PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Juan Martín Casillas González, Ruth Jocabed Camacho Mosqueda, Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara (México)
martin.casillas70@gmail.com, jocabed.is4028@gmail.com, marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Palabras clave: visualización, representaciones semióticas, cálculo, derivada

Key words: visualization, semiotic representations, calculus, derivative

RESUMEN: Se presentan los resultados preliminares de una investigación cuyo objetivo es evaluar el efecto de una propuesta didáctica que involucra representaciones semióticas de la derivada de una función, sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Las actividades propuestas se diseñaron para que los estudiantes construyan el concepto de la derivada de una función mediante la articulación de sus representaciones numéricas, gráficas y analíticas, con apoyo de la computadora. Se trata de una investigación mixta, de diseño cuasiexperimental con grupo de control no equivalente y pretest.

ABSTRACT: In this paper we present the preliminary results of an investigation whose aim is to prove the effect produced by the use of the didactic proposal which involves several semiotic representation registers of the derivative of a function, by students learning outcomes about that concept. Learning activities are designed to construct the concept of the derivative of a function through the articulation of its analytical, graphical and numerical representations, by using the computer. It is a quantitative and qualitative research, quasi-experimental design with non-equivalent control group pretest.

INTRODUCCIÓN

Para que los estudiantes de los primeros grados universitarios logren la comprensión del concepto de la derivada de una función en un punto, se requiere de un proceso que involucra diversas representaciones semióticas. Si se aborda el significado geométrico, se recurre a la representación gráfica de la función y la recta tangente a ella en un punto dado; la representación analítica o algebraica es más adecuada si se desea construir el significado de la derivada como el límite de un cociente (Radillo, González y Martínez, 2015).

El material que presentamos a continuación forma parte de una propuesta más amplia para el aprendizaje de la derivada. Se presentan los resultados de la prueba piloto de un bloque de tres actividades mediadas por computadora, con apoyo del programa *GeoGebra,* las cuales se pueden abordar justo después de trabajar con el tema de límites para que el estudiante construya activamente la noción de la derivada como razón de cambio, así como su significado geométrico. Nuestro propósito es propiciar que el estudiante reflexione sobre diversos aspectos de la derivada, para enriquecer así el proceso de construcción de dicho concepto.

SOPORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO

La base teórica de la propuesta está conformada por el concepto de visualización y la premisa de que para lograr la comprensión de toda noción matemática es necesario conocer sus principales representaciones, sus significados, así como articular sus diferentes formas de representación (Duval, 1998; Font, s/f). La visualización es abordada como el proceso de formar imágenes con el apoyo de la computadora y utilizar dichas imágenes para la comprensión del concepto de la derivada de una función (Zimmermann y Cunningham, 1991).

El concepto de representación que utilizamos es el de una “señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas” Rico (2000).

El soporte teórico de la propuesta incluye el empleo de diferentes sistemas de representación de una función, pues compartimos la opinión de autores tales como Hitt (2003) y Font (2007), quienes afirman que la Enseñanza de las Matemáticas debiera centrarse en las múltiples formas de representación y en lograr que los estudiantes puedan “transitar” entre ellas de manera fluida, ya que estas representaciones y sus posibles interpretaciones son fundamentales para la comprensión de las Matemáticas, y por lo tanto, para su aprendizaje.

Ahora bien, dado que es deseable que los estudiantes construyan los significados de los conceptos matemáticos mediante el uso de sus diversas representaciones semióticas, el uso de la tecnología, ya sea la computadora y/o calculadora, constituye una práctica didáctica útil y apropiada. Tal es la opinión de Cuevas y Pluvinage (2009), quienes afirman que “visualizar un curso de cálculo diferencial sin el uso de la tecnología, sería desaprovechar uno de los recursos más importantes con los que un profesor puede contar hoy en día”.

Se eligió el programa *GeoGebra* porque la sintaxis de sus comandos es muy similar a la sintaxis del lenguaje matemático, además de ser libre y gratuito. Aun así, se diseñó una actividad inicial denominada "Práctica cero" para que aquellos estudiantes que nunca han utilizado el *GeoGebra*, se familiarizaran con dicho programa.

La propuesta consta de una serie de actividades con apoyo de la computadora, para un total de 4 sesiones de dos horas cada una, adicionales a las sesiones en el aula del curso "Teoría del Cálculo I". Se llevó a cabo una prueba piloto de la propuesta didáctica, bajo un diseño cuasiexperimental de dos grupos, pretest-postest. Se trabajó con 31 estudiantes, 12 de los cuales integraron de manera voluntaria el grupo experimental, mientras que el resto conformó el grupo de control. Todos los alumnos cursaron la materia con el mismo profesor.

A ambos grupos se les aplicó un pretest, para verificar las condiciones iniciales y equivalencias de los grupos. Los temas incluidos en el pretest son: la pendiente de una recta, la ecuación de una recta tangente a una curva dada, la función desplazamiento y su relación con la velocidad de un cuerpo interpretada mediante lectura de gráficas. Posteriormente, los estudiantes que voluntariamente integraron el grupo experimental realizaron las actividades de la propuesta de manera adicional al curso regular. Al finalizar el curso se aplicó un postest, para recopilar información cuantitativa sobre los resultados del aprendizaje de los estudiantes.

El postest estuvo integrado por un bloque de 2 preguntas y 3 problemas que formaron parte de una prueba de aprendizaje que aplicó el profesor del grupo. El análisis de resultados no solo se limitó a considerar las respuestas como correcta o incorrecta, ya que también se analizaron todos y cada uno de los procedimientos seguidos por los estudiantes en la solución de los problemas.

Debido a factores que escapan al control de los investigadores, 7 estudiantes del grupo estudiantes no terminaron las actividades y tampoco todos los estudiantes realizaron el postest, por lo que fueron excluidos del estudio (muerte experimental).

Actividades de aprendizaje

La práctica 1 tiene como objetivo que el alumno calcule la pendiente de una recta tangente a una curva, en un punto dado. Se introduce el concepto de razón de cambio a partir de la definición de pendiente de una recta, usando incrementos y se realizan algunos ejercicios a lápiz y papel, para después comprobarlos mediante el uso de la computadora. En la segunda parte de esta práctica se guía al alumno para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, como el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por ese mismo punto.

El objetivo de la práctica 2 es relacionar la pendiente de la tangente a la curva en un punto, con el valor del punto mismo, para formar una nueva coordenada perteneciente a la función. De esta manera se espera que el alumno construya el concepto de la derivada de una función como función misma y que sepa distinguirla de la derivada de la función en un punto específico.

Las actividades de esta segunda práctica intercalan el uso de la computadora con actividades a lápiz y papel. Para comenzar, se muestra la representación tabular o numérica de una función cuadrática y se pide al estudiante que deduzca la expresión analítica correspondiente. Enseguida el estudiante debe determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por diversos pares de puntos provenientes de la tabulación (figura 1).

Posteriormente se utiliza la computadora para graficar la función dada, que es una parábola y se proporcionan los pasos necesarios para que el alumno observe la variación de los valores de la recta secante y sus representaciones analítica, gráfica y numérica o tabular (figura 2).

La parte final de la práctica se apoya en las herramientas geométricas de *Geogebra,* para encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto dado, y después se determina el mismo valor, a lápiz y papel, mediante límites. El cierre de la actividad consiste en guiar las observaciones del alumno hacia la diferencia entre la derivada como función y la derivada en un punto dado, con base en las actividades realizadas.

La tercera práctica está diseñada para que el alumno analice los casos en los cuáles una función carece de derivada en un punto dado (figura 3), mediante el uso de varios registros semióticos, alternándolos para cada caso, haciendo uso de enunciados con lenguaje formal. Se pretende que, como resultado de estas actividades, el estudiante logre formalizar la noción de la diferenciabilidad de una función.

Figura 1. Fragmento de la práctica 2. Pendiente de rectas secantes a una curva.

1. Definición de la Derivada.

Observa cuidadosamente la siguiente tabla:

x	*y*
-1	-1
-0.8	-1.36
-0.6	-1.64
-0.4	-1.84
-0.2	-1.96
0	-2
0.2	-1.96
0.4	-1.84
0.6	-1.64
0.8	-1.36
1	-1
1.2	-0.56
1.4	-0.04
1.6	0.56
1.8	1.24
2	2
2.2	2.84
2.4	3.76
2.6	4.76
2.8	5.84
2.4	3.76
2.6	4.76
2.8	5.84
3	7

a) ¿A qué función polinómica corresponden las coordenadas de la tabla anterior? Descríbela con palabras. De ser posible deduce o aproxima su fórmula algebraica.

b) Para recordar la fórmula de la pendiente, completa:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\quad - \quad}{\quad - \quad}$$

c) Supongamos que se trazan rectas secantes que pasan por un punto $A=(2,2)$ y por cada uno de los puntos de la tabla. Calcula la pendiente de algunas de ellas:

i) $(-1,-1)$ y $(2,2)$:   iv) $(1.6, 0.56)$ y $(2,2)$:

ii) $(0,-2)$ y $(2,2)$:   v) $(1.8, 1.24)$ y $(2,2)$:

iii) $(1,-1)$ y $(2,2)$:   vi) $(2.2, 2.84)$ y $(2,2)$:

Figura 2. Fragmento de la práctica 2. Pendiente de la recta tangente a una curva, como límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia.

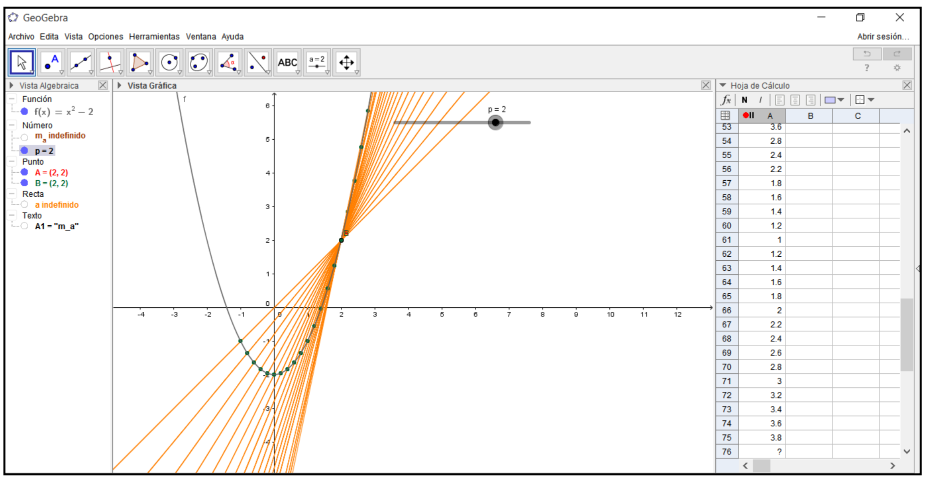
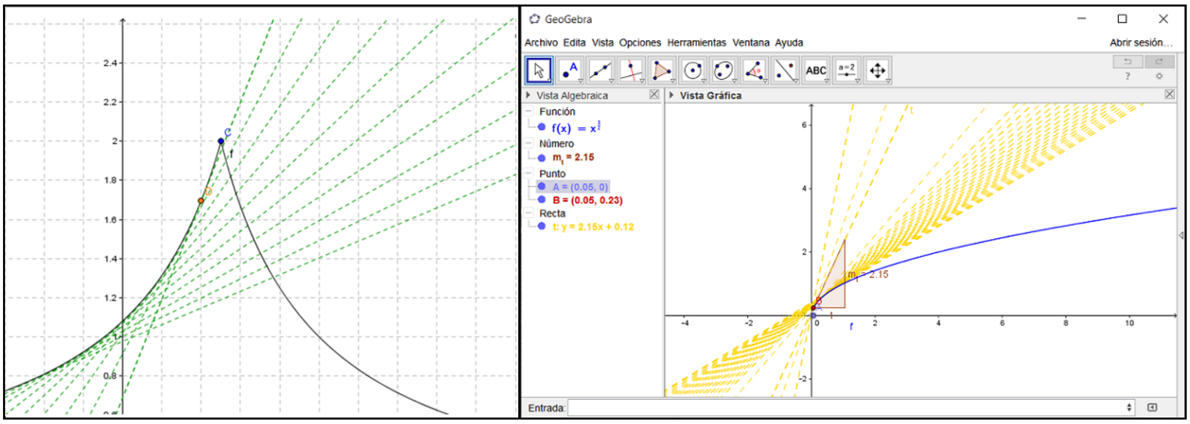
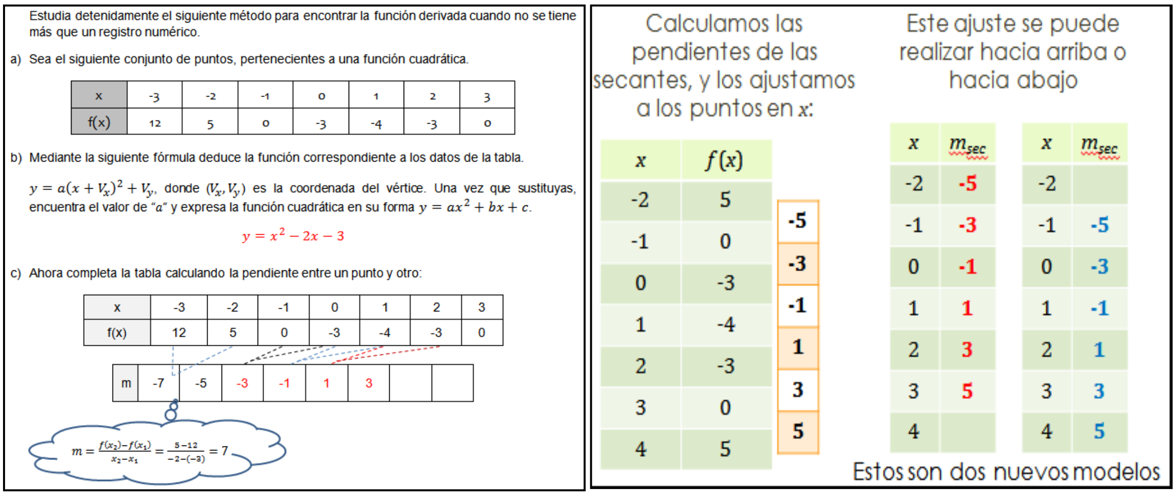


Figura 3. Dos casos analizados en la práctica 3.



Finalmente, se añade un ejercicio especial al final de las tres prácticas, para que el estudiante explore la relación entre los valores numéricos de una función ($f(x) = x^2 - 2x - 3$) y el valor de la pendiente que pasa por cada par de los puntos proporcionados en la tabulación, es decir la pendiente de rectas secantes a la curva (figura 4).

Figura 4. Actividad final: relación entre los valores numéricos de la función y la función derivada



Al relacionar los valores de las pendientes con las abscisas de la función f, se determinan dos rectas paralelas, en este caso $g_1 = 2x - 1$, y $g_2 = 2x - 3$. Solo entonces se utiliza *GeoGebra* para graficar y comparar estas dos rectas con la derivada de $f(x)$, y se encuentra no solamente que las rectas g_1 y g_2 son paralelas a $f'(x)$, sino que ésta se encuentra justo en lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de g_1 y g_2. Con este hallazgo se pueden plantear diversas reflexiones sobre la derivada que serán abordadas a lo largo del curso, como es el caso del teorema del valor medio.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se presentan tanto los resultados cuantitativos (pretest y postest), como cualitativos (encuesta de opinión y bitácora del investigador).

Pretest

Para verificar las condiciones iniciales del grupo se realizó un análisis del pre-test. La hipótesis nula supone medias poblacionales iguales (μ_A=μ_N) y la hipótesis alternativa plantea medias poblacionales diferentes ($\mu_A \neq \mu_N$).

La hipótesis alternativa fue seleccionada como bilateral con el fin de reconocer si existe alguna diferencia entre los dos grupos formados.

El estadístico de prueba en este caso es $t_c = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_N - (\mu_A - \mu_N)}{S\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_N}}} = 1.48025$

Para los datos del pretest y con un nivel de significancia α=0.05 la región de rechazo se encuentra a partir de $t_{\alpha/2,\nu}$ =2.09302.

Como $t_{\alpha/2,\nu} > t_c$, se concluye que no es posible rechazar la hipótesis nula, en consecuencia, los datos no muestran evidencia para suponer que los promedios globales en los resultados del pretest sean diferentes.

En la figura 5A se muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el pretest

Postest

El postest tiene como propósito evaluar los conceptos que los estudiantes han trabajado a lo largo del curso, como la pendiente de una recta, la ecuación de una recta tangente, la función desplazamiento y su relación con la velocidad de un cuerpo mediante diversas representaciones semióticas.

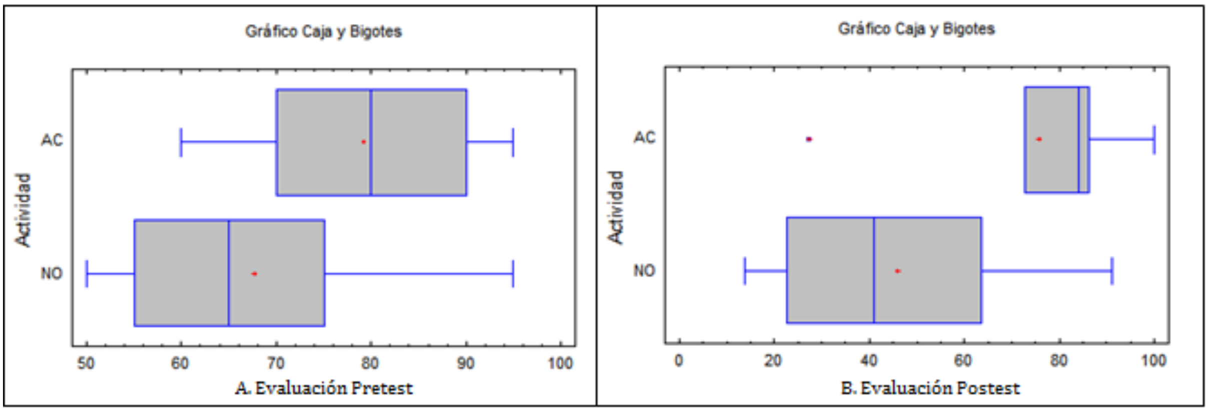
Para analizar cuantitativamente los resultados se propuso como hipótesis nula la igualdad de medias poblacionales ($\mu_A = \mu_N$), mientras que la hipótesis alternativa se consideró como $\mu_A > \mu_N$, de una sola cola con el fin de reconocer si las actividades realizadas por los estudiantes influyen en los resultados de la evaluación postest.

El estadístico de prueba utilizado es $t_c = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_N - (\mu_A - \mu_N)}{S\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_N}}} = 2.47574$

Al contrastar el estadístico calculado $t_c = 2.47574$ con el estadístico de prueba para los datos del postest $t_{\alpha,\nu}$=1.72913. Como $t_{\alpha/2,\nu} < t_c$ se concluye que no es posible aceptar la hipótesis nula, en consecuencia, los datos muestran evidencia para suponer que el promedio global de los estudiantes que realizaron la actividad son mayores al promedio global de los estudiantes que no la hicieron.

En la figura 5B se muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el postest. AC señala al grupo experimental y NO indica los datos del grupo de control.

Figura 5. Resultados del pretest y postest, en gráfica de caja y bigotes.



El análisis de resultados del postest muestra que los alumnos del grupo experimental reflejaron un mejor desempeño en su evaluación postest.

Análisis cualitativo

En cuanto al aprendizaje de la derivada, los alumnos comentan que el material fue bastante novedoso, y que la derivada como objeto matemático fue apareciendo poco a poco hasta poder concluir con la definición formal. Ellos concuerdan en que estas prácticas guiadas con *GeoGebra* les ayudaron en la construcción del significado de este objeto matemático.

En el tema referente al manejo de diversas representaciones semióticas, los alumnos señalan que, a pesar de ser mucho de su agrado las actividades, esperaban mayor cantidad de oportunidades para trabajar con los objetos matemáticos que componen la derivada, así como la derivada misma, en sus diferentes representaciones para manipularlos, redefinirlos, etcétera; uno de ellos menciona que esperaba un ejercicio de modelado a partir una función en su representación tabular, como conclusión a estas actividades con *GeoGebra*.

CONSIDERACIONES FINALES

Los tipos de problemas que se presentan en los alumnos, reflejados en la evidencia de las evaluaciones se pueden englobar en tres grupos:

1. Deficiente identificación del problema planteado, así como de las herramientas adecuadas para resolverlo.
2. Resultados incorrectos y poco concretos a la resolución de un problema.
3. Carente o nula capacidad para identificar componentes implícitos y patrones ocultos en ejercicios en los que el alumno debe formular una conclusión a partir de la observación.

Estas dificultades tienen la característica en común de la falta de dominio de los objetos matemáticos básicos, como conceptos fundamentales y esenciales para la construcción del conocimiento del cálculo, específicamente de la derivada.

Más tarde, mediante el análisis de respuestas y procedimientos del postest, se puede afirmar que los estudiantes del grupo experimental, tuvieron un desempeño considerablemente superior al resto de los alumnos del curso, y mostraron una mayor organización y planificación en sus procedimientos y presentación de resultados.

En general, los estudiantes del grupo experimental fueron capaces de construir conjeturas a partir de la observación de los resultados que obtuvieron en uno de los problemas planteados en el postest. Esta construcción representa un logro importante en el aprendizaje, ya que representa una competencia que no es fácil desarrollar.

Con respecto a la motivación que hubo de parte de los estudiantes hacia las actividades, se observó que, no solo resolvían las preguntas consecuentes a cada actividad guiada, sino que se aventuraban a hacer acercamientos para hacer observaciones más cercanas a las construcciones que hacían. En algunos casos modificaban las configuraciones de los parámetros especificados en el material, o repetían determinada actividad con mayor cuidado, e inclusive repetían algún paso probando con herramientas del software similares a las que la actividad proporcionaba y comprobar resultados, etcétera;

Los resultados en la prueba piloto solo reflejan el comportamiento del grupo de estudiantes en cuestión. Para que poder medir el impacto de las actividades en el aprendizaje se deben realizar pruebas con una cantidad mayor de individuos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuevas, C., Pluvinage, F. (2009). *Cálculo y tecnología*. Consultado el 20 de noviembre de 2014 en http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME 10(2),* 419-434.

Font, V. (s/f). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Consultado el 27 de Agosto de 2009 en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos con ambiente de tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2),* 213-223

Radillo, M., González, L., Martínez, M. (2015). Construcción del concepto de derivada, con apoyo de la computadora. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28,*1629-1637

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación y comprensión sobre la educación matemática.* IV Simposio SEIEM. Huelva. Consultado el 8 de noviembre de 2006 en http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

Zimmermann, W., Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* USA: Mathematical Association of America.