UNA EXPERIENCIA ACERCA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL ÁLGEBRA VECTORIAL MEDIANTE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Rosalino Cortés González
Universidad Autónoma del Estado de Morelos (México)
larissa@uaem.mx, nehemias.moreno@uaem.mx, rcortesg25@gmail.com

Palabras clave: vectores geométricos, representación ostensiva, enfoque ontosemiótico

Key words: geometric vectors, ostensive representations, ontosemiotic approach

RESUMEN: En el presente trabajo se describen algunas experiencias sobre el aprendizaje de los vectores por parte de un grupo de estudiantes universitarios que cursaban la materia de Geometría. Se planteó a los estudiantes la elaboración de representaciones ostensivas de las transformaciones isométricas de ciertas figuras mediante el empleo de regla, escuadra y compás. El análisis de las representaciones mediante el Enfoque Ontosemiótico nos permitió observar que los estudiantes dieron sentido a las propiedades de operaciones con los vectores y también superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica.

ABSTRACT: There is presented a brief description of some experiences concerned to significant learning of the concept of vector achieved by a group of university students within the Geometry course. Students have been engaged in the process of construction of the ostensive representations of the images of some specific geometric objects under isometric transformations by means of a straightedge, compass and set squares. Our analysis of the results, based on the Ontosemiotic Approach, allowed us to conclude that the students were able to discover the properties of the vector algebra operations, as well as to overcome the difficulties related to the vector algebra' approach in solving various problems of Analytic Geometry.

INTRODUCCIÓN

Los cursos de Geometría Analítica y Álgebra Lineal son los primeros cursos de matemáticas que se imparten en el nivel universitario. En dichos cursos, la mayoría de los conceptos fundamentales (tales como los conceptos de vector, espacio vectorial, transformación lineal, etc.) son presentados de manera rigurosa y axiomática, lo cual puede ser observado en el discurso del docente o los libros de texto en los que se analizan dichos tópicos. Tradicionalmente se considera que los estudiantes son capaces de construir dichos conceptos matemáticos complejos, en el terreno de lo abstracto, sin recurrir a los recursos de ayuda relacionados directamente con su conocimiento perceptual.

Desde nuestro punto de vista, esto plantea cierta problemática para el aprendizaje significativo de Geometría Analítica y Álgebra Lineal, pues se tiene la idea generalizada entre los docentes de prescindir de ciertos conocimientos de la vida real en la enseñanza de ciertos conceptos abstractos. Históricamente esta idea fue planteada por el matemático francés J. Dieudonné, quien sugirió evitar argumentaciones de Geometría Euclidiana en la enseñanza de Geometría Analítica, advirtiendo que ésta última podría ser reconstruida a partir del Álgebra Lineal (así como la Geometría Euclidiana). Por otro lado, él propone introducir los conceptos de Álgebra Vectorial de manera intuitiva, a través del resultado de ciertos experimentos: por ejemplo, la adición de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar no son operaciones extremadamente abstractas y difíciles de ilustrar gráficamente debido a que la naturaleza nos proporciona un laboratorio donde podemos familiarizarnos con casos particulares de los conceptos (e.g., al jalar un objeto con dos cuerdas, la fuerza resultante podría ser descrita como la suma de vectores), y que posteriormente estos conceptos podrían ser asimilados en su forma general. En otras palabras, se trata de enseñar el álgebra como si fuera “física de espacio” (espacio tiempo en el que vivimos) con el propósito de introducir al estudiante a los conceptos surgidos en el periodo transcurrido del “apogeo de la ciencia griega a la fecha” (Dieudonné, 1969).

En el presente trabajo, partimos de la idea que es posible enseñar Geometría Analítica tomando en cuenta la experiencia perceptual del estudiante, y posteriormente, pasar a la construcción de conceptos algebraicos. Para esto proponemos la realización de algunas prácticas matemáticas (mediante el empleo de herramientas tales como la escuadra, la regla y compás) que involucran transformaciones geométricas y diagramas en las cuales emerge el objeto que representa la idea de vector (como algo necesario para llevar un punto al otro, de acuerdo con su sentido inicial del siglo XVIII). La emergencia del concepto de vector a partir de la práctica matemática es descrita con referencias a algunos elementos teóricos provenientes del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), tomando en consideración tanto las representaciones ostensivas como la visualización de las propiedades de operaciones con vectores.

Las actividades realizadas permitieron a los estudiantes dar sentido a las propiedades de las operaciones con los vectores, en lugar de asimilarlos como conceptos acabados. Los participantes superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica que requiere de la relación de posiciones de vectores que caracterizan las figuras geométricas tales como rectas y planos.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este trabajo nos apoyamos en el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Fernández, Gonzato y Cajaraville, 2012) para caracterizar la actividad matemática que realizan los estudiantes, cuando resuelven ciertos problemas de Geometría, en términos de prácticas y configuraciones epistémicas y cognitivas de objetos primarios, así como los procesos activados en dichas prácticas. En el EOS, se entiende por práctica matemática la realización de una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas. El análisis de dicha práctica requiere de considerar a un conjunto de objetos matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos, etc.) y procesos (idealización, generalización, argumentación, etc.) que intervienen en la misma.

Así por ejemplo, en la práctica de resolución de problemas de Geometría Analítica intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, grafica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que se manifiestan por su organización y estructura, como los vectores en nuestro caso.

La aplicación de este planteamiento al proceso de visualización nos lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Por eso, también fijamos la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos, que intervienen en una práctica, que serán considerados como visuales si ponen en juego la *percepción visual.*

Los "objetos visuales" y los procesos de visualización forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos. En el análisis de la visualización se considera lo siguiente: (a) los objetos primarios, que en ella participan, en los cuales se dice que hay visualización, (b) las dualidades desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos) e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados).

Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido). Cabe señalar, que la visualización en matemáticas no se reduce a “ver”, sino que también conlleva interpretación, acción y relación. En nuestra propuesta, los vectores emergen como resultado de composición de dos simetrías axiales con los ejes paralelos y son definidos por los estudiantes como desplazamientos o transformaciones de traslación. Esto constituye la componente crucial de su conocimiento personal, formando una configuración cognitiva

Los participantes fueron 8 alumnos, de entre 19 y 21 años de edad, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Estos alumnos se encontraban cursando la materia de Geometría 1, en esencia, en dicho curso se abordan los principios básicos de Geometría Analítica.

DESCRIPCIÓN DE LAS EXPERIENCIAS

En primeras sesiones de trabajo el docente presentó a los estudiantes unas clases típicas de Álgebra Lineal, es decir, las clases tradicionales que consistían en la enunciación de definiciones, teoremas y la presentación de las propiedades y ciertas demostraciones sobre el pizarrón. Posteriormente se solicitaba a los alumnos re-escribir los axiomas de espacio vectorial que se habían abordado en las clases anteriores y dar representación gráfica correspondiente. Se observó que los estudiantes tenían dificultades de resolver problemas gráficos para establecer las igualdades de ciertas combinaciones de vectores, en particular, para establecer la asociatividad respecto a la suma, además se observaron problemas con los axiomas de multiplicación por escalar.

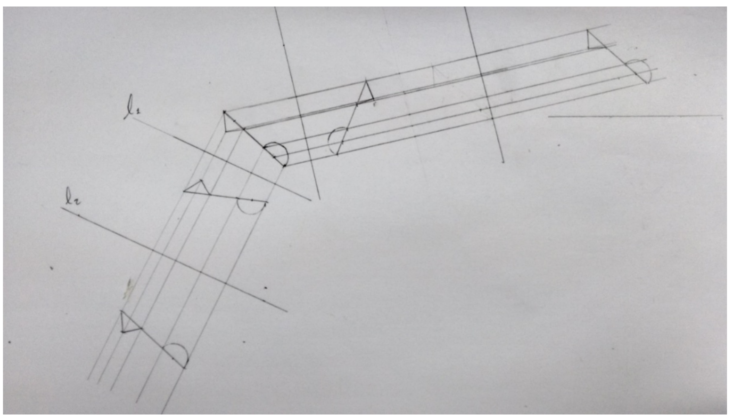
Con el objetivo de implementar acciones innovadoras centradas en el auto-aprendizaje de los estudiantes, se llevó a cabo un taller con algunas actividades lúdicas orientadas hacia la construcción del concepto de vector y la visualización de las operaciones con vectores y sus propiedades. Estas actividades consistían en la representación ostensiva de las transformaciones isométricas de ciertas figuras empleando juegos geométricos (regla, escuadra y compás).

A continuación se describen las cuatro tareas, que fueron planteadas a los estudiantes, y la actividad matemática implicada en cada una. Luego, por cuestiones de espacio, se realiza una descripción general de la práctica matemática realizada en dichas actividades en términos de algunas postulaciones teóricos del EOS.

Tarea 1. Vector como composición de dos simetrías

Se escogen dos ejes paralelos, y una figura. Se trazan las imágenes de puntos simétricos respecto a un eje y luego respecto al otro eje. Después de observaciones y mediciones descubren que cada punto “viaja”, o se traslada, en la misma dirección y en la misma distancia. Al mismo tiempo, los estudiantes deben justificar sus observaciones con argumentos teóricos. Como resultado de observación de las construcciones, los estudiantes llegan a la conclusión de que el objeto final puede ser visto como el resultado de desplazamiento del objeto inicial: así emerge el vector como transformación de traslación.

Figura 1. Vector como objeto emergente de la transformación de traslación



En el transcurso de las construcciones gráficas, los estudiantes lograron superar las dificultades en el dibujo de rectas paralelas, de trazar una recta perpendicular, de extenderla, de acomodar un compás para marcar los puntos simétricos, apoyándose en el punto sobre el eje donde se proyecta el punto inicial, entre otras cosas relacionadas con el trabajo en equipo. Con estas actividades, la enseñanza de los vectores está centrada en el alumno, pues se consideran sus propios ritmos y procedimientos para resolver el problema y se les invita a justificar sus procedimientos.

Descripción de la actividad matemática de la Tarea 1

En la parte izquierda de la Figura 1 se muestran dos simetrías axiales de un objeto respecto al eje l_2 y luego respecto al eje l_1. En la parte derecha se muestra un ensayo respecto a otros dos ejes paralelos.

Durante el proceso de visualización, los alumnos llegan a la conclusión que cada punto del objeto se traslada a lo largo de una recta, que es perpendicular a ambos ejes, en el mismo sentido y en la misma distancia, de tal modo que el objeto se desplaza rígidamente a lo largo de un segmento correspondiente.

De esta manera, el resultado se puede interpretar como un desplazamiento de la figura inicial a lo largo de un segmento dirigido (vector-flecha) que une los puntos correspondientes del objeto inicial con la imagen final, que es el resultado de la transformación compuesta respecto a dos ejes de simetría paralelos.

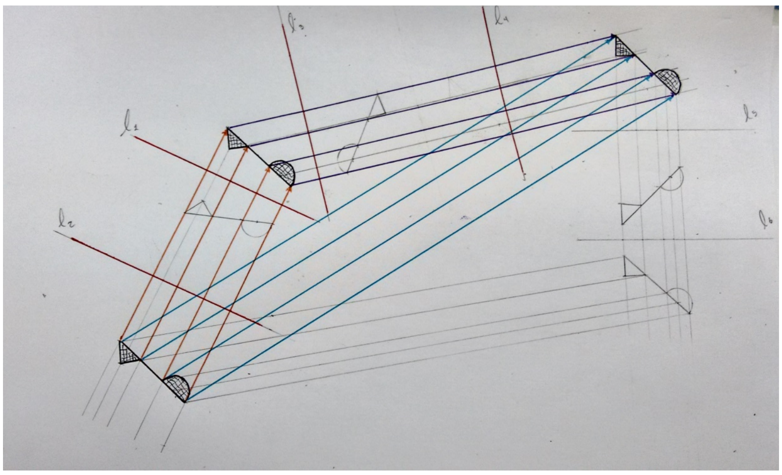
Estas observaciones son expresadas a través de la realización de una práctica simbólica/analítica (no visual) empleando la letra $\boldsymbol{F}$, la cual simboliza el objeto y sus imágenes en la Figura 1. En este sentido

$$\boldsymbol{F1} = \boldsymbol{Sl_2}(\boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{F2} = \boldsymbol{Sl_1}(\boldsymbol{F1}), \ \boldsymbol{F2} = \big((\boldsymbol{Sl_1})\blacksquare(\boldsymbol{Sl_2})\big)(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Tr_a}(\boldsymbol{F})$$

Tarea 2. La suma de dos vectores

La segunda actividad tenía como objetivo que los estudiantes observaran cómo emerge la operación de suma de vectores en el proceso de construcción de cuatro composiciones, con dos pares de ejes paralelos.

Figura 2. La suma vectorial como resultado de dos transformaciones de traslación.



Descripción de la actividad matemática de la Tarea 2

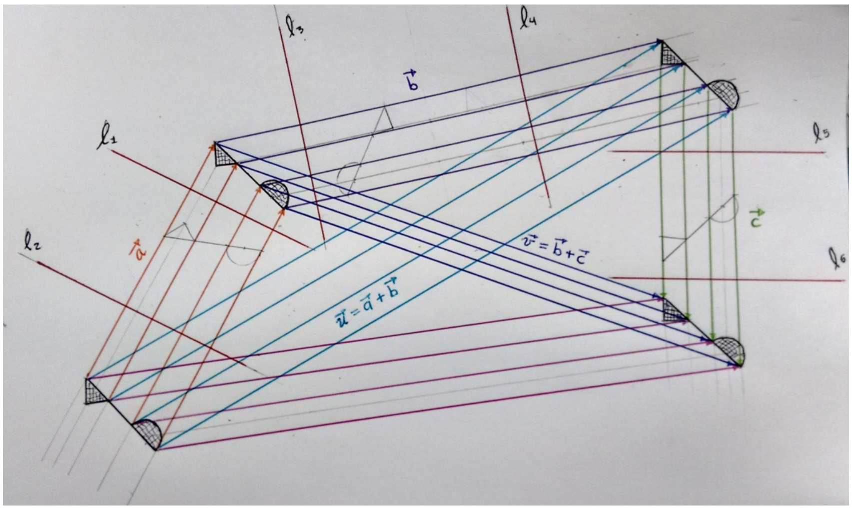
En la Figura 2 se muestra la transformación del objeto mediante la composición de simetrías respecto a l_2 seguida por la de l_1 y posteriormente mediante la composición de simetrías respecto a l_3 y l_4. Por las leyes de la lógica, se concluye que el objeto inicial es idéntico (congruente) al que corresponde la imagen final: es decir, es el resultado de una traslación por el vector (color azul) que une los puntos correspondientes del objeto inicial con el reflejado que es el resultado de dos parejas de simetrías. Entonces es preciso llamarlo como la composición de dos traslaciones, o equivalentemente, la suma de dos vectores.

También se concluye que es necesario realizar las representaciones simbólicas que describen los resultados intermedios y finales de las construcciones. Por ejemplo, el resultado de dos simetrías, respecto al eje l_2 primero (como en la Figura 2) y luego respecto al eje l_1 nos da la transformación resultante que es el traslado por el vector-flecha que une dos puntos correspondientes del objeto inicial y su imagen resultante, $\left((\boldsymbol{Sl_1})\blacksquare(\boldsymbol{Sl_2})\right)(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Tr_a}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F2}$.

De manera similar, obtenemos la representación para la otra pareja de transformaciones isométricas, $\left((\boldsymbol{Sl_4})\blacksquare(\boldsymbol{Sl_3})\right)(\boldsymbol{F2}) = \boldsymbol{Tr_b}(\boldsymbol{F2}) = \boldsymbol{F3}$. Entonces la composición de $\boldsymbol{Tr_a}$ y de $\boldsymbol{Tr_b}$ es $\boldsymbol{Tr_u}$, que corresponde a la suma de los vectores flecha: **a**+**b**=**u.**

Tarea 3. Visualización de la ley asociativa de la suma de vectores

Figura 3. Composición con la tercera pareja de ejes de simetrías paralelos

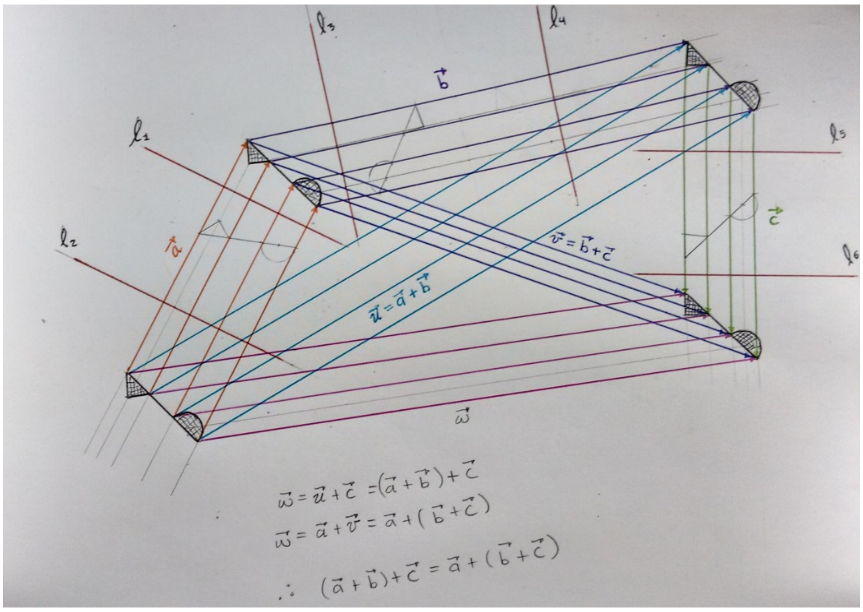


Descripción de la actividad matemática de la Tarea 3

Los estudiantes tienen que establecer y comprobar la relación entre el objeto $\boldsymbol{F}$ (inicial) y el objeto $\boldsymbol{F4}$ (final), que es el resultado de composición de dos simetrías del objeto $\boldsymbol{F3}$ respecto a los ejes l_5 y l_6. Pero como el objeto $\boldsymbol{F3}$ es el traslado paralelo del objeto $\boldsymbol{F}$, por el vector **u**=**a**+**b**, entonces $\boldsymbol{F4}$ es el traslado paralelo del objeto $\boldsymbol{F}$ por un vector que une los puntos correspondientes (color rojo).

Tarea 4. Propiedad asociativa de la suma de tres vectores

Figura 4. La ley de asociatividad emergente



La primera pareja de composiciones de traslaciones se denota como la suma **u**=**a**+**b** de los vectores correspondientes, de la primera traslación $\boldsymbol{Tr_a}$ y la segunda $\boldsymbol{Tr_b}$. Del mismo modo la segunda traslación seguida por la tercera nos da el vector **v: v**=**b**+**c**. Pero de las construcciones se obtiene el mismo vector **w**, como la suma de **u**+**c**=**a**+**v,** lo cual expresa la ley de asociatividad de la suma de tres vectores de modo siguiente: **u**+**c**=(**a**+**b**)+**c**=**a**+**v**= **a**+(**b**+**c**), o en la forma final (**a**+**b**)+**c**=**a**+(**b**+**c**).

Una mirada desde el EOS sobre las actividades realizadas

Para resolver las tareas los estudiantes deben realizar una práctica matemática visual y simbólica que consiste en comunicar la perspectiva del objeto que se va a reflejar y las proyecciones planas de los puntos del objeto sobre el eje. Los términos “derecha”, “izquierda”, “eje” y los símbolos (l_1, l_2, $\vec{a}$), así como las argumentaciones que deben darse para justificar que en la Figura 1 los objetos $\boldsymbol{F1}$ y $\boldsymbol{F2}$ son reflejados del objeto $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F1}$, respectivamente, y son elementos del lenguaje simbólico del estudiante. Sin embargo, en el contexto de la tarea se usan de manera indexada, señalando posiciones en las representaciones del objeto evocado. El proceso de visualización requerido y sus resultados, los objetos visuales, intervienen asociados a determinadas tareas. Así se tiene, por ejemplo, la comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio (plano), se trata de posicionar al objeto en el espacio (plano) mediante el empleo de lenguaje deíctico (izquierda, derecha; arriba, abajo). La representación del objeto y sus traslaciones en el espacio da origen también al reconocimiento de invariancias en la forma, lo cual se apoya en la discriminación visual: comparar los objetos, identificar similitudes o diferencias entre ellos. Los estudiantes también deben realizar operaciones visuales como el de (1) proyectar para reflejar a ciertos puntos del objeto, trasladar, deslizar, etc., (2) construir el objeto a partir de los puntos que se han reflejado, (3) representar gráficamente y simbólicamente las relaciones entre las figuras, por mencionar algunas.

Por otra parte, también se emplean conceptos visuales, por ejemplo, en la realización de la práctica intervienen conceptos de representación material (dibujo, trazos sobre el papel, expresiones matemáticas ostensivas) y los correspondientes conceptos figúrales representados por medio de lenguaje visual (por ejemplo, la propiedad de asociatividad que se ilustra en el dibujo de la Figura 4). En la Figura 4 se ponen en juego los conceptos de objeto visible, objeto oculto, puntos de vista opuestos (el frente es opuesto a atrás; derecha es opuesta a izquierda), direcciones de mirada del observador (rayo visual), etc..

La realización de estas prácticas involucra también relaciones entre conceptos expresados mediante proposiciones (cuya verdad o falsedad se debe demostrar). Se tienen proposiones visuales, es decir, propiedades que intervienen en la resolución de las tareas visuales y se expresan en lenguaje visual: (a) Propiedades de los procedimientos visuales utilizados, tales como la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos; (b) Propiedades del lenguaje visual utilizado, como la conservación de la forma en las imágenes (reflejados), propiedades de las isometrías y (c) Propiedades de los conceptos visuales.

Por último, la elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos requerirá la simple presentación del objeto material, si se trata de propiedades de naturaleza empírica, o podrá requerir la elaboración de argumentaciones deductivas basadas en reglas previamente aceptadas.

En el caso de la Figura 2, teniendo en cuenta el significado atribuido a los conceptos de izquierda, derecha, los convenios de representación plana y las propiedades de los reflejados (las imágenes) se debe aceptar que si el observador se coloca frente al plano podrá observar la composición de simetrías respecto a l_2 seguida por la de l_1 y posteriormente a través de la composición de simetrías respecto a l_3 y l_4. Por lo tanto, la representación plana de la Figura 2 puede representar la suma vectorial y puede ser entendida como el resultado de dos transformaciones de traslación.

La realización de las prácticas permite la resolución de las actividades descritas anteriormente. Dichas prácticas evidencian la emergencia del concepto de vector o de sus propiedades según sea la práctica que se esté realizando.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

El proceso de visualización y sus resultados (objetos visuales y visualizaciones) se encuentran asociados a las tareas descritas anteriormente. En las actividades, la visualización se puso en juego en el reconocimiento de las invariancias en las formas, o en sus representaciones, por transformaciones específicas, lo cual se encuentra apoyado en la discriminación visual como la comparación de objetos, la identificación de similitudes o diferencias.

Los estudiantes también realizaron operaciones visuales tales como simetrías respecto a una recta (los reflejos de cuerpos), las traslaciones (desplazamientos), así como las transformaciones de representaciones visuales mediante la descomposición y recomposición de las figuras. En estas operaciones visuales intervinieron tanto conceptos de representación material (por ejemplo, el objeto a ser trasladado) como conceptos figurales, los cuales estaban representados por medio de lenguaje visual. En relación con esto último, es manifestado a través de las prácticas geométricas descritas anteriormente en que el vector emerge como un concepto figural.

Los estudiantes también emplearon diferentes propiedades de los objetos visuales involucrados: se trata de enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer. Por ejemplo, cuando se emplean las leyes de la lógica para mostrar que un objeto bajo traslaciones ha sido inalterado. También emplearon las propiedades de los procedimientos visuales, por ejemplo, la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos.

Finalmente, en la visualización de las leyes asociativas, se requiere también de la elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos. Es decir, de la elaboración de argumentos deductivos basados en reglas previamente establecidas.

De esta manera, en los procesos de construcción descritos anteriormente, los estudiantes dieron sentido a la importancia de los postulados de la geometría euclidiana. Además los estudiantes tenían que atender la necesidad de simbolizar sus observaciones articulados, así como de proporcionar justificación de los resultados de sus observaciones basados en la visualización y posteriormente expresarlos en la forma de demostraciones. También surgieron unas tareas que requerían de creatividad: la primera, en relación con la inquietud natural de cómo realizar las construcciones para visualizar la ley de conmutatividad de tal modo que no sea necesario usar una hoja de trabajo de tamaño demasiado grande comparando con una de cuaderno; otras tareas, en relación de construcciones para visualizar la operación de multiplicación por un escalar y sus propiedades.

Las actividades descritas permitieron a los estudiantes dar sentido a las propiedades de operaciones con los vectores, en lugar de aprenderlos como conceptos acabados.

También los exámenes finales del curso Geometría 1 mostraron resultados excelentes, lo que significa que los estudiantes superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica que requieren de la relación de posiciones de vectores que caracterizan las figuras geométricas tales como rectas y planos.

Agradecimientos. Nuestro trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación PICA14 con apoyo de la Secretaría de Investigación de la UAEM a través de la Dirección General de Desarrollo de la Investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dieudonné, J. (1969). *Linear Algebra and Geometry*, Paris: Hermann.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2)*, 127-135.

Godino, J. D., Fernández, T., Gonzato, M., y Cajaraville, J. A. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30(2),* 109-130.