

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y EL TRACKER EN EL AJUSTE DE POLINOMIOS: UN ESTUDIO DE CASO

Sandra Minerva Valdivia Bautista, Rafael Pantoja Rangel

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara (México)

sandy_87siel@hotmail.com, rpantoja@prodiqy.net.mx

Palabras clave: modelación matemática, ajuste de curvas, Tracker, trabajo colaborativo y representaciones semióticas.

Key words: mathematical modeling, curves adjustment, Tracker, collaborative work and semiotic representations.

RESUMEN: En el estudio se plantea como estrategia didáctica que a partir del desarrollo de actividades con diversas situaciones problema (Hitt, 2013) relacionadas con el contexto del alumno y apoyadas en la teoría de representaciones semióticas, la visualización, el trabajo colaborativo y el programa Tracker, se propicie la competencia de modelación matemática.

La modelación matemática se entiende como una práctica ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado, en respuesta a una situación del mundo externo pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10), motivo por el que se eligió como escenarios de grabación la unidad deportiva, el Coliseo Olímpico del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI).

ABSTRACT: In the study is raised as a didactic strategy that from the development of activities with diverse situations of the problem (Hitt, 2013) related to the student context and supported by the theory of semiotic representations, the visualization, the collaborative work and the program Traker, it will be propitiated the mathematical modeling competence. The mathematical modeling is understood as a practice exercised by teachers and students in a determined time and context, as a response to the outside world, this because of the closeness to the students reality, in an individual and collaborative manner through the process of interaction (Cordoba 2011, pag. 10). Therefore, recording scenarios as the sports unity, Coliseo Olímpico from the Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) were chosen.

La modelación matemática se considera importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje ya que permite integrar los elementos primordiales de la solución de problemas relacionados con el contexto del estudiante, el trabajo colaborativo y la obtención de un modelo matemático a partir de una situación específica mediante la puesta en escena de situaciones como el tiro a penal, tiro a canasta, movimiento de un corredor, entre otras situaciones.

Por esta razón, se propone la inclusión de la modelación matemática en prácticas escolares, además que permite la utilización de programas como el Tracker para facilitar la obtención del modelo matemático pasando por cada uno de los registros expuestos en las representaciones semióticas de Raymond Duval.

El Tracker juega un papel importante en la estrategia porque a partir de la grabación en video de la situación problema elegida, el estudiante interpreta y relaciona los datos, los gráficos y las funciones que proporciona el programa, con el desarrollo de la actividad en la que se evidencia la acción de modelar (Ezquerro, Iturrioz y Díaz, 2011; Pantoja, Ulloa y Nesterova, 2013). El programa Tracker proporciona una tabla de datos de las variables tiempo t , distancia horizontal x y distancia vertical y y presenta en pantalla una serie de gráficos con los parámetros que se crea conveniente analizar y el modelo matemático que describe la trayectoria del objeto.

De este modo, el Tracker exhibe en pantalla representaciones semióticas (algebraica, gráfica y numérica) de la situación problema, que los alumnos en trabajo colaborativo relacionaron, de manera natural, con las matemáticas y que les permite interiorizar el concepto, comprender e interpretar las diferentes representaciones y explicarlas dentro del mismo contexto de la situación seleccionada.

Previo a las actividades de grabación de video, se platicó con los estudiantes sobre la importancia de su participación en este proyecto, en el que se les explicó que el objetivo de la propuesta se centra en que a partir de situaciones cotidianas relacionarán los conceptos matemáticos señalados en el programa de estudios, además de hacer patente algunas recomendaciones para el escenario, por ejemplo, que la cámara de video se ubique perpendicular al movimiento y que la unidad de medida sea detectable por el dispositivo de grabación, porque es de suma importancia ya que es la interfase entre lo real y lo mostrado en pantalla.

Los alumnos se recrearon mucho, se mostraron interesados y contentos porque se divertían en su clase de matemáticas, suceso que pocas veces habían experimentado.

Tracker

El Tracker es un programa gratuito para análisis de video y construcción de modelos matemáticos, diseñado para ser usado en la enseñanza de la Física y las Matemáticas.

La modelación de situaciones problema con video con el uso del programa Tracker, es una forma de combinar videos y modelación en computadora, razón por la cual fue elegido como recurso tecnológico para emplearlo en la propuesta.

A través de Tracker los estudiantes pueden señalar los cuadros por segundo de video, escoger el origen de la ubicación deseada y calibrar el video para valores de medida del mundo real, luego, el programa calcula valores de movimiento, construye gráficos, dibuja y manipula vectores de fuerza, velocidad y aceleración. (Ver figura 1)

Figura 1. Tratamiento del video correspondiente al movimiento de un ciclista y la herramienta que permite cambiar los parámetros en grafica.



Teoría de las representaciones semióticas de Duval

Según Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994), en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto necesariamente pasa por una o más representaciones semióticas, éstas están conformadas por:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación.
- La forma de representación.

Para Duval (1995), un objeto matemático tiene dos tipos de representaciones:

- Externas: conocidas como representaciones semióticas que forman un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. Por ejemplo, si se considera el objeto matemático llamado recta, las representaciones semióticas son las gráficas de la recta situada en el plano coordenado cartesiano, las situaciones reales relacionadas con la recta como el recorrido de un caballo en una carrera hasta llegar a la meta (que considere el tiempo como variable independiente y la distancia horizontal como variable dependiente), las ecuaciones de la recta en todas sus formas, la obtención del modelo matemático a partir de la representación visual (gráfica), representación numérica (conjunto de datos x contra y) o representación verbal (lenguaje común).
- Internas: son aquellas de naturaleza mental para el conocimiento matemático que son esenciales en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales.

El proceso cognitivo consiste fundamentalmente en las transformaciones de las representaciones semióticas, las cuales se clasifican en:

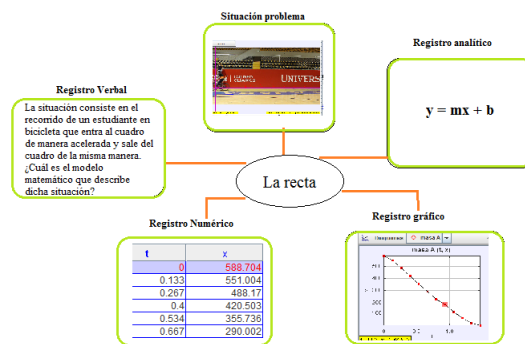
- Tratamiento: ocurre cuando se realiza una transformación dentro del mismo registro. Duval (2004, 2006). En el ejemplo del objeto matemático llamado recta, en el registro gráfico, un tratamiento ocurre cuando se desplaza la recta en el eje horizontal o vertical, o al manipular la inclinación de la recta.
- Conversión: consiste en la transformación de una representación a otra de otro registro, en la cual se conserva parcial o totalmente el concepto de la representación inicial. Duval

(1999). En el ejemplo del objeto matemático llamado recta, se realiza una conversión cuando se tiene la representación analítica en cualquiera de sus formas y se pasa al registro gráfico, numérico o verbal.

El uso de diversas representaciones semióticas, conversiones y transformaciones son fundamentales en la construcción y generación de objetos matemáticos, sin embargo, este tipo de procesos no surgen de manera espontánea, es por ello, que se propone diseñar actividades con situaciones o problemas que permitan pasar de una representación a otra o de un registro a otro.

La propuesta consiste en diseñar actividades que contenga una situación problema, que permita realizar tratamientos y conversiones e identificar el proceso de aprehensión del conocimiento matemático, la vinculación de los objetos matemáticos vistos en el salón de clases con una situación cotidiana así como las concepciones y explicaciones que da cada integrante del equipo colaborativo al aplicar tratamientos y conversiones descritas anteriormente, aunque muchos de los estudiantes lo hagan de manera inconsciente. (Ver figura 2)

Figura 2. La recta y sus diferentes registros de representación.



METODOLOGÍA

El estudio es de tipo cualitativo, se trabajó con estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas en Ingenierías (CUCEI) en la Universidad de Guadalajara. Enseguida se describen las sesiones (con una duración de dos horas cada una), que se llevaron a cabo en la fase de experimentación:

Sesión 1. Formación de los grupos colaborativos de no más de cuatro integrantes, se explicaron las actividades a realizar como: el trabajo en grupos colaborativos, la grabación de los videos de la situación seleccionada, el uso del programa Tracker, la realización de la exposición del trabajo realizado por cada estudiante y la entrevista de alguno de los integrantes de los distintos grupos colaborativos.

Se entregó un manual elaborado especialmente para la elaboración del presente trabajo, el cual describe explícitamente lo necesario para que el estudiante realice las actividades de acuerdo al objetivo planteado, en el manual se indica la manera de importar el video, cómo situar el eje coordinado cartesiano, la barra de calibración y el trazo de la trayectoria del objeto en cuestión (de manera automática y manual).

El profesor mostró un ejemplo para la manipulación de un video para que los estudiantes se familiarizaran con el programa y ayudar al entendimiento del manual proporcionado.

Se entregó un archivo en Word con una serie de cuestionamientos sobre situaciones específicas para que trabajaran con el programa Tracker y se pidió como trabajo en casa que leyeran los archivos y el manual, que vieran los videos sin comenzar a manipular el video en Tracker ni llenar los reporte, con el propósito de que en la sesión 2, pudiera observarse el trabajo colaborativo y filmar las discusiones dadas durante el proceso.

Sesión 2. Instalación de dos video cámaras en el aula de clases para tener evidencia del proceso del trabajo colaborativo. Luego cada grupo manipuló el video en Tracker (ajustar el video, situar los ejes coordenados cartesianos, la vara de calibración y el trazo de la trayectoria), se obtuvo el modelo matemático que mejor representó (según el criterio y conocimiento del estudiante) a la situación dada mediante la técnica de mínimos cuadrados en el ajuste de polinomios (que es uno de los temas del programa del curso de métodos numéricos) se contestó el reporte y finalmente se les pidió que prepararán una exposición del trabajo realizado.

Sesiones 3 y 4. Exposición de los trabajos realizados por cada grupo colaborativo.

Sesión 5. Grabación de nuevas situaciones (elegidas por los estudiantes) en el Coliseo Olímpico de CUCEI, y se les pidió que elaboraran un nuevo reporte enfocado a la nueva situación, manipularan el video en Tracker, obtuvieran los gráficos, datos y el modelo matemático.

Sesión 6. Entrega por grupo colaborativo del trabajo resultante en la Sesión 2, la presentación del trabajo (en PowerPoint), y el trabajo resultante de la sesión 5 en formato electrónico.

Cada una de las sesiones fue grabada para transcribir los diálogos más relevantes de los estudiantes.

■ RESULTADOS

Enseguida se muestra partes del reporte realizado por el grupo 2, correspondiente a la situación del tiro a canasta de basquetbol (Ver figura 3).

Figura 3. Lanzamiento del balón a una canasta de basquetbol

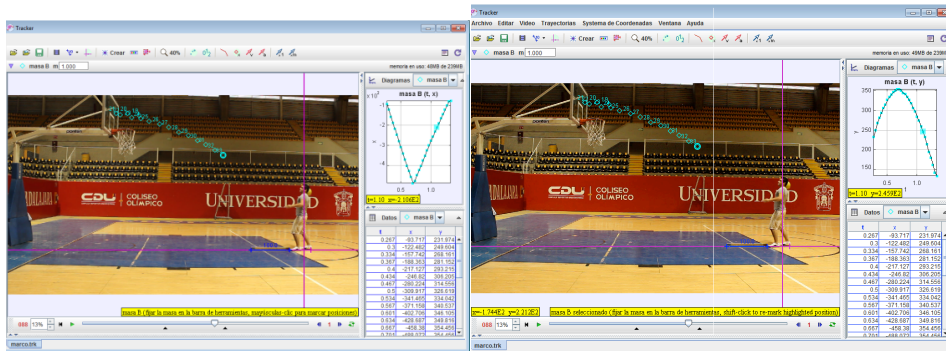


Descripción de la situación realizada por el grupo colaborativo. “Se observa un sujeto frente a una canasta de baloncesto, éste tiene un balón en sus manos el cual es lanzado hacia el marco de la canasta, rebota y regresa.

La situación describe un tiro parabólico con la diferencia de que en lugar de caer hasta el suelo golpea un tablero y regresa a su posición inicial por lo cual se puede observar que el balón tiene desplazamiento en el eje “x” y desplazamiento de altura en el eje y”

Trabajo realizado con el video de la situación en el programa Tracker (Ver figura 4).

Figura 4. Trabajo realizado en Tracker con el video del tiro de un balón a la canasta de Basquetbol.



Gráficos analizados por los integrantes del grupo colaborativo.

Descripción de la gráfica 1:

“en esta gráfica podemos observar los cambios de posición (distancia recorrida) en el eje “x” en cada intervalo de tiempo” (Ver figura 5).

Descripción de la gráfica 2:

“En esta gráfica se observa los cambios de posición (altura) del balón en el eje “y” en cada intervalo de tiempo. Como se observa en la gráfica es un tiro parabólico” (Ver figura 6).

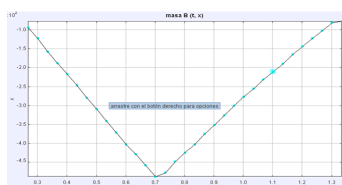
Descripción de la gráfica 3:

“en esta grafica se observa la altura alcanzada respecto con la distancia recorrida (el recorrido que apreciamos a simple vista) las cuales están ligadas ya que cuando el balón avanza cierta distancia aumenta su altura y al momento de hacer el choque comienza a disminuir la altura y la distancia recorrida” (Ver figura 7).

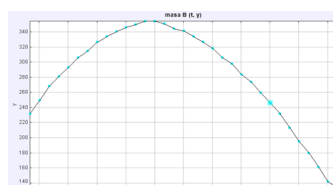
Figura 5.

Figura 6.

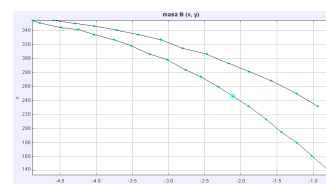
Figura 7.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

Valores numéricos obtenidos en Tracker.

Figura 8. datos proporcionados por Tracker de la situación en cuestión.

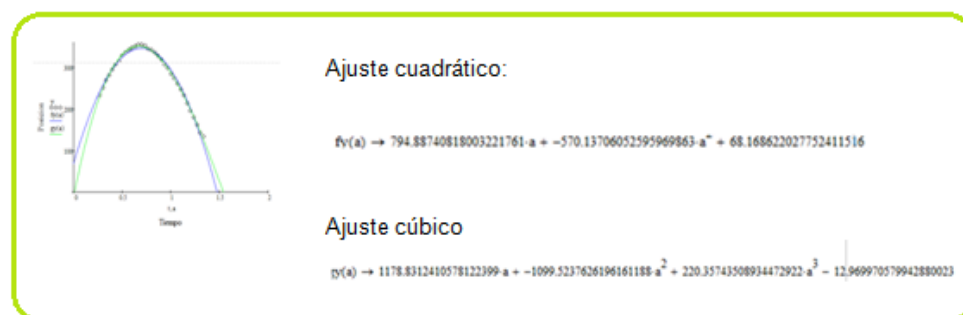
t	x	y
0.267	-93.717	231.974
0.3	-122.482	249.604
0.334	-157.742	268.161
0.367	-188.363	281.152
0.4	-217.127	293.215
0.434	-246.82	306.205
0.467	-280.224	314.556
0.5	-309.917	326.619
0.534	-341.465	334.042
0.567	-371.158	340.537
0.601	-402.706	346.105
0.634	-428.687	349.816
0.667	-458.38	354.456
0.701	-488.072	354.456
0.734	-477.866	350.744
0.767	-448.173	344.249
0.801	-424.048	341.465
0.834	-402.706	334.042
0.868	-374.869	326.619
0.901	-351.672	318.268
0.934	-325.691	306.205
0.968	-300.638	297.854
1.001	-276.513	283.936
1.034	-255.171	273.729
1.068	-231.046	259.81

Modelos matemáticos obtenidos.

El grupo colaborativo analizó cada una de las gráficas mostradas (1, 2 y 3) y relizaron el ajuste con la técnica de mínimos cuadrados con base en los datos proporcionados por Tracker (Ver figura 8).

Enseguida se muestra la comparación realizada por el grupo colaborativo (Ver figura 9) de los ajustes con los datos considerando el tiempo t y la distancia vertical y , (es decir, la gráfica 2).

Figura 9. Comparativo de la gráfica obtenida en Tracker (color negro), ajuste cuadrático (color azul), ajuste cúbico (color verde) y el correspondiente modelo matemático



Conclusiones del grupo colaborativo. ...”También hicimos el ajuste con un polinomio de grado 1, 2, 3, 4 y 5, pero vimos que el de grado 1 no se asemeja a nuestros datos y el de grado 2 es el mejor ajuste... Al analizar un segundo fenómeno podemos darnos cuenta de que un modelo matemático sea cual sea el caso o situación se ajusta para darnos resultados concisos los cuales nos pueden ayudar para hacer predicciones sobre que altura llevará el balón en cierto tiempo, qué distancia habrá recorrido una persona, etc....”

Se observa que en los fragmentos del reporte elaborado por el grupo colaborativo 2, aquí presentados, se manifiestan los elementos de las representaciones semióticas en las dos transformaciones: tratamiento y conversión. La primera se manifiesta cuando calculan el ajuste con la técnica de mínimos cuadrados sin salir del registro analítico, y cuando a través de la misma situación obtienen gráficos diferentes al considerar los distintos parámetros (gráfica 1, 2 y 3) dentro

del registro gráfico, mientras que las conversiones se manifiestan a partir del registro verbal (descripción de la situación), hacia el registro numérico (obtención de datos proporcionados por Tracker), posteriormente al registro gráfico (obtenidos en Tracker y los gráficos obtenidos mediante los ajustes) y finalmente al registro analítico (obtención del modelo matemático mediante el ajuste polinómico con la técnica de mínimos cuadrados).

Al analizar los reportes entregados, se observa que después de describir la situación en cuestión, fueron capaces de establecer sus propios parámetros e identificar cuáles de las gráficas tenía sentido analizar con mayor importancia, por ejemplo, en el movimiento del ciclista, el grupo expuso que los datos que trabajaron fueron la distancia horizontal y el tiempo porque la distancia vertical nunca cambiaría ya que el ciclista mediría lo mismo en todo momento, así que sólo analizaron, la gráfica distancia horizontal contra el tiempo, pero también durante la exposición identificaron otros factores que no tomaron en cuenta, enseguida se muestra un fragmento del diálogo:

Integrante 1: Puede ocurrir que el ciclista se canse o no este controlando bien la bicicleta o que no tenga bien ajustada la velocidad.

Integrante 2: También, es que creo, que es una bicicleta para hacer acrobacias (risas) y no puede aplicar (el ciclista) tanta velocidad a una bicicleta de ese estilo, tenía que haber sido una bicicleta especial para corredores que son más ligeras, que tienen las velocidades más blandas... que estén más ajustadas las velocidades.

Profesora: pero...aún con todo eso...si en nuestras manos estuviera evitar todos esos factores... ¿creen que el modelo matemático hubiera sido el mismo?...si la situación es la misma, ¿también hubieran obtenido una parábola?

Todos: Sí.

Integrante 3: Si hubiéramos resuelto todos esos problemas, que no se cansara ni nada, se supone que la aceleración tiene que ser constante y la gráfica obtenida seguiría siendo una parábola...

Claramente se observa que aunque los alumnos identificaron otros factores, tienen la certeza que el tipo de modelo matemático no cambiaría de forma, aunque otra persona (delgada, alta, joven, adulto, hombre, mujer) fuera quien realizara el movimiento no dejaría de ser un movimiento parabólico, situación que propicia la aprehensión del conocimiento.

■ CONCLUSIONES

Las actividades que incluyen situaciones problema en materias de matemáticas permite efectuar tratamientos y conversiones para un mejor entendimiento de las matemáticas, junto con el empleo de la tecnología y el trabajo colaborativo propician al alumno a dejar el rol pasivo para tomar el rol activo en el propio aprendizaje ya que a través de su experiencia construyen conceptos y desarrolla habilidades; mediante la interacción con sus compañeros, se enriquecen y fortalecen las ideas, establecen acuerdos, relacionan los conocimientos adquiridos en el salón de clases, exponen argumentos, elaboran conclusiones y establecen relaciones con otras situaciones, por ejemplo, al exponer el grupo colaborativo 1, la profesora pregunta si es posible relacionar otra situación con un modelo matemático similar al obtenido con el tiro a canasta, a lo que un integrante responde:

Sí. Creemos que podría ser utilizado en otras situaciones como el lanzamiento de misiles para predecir sus trayectorias. En general, el tiro de canasta puede ser relacionado con cualquier situación que sea de tiro parabólico o movimiento de proyectiles.

Esto indica que es capaz de relacionar lo realizado con otras situaciones diferentes a las que ha trabajado, hecho que es muy importante al aprender matemáticas, ya que muchas veces los estudiantes aplican ciertas técnicas para resolver el problema, pero en otro contexto o en otra situación ya no lo hacen.

Con base en las entrevistas realizadas sobre el programa Tracker se concluye que el empleo del programa como recurso tecnológico motiva al alumno a aprender matemáticas, facilita la interpretación de datos y gráficos obtenidos a partir de situaciones cotidianas y fáciles de identificar para el estudiante, también le permite construir el conocimiento, a reflexionar sobre las técnicas empleadas, los parámetros y variables que intervienen en el análisis de un fenómeno en cuestión.

En términos generales les gustó mucho trabajar con el programa Tracker, ya que mencionan que sería muy útil en cursos en el área de física lo cual es significativo ya que motiva a seguir usando el programa. Además la participación de los estudiantes en la toma de videos en un ambiente como el Coliseo Olímpico del CUCEI en el cual pasan la mayor parte de su tiempo, los motiva y divierte pues aplican y relacionan las matemáticas con una situación tan simple como correr de un lado a otro, lanzar y patear un balón y andar en bicicleta, en las que encuentra la utilidad de conceptos y algoritmos matemáticos los cuáles no aplicaban en un contexto diferente al cual lo habían aprendido, objetivo se desea lograr durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
- Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes Intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

- Ezquerro, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.
- Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.
- Hitt, F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática*, 1(1). 1-11.
- Pantoja, R., Ulloa, R, Nesterova, E. (2013). La modelación matemática en situaciones cotidianas con software AVIMECA y MATHCAD. *Revista virtual GONDOLA*. ISSN 2145-4981 2010