

## UN ACERCAMIENTO AL ESPACIO TRIDIMENSIONAL A TRAVÉS DE LA MANIPULACIÓN DE OBJETOS FÍSICOS Y VISUALES

**Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Enrique Gómez Peralta, Eliseo Santoyo Teyes. Felipe Santoyo Telles**

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, Centro Universitario del Sur (México)

karlalpn4@gmail.com, polin86@prodigy.net.mx, gperalta7@hotmail.com,

esantoyo25@hotmail.com, santf22@hotmail.com

**Palabras clave:** espacio tridimensional, vector, construcciones mentales

**Key words:** three-dimensional space, vector, mental constructions

---

**RESUMEN:** Cuando los estudiantes cursan la asignatura del cálculo vectorial poseen información que les permite ubicar puntos, vectores y gráficas en el plano cartesiano. En el espacio tridimensional los estudiantes deben representar y extraer información de figuras y superficies, lo cual en ocasiones resulta complicado ya que esto depende de diversos factores, no solamente cognitivos sino habilidades visuales y motrices en el trazo de figuras.

En el documento se esboza, desde una perspectiva constructivista, los resultados preliminares de una propuesta didáctica a través del uso de una serie de materiales físicamente manipulables y prácticas interactivas con GeoGebra, con la finalidad de acercar al estudiante a conceptos relacionados con vectores y el espacio tridimensional.

**ABSTRACT:** When students take the subject of vector calculus have information that allows them to locate points, vectors and graphs in the coordinate plane, relating only two coordinates and carrying traces of plane figures. In three-dimensional space students should not only three-dimensional graph figures on a flat surface, but analyze and extract information from them, which is sometimes complicated as this, in the first instance, it depends on your skills in stroke of grapher and other geometric representations.

The paper proposes, from a constructivist perspective, a series of physical manipulatives and interactive practices with GeoGebra, with the intention of promote to the students some concepts related to vectors and three-dimensional space.

---

## ■ INTRODUCCIÓN

El cálculo vectorial es una asignatura que se ubica en los primeros semestres de las carreras de Ingeniería, en ella se introduce a los alumnos al estudio de vectores, figuras y superficies en el espacio tridimensional. La importancia que tienen estos contenidos en la retícula básica es fundamental, debido a que se abordan conceptos medulares para los subsecuentes cursos de matemáticas y de otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en el campo de la Física.

Cuando los estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica inician el estudio de esta asignatura, poseen información que les permite ubicar puntos, vectores y gráficas en el plano cartesiano, en donde relacionan únicamente dos coordenadas y realizan trazos de figuras planas. Al hablar del espacio tridimensional, los estudiantes deberán no solo graficar figuras en tercera dimensión en una superficie plana, sino que deberán analizarlas y extraer información de ellas de acuerdo al contexto al que pertenezcan, lo cual en ocasiones resulta complicado ya que esto, en primera instancia, depende de las habilidades que posea el estudiante en el trazo de figuras, aunado con la comprensión de los conceptos presentes. Por ello, es necesario generar escenario didácticos en los que a través de manipulaciones físicas, el estudiante se acerque a los conceptos matemáticos que conlleva el tratamiento del espacio tridimensional.

En el presente documento se describen únicamente los resultados preliminares de la aplicación de una propuesta didáctica que se desarrolló con estudiantes de tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica. La finalidad de tal estudio fue la evaluación y reestructuración de instrumentos y actividades que promueven la construcción del concepto de vector y espacio tridimensional. Para ello se realizó previamente lo que APOE definen como la *descomposición genética del concepto* (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 2004).

## ■ ANTECEDENTES

Los vectores surgen como herramienta matemática para facilitar el análisis de los fenómenos físicos. La representación geométrica de éstos en el ámbito escolar, se basa en la ubicación de las coordenadas en un escenario bidimensional o tridimensional de los puntos que los definen (inicial y final).

La aplicación de los vectores es extensa, y en el terreno escolar el concepto de vector es tratado en las escuelas de ingeniería para modelar y analizar diversas situaciones, por ejemplo en cálculo vectorial, estática de la partícula y del cuerpo rígido, dinámica de la partícula y del cuerpo rígido, vibraciones mecánicas, termodinámica y electricidad y magnetismo, entre otras. En estos ejemplos, en la mayoría de los casos, se recurre a la idea básica de proyectar una fuerza  $F$  en un sistema de referencia, para ello la representación geométrica de ésta se torna indispensable en la mayoría de los casos y el estudiante deberá relacionar una serie de conceptos que involucra la idea de vector, como magnitud, dirección, proyecciones de vectores, productos vectoriales, etc.

Cuando la fuerza se representa en un sistema de referencia bidimensional, se ha observado que los estudiantes no presentan mayor dificultad en definir las fuerzas que generan a  $F$  y de esta forma llegar a expresiones como  $F = F_x i + F_y j$ . Sin embargo, el escenario se torna diferente cuando la fuerza es representada en el espacio tridimensional. Se ha observado que estudiante del tercer semestre de la carrera de electrónica, que cursan la asignatura de cálculo vectorial, carecen de

elementos que les permita, en un primer momento, visualizar un punto en  $\mathbb{R}^3$ , identificar la dirección de la fuerza, así como proyectarla en los ejes de coordenadas para definir sus componentes.

Diversos estudios (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza, 2000; Planchart, 2002) muestran que la construcción de un concepto matemático no es una actividad inmediata, requiere de diferentes etapas que pueden ser desarrolladas en periodos de tiempo variables y además requieren de trabajo y dedicación del individuo. De acuerdo con Cantoral, et al, (2000), estas etapas implican los procesos y la construcción de objetos. Los *procesos* se entienden, como la etapa en la que una serie de operaciones pueden ser desarrolladas y coordinadas en la mente del estudiante “el alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto...” (Cantoral et al., 2000, p.32). Cuando el proceso es internalizado y concretado en la mente de un estudiante se genera una entidad única llamada *objeto*. Una vez que el objeto ha sido adquirido el individuo ha desarrollado cierta habilidad para pensar en este concepto ya sea en forma dinámica como proceso, o estática como objeto.

## ■ MARCO TEÓRICO

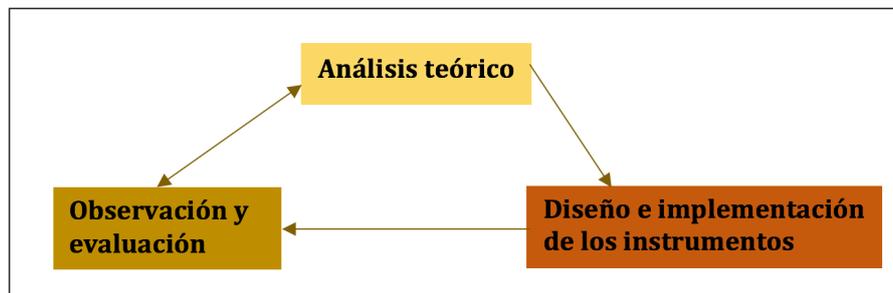
La investigación se enmarca en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) ya que se pretende describir y caracterizar las construcciones que tiene lugar en la mente de un estudiante universitario. La teoría APOE propone elementos que permiten reflexionar sobre la construcción de un concepto matemático. Para ello, es necesario acercarse al concepto desde su epistemología, visto desde las matemáticas mismas.

De acuerdo con APOE, el desarrollo de la construcción del concepto comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*, las acciones se interiorizan para formar *procesos*, los procesos se encapsulan para formar *objetos*, los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas. En la figura 1 se muestra la relación que APOE establece entre los elementos constitutivos de su teoría.

**Figura 1. Evolución de esquemas mentales desde APOE.**

**Faltan parámetros necesarios o son incorrectos.**

Parte medular en la investigación es lo que APOE denomina *descomposición genética* del concepto, esto es, “un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo un concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo” (Asiala, et al, 2004, p. 5). Para lograr una primer descomposición de los conceptos involucrados en el estudio, se recurrió al Ciclo APOE (figura 2), ya que éste permite indagar sobre el proceso que sigue el individuo en la construcción de un nuevo concepto matemático, así como para diseñar y sustentar, desde el análisis teórico, los instrumentos que promueven construcciones. Esto no es inmediato, Asiala et al. 2004 mencionan que “el ciclo se repite tantas veces sea necesario para perfeccionar tanto teoría, como tratamiento hasta que el alumno haya consolidado su nuevo esquema”.

**Figura 2.** Ciclo APOE.

Este enfoque propone iniciar con un análisis teórico y epistemológico del concepto, el cual en el estudio permitió dimensionar y describir cómo éste puede ser construido. A partir de este análisis preliminar del concepto se diseñaron los instrumentos los cuales posteriormente fueron llevados a escena una y otra vez, lo que permitió un proceso de evaluación y ajuste de los mismos logrando así una versión que fue aplicada en estudiantes universitarios.

#### ■ METODOLOGÍA

Dado que el objetivo del estudio es observar, describir y caracterizar las construcciones que tiene lugar en la mente de un estudiante en la apropiación del concepto de espacio tridimensional y vector, la investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo (descriptivo-interpretativa) basada en un enfoque constructivista donde el método empleado será el de exploración crítica (Inhelder, 2002). Lo que se busca con el método es indagar sobre las construcciones que tienen lugar en la mente del sujeto cuando comprende los conceptos matemáticos subyacentes a los vectores y el espacio tridimensional.

#### ■ DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

En el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán se implementó una estrategia didáctica que consistió en una serie de materiales manipulativos diseñados para estudiantes universitarios, que por primera vez se acercan al concepto de espacio tridimensional. La finalidad fue promover la exploración y manipulación de objetos matemáticos como coordenadas tridimensionales, componentes vectoriales, dirección y magnitud de un vector, proyecciones vectoriales, entre otros que subyace a la visualización de nuevos conceptos desde su representación geométrica tales como volúmenes de paralelepípedos, áreas de paralelogramos, etc.

En el estudio, participaron dos estudiantes del tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica que se oferta en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán.

El trabajo con los estudiantes se desarrolló en dos etapas. En la primera realizaron una serie de actividades con material físicamente manipulable para representar el espacio tridimensional. Como material de apoyo utilizaron un juego de geometría y un transportador. La figura 3 muestra el prototipo del espacio tridimensional que fue construido por uno ellos, la finalidad del material fue que el estudiante visualizara los ejes, planos coordenados y octantes del espacio tridimensional y

realizara una serie de ejercicios para localizar puntos  $(x, y, z)$  sin haberlo hecho previamente en su libreta. Los segmentos color azul simulan los ejes de coordenadas y la viga de color amarillo un vector.

**Figura 3.** Espacio tridimensional con material de Zometool..



Después de realizar una serie de mediciones, uno de los estudiantes logró deducciones interesantes. Se le motivó para que realizara el análisis geométrico necesario para encontrar la magnitud y dirección del vector, como material de apoyo utilizó un transportador y regla. También recurrió a relaciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Logró los siguientes resultados:

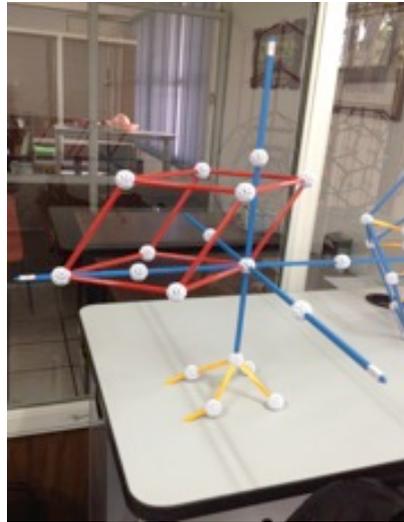
$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

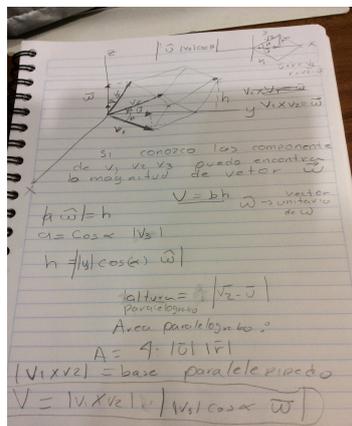
En este sentido, el estudiante pudo visualizar información importante sobre otros aspectos en el campo de los vectores, como ángulos entre vectores y proyecciones de vectores, que fueron aplicadas en la estructura que se visualiza en la figura 4.

Se muestra un paralelepípedo construido con una serie de ejes, el objetivo de la actividad consistió en que el estudiante debía deducir una fórmula para calcular su volumen. Inicialmente se solicitó que el análisis y los trazos lo realizaran en su libreta. Se les explicó que podían recurrir a conceptos previamente tratados como productos vectoriales, existencia de un vector unitario asociado, etc.

**Figura 4.** Paralelepípedo construido con material de Zometool

Uno de los estudiantes presentó problemas en el trazo de la figura, lo cual impidió que avanzara en su análisis. Después se le permitió utilizar la estructura, utilizó nuevamente una regla para medir y encontrar las componentes de los vectores que forman la base del paralelepípedo y recurrió a algunas relaciones trigonométricas para encontrar distancias e inclinaciones. Se observó que los estudiantes fueron capaces de inferir geoméricamente la proyección de un vector sobre otro (no se trató previamente el concepto) y la magnitud de este como la longitud de una de las aristas del paralelepípedo y de este modo calcular el área de la base. Recurrieron al producto vectorial para encontrar su altura y nuevamente a la proyección de vectores.

Otro aspecto interesante que se observó fue cuando se les solicitó a los estudiantes volvieran a dibujar el paralelepípedo en la su libreta y bosquejaron todos los trazos a los que recurrieron para deducir la fórmula del volumen. Se observó que los estudiantes trazaron sin mayor dificultad la figura e indicaron los trazos necesarios para deducir la fórmula del volumen. En la figura 5 se observa el trabajo de uno de los estudiantes.

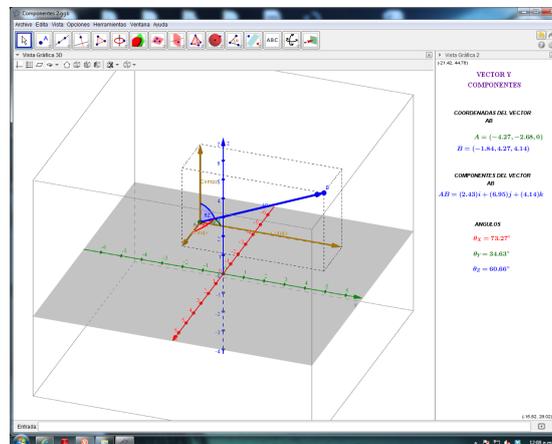
**Figura 5.** Solución del estudiante M1

La segunda etapa de la propuesta consistió en que los estudiantes desarrollarían una serie de acciones (complementarias a las primeras) que consistieron en la manipulación de objetos visuales a través del software GeoGebra. Se eligió dicho software porque ofrece un ambiente de geometría dinámica en el que el estudiante puede dinamizar objetos matemáticos desde su representación geométrica.

Las actividades diseñadas para esta etapa, metodológicamente corresponden, al análisis de un conjunto de animaciones en las cuales, a través de un diseño instruccional, se promovió que el estudiante indague, observe, describa y registre los efectos que tienen ciertos parámetros de los vectores en cada situación matemática presentada. Todo ello encausado a la construcción de conceptos matemáticos.

Posteriormente debían desarrollar una actividad de cierre, la cual consistió en elaborar una aplicación propia en la que mostrarán de una manera dinámica la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes. En la figura 6 se muestra un producto desarrollado por uno de los estudiantes, se observó que logró dinamizar el valor de los cosenos directores del vector, su magnitud y la relación que estos parámetros tiene con las componentes del vector. Cuando el estudiante modificaba el valor de algún ángulo director, podía observar como esto repercutía en las componentes del vector. Además dedujo, geoméricamente que los ángulos directores varían, información que no había sido claramente comprendida con la estructura.

**Figura 6.** Dinamización de los elementos de un vector en R3 con GeoGebra



Se observó que la transición del objeto manipulable físicamente al objeto visual elaborado en GeoGebra facilitó la interpretación de la tercera dimensión que mostró la pantalla de la computadora. En ocasiones los estudiantes recurrían a la estructura mostrada en la figura 1 para ubicar el punto final de algún vector y para puntualizar los ángulos directores.

## ■ OBSERVACIONES

Se comentó que la propuesta descrita forma parte de una investigación que aun se encuentra en desarrollo, sin embargo, hasta este momento y con los datos extraídos del estudio descrito, se observa que la manipulación de objetos físicos promueve la construcción de un “puente

conceptual” entre registros de representación geométricos y registros algebraicos de los conceptos abordados. El estudiante logró visualizar una perspectiva tridimensional en su forma original en una superficie plana (como la de su libreta), le permitió visualizar y dibujar trazos y extraer datos necesarios para establecer relaciones y llegar a deducciones como la expresión para calcular el volumen del paralelepípedo sin recurrir al triple producto escalar que comúnmente se propone en los libros de texto como una fórmula, carente de significados.

La manipulación de objetos físicos y visuales promueven la resignificación de las representaciones algebraicas visualizadas en un modelo físico, expresiones como

$$\text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\theta) \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

fueron identificadas geoméricamente por el estudiante mediante de la estructura que aparece en la figura 5.

#### ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (2004). *A Framework for Research a Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*.

Recuperado el 2 de Septiembre del 2012 de: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero., Alanís, J., Rodríguez y R., Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática* 8(3), 24 – 41.

Inhelder, B. (2002). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. España: Morata.

Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*.

Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Recuperada el 4 de Abril del 2011 de: <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>