COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD AL INICIO DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ana María Ojeda Salazar
CECyT No 4 “Lázaro Cárdenas”, DME-Cinvestav del IPN (México)
rogeliomartinez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: Errores aleatorios, enfoque frecuencial probabilidad

Key words: Random errors, frequency approach probability

RESUMEN: Se investigó cualitativamente (Vasilachis, 2006) la comprensión de 42 estudiantes de primer semestre de bachillerato tecnológico del enfoque frecuencial de la probabilidad. Este enfoque no es explícito en el programa de estudio (DEMS, 2014). Los docentes de Física y Matemáticas acordaron vincular sus enseñanzas (véase Martínez, Giordano y Ubaldo, 2013) para considerar la aleatoriedad de los errores en mediciones físicas y el tratamiento estadístico de los datos experimentales. Las respuestas a un cuestionario que antecedió al curso Matemáticas I delataron una educación matemática básica insuficiente. Los desempeños de los estudiantes durante la enseñanza y entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999) a tres de ellos revelaron incomprensión de la media, desconocimiento de las medidas de dispersión, de las combinaciones, de la frecuencia relativa para estimar la probabilidad.

ABSTRACT: This qualitative research (Vasilachis, 2006) focused on 42 students’ understanding of the frequency approach to probability at their entrance into the technological high school. This approach is not explicit in the syllabus (DEMS, 2014). The teachers of Mathematics and Physics agreed to link their teaching (see Martinez, Giordano and Ubaldo, 2013) to consider the randomness of errors in physical measurements and the statistical processing of experimental data. Answers to a questionnaire applied before the Mathematics I course started revealed students’ insufficient basic mathematical education. The students’ performances during the teaching and the semi-structured interviews (Zazkis and Hazzan, 1999) to three of them showed their unawareness of the mean, of the dispersion measurements, of combinations and of the relative frequency to estimate the probability.

INTRODUCCIÓN

En el marco de un acuerdo académico interinstitucional (CECyT No 4 IPN/DME Cinvestav), los docentes de Matemáticas y de Física conjuntamente identificaron objetivos vinculantes (véase Martínez, Giordano y Ubaldo, 2013) entre las unidades de aprendizaje de Matemáticas y de Física, para promover la aplicación de conceptos matemáticos en el estudio de situaciones presentadas en otras disciplinas. El laboratorio de Física devino el escenario empírico para que los estudiantes obtuvieran datos del resultado de los experimentos, dotaran de sentido a su tratamiento matemático e integraran conceptos de las dos disciplinas. A partir del ciclo escolar 2014-2015A, el Instituto Politécnico Nacional implementó nuevos programas de estudio para algunas unidades de aprendizaje del bachillerato tecnológico. En particular, es de nuestro interés el de Matemáticas I (DEMS, 2014), común a las diferentes ramas del conocimiento y que se imparte obligatoriamente en el primer semestre. La propuesta institucional prescribe desarrollar las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) de los alumnos (DEMS, 2014), así como el logro de aprendizajes significativos para su formación integral. Esas competencias a desarrollar suponen lograr abstracciones aritméticas, estadísticas y probabilísticas, mediante el descubrimiento por los estudiantes de situaciones de su entorno académico y social que requieran la toma de decisiones y la solución de problemas (que ellos identifiquen) que promuevan tales logros; además, son de especial utilidad para el resto de los cursos de matemáticas, así como para todas las Unidades de Aprendizaje de Física y Química. La Unidad *Matemáticas I* incluía números reales, estadística descriptiva, técnicas de conteo, axiomas de probabilidad y probabilidad condicional.

Sin embargo, debido a los desacuerdos de la Asamblea General Politécnica relativos, entre otras cuestiones, a esa propuesta institucional, se interrumpió la enseñanza respectiva a partir del 25 de septiembre de 2014 y se le reanudó hasta el 7 de enero de 2015 (http://comunicacionsocial.ipn.mx/documents/ gaceta/biss%201175.pdf), por lo que a la generación 2014-2017 sólo se le impartió la enseñanza de la primera unidad, “Números Reales”, con su correspondiente evaluación y se regresó al plan de estudios anterior (DEMS, 2008), con la unidad de aprendizaje “Álgebra”.

Por tanto, la investigación referida a estocásticos que planteamos se inició con un grupo de estudiantes de nuevo ingreso al bachillerato, de quienes recopilamos los primeros datos para considerar las preguntas de investigación planteadas. No obstante, se hizo un seguimiento de los casos que, por esos primeros datos, se consideraron de interés para nuestro proyecto. Para ese grupo, los contenidos de Matemáticas para el primer semestre fueron: números reales, lenguaje algebraico y operaciones con polinomios, funciones, ecuaciones lineales y funciones y ecuaciones cuadráticas. La investigación continuó con otro grupo (estos resultados no se incluyen aquí), en el curso de “Probabilidad y Estadística” del plan de estudios 2008 (DEMS), propuesto para sexto semestre y obligatorio para los estudiantes de todas las especialidades.

MARCO DE REFERENCIA

Heitele (1975) encuentra un primer marco relacional para sus puntos de vista de la enseñanza de estocásticos en la exposición de Bruner. Una de sus propuestas es ofrecer a los niños actividades de estocásticos tan pronto como en las etapas pre-operacional y de las operaciones concretas, para que las desarrollen como ‘*intuiciones auxiliares*’, sobre las cuales se pueda construir la enseñanza más analítica en los grados superiores. Subraya la importancia de vincular la enseñanza de estocásticos a experiencias intuitivas. Heitele propone diez ideas fundamentales de estocásticos: 1) Medida de probabilidad, 2) Espacio muestra, 3) Adición de probabilidades, 4) Regla del producto e Independencia, 5) Equiprobabilidad y Simetría, 6) Combinatoria, 7) Modelo de urna y Simulación, 8) Variable estocástica, 9) Ley de los grandes números, 10) Muestra. En particular, la introducción de la idea de ley de los grandes números en la enseñanza ofrece una oportunidad para promover experiencias empíricas concretas de los estudiantes con esa red conceptual, que implica la consideración de la intervención del azar en repeticiones de un fenómeno, de las ideas de variable estocástica, muestra, independencia, espacio muestra, medida de probabilidad. Fischbein (1975, pp. 58-65) se ha referido al desarrollo de las intuiciones probabilísticas de los niños y también ha puesto de relieve la conveniencia de la enseñanza de la probabilidad desde etapas tempranas, puesto que conforme avanza la edad se dificulta la idea de azar. El autor ha definido la intuición como un programa de acción parcialmente autónomo dentro de la cognición y que es una síntesis de la experiencia individual en un dominio dado. Desde esta óptica, los juegos de probabilidad son la expresión de una intuición particular, la intuición de la frecuencia relativa, que es la base para introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Pollatsek, Lima y Well (1981) ya han señalado en particular las dificultades de los estudiantes para comprender la media ponderada y señalan que el aprendizaje de una fórmula de cálculo para sustituir en ella los datos no es suficiente para comprensión del concepto subyacente.

Shaughnessy y Ciancetta (2002) se han referido a dificultades de los estudiantes para reconocer la variabilidad en un entorno de probabilidad y destacan la importancia de que la consideren para dar sentido a los datos.

Una importante contribución al desarrollo de la probabilidad provino de la repetición de mediciones, las cuales constituyen un componente básico en los experimentos. A los errores de medición se agregan los aspectos inherentes de aleatoriedad. El concepto de error en las ciencias está asociado a la incertidumbre y se procura en toda medición conocer los límites de esta incertidumbre y el mejor valor de la magnitud x (objeto de las mediciones) con cierta probabilidad. Se entiende por error la diferencia entre el valor obtenido de una medida y el valor “verdadero” de la magnitud. Este último permanece desconocido, pero en su lugar se puede utilizar el valor más probable. Entre las clases de errores más frecuentes están los errores aleatorios que son consecuencia de las múltiples fluctuaciones incontrolables e independientes de los factores que intervienen en una medición, es decir, pueden ocurrir en una medida y en otra no (Hainaut, 1978); también afectan a las medidas en ambas direcciones (por exceso o por defecto). Si afectan a todas las medidas de una serie de mediciones ocurren los errores sistemáticos debidos: a un instrumento de medición, al método de observación, a una desatención del observador a un incidente en la medición; en particular, la diferencia de posición para la lectura de la línea que nos indica el valor depende del ángulo donde se observe y el error se denomina de paralaje. Los conceptos básicos implicados en el tratamiento de los errores aleatorios en las mediciones son: medidas de tendencia central, medidas de dispersión y ciertos índices de la variabilidad del conjunto de observaciones que se estudian. De acuerdo a Swijtink (1987):

> Un paso decisivo en la justificación probabilística de cualquier método para resolver conjuntos inconsistentes de observaciones fue tomado dado por Thomas Simpson en 1755, cuando introdujo la noción de probabilidad de cometer un error de un cierto tamaño conectado con una sola observación independiente del propio valor verdadero. Esto condujo a la idea de una

distribución de probabilidad de los errores relacionados con un determinado procedimiento de medición. (p. 272)

MÉTODO E INSTRUMENTOS

Investigación documental (Cortés y García, 2003). Para la propuesta institucional, programa de estudios (DEMS, 2014), así como la correspondencia entre las actividades planteadas en éste y su contribución para alcanzar esos objetivos.

Cuestionario de diagnóstico. Para conocer acerca de su conocimiento matemático adquirido en su educación básica, los docentes diseñaron un cuestionario de diagnóstico en dos modalidades: la modalidad A, con dos secciones, está constituida por ocho reactivos de preguntas abiertas en la primera sección y, dos preguntas abiertas en la segunda sección; la modalidad B está constituida por 15 reactivos, todos de opción múltiple. Los contenidos de matemáticas a los que se refirieron los reactivos planteados, excepto el reactivo 15 de la modalidad B, están incluidos en el programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 2011). La Tabla 1 resume la caracterización de los reactivos de estocásticos incluidos en los cuestionarios de diagnóstico. El cuestionario se presentó a los estudiantes impreso, para su contestación individual manuscrita, en el aula de matemáticas a la hora de la clase, en una sesión de 2 horas. No se permitió borrar.

Tabla 1. Caracterización de los reactivos de estocásticos en el cuestionario de diagnóstico.

		Reactivos Modalidad A					Reactivos Modalidad B			
Criterio		3I	6I	4II	7II	8II	11	13	14	15
Ideas fundamentales de estocásticos	Medida de probabilidad						✓		✓	
	Espacio muestra					✓				
	Combinatoria	✓								
	Variable estocástica		✓		✓			✓		
	La idea de Muestra			✓						
Otros conceptos matemáticos	Razones y proporciones			✓			✓			
	Operaciones aritméticas	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	
Recursos semióticos	Lengua natural escrita	✓								
	Arreglos tabulares							✓		
	Diagramas de Venn									✓
	Signos matemáticos				✓				✓	
Términos empleados	Sin orden	✓								
	Media		✓							
	probabilidad								✓	

Estrategia de enseñanza. Por la colaboración entre docentes de Física y de Matemáticas indicada en la introducción, el laboratorio de Física fue el escenario para introducir en la enseñanza el enfoque frecuencial de la probabilidad, que los estudiantes efectuaran sus propias mediciones experimentales, que trataran los errores aleatorios en las mediciones y que comprobaran sus propias conjeturas para obtener la mejor medida. Para poner en juego esta estrategia, de los 42 estudiantes del primer semestre, 12 se incorporaron al laboratorio de Física I con un grupo del tercer semestre, para recibir la enseñanza y la práctica de "Mediciones directas y calibrador lineal", con el Vernier, siguiendo el practicario habitual.

Entrevista semiestructurada. De los 12 estudiantes que asistieron al laboratorio de Física, por su desempeño durante la enseñanza y su disposición, se aplicó una entrevista semiestructurada individual (Zazkis y Hazzan, 1999) a tres de ellos (a quienes identificamos como "E_1","E_2", "E_3"), para profundizar en su comprensión de los conceptos de estocásticos incluidos en el cuestionario de diagnóstico y en la práctica de errores aleatorios. Las tres entrevistas se videograbaron y transcribieron para su análisis.

Criterios de análisis. A los datos recopilados se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados, situaciones de referencia.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE DATOS

La caracterización de los contenidos de estocásticos especificados en la red por competencias (DEMS, 2014, p. 7) para *Matemáticas I* al aplicar la célula de análisis (véase Ojeda, 2006) se resume en la Tabla 2.

Tabla 2. Contenidos de estocásticos especificados en el programa de estudios (DEMS 2014)..

Criterio	Competencia particular 1	Competencia particular 2	Competencia particular 3
Ideas fundamentales de estocásticos		Muestra (datos no agrupados y agrupados), variable estocástica (medidas de tendencia central y de dispersión, cuartiles)	Medida de probabilidad, combinatoria, espacio muestra, adición de probabilidades, probabilidad condicional, modelo de urna y simulación, regla del producto e independencia
Otros conceptos matemáticos	Propiedades de los números reales, razones y proporciones, noción de función.	Números reales, su orden y operaciones, Proporciones. Porcentajes. Particiones. Recta real. Producto cartesiano. Círculo y sector circular	Razones y proporciones, números racionales,
Recursos semióticos	Notación matemática simbólica, lengua natural escrita	Lengua natural escrita, Simbología matemática. Diagrama tallo y hojas, circular, de barras; histograma, polígono de frecuencias, ojiva.	Diagramas de árbol, Tablas y gráficas estadísticas.

Términos empleados		Diagrama circular, histograma, polígono de frecuencias, ojiva, diagrama tallo y hojas, cuartiles, rango, desviación media, varianza y desviación estándar	Evento, probabilidad de ocurrencia, predicción, azar, por lo menos, a lo más, urna, con repetición o sin repetición
Situaciones referentes	Otras áreas del conocimiento y en la vida cotidiana	Del Entorno académico y social	Análisis de tablas y graficas estadísticas que representan relaciones funcionales asociadas a situaciones reales

Cuestionario de diagnóstico. La Tabla 3 presenta los porcentajes de aciertos en la contestación del cuestionario de diagnóstico por modalidad. Hemos indicado con azul los reactivos correspondientes a ideas de estocásticos.

En general, para los estudiantes la modalidad B fue más fácil que la modalidad A, presumiblemente porque todos los reactivos de la primera fueron de opción múltiple; sin embargo, en las contestaciones fue notorio el desorden en la escritura de los resultados, la omisión de unidades y las respuestas sin procedimientos.

Para la unidad A, a sus reactivos 3 y 6, correspondientes a combinatoria y a medidas de tendencia central, respectivamente, se dio el mismo porcentaje de respuestas correctas 28% .Ningún estudiante dio una respuesta correcta al reactivo 5, referente a calcular la altura de un triángulo isósceles. De igual manera ocurrió con el reactivo 8 concerniente a determinar las raíces de una ecuación de segundo grado que contenía un radical en uno de sus miembros.

Tabla 3. Número de aciertos por reactivo por modalidad del cuestionario de diagnóstico.

..

Reactivo	Tema	Aciertos	% Aciertos
	Modalidad A 1ª sección, 19 estudiantes		
1	Escalas o razones y proporciones	15	83
2	Regla de tres	5	28
3	Combinaciones	5	28
4	Graficar con ayuda de tabla	6	33
5	Calcular una altura de un triángulo isósceles	0	0
6	Medidas de tendencia central	5	28
7	Relaciones trigonométricas	1	6
8	Ecuación de 2º grado	0	0
	2ª sección, 19 estudiantes		
1	Proporcionalidad inversa	10	56
2	Máximo común divisor	9	50
3	Regla de tres	1	6
4	Porcentajes	11	61
5	Razón	11	61
6	Recta numérica	4	22

7	Frecuencia relativa	9	50
8	Estimación	10	56
Modalidad B, 23 estudiantes			
1	Mínimo común múltiplo	14	56
2	Operaciones con polinomios	16	50
3	Operaciones con monomios	14	6
4	Obtención de un término en una sucesión	19	61
5	Obtención de regla general de una sucesión	10	61
6	Ecuación de primer grado	17	22
7	Criterios de congruencia	5	50
8	Razones trigonométricas	19	56
9	Ecuación de primer grado	14	56
10	Proporcionalidad inversa	4	50
11	Porcentajes	13	6
12	Representación de una función lineal	6	61
13	Medidas de tendencia central	12	61
14	Probabilidad de eventos	7	22
15	Diagramas de Venn	18	50

Entrevistas semiestructuradas. Presentamos un fragmento de la entrevista al caso E_3. El guion de entrevista incluyó preguntas referidas a las respuestas del estudiante al cuestionario diagnóstico, así como a sus respuestas a la práctica sobre mediciones.

El investigador “I” pidió a “E_3” que midiera el ancho y largo de una hoja con tres reglas de 30, 15 y 10 cm (véase la Figura 1). E_3 obtuvo dos lecturas iguales de las tres. Al mostrar E_3 sus resultados se produjo el intercambio verbal siguiente:

I ¿Cuál es la medida más confiable?
E_3 No sé, pero la que se repite … o a la mejor me equivoqué …
I ¿En qué pudiste haberte equivocado?
E_3 En el cero, que no coincide exactamente.
I Si la hoja fuera más grande, ¿cómo tendrías que colocarte para hacer la lectura?
E_3 Derecho y viendo de frente.

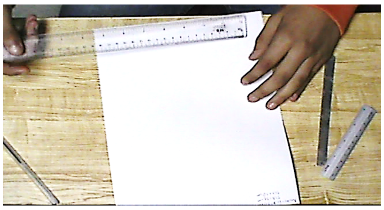
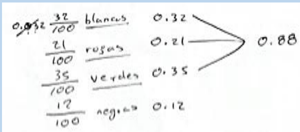
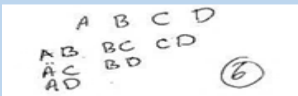
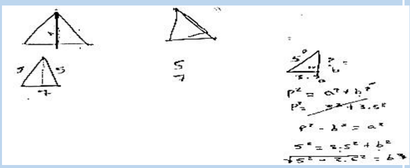


Figura 1. Las tres reglas diferentes.

El estudiante inadvierte la intervención del azar en las mediciones y, en consecuencia, se atribuyó el papel de “valor de la magnitud medida” a la moda, en lugar de a la media aritmética, que es el valor más probable del conjunto de mediciones, que en este caso el mismo realizó y obtuvo los valores correspondientes.

La Tabla 4 presenta ejemplos de las dificultades en esos reactivos de los tres estudiantes considerados para las entrevistas.

Tabla 4. Ejemplos de las principales dificultades en los reactivos de estocásticos del cuestionario diagnóstico

<table>
<tr><th>Contenido</th><th>Ejemplos</th><th>Consideraciones</th></tr>
<tr><td>Medidas de tendencia central</td><td><table><tr><td>Edad en años</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>Frecuencia</td><td>7</td><td>5</td><td>8</td><td>6</td><td>3</td></tr></table></td><td>Para la media, no considera la frecuencia de cada dato, en acuerdo con Pollatsek et al. (1981) e inadvierte la variabilidad (Shaughnessy y Ciancetta, 2002), lo que dificultará comprender la idea de variable estocástica.</td></tr>
<tr><td>Medidas de dispersión</td><td>c) Rango : 1 – 12</td><td>Tiene dificultad para comprender que el rango es una medida de dispersión de los datos.</td></tr>
<tr><td>Frecuencia relativa</td><td></td><td>Se le pide proponer la proporción del contenido de una urna con 10 objetos de cuatro tipos a partir de las frecuencias obtenidas en 100 extracciones al azar con reemplazo. Comete errores de redondeo.</td></tr>
<tr><td>Espacio muestra y medida de probabilidad variable estocástica</td><td><table><tr><td>Intensidad</td><td>Sin lluvia</td><td>Lluvia ligera</td><td>Lluvia moderada</td><td>Lluvia intensa</td></tr><tr><td>Frecuencia (días)</td><td>17</td><td>14</td><td>11</td><td>8</td></tr></table></td><td>Se le dificulta identificar al evento complementario en el enunciado, “no lluvia intensa”, y otros conceptos matemáticos deficientes (fracciones equivalentes).</td></tr>
<tr><td>Combinatoria y recursos semióticos</td><td></td><td>Su arreglo es tabular, no en árbol. El enlistado superior revela la especificación de elementos para el caso particular (en extensión), sin generalizar.</td></tr>
<tr><td>Estimación analógica.</td><td>3.5------3 y 1.2-------2</td><td>Al estudiante se le pide que haga una estimación; su proceso de redondeo revela dificultad con valor posicional y orden en los reales.</td></tr>
<tr><td>Altura de un triángulo isósceles y teorema de Pitágoras</td><td></td><td>Sustituye en el teorema de Pitágoras el valor de la hipotenusa como si fuera un cateto.</td></tr>
</table>

OBSERVACIONES

En general en los reactivos de estocásticos del cuestionario de diagnóstico, el desempeño de los estudiantes fue deficiente. Como ya se señaló, desconocen la variación de la frecuencia de un conjunto de datos, la media ponderada, cómo estimar la probabilidad a partir de la frecuencia relativa y el conteo de combinaciones; también mostraron algunas concepciones erróneas en conceptos matemáticos. Estos conocimientos son algunos de los necesarios para lograr las competencias indicadas en el programa de estudio (DEMS, 2014), pero los más básicos. En las entrevistas se evidenció la incomprensión del objetivo de la práctica de laboratorio, el desconocimiento de la intervención del azar en las mediciones y, en consecuencia, el del papel de su media aritmética como el valor más probable de la medición de la magnitud en cuestión; en su lugar, los estudiantes consideraron la moda. A causa del regreso a los programas de estudio 2008 (DEMS) se interrumpió la enseñanza de Probabilidad y Estadística en primer semestre y se impartió Álgebra. Por lo tanto, se continúa con la investigación y la puesta en juego de estrategias de enseñanza con un grupo del sexto semestre. El enfoque frecuencial de probabilidad no aparece explícitamente en el programa (DEMS, 2014). Los resultados concuerdan con lo señalado por (Salcedo, 2013), de que el recorrido desde las ideas intuitivas hasta los conceptos formales de estocásticos sería posible si se iniciara la enseñanza de la probabilidad desde un enfoque frecuencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cortés, G. y García, S. (2003). *Investigación Documental*. México: Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

DEMS (2014). Dirección de Educación Media Superior. *Programa de Estudios de Matemáticas I.* México: Instituto Politécnico Nacional.

Hainaut, L. (1978). *Cálculo de incertidumbres en las medidas.* México: Trillas.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. En M. Goos (Ed.), *Educational Studies in Mathematics*. 6, 187-205. Holanda: Dordrecht.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Martínez, R., Giordano, M.A. y Ubaldo, P.J. (2013). Matemática y Laboratorio de Física: Hacia una enseñanza interdisciplinaria. En L. Sosa, J. Hernández, y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 379-386. México: Red Cimates.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa, treinta años* (pp. 195-214). México: Santillana-Cinvestav.

Pollatsek A., Lima S. y Well A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. En M. Goos (Ed.), *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204. Holanda: Dordrecht.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Shaughnessy, M. y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* 295-312. Holanda: International Statistics Institute.

Swijtink, Z. G. (1987). The Objectification of Observation: Measurement and statistical methods in the nineteenth century. En Krüger, Daston y Heidelberger, (Eds.) *The probabilistic revolution*, 1, 261-285. Cambridge, MA: MIT.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Zaskiz, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Chosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.