un enfoque lógico semiótico, modelan problemas resolviendo ecuaciones diferenciales (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010).

La modelación matemática debe ser estimulada en el aula, ya que esta refuerza la capacidad de reflexión y capacidad de análisis del estudiante frente al escenario de la solución de un problema, desarrolla habilidades con fundamentación matemática (Obando, Sánchez, Muñoz y Villa, 2013). En Rendón y Esteban (2013), se plantea la modelación matemática como una alternativa donde el estudiante puede armar una realidad que corresponda a un conocimiento puntual y el cual deben ser aplicados en un contexto, siendo esta una herramienta en la formación del ingeniero. Hay estudios como los de Romo, Romo y Vélez (2012) y los de Romo (2014), en los que la estrategia didáctica que se incorpora a la modelación matemática es parte integral de los diseños curriculares en los programas de ingeniería, haciendo uso de elementos teóricos y metodológicos, midiendo así el alcance de logros por contenidos o competencias

METODOLOGÍA

La propuesta metodológica, de las práctica a realizar sobre modelamiento se presentan como herramienta de enseñanza – aprendizaje, y de investigación. Se presentan algunas situaciones de la vida cotidiana objeto de ser modeladas, se trata luego su matematización, su solución y en últimas se analiza si dicha solución está cercana a la realidad. Lo anterior se hace por medio de unidades didácticas, permitiendo conocer aspectos epistemológicos, heurísticos y cognitivos de los estudiantes a los que se les brindaría dichas prácticas finalmente.

Al querer modelar fenómenos y/o procesos *(W)* que varíen con respecto al tiempo, se denota a *W=f(t)*, siendo *W* la variable dependiente y *t* la variable independiente, mediante su observación, se analizaran los siguientes comportamientos, así: a) *W* vs *dW/dt*, b) *W* vs *1/W*dW/dt*, originando algunas ecuaciones diferenciales, cuya solución permite modelar el fenómeno y/o proceso en cuestión, así como la respectiva tasa relativa de crecimiento de la variable a modelar. Lo anterior se resume en los siguientes pasos a realizar:

- Toma de datos a espacios iguales de tiempo,
- Análisis de diferenciación,
- Regresión (mínimos cuadrados),
- Origen de la Ecuación Diferencial,
- Solución de la Ecuación Diferencial,
- Análisis comparativo de resultados, con el Coeficiente de Determinación (R^2).

DISEÑOS DIDÁCTICOS Y RESULTADOS

Prácticas tipo a (Tasa de cambio)

Para el tipo a, se tienen en cuenta dos prácticas: el análisis de la Ley de Enfriamiento y/o Calentamiento de Newton, así como el vaciado de tanque. Para la primera práctica se toman datos de Temperatura y tiempo en lapsos iguales de un minuto. Los elementos necesarios son un termómetro digital con termocupla, un beaker, una estufa pequeña de una boquilla y un cronometro o reloj (para toma de tiempo transcurrido), ver figura No. 1. La práctica consiste en llevar 100 ml de agua a un beaker. Luego hacerlo pasar por una fuente de calor (estufa) hasta obtener su punto de ebullición, tal como aparece en la figura No. 2. A partir de ese instante (inicio de enfriamiento) se toman datos de temperatura cada minuto, hasta tratar de llegar a la temperatura ambiente y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 1; esta práctica es recomendada por (Zill, 2009) y fue expuesta en (Plaza, 2013).

Haciendo uso del método de Diferenciación numérica inicialmente a tres pasos se puede obtener la derivada para este caso, como se ha expuesto (Chapra y Canale, 2007).

Figura 1. Elementos necesarios para Laboratorio Ley de Enfriamiento.

Figura 2. Calentamiento de 100 ml de agua, hasta llegar al punto de ebullición.

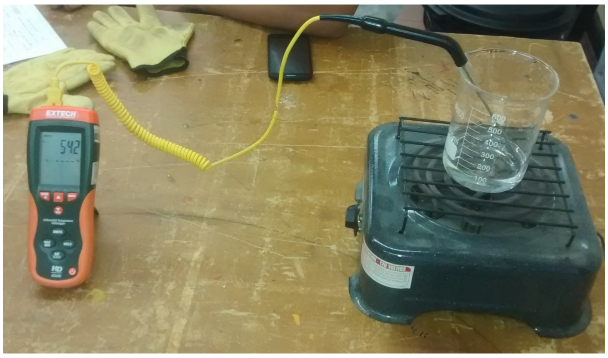


Tabla 1. Toma de datos en Laboratorio de Ley de Enfriamiento.

Tiempo Transcurrido = *t* (min)	Temperatura = *T (°C)*	*dT/dt*, con *Δt= 1*, Diferenciación numérica a 3 pasos
0	T_0	
1	T_1	$(T_2 - T_0)/2$
2	T_2	$(T_3 - T_1)/2$
t_{n-1}	T_{n-1}	$(T_{n-2} - T_n)/2$
t_n	T_n	

En una hoja d cálculo de Excel, se demuestra con una buena aproximación, con el apoyo de la Regresión Lineal, entre *T'* y *T*, tal que $dT/dt = k^* (T-T_0)$, siendo T_0 la temperatura ambiente, y en la que está también se puede expresar como $dT/dt = aT + b$, el cual representa el comportamiento lineal de la variación de la temperatura con respecto al tiempo, los parámetros *a* y *b*, son dados por Excel

Al resolverse la ecuación diferencial por separación de variables $\frac{dT}{dt} = aT + b$

Sujeta a la conclusión inicial $T(O) = T_0$

Se llega a la solución que modela el enfriamiento de 100 ml de agua, el cual es:

$$T = \frac{(aT_0 + b)}{a} e^{at} - \frac{b}{a}$$

En la segunda práctica del vaciado de Tanque, se puede encontrar la variación de la altura del nivel de un líquido *H,* en función del tiempo para un tanque, después del inicio de un proceso de vaciado, sin tener en cuenta la geometría del recipiente, el agujero de entrada y salida del líquido, los cuales si son tenidas en cuenta en la Ley de Torricelli, tal como aparece en la figuras No. 2 y 3. Para eso se monitorea el vaciado del tanque tomando datos de altura y tiempo en lapsos de 30 seg. (0.5 min) y la información es consignada en la tabla No. 2.

Figura 3. Elementos necesarios para Laboratorio Vaciado de Tanques.

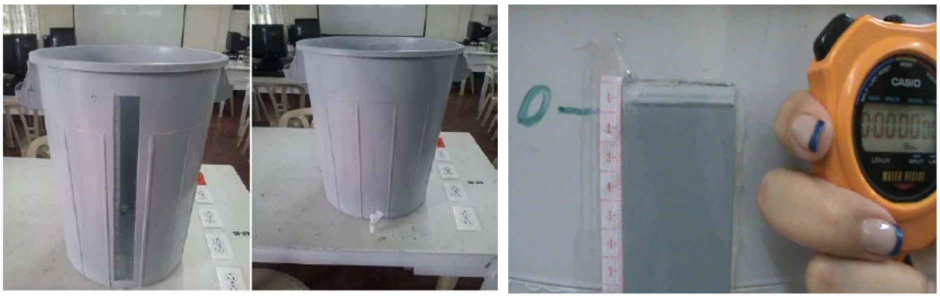


Figura 4. Proceso de toma de datos en la práctica Vaciado de Tanques.

Tabla 2. Toma de datos en Laboratorio de Vaciado de Tanques..

Tiempo Transcurrido = *t (min)*	Altura = *H (cm)*	*dH/dt*, con *Δt= 0.5*, Diferenciación numérica a 3 pasos
0	H_0	
0.5	H_1	$(H_2 - H_0)/1$
1	H_2	$(H_3 - H_1)/1$
t_{n-1}	H_{n-1}	$(H_{n-2} - H_n)/1$
t_n	H_n	

De nuevo, usando la Diferenciación numérica a tres pasos se puede obtener la derivada (Chapra y Canale, 2007) y luego mediante el uso de Mínimos Cuadrados, se puede hacer uso de la mejor regresión que permita la distribución de los datos, tal como ha sido planteado (Walpole, Myers y Myers, 1998). Se demuestra con una regresión potencial que la variación de la altura obedece a una expresión del tipo $dH/dt = aH^b$; esta práctica fue socializada por Plaza (2014). De nuevo, los parámetros *a* y *b* de la regresión pueden ser encontrada con ayuda de una hoja de cálculo como

Excel. Originándose una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se resuelve por el método de Separación de Variables. Las constantes de integración se haya por medio de la condición inicial en la toma de datos.

Al resolverse la ecuación diferencial $\frac{dH}{dt} = a \cdot H^b$

Sujeta a la conclusión inicial $H(0) = H_0$

Arroja la siguiente solución:

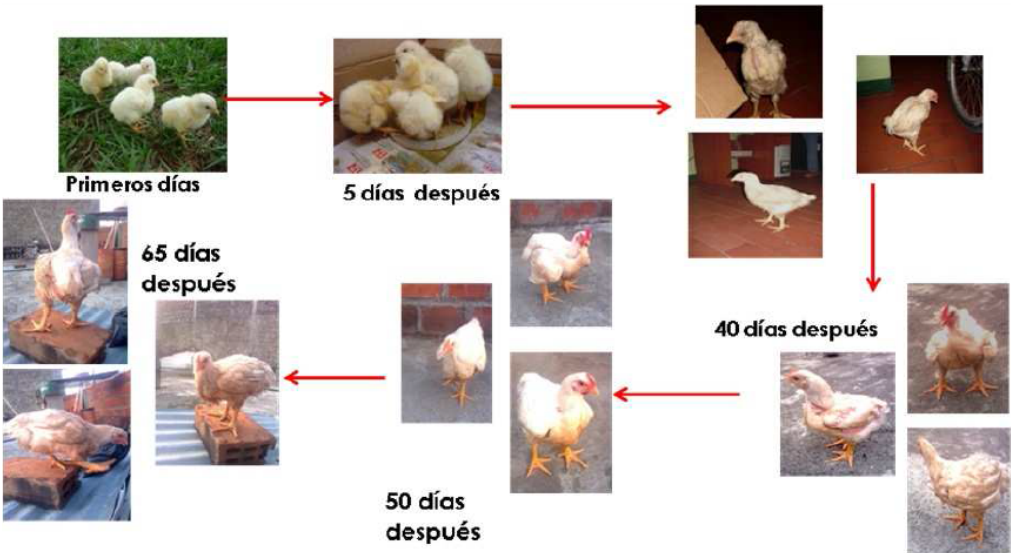
$$H = \left[a(1-b) + H_0^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-b}}; \quad b \neq 1$$

Prácticas tipo b (Tasa relativa de cambio)

En el tipo b, se tiene el análisis de crecimiento (evolución del peso), en el caso de especies menores (aves tipo pollo, como producción animal). Donde se puede aportar información para la toma de decisiones que ayudan a mejorar la producción bilógica agropecuaria como es el peso en función del tiempo, la velocidad de crecimiento, la tasa relativa de crecimiento y una fecha ideal de sacrificio, para llegar a una optima producción. En esta oportunidad se puede monitorear el crecimiento de aves (pollo parrillero) por su corta vida útil. Los datos pueden tomarse con lapsos de una semana cada uno, tal como aparece en la figura No. 4 y lo ideal es contar con la fecha de nacimiento, como dato inicial. Su evolución puede verse en la figura No. 5. Las diferentes formas de regresión de la tasa relativa de crecimiento arrojan varias opciones de solución. Inicialmente se logra obtener una expresión de la forma $1/W*dW/dt = aW + b$ (Regresión lineal) cuya solución es conocida como el Modelo Logístico. Otra solución es de la forma $1/W*dW/dt = a\ln(W) + b$, (Regresión logarítmica) cuya solución es conocida como el Modelo de Gompertz.

Figura 5. Elemento necesario para Laboratorio de Crecimiento de aves.

Figura 6. Evolución de Crecimiento de aves.



Una toma de datos, para el crecimiento de especies menores, sería similar a la siguiente

Tabla 3. Toma de datos en Laboratorio de crecimiento de Aves.

Tiempo Transcurrido = *t* (días)	Peso, *W* *(g)*	*W' = dW/dt*, con *Δt= 7*, Diferenciación numérica a 3 pasos	*W'/W* Tasa relativa de crecimiento
0	W_0		
7	W_1	$(W_2 – W_0)/14$	$(W_2 – W_0)/(14 W_1)$
14	W_2	$(W_3 – W_1)/14$	$(W_3 – W_1)/(14 W_2)$
t_{n-1}	W_{n-1}	$(W_{n-2} – W_n)/14$	$(W_{n-2} – W_n)/(14 W_{n-1})$
t_n	W_n		

Al resolverse la ecuación diferencial (Regresión Lineal), llamada Modelo Logístico:

$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = aW + B$, sujeta a la condición inicial $W(0) = W_0$

da la siguiente solución:

$$W = \frac{bC_1 e^{bt}}{1 - aC_1 e^{bt}}; \quad C_1 = \frac{W_0}{aW_0 + b}$$

Al resolverse la ecuación diferencial (Regresión Logarítmica), llamada Modelo de Gompertz:

$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = aLn(W) + b$, sujeta a la condición inicial $W(0) = W_0$

da la siguiente solución:

$$W = e^{\left\{\frac{1}{a}\left[e^{a(C_1+t)} - b\right]\right\}}; \quad C_1 = \frac{1}{a}Ln\left[aLn(W_0) + b\right]$$

CONSIDERACIONES FINALES

Las prácticas de laboratorio permiten inducir en el estudiante de ingeniería, contribuir para que este construya matemáticas, pues los fenómenos abordados permiten describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo grafico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Una conclusión importante es que un modelo que emergen en una situación, puede ser aplicada en otro contexto, como es el caso de los modelos de crecimiento y la aplicación en curvas de aprendizaje asociadas a producción.

Este tipo de actividades didácticas, en las que se usa el Modelamiento Matemático como herramienta de Enseñanza – Aprendizaje, permite acercar al estudiante de ingenierÍa con su profesión, por medio de conceptos tales como:

- Funciones, pues a pesar de que se está trabajando variables que dependen de una sola variable, puede ser la base para un análisis multivariado.
- Cálculo como la derivada (variaciones) y el límite (comportamientos asintóticos) especialmente cuando se desea conocer el valor de la función a modelar para valores muy grandes del tiempo, como es el caso del momento ideal para el sacrificio de una especie menor, o en un caso de producción un momento de fatiga.
- Estadística, con aplicaciones de Máximos y Mínimos en varios tipos de Regresión.
- Ecuaciones diferenciales, aquellas que son obtenidas a partir del punto anterior.

Agradecimiento. Es importante brindar especialmente agradecimiento a las directivas de la UCEVA (Unidad Central del Valle del Cauca) con sede en la ciudad de Tuluá, Colombia, quien en nombre de la Vicerrectoría de Investigaciones, permitió llevar a cabo durante cerca de cuatro años la investigación que origino estas prácticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las Ciencias. *Revista Innovación Educativa* 9(6), 15 – 25. Recuperado de:

http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Camarena, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia 5 (3)*, 1-10. Recuperado de:

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1386/902

Chapra, S. y Canale, R. (2007). *Métodos numéricos para Ingenieros*. México D.F.: Mc Graw Hill, 5 [a] edición.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias 28 (3)*, 341-352. Recuperado de:

http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/210804/353412

Hein, N. y Biembengut, M. (2006). *Modelaje Matemático como método de Investigación en clases de Matemáticas*. Ponencia presentada en V Festival internacional de Matemática, Puntarenas, Costa Rica. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf

Obando, J., Sánchez, J., Muñoz, L, Villa, J. (2013). *El reconocimiento de variables en el contexto cafetero y su contribución como modelos matemáticos*, Ponencia presentada en el 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Bogotá – Colombia. Recuperado de:

http://funes.uniandes.edu.co/2123/1/2.pdf

Plaza, L. (2013). Ley de Enfriamiento de Newton. Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales. *Revista Páginas de Ingeniería* 1 (1), 7 – 12.

Plaza, L. (2014). *Modelamiento Matemático en Ingeniería. Vaciado de Tanques.* Ponencia presentada en VI Congreso Internacional de Modelación y Formación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

Rendón, P. y Esteban, P. (2013). *La modelación matemática en ingeniería de diseño*, Ponencia presentada en el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2357/1/rendonestenban387-483-1-DR1.pdf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (4-1), 191-210. Recuperado de:

http://www.clame.org.mx/relime/201012d.pdf

Romo, A., Romo, R. y Vélez, H. (2012). De la ingeniería Biomédica al aula de Matemáticas. *Revista electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica* 1(1). Recuperado de: http://recibe.cucei.udg.mx/revista/es/vol1-no1/pdf/biomedica01.pdf

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros, *Revista Educación Matemática* 25(E), 314 – 338. Recuperado de:

http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854016.pdf

Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1998). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. México D.F.: Editorial Pearson Educación, 6ª edición.

Zill, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. México D.F.: Cengage Learning Latin America, 9ª edición.