

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

P. Sastre Vázquez, A. Cañibano, R.E. D'Andrea

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Universidad Católica Argentina. Campus Rosario (Argentina)

pasava2001@yahoo.com.ar; rodolfoedandrea@yahoo.com.ar

Palabras clave: estudiante universitario, razonamiento inductivo, validación

Key words: college student; inductive reasoning; validation.

RESUMEN: El estudiante universitario de Argentina utiliza el razonamiento inductivo, específicamente en el proceso de generalización. El proceso no finaliza al encontrar la expresión de generalización, sino que se requiere de su validación. El objetivo de este trabajo fue describir el razonamiento inductivo manifestado por el estudiante universitario al realizar demostraciones matemáticas y analizar como estableció la validez de la expresión hallada utilizando el principio de inducción. Para el logro de estos objetivos se realizó un estudio longitudinal con tres cohortes consecutivas de ingresantes a una facultad de Ingeniería. Durante cada año se desarrolló un trabajo de campo donde el estudiante debía resolver una serie de ejercicios, partiendo de algunos casos particulares, debía obtener una expresión de generalización y luego validarla. Los estudiantes en su mayoría lograron establecer la generalización pedida, sin embargo tuvieron dificultades durante el proceso de validación.

ABSTRACT: The College student of Argentina uses inductive reasoning, specifically in the process of generalization. The process does not complete with finding generalized expression because this requires a validation process. The aim of this study was to describe the inductive reasoning used by University student to perform mathematical proofs and analyze as it established the validity of the expression obtained, using the principle of induction. For the achievement of these goals was realized a longitudinal study with three consecutive cohorts of freshmen engineering students. Each year was developed a field work where the student had to solve a series of exercises, on the basis of some particular cases, and get a generalized expression and then validate it. Most of students had obtained the requested generalization, but had difficulties during the validation process

■ INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una tesis doctoral en curso sobre la caracterización del razonamiento de estudiantes universitarios de Ingeniería en demostraciones matemáticas, realizado en el programa del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática, realizado en la Universidad Nacional del Comahue situada en Neuquén, Argentina.

Castro, Cañadas & Molina (2010) consideran al razonamiento inductivo o de generalización como un proceso cognitivo que permite obtener leyes generales, a partir de un patrón común observado en ciertos casos individuales. Al deliberar acerca de la naturaleza del razonamiento que le es propio a Matemática, Poincaré (1963) hizo alusión a la inducción como la vía necesaria para alcanzar el conocimiento en cualquier ciencia, haciendo foco particularmente en Matemática, desde la consideración de casos particulares y a partir de estos, la observación de pautas que permiten alcanzar la generalización. Asimismo, Pólya (1965) coincide con Poincaré (1963) considerando al razonamiento inductivo como gestor del conocimiento científico, y cuyo método consiste en el encuentro de leyes universales a partir de la observación de casos puntuales.

Desde hace cuatro décadas aproximadamente, el estudiante universitario de Argentina utiliza el razonamiento inductivo en los cursos de matemática, específicamente en la generalización. El proceso no finaliza cuando se encuentra la fórmula de generalización, ya que se requiere adicionalmente de un proceso de validación sustentado por el denominado principio de inducción matemática o inducción completa. El principio de inducción completa consiste en un proceso de validación para funciones proposicionales donde alguna de las variables es natural. En ciertos casos, esta función proposicional puede tener otras variables no naturales pero el énfasis de validación se hace en la variable natural. El proceso consiste en probar la validez de la función proposicional hallada para el primer natural para el cual tiene sentido. Luego se genera hipótesis de inducción que consiste en suponer que la proposición tiene sentido para $n=k$ (o eventualmente para $n=k-1$). Finalmente se prueba la validez de la expresión hallada para $n=k+1$ (o eventualmente para $n=k$ si se supuso verdadera la fórmula para $n=k-1$). Una descripción no ortodoxa del principio antes detallado puede ser ilustrada por el comportamiento de una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de otra, como en una reacción en cadena. El proceso precedentemente descrito no es otro que el denominado “*efecto dominó*”. Con este trabajo se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

General: Describir el razonamiento inductivo puesto de manifiesto por el estudiante universitario al realizar demostraciones matemáticas.

Específico: Analizar como el estudiante estableció la validez de la expresión hallada utilizando el principio de inducción.

■ METODOLOGÍA

Para el logro de los objetivos descriptos se realizó un estudio longitudinal con tres cohortes consecutivas de ingresantes: 2012, 2013 y 2014 en la Facultad de Química e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina del Campus Rosario situado en Rosario, provincia de Santa Fe, Argentina.

Los grupos estuvieron conformados por estudiantes de Ingeniería de dos especialidades: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Estos grupos fueron producto de tres convocatorias voluntarias cada uno de los tres años, en la que se pedían como requisitos que el postulante tuviera 18 años y el curso de ingreso aprobado. Adicionalmente se solicitó también que el postulante no trabajara. Cada año se generó un grupo de 20 estudiantes para el estudio, considerándose igual número de varones y de mujeres. Para realizar el estudio que se proponía esta investigación se utilizó un portfolio de cinco ejercicios que resolvieron los estudiantes voluntarios, durante el primer cuatrimestre del curso anual de Álgebra y Geometría. Los estudiantes que realizaron los ejercicios previamente habían recibido instrucción sobre nociones elementales acerca del lenguaje y de la epistemología matemática. Estas nociones básicas incluyeron las estructuras elementales del álgebra proposicional tales como: funciones proposicionales; conectores lógicos; principales leyes del Álgebra proposicional; métodos de demostración: directo, indirecto y absurdo; diferencia entre la acción de verificar y demostrar; diferencia entre el rol de ejemplos y contraejemplos, etc.

Algunos de los ejercicios que constituían el portfolio, se muestran a continuación:

1. Considera la siguiente secuencia numérica:
- $$1 + 3 = 4 = 2^2$$
- $$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

En base a esta secuencia, se pide: a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el principio de inducción.

4. Considera la siguiente secuencia de desigualdades:
- $$2^2 > 2;$$
- $$3^2 > 3;$$

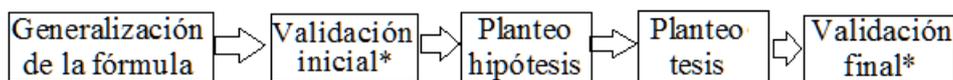
En base a esta secuencia, se pide: a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el principio de inducción.

De cada uno de los cinco ejercicios que constituían el portfolio, a continuación se detallan en orden secuencial, cada una de las expresiones a la que los estudiantes debían arribar como producto de la generalización en la parte a.

1. $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2;$ 3. $\forall n \in N_2 : n^2 > n, \quad N_2 = \{2, 3, 4, \dots\};$
2. $\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2;$ 4. $\forall z \in C : \forall n \in N : |z^n| = |z|^n;$
5. $\forall z \in C : \forall \alpha \in R : \forall n \in N : z = |z|_\alpha \Rightarrow z^n = |z|_{n\alpha}^n$

Categorías emergentes

El estudio y análisis de los datos obtenidos a través de los ejercicios realizados por cada una de las tres cohortes, permitió generar categorías. Estas categorías emergentes, se generaron como consecuencia del proceso de generalización y validación implícito en cada ejercicio. Este proceso tiene una secuencia que puede describirse a través del esquema, que se detalla a continuación:



*El proceso de validación tiene dos etapas: una inicial y una final. La etapa inicial consiste primero en determinar, cuál es el primer natural para el que tiene sentido la fórmula (función proposicional en una variable natural y eventualmente otras variables reales). Es decir, determinar el dominio de validez de esta expresión. Hecha esta determinación, se debe realizar el proceso de validación asociado a ese valor, es decir, o el estudiante debe verificar que la función proposicional (fórmula) evaluada en ese valor, 'funciona' (Ejercicios 1, 2 y 3) o debe realizar la prueba que valida a la función proposicional evaluada en ese valor (Ejercicios 4 y 5).

La etapa final consiste en el proceso de validación correspondiente a la tesis de inducción.

En base a la secuencia descrita precedentemente y el análisis de los resultados obtenidos, se detallan a continuación las categorías emergentes del estudio:

Generalización. Es una categoría establecida para reflejar el *nivel* de generalización alcanzado por los estudiantes, subdividiéndose en:

- Consumada con pocos casos adicionales: el estudiante pudo realizar y escribir la generalización, luego de considerar algunos casos particulares adicionales a los datos para llegar a la meta.
- Consumada con muchos casos adicionales: el estudiante pudo realizar y escribir la generalización, luego de considerar muchos casos particulares adicionales a los datos para llegar a la meta.
- Consumada parcialmente con pocos casos adicionales: el estudiante escribió la fórmula o proposición final que constituye la generalización pero con ligeras falencias, habiendo generado esta luego de considerar algunos casos particulares adicionales a los datos.
- Consumada parcialmente con muchos casos adicionales: el estudiante escribió la fórmula o proposición final que constituye la generalización pero con ligeras falencias, habiendo generado esta luego de considerar muchos casos particulares adicionales a los datos.
- Fallida: el estudiante por diferentes razones, no pudo realizar la generalización.

Validación inicial: Es una categoría que se establece para determinar como el estudiante aborda el *proceso de validación inicial*, subdividiéndose en:

- Consumada: El estudiante indica cuál es el primer natural para el cual tiene sentido la ley y valida este proceso.

- Omitida con sentido: El estudiante indica cuál es el primer natural para el cual tiene sentido la ley y escribe la ley para ese caso, pero no efectúa el proceso de validación que sostiene este caso.
- Omitida: El estudiante omite por completo, el proceso de validación inicial.

Planteo Hipótesis/Tesis inductivas. Es una categoría que se establece para determinar cómo el estudiante escribe la *hipótesis* y la *tesis de inducción*, subdividiéndose en:

- Consumado: El estudiante escribe ambas adecuadamente.
- Omitido: El estudiante no escribe una proposición o ninguna de ambas.
- Fallido: El estudiante escribe una o ambas erróneamente.

Validación final. Es una categoría que se establece para determinar como el estudiante aborda el *proceso de validación final*, subdividiéndose en:

- Consumada: El estudiante realiza la prueba de validación de la proposición a demostrar e indica en el proceso en qué momento utiliza la hipótesis de inducción.
- Consumada con hipótesis velada: El estudiante realiza la prueba de validación de la proposición a demostrar pero no justifica en qué momento del desarrollo de la prueba, utiliza la hipótesis de inducción.
- Fallida por interrupción: El estudiante intenta el abordaje de la prueba, y llega a un determinado eslabón de la cadena argumentativa, deteniéndose y no arribando a la meta.
- Fallida con prueba 'círculo vicioso': El estudiante realiza la prueba pero a partir de la consideración de los mismos casos particulares abordados para la generalización de la fórmula, completa de este modo un 'círculo vicioso' carente de sentido. **
- Omitida: El estudiante omite completamente el proceso de prueba de la tesis de inducción.

** Esta categoría tiene una reminiscencia con la categoría denominada "*empirismo naïf o ingenuo*" postulada por Balacheff (2000) para hacer referencia a un modo de demostrar del estudiante consistente en la elección de ejemplos aleatorios, sin criterio alguno, para validar una proposición. La diferencia aquí radica, en que el estudiante considera casos particulares ordenados que repiten el proceso inicial y cierran en un círculo carente de sentido, como prueba de validez de la fórmula obtenida.

■ RESULTADOS

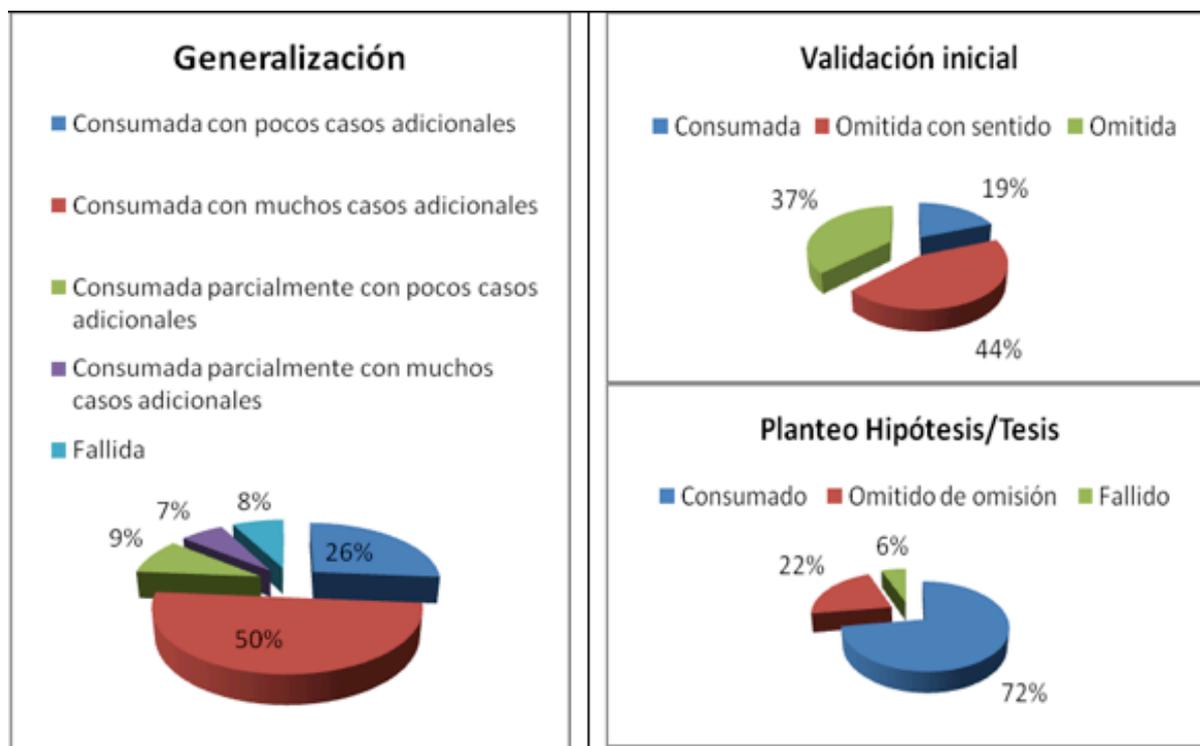
El 75% del total de los estudiantes, con variación en la cantidad de casos particulares utilizados, fue capaz de encontrar la expresión de la generalización en la totalidad de los ejercicios. Las dificultades se presentaron en el proceso de validación de las fórmulas. En los tres primeros ejercicios, aproximadamente la cuarta parte de los estudiantes realizó el proceso de validación para sostener la fórmula para el primer natural para el cual tiene sentido la ley. Este proceso para los tres primeros ejercicios consistía en una verificación. En algunos casos, los estudiantes omitieron el proceso por completo y en otros lo excluyeron pero dejaron indicado a partir de que natural tenía sentido la ley. Este porcentaje se redujo a un 10% en los dos últimos ejercicios, donde el proceso de validación iba más allá de una verificación, requiriéndose una prueba de

mayor complejidad que excedía la acción de verificación. El proceso de escribir la hipótesis y la tesis de inducción fue desarrollado por aproximadamente un 70% de los estudiantes.

Aproximadamente un 40% de los estudiantes omitieron la validación final. El 30% de los estudiantes quedaron encuadrados dentro de la categoría: ‘fallida con prueba ‘círculo vicioso’’.

Aproximadamente un 25% de los estudiantes validó la prueba y un 10% de los estudiantes intentaron realizar la prueba pero no arribaron a la meta, deteniéndose en alguna fase de la secuencia argumentativa. En el conjunto constituido por el 25% de los estudiantes que validaron la fórmula obtenida, pudieron distinguirse dos grupos: a. Aquellos que realizaron el proceso de prueba identificando la secuencia argumentativa donde se muestra la incidencia de la hipótesis de inducción. b. Aquellos que realizaron la prueba pero sin indicar la secuencia. Los dos tipos mencionados tuvieron porcentajes similares.

Los resultados obtenidos se muestran a través de las siguientes diagramas:



Validación final



■ CONCLUSIONES

El análisis de los resultados permite presuponer que los estudiantes realizaron los ejercicios de una forma ritual. Esta suposición es generada por la ausencia de los procesos de validación inicial y final en más de la mitad de los estudiantes, observándose que estos conocen el mecanismo de aplicación del principio de inducción, pero parecerían no comprender la necesidad del proceso de validación. Las acciones de escribir la hipótesis y la tesis y el dominio de validez de la expresión hallada no requieren de un importante esfuerzo intelectual. La generación de hipótesis y tesis de inducción consisten en una simple sustitución y la obtención del dominio de validez de la expresión obtenida que se quiere validar, una verificación. Los procesos de validación demandan del estudiante cierta creatividad y el empleo del raciocinio y abstracción. Los estudiantes seleccionados para este trabajo recibieron, durante la cursada de una asignatura, instrucción elemental sobre lenguaje matemático y epistemología matemática. Por ende, el estudiante que realizó estos ejercicios tiene cierta madurez intelectual para abstraer y generalizar una expresión pero la ausencia general del proceso de validación muestra de forma aparente, desconocimiento de cuestiones epistemológicas elementales acerca de la demostración, lo que plantea una contradicción. El estudiante posmoderno, en general, no comprende la dimensión de lo que significa la construcción del conocimiento, en particular del conocimiento matemático. El estudiante ingresante a la Universidad proviene, en general, de un ciclo medio que muestra a la Matemática, no la demuestra. Según expresión textual de los estudiantes, Matemática es 'sentarse a hacer ejercicios'. La construcción de las expresiones generalizadas, debe recordarse, fue inducida en el enunciado del ejercicio, a partir de un par de casos particulares dados, a los efectos de que el estudiante continúe el proceso generando nuevos casos y en base a estos pueda llevar a cabo la generalización.

El estudiante que ha recibido instrucción sobre epistemología y lenguaje matemático, tiene un patrón en su mente acerca de la prueba. Si la proposición que se quiere validar es falsa, exhibe un contraejemplo. Si la proposición que se quiere validar es verdadera, considera algunos casos particulares para 'convencerse' inicialmente del significado de la proposición pero es consciente que la prueba trasciende el ejemplo y se requiere de una cadena argumentativa para validar la propiedad. En general, el proceso de validación que el estudiante mejor puede abordar es aquel que posee una argumentación lineal, sin artificios ni construcciones que puedan obstruir el camino desde la hipótesis a la tesis. Se presume que en el proceso inductivo, si se intenta pensar como el estudiante, la secuencia argumentativa tiene otro orden al de un razonamiento deductivo lineal.

Luego de considerar algunos casos particulares, el estudiante genera una expresión generalizada, y luego para establecer su certeza, debe realizar la prueba de validez. Los esquemas en su pensamiento se descolocan, de ahí la omisión de los procesos de validación inicial y final y en ciertos casos, la generación de un razonamiento de tipo ‘círculo vicioso’ que culmina con la búsqueda de casos particulares nuevamente. Este proceso tiene cierta analogía con la actitud del estudiante que tiene que abordar una prueba y al no saber qué camino abordar, busca ejemplos aleatorios según la clasificación de Balacheff (2000) correspondiente a este modo de demostrar del estudiante denominado empirismo ingenuo, ya citada en la subcategoría IV.4., al caracterizarse las categorías emergentes. D’Andrea y Sastre Vázquez (2013) consideran que el estudiante tiene claridad sobre lo que se pide, cuando se le exige una demostración y reconoce que la verificación es exigua como prueba. Asimismo sigue recurriendo a ésta como mecanismo de validación cuando no sabe cómo abordarla. Resulta que la verificación es un método usual en la vida cotidiana y en las ciencias fácticas y probablemente la actitud esté asociada a este hecho.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.
- Castro, E.; Cañadas, M.C.; Molina, M. (2010). El Razonamiento inductivo como generador de Conocimiento Matemático. *Uno*. (54), 55 – 67.
- D’Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). El proceso de verificación en el esquema de validación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. CLAME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*. (26), 185 – 194.
- Poincaré, H. (1963). *La ciencia y la hipótesis*. Madrid: Espasa – Calpe.
- Pólya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.