

## LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS AYUDAN A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

**Jairo Alberto Garcia Pereira, Eliecer Aldana Bermúdez**

Universidad del Quindío (Colombia)

jairoprofe@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co

**Palabras clave:** representaciones semióticas, análisis didáctico, pensamiento algebraico

**Key words:** semiotic representations, didactic analysis, algebraic thinking

**RESUMEN:** Este trabajo constituye un reporte parcial de investigación que plantea la implementación y desarrollo de secuencias didácticas, para comprender la forma como los estudiantes logran pasar de un pensamiento numérico a uno de tipo algebraico, mediante los registros de representación semiótica. El objetivo es comprender cuáles son las etapas que han superado estudiantes de grado octavo de escolaridad, desde el manejo del número en lo aritmético, hasta el aprendizaje e interpretación de expresiones algebraicas, para ello se utilizarán las diversas transformaciones semióticas de tratamiento y conversión, mediante la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología. A partir de los resultados se pueda comprobar que los estudiantes pueden aprender e interpretar con mayor facilidad las aplicaciones algebraicas a partir de una adaptación curricular con la motivación y optimización de las prácticas educativas.

**ABSTRACT:** This paper is a partial research report presented by the implementation and development of teaching sequences to understand how students manage to pass a number of algebraic thinking one type by records of semiotic representation. The goal is to understand what are the stages that have passed eighth grade students of schooling, from managing the number in arithmetic, to learning and interpretation of algebraic expressions are, to do the various semiotic transformation of treatment and conversion they will be used by the application of engineering and teaching methodology. From the results can be proven that students can learn and interpret algebraic applications more easily from one educational program with motivation and optimization of educational practices.

## ■ INTRODUCCIÓN

La presente investigación se realiza luego de una larga experiencia en la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase; haremos una reflexión sobre nuestra práctica docente dirigiendo una mirada a la actuación de los alumnos frente a los contenidos matemáticos que nos hemos propuesto analizar en el paso de lo numérico a lo algebraico. Para lograr este objetivo nos apoyaremos en la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas de Duval (1999), estudiaremos las dificultades procedimentales, cognitivas y aptitudinales que se presentan en el aprendizaje en la dicha transición. En nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas, encontramos que las dificultades sobre la comprensión de las nociones matemáticas se presentan en el alumno. En la búsqueda de un marco teórico encontramos que la causa de estas dificultades según la teoría de Duval tienen dos fuentes principales: la complejidad de los tratamientos en los registros multifuncionales y la complejidad cognitiva de las conversiones de un registro a otro.

Una particularidad que tiene la matemática es que un objeto sólo puede describirse a través de alguna de sus representaciones o registros debido a que no se puede tener acceso directo al mismo mediante la percepción o por medio de una experiencia intuitiva inmediata. En este sentido, se requiere de un registro que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de los cuales el estudiante pueda aproximarse a dicho objeto.

De acuerdo con (Duval, 2004), se distinguen dos tipos de operaciones cognitivas de representación en el pensamiento matemático: el tratamiento y la conversión. El tratamiento de una representación es la transformación de la misma en otra dentro del mismo registro donde ha sido formada. En cambio, la conversión requiere de un cambio de registro: es la transformación de una representación en otra, correspondiente a otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Una exigencia básica para la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones. Es decir, se puede afirmar que un alumno ha comprendido un concepto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Por lo tanto, la coordinación de registros no es la consecuencia del entendimiento matemático sino que es una condición esencial debido a que cada sistema de representación permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes.

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente se hace necesario tener representaciones de los mismos. Como lo señala el mismo (Duval, 2000, p.4) "... el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (botánica, geología, astronomía, física), no existen otras maneras de ganar acceso a los objetos matemáticos sin producir algunas representaciones semióticas".

## ■ PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Según el Informe (Cockcroft, 1985, p. 4), "la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen como medio de comunicación, y que ayuda a hacerlas "útiles", puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar". En su estructura, el álgebra como lenguaje

encierra los conceptos de variabilidad y generalización de la aritmética, que hacen, que su comprensión, presente una serie de dificultades al interiorizar los conceptos algebraicos que deben estructurar la formación académica de estudiantes hoy en día. “El álgebra parece ser fuente de gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos” (Cockcroft, 1985, p. 4).

El conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental del álgebra se apoyan enriqueciéndose mutuamente, pues el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental en que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos, mientras que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual en que los símbolos adquieren significado y se retienen y aplican más fácilmente los procedimientos (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 8).

Diferentes autores (Kieran, 1992; Kieran y Filloy, 1989; MacGregor y Stacey, 1993; Gallardo, A., & Pizón, M. 2000) señalan las siguientes dificultades de los alumnos en la transición de la aritmética al álgebra; a) *Generalización equivocada de procedimientos aritméticos*: Haber aprendido a pensar y operar con símbolos numéricos dificulta la comprensión de la operación con letras y las reglas de operación en las ecuaciones. b) *Resistencia a emplear ecuaciones*: los alumnos primero los resuelven con una operación aritmética y luego intentar adivinar la ecuación, pero sin comprender cabalmente el significado de esta. c) *Dificultades en el empleo de los signos y expresiones*: Dos dificultades centrales en el aprendizaje del álgebra son la “condensación” (cuando se tiene más de un significado para una expresión) y la “evaporación” (una pérdida del significado de los símbolos). d) *Dificultades para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problema*: La confianza en métodos intuitivos y que se centren en conseguir “de alguna forma” la respuesta va en contra de que vean las relaciones enunciadas en el problema y de que sistematicen su método de solución. e) *Equivocaciones en la interpretación de las variables*: La experiencia de los estudiantes en la escuela con las letras de ecuaciones se reduce a fórmulas como  $A = b \times h$ ; esto puede provocar que los alumnos traten las letras en ecuaciones como incógnitas con un valor fijo, más que como números generalizados o como variables. f) *Desconocimiento del significado de la igualdad*: Los alumnos manejan el signo de igual como una señal de hacer algo e ignoran el significado de la igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación. g) *Omisión parcial de la incógnita*: Los estudiantes no perciben la incógnita en el segundo miembro en ecuaciones; por ejemplo, en  $x + 2x = 3 + x$  ignoran la  $x$  del miembro derecho y presentan  $3x = 3$  como resultado de la ecuación anterior. h) *Interpretación equivocada de la concatenación de términos algebraicos*: La concatenación en aritmética denota adición; por ejemplo, 45 significa  $40 + 5$ ; sin embargo, en álgebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo  $5b$  es  $5 \times b$ , lo que confunde a los estudiantes. i) *Conjunción de términos no semejantes*: En álgebra los términos diferentes deben tratarse en forma independiente; es común que el estudiante ignore las diferencias; por ejemplo, en  $3 + 5x = 8x$  los estudiantes consideran como semejantes las expresiones 3 y  $5x$ . j) *Inversión incorrecta de operaciones*: Los estudiantes desconocen el procedimiento que lleva a la transposición de términos en una ecuación o bien la realizan con una regla incorrecta.

Estos y otras problemáticas son tan frecuentes en muchos de nuestros estudiantes, a lo largo de su educación secundaria. En el paso de lo numérico (la aritmética) a lo algebraico, así como el dominio significativo de los conceptos aritméticos, será fundamental a la hora de reducir estas deficiencias. Pero no debemos olvidar que no se trata de evitar el error sino de provocar la

discusión acerca de los mismos para comprender la conveniencia o inconveniencia de ciertos procedimientos.

### ■ MARCO REFERENCIAL CONCEPTUAL

En este estudio se toma como referencia los sistemas semióticos de representación de (Duval 2004, p.25), quien afirma que “No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. [...] porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación”. El manejo de los conceptos relacionados con el número y su transición al álgebra hacen que el educando utilice variadas representaciones (verbal, algebraica, diagrama, gráfica) de correspondencia y articulación entre ellas.

El aprendizaje del álgebra escolar genera en los estudiantes muchas *dificultades* que tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas hacia el álgebra, que se conectan en redes que se concretan y se manifiestan dificultades, que se pueden abordar desde varias perspectivas. Asociadas a *la complejidad de los objetivos del álgebra*. Estos operan a dos niveles, el nivel semántico: los signos son dados con un significado claro y preciso, el nivel sintáctico: los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado, estos dos aspectos son los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y complejidad de los conceptos matemáticos. Asociadas a *los procesos de pensamiento en álgebra*, ponen de manifiesto la naturaleza lógica del álgebra. Asociadas a *los procesos de enseñanza*, tienen que ver con la institución, con el currículo y los métodos de enseñanza. Asociadas a *los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes*, tiene que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual.

Por otra parte el desarrollo del pensamiento matemático está lleno de obstáculos caracterizados como *epistemológicos*. Sin embargo estos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como *didácticos*. Ahora bien, la adquisición por parte del estudiante de nuevos esquemas conceptuales, está salpicando de obstáculos que podemos considerar *cognitivos*.

### ■ METODOLOGÍA

La metodología de investigación es de tipo cualitativa, porque se trata de describir e interpretar la forma como los 30 estudiantes de un colegio de la ciudad de Cali-Colombia, de estrato 3, llegan a la comprensión de un concepto matemático. De acuerdo con (Bisquerra, R. 2009), una metodología cualitativa e interpretativa tiene como objetivo explorar las relaciones sociales y describir la realidad tal como la experimentan los sujetos de estudio, sus métodos nos permitirán seleccionar el camino para obtener la información confiable, que se acople a los requerimientos que demanda la ciencia. Se utilizó la técnica de campo que permite la observación en contacto directo con el objeto de estudio, y el acopio de información a través de test, secuencias de trabajo y entrevistas semiestructuradas, que permitan confrontar la teoría con la práctica en la búsqueda de la verdad objetiva.

Y para lograrlo nos apoyaremos en la Ingeniería Didáctica, que se sustenta en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991). En su proceso metodológico se distinguen cuatro fases: 1. análisis preliminares, 2. diseño y análisis a priori de las situaciones, 3. Experimentación y 4. análisis a posteriori y evaluación, de tipo cualitativa, descriptiva, basada en los sistemas semióticos de representación de Duval, con estudiantes de educación básica secundaria; por ello se han utilizado las secuencias de enseñanza en clase y los registros del desempeño de los estudiantes en las clase, mediante las fases siguientes: a) explicación de conceptos aritméticos relacionados con noción de expresión algebraica, b) conformación de grupos aleatorios c) planteamiento de situaciones problemas, d) metacognición por los estudiantes, d) trabajo individual de los estudiantes en registros de representación gráfico e) cambio de registro de representación gráfico al algebraico. En su proceso metodológico se distinguen cuatro fases: 1. Análisis preliminares, 2. Diseño y análisis a priori de las situaciones, 3. Experimentación y 4. Análisis a posteriori y evaluación.

### ■ ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis se tuvo en cuenta las fases planteadas en el diseño metodológico, durante la primera fase: *Los análisis preliminares*, que están constituidos a su vez por un conjunto de análisis a saber: el análisis de la enseñanza de las matemáticas y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, análisis de restricciones donde se va situar la realización efectiva y finalmente los objetivos de la investigación.

En el primer análisis nos referimos a la descripción de las formas, técnicas o métodos de enseñanza, a las concepciones predominantes de lo que es la enseñanza, las estrategias de los profesores para el logro de la asimilación de los objetos matemáticos, las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, las cuales se han compilado en forma general, relacionada con sus competencias, aptitudes o actitudes que se detectaron como resultados de otras investigaciones.

Finalmente, en esta etapa, se hace el análisis en cuanto a las formas o lugares en las que se ha dado el conocimiento de la matemática, así como las formas o métodos de su validación, también desde un enfoque cognitivo permitió distinguir o las concepciones, las características, estrategias, deficiencias o dificultades que los estudiantes tienen respecto al objeto matemático que motiva esta investigación, el tercer enfoque de este mismo análisis se hace desde el campo de lo didáctico, nos permite incidir en la forma como se ha tratado el objeto matemático en el ambiente educativo, las convenciones o desventajas, así como los conceptos o competencias que están presentes o ausentes de la actividad de aprendizaje.

*El diseño y análisis a priori de las situaciones*, en esta segunda etapa de la ingeniería didáctica implicó el análisis de las consideraciones asociadas al objeto matemático de estudio, para la estructuración, forma y dimensión de la estrategia didáctica, así como las variables, los medios o herramientas para el logro los objetivos, por otra parte el establecimiento de las reacciones, actitudes, habilidades y aptitudes que esperamos de los estudiantes frente a la estrategia didáctica.

En *la Experimentación*, tercera etapa de esta metodología, colocamos en marcha de la estrategia didáctica diseñada, en esta explicaremos las condiciones en las que se llevó a la práctica: el lugar,

las actividades curriculares, los alumnos, la duración, los momentos y la dinámica que se siguió para lograr en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.

La última etapa, *Análisis a posteriori y evaluación* de la ingeniería didáctica, al momento de la elaboración de este artículo no se había desarrollado, por lo cual tomaremos como referencia los ejemplos de preguntas que corresponden a una prueba de a-priori, donde se trata de conocer los conocimientos que tienen los estudiantes sobre algunos conceptos algebraicos y el tratamiento que le dan, en relación con la apropiación de las propiedades de la aritmética, la comprensión de la igualdad en varios contextos matemáticos y la aplicación de las variables.

### Grafico 1. Respuesta de un estudiante (E1)

Agrupar de dos formas diferentes cada uno de los siguientes polinomios y encontrar su valor en cada caso.

a)  $(-4) + (-16) - 14 + 7 - (-17) = -34 + 24 = -10$

1)  $[(-4) + (-16) - 14 + 7 - (-17)]$   
 $[-4 - 16 - 14 + 7 + 17]$   
 $-34 + 24 = -10$

b)  $[(-4) + (-16)] + [14 + 7 - (-17)]$   
 $[-20] + [31]$   
 $-10$

Fuente: libro de Santillana 7

### Grafico 2. Respuesta de un estudiante (E2).

Agrupar de dos formas diferentes cada uno de los siguientes polinomios y encontrar su valor en cada caso.

a)  $(-4) + (-16) - [14 + 7 - (-17)] = [(-4) + (-16) - 14] + 7 - (-17)$   
 $-34 + 7 + 17 = 10$

b)  $[-20] - [+38]$   
 $-20 - 38 = -58$

Fuente: libro de Santillana 7

De un grupo de estudiantes de grado octavo, al que se le aplicó la prueba a-priori, presentamos dos estudiantes, a los que se les indicó resolver la pregunta teniendo en cuenta lo aprendido en los grados anteriores y encontramos como las respuestas de **E1** y **E2** son totalmente diferentes, en **E1** se nota la apropiación de conceptos aritméticos relacionados con las propiedades de agrupación, que le permitieron concluir que así agrupara de dos formas diferentes la expresión el resultado deberá ser igual. Mientras que **E2**, cumplió la consigna de agrupar la expresión de dos formas diferentes, pero no se percató del hecho, de que por cada forma de agrupación le dio una respuesta diferente.

Lo cual nos permitió corroborar uno de los aspectos tratados en el planteamiento del problema al inicio del presente artículo y que se relaciona con la no aplicación correcta de los procesos de agrupación, que forma parte de los preconceptos que un estudiante debe tener para iniciar la comprensión de las operaciones con expresiones algebraicas.

En otro punto de la prueba planteamos la siguiente pregunta.

### Grafico 3. Respuesta de un estudiante (E1)

Alicia está jugando a un pasatiempo que consiste en responder preguntas. Por cada respuesta correcta obtiene tres puntos, pero por cada respuesta incorrecta pierde dos puntos. Si el pasatiempo consta de 30 preguntas y Alicia contesta bien veintidós preguntas, ¿Cuántos puntos obtiene Alicia?

$$\begin{array}{r} 30 \\ - 22 \\ \hline 08 \end{array}$$

8 preguntas le quedaron  
mal

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 3 \\ \hline 66 \end{array}$$

66 puntos buenos

$$8 \times 3 = 24$$

Porq' 
$$\begin{array}{r} 66 \\ - 16 \\ \hline 50 \end{array}$$

R=50 puntos obtienen  
Alicia

En esta pregunta vemos como **E1** centra su proceso de solución del problema, en aplicación de procedimientos fundamentados en operaciones aritméticas como son la suma, resta y multiplicación, no se observa la incorporación de variables como una estrategia válida para encontrar la solución del problema planteado

Las demás etapas de la investigación están en proceso de ejecución y no se tiene datos que nos permitan establecer un comentario, pero se espera lograr en la segunda fase, la conformación de grupos aleatorios, dichos grupos son formados por filas sin tener en cuenta características de afinidad, ni desempeño académico. Es en esta fase se nombra un monitor por cada grupo conformado, en la tercera fase se plantean problemas de diversas situaciones, los cuales pueden ser contextualizados y en la cuarta fase los estudiantes analizan e interpretan. Este proceso consiste en realizar los aportes personales, teniendo en cuenta conceptos aprendidos.

## ■ CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos por los diferentes instrumentos podemos afirmar que se confirman las dificultades y obstáculos relacionados en otras investigaciones frente al proceso de construcción conceptual y procedimental, de los objetos matemáticos que no les permiten comprender temas de mayor complejidad algebraica.

El acercamiento semiótico al lenguaje algebraico, mediante la integración de textos problema que permitan la conjugar lo numérico y lo geométrico donde las fuentes de significado y los sistemas de representación semióticas de tratamiento y conversión como las planteadas por Raymond Duval

(1999), solidados en una secuencias didáctica constituyen un enfoque coherente para la consolidación del pensamiento algebraico.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla
- Brousseau, G. (1997). *Research in mathematical education*, Regular Lecture en el 10th. International Congress on Mathematics Education (ICME10). Dinamarca.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. (2a Edición en colaboración con Marie-Alberte Joshua), Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, Editions.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2000), *Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address)*, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (tome I), Editors: Taddao Nakahara and Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), pp. 55-69.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Santiago de Cali: PeterLang S.A.
- Gallardo, A., y Pizón, M. (2000). *Semantica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales*. Educación matemática, 12(2), 81.
- Hiebert, J.; y Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, en Hiebert, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229- 240.
- MacGregor, M.; Stacey, K. (1993). *Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), 217-232.