

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Maestría en Educación Matemática

Caracterización de los procesos de objetivación en torno al concepto de patrones con estudiantes de segundo grado de la Básica Primaria

Documento que presentan

Sandra Patricia Seguro

Lina María Sepúlveda Flórez

Leídy Marcela Guzmán Laverde

Director de Tesis:

Dr. Luis Alexander Conde Solano

Medellín, Colombia

Noviembre de 2016

RESUMEN

La investigación que a continuación se presenta, se preocupa por insertar dentro del aula de clases del grado segundo de la Básica Primaria el concepto de patrón, lo anterior corresponde a que durante los primeros años de escolaridad dicha temática no ha sido abordada de manera explícita en las clases de matemáticas. De este modo, incluir el concepto de patrones en la educación inicial constituye una introducción al álgebra y la incorporación del pensamiento variacional en la escuela.

Para ello, las investigadoras han diseñado una propuesta de intervención en el aula, que pretende proveer a los estudiantes de diferentes herramientas dentro del abordaje de patrones como la utilización de material concreto, representaciones visuales, comunidades de aprendizaje dentro del aula, el planteamiento de problemas que tienen que ver con el entorno donde se desenvuelven los estudiantes, entre otras acciones que dinamizan la enseñanza de patrones. Todas estas acciones implementadas dentro del aula han sido diseñadas teniendo en cuenta los presupuestos de Radford (2006) aplicando la teoría de la objetivación.

En suma, el presente estudio ofrece otras posibilidades de interacción en el aula entre el estudiante-conocimiento, abre la puerta a otros modos de concebir el aprendizaje de las matemáticas y por ende el aprendizaje del concepto de patrones, valora y analiza cada una de las formas de pensar del estudiante en la construcción del conocimiento y permite caracterizar los procesos de objetivación (Radford, 2006) que se presentan en el transcurso del mismo, a través de la aplicación de métodos de investigación inscritos en el paradigma cualitativo que conllevan a la transformación de la realidad, en la que se ven implicados todos los participantes de manera activa, dinámica y acorde al contexto.

Palabras clave: patrones, teoría de la objetivación, estudiantes, investigación acción.

ABSTRACT

The research that is presented below is concerned with inserting the concept of pattern into the second grade classroom of the Primary Basic class, which corresponds to the fact that during the first years of schooling the subject has not been explicitly addressed in Math classes. In this way, include the concept of patterns in early education and an introduction to algebra and the incorporation of variational thinking in school.

To this end, the researchers have designed a proposal for intervention in the classroom, which aims to provide students with different tools in the approach of patterns such as the use of concrete material, visual representations, learning communities in the classroom, that have to do with the environment where the students are developed, among other actions that stimulate the teaching of patterns. All these actions implemented within the classroom have been designed taking into account the budgets of Radford (2006) applying the theory of objectification.

In sum, the present study offers other possibilities of interaction in the classroom between the student-knowledge, opens the door to other ways of conceiving the learning of mathematics and therefore learning the concept of patterns, values and analyzes each of the Ways of thinking of the student in the construction of knowledge and allows characterizing the processes of objectification (Radford, 2006) that are presented in the course of the same, through the application of research methods inscribed in the qualitative paradigm that lead to the transformation Of reality, in which all the participants are involved in an active, dynamic, according to the context.

Keywords: patterns, theory of objectification, students, research action.

ÍNDICE

RESUMEN	iii
Palabras clave:	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE.....	v
LISTA DE ILUSTRACIONES	viii
LISTA DE TABLAS.....	x
AGRADECIMIENTOS	xi
DEDICATORIA	xiii
1 Introducción y planteamiento del problema	14
1.1 Introducción.....	14
1.2 Planteamiento del problema.....	15
1.3 Pregunta y objetivos de investigación	18
1.3.1 Pregunta de investigación.	18
1.3.2 Objetivo.	18
2 Antecedentes	20
2.1 Antecedentes teóricos	20
2.2 Antecedentes investigativos	21
2.3 Antecedentes legales.....	24
3 Marco conceptual	30
3.1 Objeto matemático: patrones	30
3.1.1 Sucesiones, series y progresiones	30
3.1.2 Patrones.....	32
3.2 Teoría cultural de la objetivación	36
3.2.1 El pensamiento.	37

3.2.2 Fuentes de elaboración de significados.....	39
3.2.2.1 Los artefactos: dueños de saberes milenarios.	39
3.2.2.2 La interacción social.	40
3.2.3 Actividades de aprendizaje.....	41
3.2.4 La objetivación de saberes	42
3.2.5 El aula de clase: una comunidad de aprendizaje.....	43
4 Metodología.....	46
4.1 Paradigma cualitativo	46
4.2. Investigación Acción Educativa.....	46
4.2.1. Fase I. Estudio preliminar.	48
4.2.2. Fase II. Diseño de actividades de intervención.....	49
4.2.2.1 Situación problema.	50
4.2.2.2 Sesión 1. Comprensión de la situación.	51
4.2.2.3 Sesión 2. Saberes que circulan.....	53
4.2.2.4 Sesión 3. Representación pictórica de patrones.	56
4.2.2.5 Sesión 4. Patrones en secuencias numéricas.	59
4.2.2.6 Sesión 5. El uso de patrones en la búsqueda de la solución.	63
4.2.2.7 Sesión 6. Propongamos sucesiones.	66
4.2.3. Fase III. Exploración de las actividades.....	69
4.2.4. Fase IV. Análisis.....	70
4.2.5. Fase V. Presentación de resultados.....	71
5 Resultados del Análisis.....	72
5.1 Procesos de objetivación en el estudio de patrones.....	72
5.1.1 Formas de representación de la información en el contexto de patrones.	73
5.1.1.1 Representación pictórica de patrones.	74
5.1.1.2 Representación simbólica de patrones.....	76
5.1.2 El papel de los artefactos en la objetivación del concepto de patrones.....	78
5.1.3 Comunidades de aprendizaje en torno al concepto de patrones.	81
5.1.4 La evaluación en el proceso de objetivación.....	84
5.2 Tipos de pensamiento algebraico en el concepto de patrones	86
5.2.1 Pensamiento algebraico factual.	86
5.2.2 Pensamiento algebraico simbólico.....	89

6	Reflexiones finales	92
6.1	Reflexiones generales acerca del trabajo de investigación	92
6.2	¿Cómo es el proceso de objetivación del saber de los estudiantes del grado segundo de la Básica Primaria a través del estudio de problemas que involucran el uso de patrones?	95
6.3	Caracterización de los procesos de objetivación	96
7	Referencias Bibliográficas	97
8	Anexos.....	100

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Síntesis planteamiento del problema.....	17
Ilustración 2. Síntesis antecedentes investigativos.....	23
Ilustración 3. Ilustración 3: Documentos que guían el rastreo de los antecedentes investigativos.....	29
Ilustración 4. Síntesis conceptos relación con la categoría de patrones.....	36
Ilustración 5. Elementos de la teoría cultural de la objetivación	44
Ilustración 6 Síntesis metodología de investigación	47
Ilustración 7. Representación de billetes.....	54
Ilustración 8. Insumos para el planteamiento del problema.....	62
Ilustración 9. Formas de representación de información con respecto al estudio de patrones .	73
Ilustración 10. Forma de representación pictórica de patrones	74
Ilustración 11. Ejemplo 1 de representaciones simbólicas.....	76
Ilustración 12, Ejemplo 2 representación simbólica de patrones	77
Ilustración 13. Ejemplo 1 uso de artefactos	78
Ilustración 14. Ejemplo 2 uso de artefactos	80
Ilustración 15. Uso de artefactos en procesos de comprensión de la situación.....	81
Ilustración 16. Retroalimentación comunidades de aprendizaje.....	83
Ilustración 17. Percepciones de los estudiantes sobre comunidades de aprendizaje	84
Ilustración 18. Ejemplo de valoración y realimentación al trabajo en grupos	85
Ilustración 19. Consideraciones de los estudiantes respecto a lo aprendido	85
Ilustración 20. Formas del pensamiento factual.....	87
Ilustración 21. Ejemplo de modo de pensamiento factual	88

Ilustración 22. Aprendizajes manifestados por los estudiantes dentro del pensamiento factual	89
Ilustración 23. Forma de representación del pensamiento simbólico.....	90
Ilustración 24. Acercamiento a formas de representación simbólica	91

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Elementos que componen la situación problema	51
Tabla 2, Diseño de esquema sobre la situación.....	51
Tabla 3. Rúbrica cotejo diseño de esquema	52
Tabla 4. Conteo de billetes	55
Tabla 5. Sucesión grupo 1	57
Tabla 6. Sucesión grupo 2.....	58
Tabla 7. Sucesión grupo 3	58
Tabla 8. Análisis de patrones	60
Tabla 9. Rúbrica evaluación diseño de problema	63
Tabla 10. Hipótesis de solución de la situación	64
Tabla 11. Segunda hipótesis de solución de la situación	66
Tabla 12. Sucesiones pictóricas y simbólicas propuestas por estudiantes	67
Tabla 13. Autoevaluación	69

AGRADECIMIENTOS

Eterna gratitud a todas las personas que de una u otra manera contribuyeron significativamente para que este sueño fuera posible:

En primera instancia al Ser Supremo, por habernos dado la fortaleza suficiente para sopesar con paciencia y persistencia las diversas situaciones.

A nuestros familiares y amigos por su comprensión, motivación, acompañamiento y ayuda para alcanzar nuestra meta.

A la administración departamental Antioquia la más educada y su equipo de funcionarios por el otorgamiento de la Beca.

Al Alma Mater por su contribución a nuestra formación profesional.

Al Doctor Luis Alexander Conde Solano, por su comprensión, paciencia y acompañamiento durante la elaboración y desarrollo de este trabajo.

A nuestros compañeros de maestría por permitirnos entrar en sus vidas y compartir tantos momentos gratos.

DEDICATORIA

Al autor de la vida, que nos permite desde su infinita bondad y sabiduría culminar satisfactoriamente este proceso de cualificación tanto en lo personal como en lo profesional.

A nuestras familias quienes fueron un apoyo incondicional para vencer las adversidades.

A la razón de ser de nuestro quehacer educativo y al mismo tiempo referente imprescindible para el desarrollo de esta propuesta: las niñas, niños y jóvenes.

1 Introducción y planteamiento del problema

1.1 Introducción

La presente investigación pretende ofrecer a los estudiantes del grado segundo la posibilidad de interactuar con el concepto de patrón en la educación inicial de manera dinámica, gradual, relacionada con el entorno donde estos se desenvuelven, de este modo se ofrecen entonces alternativas de introducción en el aula de clase del concepto de patrones durante los primeros niveles de escolaridad ya que este concepto es abordado en la escuela como un tema aislado de los demás, sin suscribirse a ningún tipo de pensamiento. En este orden de ideas, el presente estudio da relevancia a las prácticas socioculturales como herramientas que dotan de significado los aprendizajes que la escuela se propone desarrollar y al mismo tiempo concibe el diseño de actividades de aprendizaje que abordan el concepto de patrones como insumo fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional en los primeros grados.

Esta propuesta incluye la aplicación en el aula de los presupuestos que configuran la teoría cultural de la objetivación propuesta por Radford (2006) en el campo de la Educación matemática. En ésta, se concibe el estudiante como un sujeto que aprende con los otros, permeado esencialmente por los elementos, artefactos y modos de interacción en medio de los cuales se desarrolla a diario, la escuela es concebida como una pequeña comunidad donde interactúan diversas subjetividades que a su vez objetivan los conceptos matemáticos, dichos conceptos están rodeados de significados ancestrales y actuales que le son asignados a lo largo de la historia por la cultura.

Es así, como la teoría cultural de la objetivación y el concepto de patrones, se funden en una sola propuesta que pretende brindar otras posibilidades de enseñanza en la escuela, sin desmeritar las otras tantas que existen. En esta perspectiva y después de un arduo rastreo de antecedentes, las autoras del presente estudio concluyen que no se ha registrado dentro del municipio en el cual es llevada a cabo la investigación, un estudio que ofrezca tales

posibilidades: la aplicación de una teoría que se preocupe por las interacciones que se tejen dentro del aula y a su vez asuma como objeto de aprendizaje los patrones circunscritos dentro del pensamiento variacional.

1.2 Planteamiento del problema

El problema de investigación que guía el desarrollo de esta propuesta ha surgido desde la observación, estudio y análisis de diferentes fuentes documentales y elementos propios de la práctica de aula que giran en torno a la enseñanza de las matemáticas en el ciclo de Básica Primaria, específicamente en el grado segundo del Centro Educativo Rural 20 de Julio del municipio de Urrao.

En este orden de ideas, se enumeran tres aspectos que dan origen al problema de investigación, como son: la práctica de aula orientada desde la instrucción que aborda de manera especial el desarrollo del concepto de número, sus propiedades y su uso dentro de las operaciones básicas. La siguiente causa, está estrechamente relacionada con lo anterior y es la inexistencia del concepto de patrón dentro de los planes de área de matemáticas de la institución y finalmente se ha observado en los resultados de las pruebas SABER 2014 y 2015 que los estudiantes presentan dificultades en los aprendizajes relacionados con dicho concepto.

Es así, como durante el desarrollo de las observaciones de clase registradas en los diarios de campo se puede identificar que el maestro ha privilegiado dentro del transcurso de la clase: la instrucción como estrategia de enseñanza. Igualmente, en dichos registros se observan momentos que prevalecen, como: la explicación de un ejemplo (en este instante el maestro resuelve el ejercicio en solitario), solución y ejecución del proceso requerido dando participación a los estudiantes, asignación de cinco o más ejercicios similares al llevado a cabo en la fase anterior (generalmente de manera individual), en algunos casos el maestro socializa las respuestas de dichas tareas y en algunos otros solicita que el trabajo sea terminado en casa. Es de anotar en este apartado que dentro del registro de los diarios de campo es común encontrar la siguiente afirmación: “el maestro solicita en reiteradas ocasiones a los estudiantes *desarrollar cada uno su ejercicio, por favor hacer silencio*” (Guzmán, Seguro, & Sepúlveda, s.f).

De igual manera, en los diarios de campo y en los planes de área con los que cuenta la institución se pueden establecer algunos de los conceptos que son abordados con frecuencia dentro de la clase de matemáticas del grado segundo, como son: lectura y escritura de números, valor posicional, propiedades del número (par, impar...) y relaciones entre los números (mayor que, menor que...), la estructura aditiva (suma, resta), atributos de las figuras geométricas, resolución de problemas en especial los denominados según Vergnaud (1991) problemas de composición.

De igual forma, durante el año 2015 el Ministerio de Educación Nacional ha publicado la Matriz de Referencia ICFES de Matemáticas (2015), que presenta de manera puntual los componentes, competencias y aprendizajes que han sido evaluados dentro de la prueba de matemáticas, además permite observar el porcentaje de estudiantes que evidencian dificultades al enfrentarse a las preguntas y problemas que recogen dichos aprendizajes. Los resultados obtenidos por los estudiantes del grado tercero durante los años 2014 y 2015 son presentados en el siguiente apartado.

Es de anotar que el porcentaje de estudiantes que presentan dificultades para resolver preguntas relacionadas con la “construcción y descripción de secuencias numéricas y geométricas” (Ministerio de Educación Nacional, 2015) ha aumentado del 54% al 72% en el establecimiento educativo, lo que significa según los parámetros del Ministerio de Educación Nacional (2015) que dicho porcentaje de estudiantes requiere del diseño de actividades de aula que procuren fortalecer aspectos como:

- Identificar un elemento en una posición determinada siguiendo un patrón previamente establecido.
- Reconocer los primeros términos de una secuencia a partir de un patrón previamente determinado.
- Identificar la posición correspondiente al término de una secuencia de acuerdo al patrón establecido.
- Describe situaciones de variación usando un lenguaje natural (p. 8).

Algo similar a lo ocurrido con la construcción y descripción de secuencias numéricas y geométricas, sucede con aquellas preguntas que involucran la “resolución y formulación de problemas multiplicativos rutinarios de adición repetida” (Ministerio de Educación Nacional, 2015) en este ítem el índice ha aumentado de un 49% a un 60% (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) lo que significa que se hace necesario incluir dentro del aula, acciones que tengan relación con la solución de problemas multiplicativos de adición repetida propios del contexto y al mismo tiempo que dichos problemas permitan a los estudiantes establecer las condiciones necesarias para su solución (Ministerio de Educación Nacional, 2015). Todo lo afirmado anteriormente surge del análisis exhaustivo de los resultados de las pruebas SABER 2014 – 2015.

Estos resultados evidencian que los estudiantes presentan un bajo desempeño en la solución e identificación de problemas que tienen relación con el uso de patrones geométricos y numéricos, estos resultados van en concordancia con los conceptos y modos de enseñar que se privilegian en el aula según lo observado en los diarios de campo y los planes de área propuestos dentro de la institución, planes de área que finalmente guían y direccionan la práctica docente.

En la Ilustración 1, se pueden observar los elementos y las características que han dado origen al presente problema de investigación.

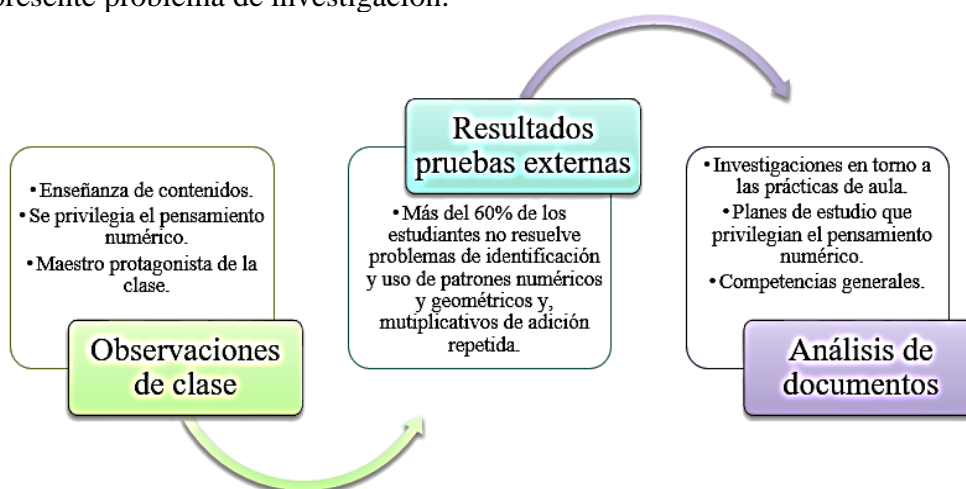


Ilustración 1. Síntesis planteamiento del problema

En consecuencia, lo expuesto abre paso a una serie de inquietudes relacionadas con el estudio y abordaje de patrones en la escuela primaria que tienen estrecha relación con el desarrollo del pensamiento variacional y el inicio del álgebra. A lo anterior se suma, la posibilidad de explorar teorías de enseñanza que dinamicen las prácticas de aula en el contexto de las Matemáticas, donde se brinden otras posibilidades de interacción entre maestro – conocimiento – estudiante, estudiante – conocimiento – estudiante.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

1.3.1 Pregunta de investigación.

Dentro de la perspectiva presentada en la sección anterior, se hace necesario presentar la pregunta de investigación que guía y direcciona el presente estudio.

¿Qué características emergen durante el proceso de objetivación del saber de los estudiantes del grado segundo de la Básica Primaria, a través del estudio de problemas que involucran el uso de patrones?

1.3.2 Objetivo.

En este orden de ideas, se hace necesario presentar el objetivo que orienta el curso de la presente investigación, el cuales es:

Caracterizar los procesos de objetivación expuestos por los estudiantes del grado segundo de la Básica Primaria, por medio del estudio de problemas que involucran el uso de patrones.

Dentro de esta investigación se presenta un solo objetivo teniendo en cuenta dos razones esenciales, inicialmente, el estudio que se lleva a cabo tiene como propósito profundizar aspectos específicos de la Educación Matemática que impactan de manera particular el aula de clase. Por lo tanto, aunque no escatima en rigurosidad su interés está centrado en abordar aspectos muy puntuales que surgen dentro de la práctica de los docentes y que pueden transformar a partir de esta propuesta.

En segundo lugar, las investigadoras se han propuesto alcanzar de manera cuidadosa y decidida el objetivo de la investigación, así entonces, aunque durante la búsqueda de este objetivo otras acciones o logros puedan emerger, plantearnos una meta clara y precisa nos permite direccionar la búsqueda de manera específica y profunda, sin dar espacio a confusiones o desvíos en el desarrollo de la propuesta, lo que centra y focaliza la atención en la temática de estudio.

2 Antecedentes

Teniendo en cuenta que la presente investigación aborda como objeto matemático el estudio de patrones y la búsqueda de teorías que permitan dinamizar y favorecer el abordaje del mismo dentro del aula, es necesario realizar un rastreo de los estudios llevados a cabo a nivel internacional y nacional con respecto al tema, enumerando diferentes investigaciones realizadas en este campo dentro de la Educación Matemática, asimismo se hace necesario precisar lo que sugieren en torno a este tema las políticas Nacionales; por tanto, este apartado se divide en tres subcategorías: antecedentes de orden teórico, antecedentes de orden investigativo y antecedentes de orden legal.

2.1 Antecedentes teóricos

Zazkis & Lilgedahl (2002) consideran que el estudio de patrones en la escuela primaria no ha logrado constituirse por sí mismo como un concepto de suma importancia a pesar de su relación y presencia en una amplia variedad de temas en matemáticas, de ahí la necesidad de llevar a cabo estudios que tengan relación con esta problemática. Los resultados de dicha investigación han establecido que los estudiantes proponen inicialmente la identificación de patrones visuales poco asociados al lenguaje formal, seguido los estudiantes presentan soluciones utilizando patrones de tipo aditivo sin enunciar relaciones de tipo multiplicativo, finalmente los autores concluyen que es posible pensar de manera algebraica sin que esto necesariamente implique la utilización del simbolismo algebraico.

Más adelante, Warren & Cooper (2008) sintetizan un estudio ejecutado en Australia, relacionado con la generalización de patrones de crecimiento visual en la etapa inicial, allí resaltan la importancia de su abordaje en el inicio del álgebra y la necesidad de proponer en la escuela estrategias que les permitan a los estudiantes establecer relaciones entre los patrones y su posición (expresar patrones como funciones o expresiones algebraicas) utilizando el lenguaje matemático. Para ello, se han remitido a la teoría de la semiótica admitiendo el uso de signos y símbolos que dotan de significado el objeto de conocimiento facilitando la interacción estudiante-estudiante; utilizando una técnica de pre y post test determinando que,

gracias a las sesiones de clase llevadas a cabo, los estudiantes han mejorado en el establecimiento de patrones visuales de crecimiento, la relación patrón-posición y han demostrado su capacidad de pensar funcionalmente.

En tanto Radford recoge algunos aspectos revelados en los estudios mencionados anteriormente, allí retoma elementos de la semiótica al igual que Warren & Cooper (2008) en el *proceso de objetivación* y a su vez también considera que durante dicho proceso existen diferentes etapas, dentro de las cuales algunos estudiantes elaboran razonamientos de modo algebraico (*hecho de generalización*) sin utilizar hasta ahora el simbolismo propio del algebra (*generalización simbólica*) tal y como lo sugieren Zazkis & Lilgedahl (2002). Asimismo, dentro de sus resultados Radford distingue las siguientes estrategias en el proceso de generalización de patrones llevados a cabo por los estudiantes durante la etapa inicial, una de ellas es la actividad, la siguiente es la inducción y la algebraica.

Vergel (2005) considera que la generalización de patrones es una de las formas de introducir el álgebra en la escuela, lo anterior es afirmado luego de llevar a cabo una investigación con estudiantes de edades entre 9 y 10 años , para el desarrollo de la misma Vergel retoma los postulados de Radford, especialmente dos tipos de generalización: factual (esquema construido engranado a lo concreto) y la contextual (va más allá de lo concreto, incluye los objetos pero aún no es algebraica). Asimismo dentro de su estudio, hace énfasis en el estudio de la interacción social y los sistemas semióticos, concluyendo que la “analiticidad” tiene relación con estos últimos, y que por tanto son consustanciales a la aparición y manifestación del pensamiento algebraico en la Educación inicial, favoreciendo “los procesos progresivos de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización” (Vergel, 2005, p. 213).

2.2 Antecedentes investigativos

Con respecto a los antecedentes investigativos que a continuación se presentan es necesario aclarar que han sido dispuestos de modo que, inicialmente se dan a conocer aquellos que son desarrollados en un contexto internacional, seguido se enseñan los llevados a cabo en el ámbito nacional y finalmente se exhiben los propuestos dentro del contexto local.

En consecuencia con lo expuesto en el párrafo anterior, se aborda en primer lugar un estudio desarrollado en la Universidad de Granada (España), nombrado: *uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto grado de Educación Primaria en una tarea de generalización*, donde Merino, Cañadas , & Molina, (2013) presentan una investigación cuyo objeto son las estrategias y representaciones que utilizan los estudiantes cuando abordan una tarea de generalización, destacan gran diversidad de representaciones y el uso de distintos patrones dentro de una tarea de generalización y pone de manifiesto que los estudiantes de estas edades cuentan con los conocimientos y las herramientas necesarias para el desarrollo de este tipo de tareas.

En el ámbito nacional se enumera inicialmente, un estudio llevado a cabo por Rivera & Sánchez (2012) en la tesis de grado denominada “Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: generalización de patrones numéricos” ejecutada con estudiantes del grado tercero de Educación Básica Primaria en la Institución Educativa Privada Bennett Santiago de Cali (Valle del Cauca), allí, se expresa la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional desde edades tempranas, con el propósito de potenciar y fortalecer los procesos de iniciación en el álgebra escolar, aseguran que para ello se debe partir de temas y conceptos curriculares propios de cada nivel (Rivera & Sánchez, 2012).

En ese mismo año, dentro de un contexto más cercano al local la estudiante de maestría Lina Velásquez Naranjo en el año 2012 estudiante de la Universidad Nacional (Sede Medellín), presenta un análisis de situaciones que centran su interés en la construcción del concepto de sucesión numérica, allí se utilizan patrones de regularidad de tipo aditivo y multiplicativo con el propósito de potenciar el desarrollo de competencias y el pensamiento variacional en el grado cuarto. Dentro de los resultados presentados por Velásquez (2012) se evidencia que las actividades propuestas generan procesos de comprensión en algunos de los estudiantes participantes, mientras que otros tantos presentan dificultades al intentar establecer ciertas magnitudes.

Más delante, en el año 2015 dentro del programa de Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia se ha generado la tesis de investigación: *Maneras de generalizar*

patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado, escrita por Cuartas (2015) quien a través del método estudio de caso ejecutado con 4 estudiantes del grado quinto ha propuesto una serie de actividades donde se presentan secuencias pictóricas que pretenden superar la visión formalista de la introducción al álgebra en la Educación Básica Primaria. En sus conclusiones Cuartas (2015) plantea la necesidad de llevar a cabo otros estudios que incluyan el uso de secuencias numéricas, figuras de diferentes tamaños, colores, incluso diversas formas de ordenamiento en el ámbito de la enseñanza durante el ciclo inicial.

Teniendo en cuenta lo expuesto dentro del numeral Antecedentes, se presenta la Ilustración 2. Síntesis antecedentes investigativos que contiene cada uno de los estudios llevados a cabo a nivel internacional, nacional y departamental.

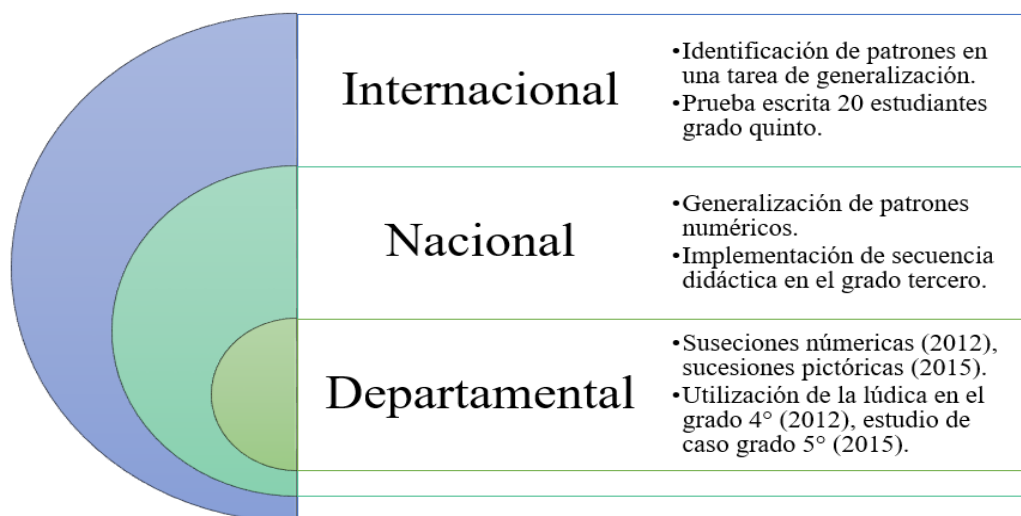


Ilustración 2. Síntesis antecedentes investigativos

En resumen, los antecedentes investigativos presentados anteriormente han abordado el estudio de patrones desde diferentes contextos: el contexto numérico y el contexto geométrico, retomados cada uno por separado en diferentes grados de escolaridad en especial en el grupo de grados cuarto y quinto de la Educación Básica Primaria. Asimismo, las propuestas didácticas sugeridas para su aplicación giran en torno al desarrollo de actividades, tareas, pruebas individuales escritas y la lúdica.

Lo descrito anteriormente, permite inferir la pertinencia de la presente propuesta de investigación ya que emplea una teoría de interacción, de construcción colectiva y de aprendizajes en el aula con el propósito de abordar el concepto de patrones en ambos contextos a la vez, el numérico y el geométrico en el grado segundo, éste hace parte del primer grupo de grados de la Básica Primaria donde dicho concepto ha sido explorado tímidamente desde lo numérico en algunas tesis de grado.

2.3 Antecedentes legales

En este apartado se rastrea los planteamientos de la política pública nacional, frente al abordaje de los patrones en la escuela en particular. Para ello entonces se revisa documentos legales que son referentes de calidad internacionales y nacionales como los *Estándares y Principios para la Educación Matemática (2008)* y los *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (1998)*, *Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006)*, *Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (2015)* y *La Matriz de Referencia de matemáticas Siempre Día E (2015)*. Este recorrido se inicia en orden cronológico, es decir, por los Lineamientos.

Inicialmente, se abordan los referentes de tipo internacional denominados Principios y Estándares para la Educación Matemática (2008) diseñados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). En relación con la enseñanza del álgebra consideran que debe ser incluida dentro del currículo desde el ciclo de enseñanza inicial ya que esto permite a los estudiantes construir bases de comprensión desde la experiencia que servirán para el abordaje explícito de esta en grados superiores, al respecto se plantea que “una experiencia sistemática con patrones puede ayudar a entender la idea de función” (National Council of Teachers of Mathematics, 2008, p. 39). Lo anterior, confirma la relevancia del presente trabajo de investigación.

Dentro de los Estándares y Principios propuestos por la NCTM también se exponen algunos relacionados directamente con el concepto de patrones, como: “comprender patrones, relaciones y funciones” (National Council of Teachers of Mathematics, 2008, p. 402) y a su

vez estos se adaptan a los diferentes grados de escolaridad, en el presente texto se hace énfasis en los relacionados con el grado segundo; donde es llevada a cabo la presente investigación.

- Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades;
- Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra;
- Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento (National Council of Teachers of Mathematics, 2008, p. 402).

En consecuencia, la NCTM (2008) propone el desarrollo de actividades de inducción al álgebra desde los primeros años, además afirma que los estudiantes desde el primer grado (kínder) deben razonar de modo inductivo a partir de patrones y casos determinados.

Después de abordar los Estándares y Principios para la Educación Matemática propuestos por la NCTM, en la misma línea se presentan los referentes educativos de orden Nacional, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) presentan un enfoque de pensamientos expuestos bajo una mirada transistémica e interrelacional, con el propósito de evitar su fraccionamiento. Es por ello que se establecen diferentes tipos de pensamiento matemático: pensamiento numérico y sistemas de números, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En este último se inscribe el concepto de patrón, objeto de estudio de la presente investigación.

Ahora bien, para materializar dicho enfoque por pensamientos cuya mirada es asociada a lo sociocultural, el MEN expide en el 2003 los *Estándares Básicos de Competencias en matemáticas* dicha versión estuvo en revisión, quedando como producto final la publicada en el año 2006. En los Estándares se recogen los cinco pensamientos enunciados anteriormente (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio) y cinco procesos generales (resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento y ejercitación) propuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Con respecto al abordaje del concepto de patrón, los Estándares lo consideran de manera explícita en los siguientes enunciados:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas. (MEN, 2006, p. 81)

Después de revisar los *Estándares Básicos de Competencias en matemáticas* (2006) se puede concluir con respecto a patrones, que este concepto aparece de manera evidente en dicho documento. Esto significa que si en la básica primaria, especialmente en el grupo de grados de primero a tercero no se aborda de manera intencionada y consciente, no es porque los Estándares no lo propongan sino por desconocimiento de los docentes. En esta dirección, el objeto matemático asumido por el presente trabajo de maestría va en completa sintonía con la política educativa nacional.

Pero en Colombia en los dos últimos años no son sólo los Lineamientos y Estándares los únicos referentes de calidad educativa, también lo es un documento publicado en el 2015 titulado *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas* (DBA). Dicho documento indica cuáles son los aprendizajes fundamentales que deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados, igualmente los DBA posibilitan que:

Entidades Territoriales podrán tomarlo como un referente que les permita construir sus propias iniciativas curriculares, las instituciones educativas usarlo en la elaboración de sus planes de área, los docentes desarrollar ejercicios de planeación y prácticas de aula, los estudiantes podrán dar más sentido a sus procesos de aprendizaje y los padres de familia, facilitar el acompañamiento de la formación de sus hijos en casa. (MEN, 2015, p. 3)

Al revisar dicho antecedente legal, se constata que efectivamente también dentro de sus aprendizajes básicos que propone, aparece los patrones como un asunto reiterativo en los

primeros grados. Es que el aprendizaje: “Reconoce y propone patrones con números, ritmos o figuras geométricas” (MEN, 2015, p. 10) que corresponde al aprendizaje N° 10 del grado primero, también aparece exactamente igual en el grado segundo en el aprendizaje N° 13 y en el grado tercero en el aprendizaje N° 15.

Pero como si Lineamientos, Estándares, DBA no fueran suficientes, en Colombia hay otro referente legal que viene tomando fuerza y es la *Matriz de referencia de matemáticas* (2015) expedida por el ICFES. Esta matriz condensa con precisión lo que se evalúa en las Pruebas SABER para los grados tercero, quinto y noveno.

Con respecto a los patrones, tal como se enuncia en el planteamiento del problema, para el grado tercero, este concepto aparece de forma explícita dentro del componente Numérico – variacional en la competencia de comunicación, se ubica el siguiente aprendizaje con sus respectivas evidencias:

Aprendizaje:

- Construir y describir secuencias numéricas y geométricas.

Evidencias:

- Identificar un elemento en una posición determinada siguiendo un patrón previamente establecido.
- Reconocer los primeros términos de una secuencia a partir de un patrón previamente determinado.
- Identificar la posición correspondiente al término de una secuencia de acuerdo con el patrón establecido. (MEN, 2015, 3)

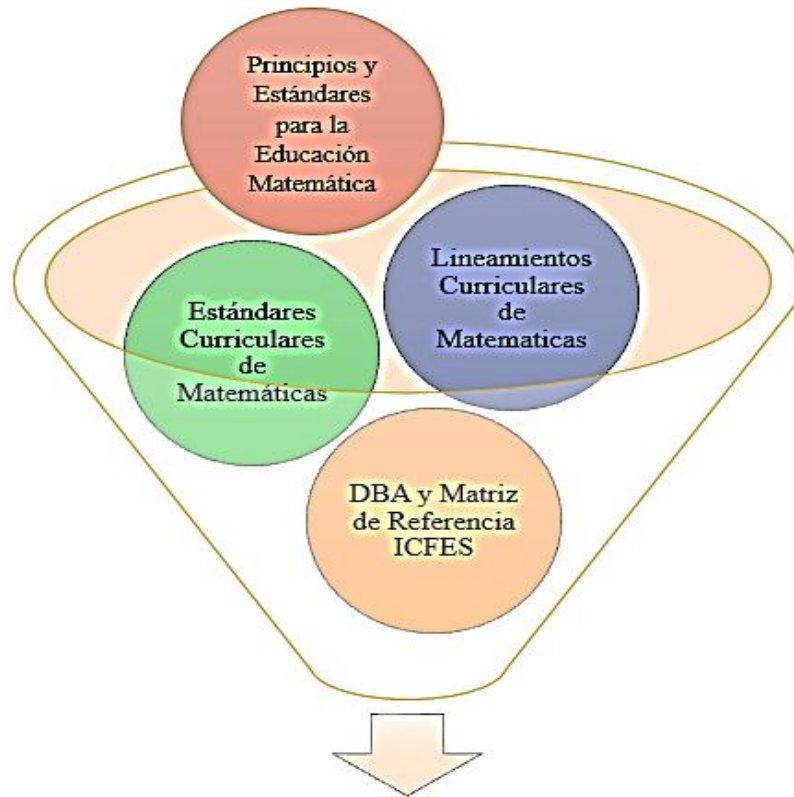
Significa entonces que los patrones son un concepto evaluado por el ICFES en el grado tercero, de ahí la importancia de su abordaje en el aula durante los primeros grados de escolaridad.

Finalmente, con respecto a este apartado de antecedentes legales, se pueden extraer dos grandes conclusiones para este proyecto. La primera tiene que ver con la invitación directa que

aparece en referentes como Lineamientos y Estándares de índole nacional e internacional, para que en las aulas de clase las matemáticas sean trabajadas de una manera diferente, renovada, donde realmente sean posibles los aprendizajes, donde los estudiantes le encuentren sentido y sobre todo para que apliquen lo que aprendan en su vida cotidiana. Es pues, esa invitación a abandonar esa enseñanza tradicional y conductista que impera aún en muchas escuelas del país.

Y la segunda gran conclusión tiene que ver con la importancia que reviste el trabajo con patrones en los primeros grados de escolaridad. Es que todos los antecedentes revisados como: Lineamientos, Estándares, DBA, Matriz de referencia lo consideran, es un aprendizaje explícito. Esto significa que el trabajo con patrones es un asunto que desde los referentes de calidad educativa se viene pensando y que por tanto una investigación que ayude a materializar esos aprendizajes que se postulan desde lo teórico es un asunto urgente, primordial y pertinente.

Para finalizar los antecedentes de tipo legal se presenta la Ilustración 3. , que hace alusión a los referentes en el campo de la enseñanza de patrones en la escuela, ya que son insumo dentro de la planeación de las clases que se imparten dentro del aula.



Enseñanza de patrones desde un enfoque sociocultural

Ilustración 3. Ilustración 3.

3 Marco conceptual

3.1 Objeto matemático: patrones

Al hablar de patrones se hace necesario enumerar y definir inicialmente las categorías que hacen parte fundamental de dicho concepto, como son: sucesiones, series y progresiones y establecer las diferencias conceptuales entre éstas; es por ello que, en el presente apartado inicialmente se definen tales categorías y posteriormente se aborda el concepto de patrón desde diferentes perspectivas teóricas entre ellas Godino & Font (2003), Radford (2010a), entre otros. Quienes con sus aportes esclarecen la postura que se asume dentro de esta investigación con respecto al estudio de patrones.

3.1.1 Sucesiones, series y progresiones

Con el transcurrir de los años, cada una de estas categorías ha sido definida de manera detallada incluyendo particularidades que permiten establecer diferencias sustanciales entre ellas, para la presente investigación se define en primer lugar el término sucesión utilizando las palabras de (García, 2015) donde afirma:

Una sucesión es una función del conjunto $N = 1, 2, 3 \dots$ de números enteros positivos en un conjunto A. Para indicar la imagen del entero n , se emplea el símbolo a_n .

Se puede decir de una sucesión que es una estructura discreta con la que puede representarse una lista ordenada (p.226).

En el presente estudio se utilizan sucesiones crecientes y decrecientes, para las sucesiones crecientes se han propuesto los términos de la forma $a_n \leq a_{n+1}$ y así sucesivamente. Seguido, para las sucesiones decrecientes se dispone la forma $a_{n+1} \leq a_n$. En la presente investigación se han diseñado ambos tipos de sucesiones, inicialmente se plantean sucesiones crecientes y más adelante, cuando los estudiantes se han ejercitado en este tipo de sucesiones se proponen sucesiones decrecientes.

En este orden de ideas, se hace necesario afirmar que las sucesiones dan origen a las series, éstas últimas son consideradas como la suma de los términos de una sucesión, es decir, son aquellas sucesiones que se obtienen al sumar los términos de una sucesión dada con anterioridad (Cañadas, 2007), por lo tanto para que exista una serie debe presentarse antes una sucesión.

A lo anterior, se suman los aportes de Castro (2012) quien determina el carácter finito e infinito de la series y plantea algunos ejemplos:

Las series pueden ser finitas o infinitas. Cuando se trata de series infinitas, para indicar que continúa así indefinidamente se escriben puntos suspensivos.

Ejemplos de series finitas son las siguientes:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
2. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$
3. $3 + 8 + 13 + 18 + 23$

Ejemplos de series infinitas son las siguientes:

1. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13\dots$
2. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 \dots$
3. $1 + 2 + 4 + 16 + 32\dots$ (p. 215-216)

Para el presente estudio se tienen en cuenta las series finitas, lo anterior se debe a los resultados de observaciones realizadas en el grupo con anterioridad. Por ahora, se han definido las categorías sucesión y serie, donde se puede establecer que ambas presentan una relación de dependencia. En este sentido, la serie depende indiscutiblemente de la sucesión. Seguido se define entonces, el concepto de progresión.

Las progresiones están asociadas a ciertos tipos de sucesiones particulares denominadas: progresiones aritméticas, geométricas y armónicas, en este sentido las

progresiones aritméticas establecen las características propias de ciertas sucesiones. En el presente estudio se abordan dos tipos de secuencias: las aritméticas y geométricas.

Progresiones aritméticas: este tipo de progresiones son determinadas por la siguiente característica: cualquier número de la sucesión es igual al precedente si al sumarle un número fijo b ; el número puede ser positivo o negativo y éste a su vez es reconocido como razón de la progresión (García, 2015). Una forma de representar las progresiones aritméticas es la siguiente: $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_{n-1}, a_n \dots$

Progresiones geométricas: una característica presente en estas progresiones es que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor fijo, dicha cantidad fija se denomina razón. Entendidas de esta forma dichas progresiones tienen relación con las funciones exponenciales, es representada $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

En las actividades propuestas dentro de la presente investigación son incluidas algunas progresiones de modo geométrico. Sin embargo, atendiendo a las necesidades conceptuales de los estudiantes y teniendo presente los conocimientos previos establecidos durante las observaciones de clase y los diarios de campo, se han privilegiado aquellas progresiones de tipo aritmético.

3.1.2 Patrones.

Los patrones se relacionan en ocasiones con representaciones internas y externas, las primeras se asocian con elementos que el estudiante va tomando de lo observado en el contexto y son expresadas a través de las representaciones externas. En palabras de Castro (1995) un patrón es considerado como “algo” que es repetido con cierta regularidad. En este sentido, el patrón puede ser retomado como una ley que persiste en espacios y tiempos determinados y que emerge a partir de procesos internos que son materializados a través de signos y símbolos externos.

Para otros autores como Godino & Font (2003) el término patrón está vinculado con una regla o principio que determina de manera unívoca una familia finita o infinita de objetos,

de igual manera propone que la representación, generalización y formulación de patrones y regularidades son elementos que permiten al estudiante acercarse al razonamiento algebraico, es decir, el pensamiento variacional desde edades tempranas. Este estudio pretende dar aplicación a dicho presupuesto considerando que los estudiantes del grado segundo a través del uso de material concreto, representaciones pictóricas, simbólicas y otras que pueden emerger, establecen patrones y regularidades en progresiones de tipo aritmético y geométrico.

En un trabajo reciente, Godino, Aké, Gonzato, & Whilhelmi (2014) plantean el papel que cumplen los patrones dentro de las matemáticas, lo siguiente:

los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas, pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes, los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas (p. 202)

En consecuencia, es función del maestro explorar, descubrir, describir y proponer tales situaciones físicas, geométricas y numéricas, adaptándolas a las dinámicas del aula, inclusive en el ciclo de la Básica Primaria donde se privilegia de manera generalizada dentro de los currículos el desarrollo del pensamiento numérico.

En línea con lo anterior, en algunos textos se plantea que “los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones son propios de los primeros niveles de algebrización, y como hemos visto se pueden, y deben, iniciar desde la educación primaria” (Godino & Font, 2003, p. 778). Es así, como el presente estudio de investigación pretende adaptar, proponer y generar experiencias de aula que les permitan a los estudiantes explorar sucesiones, progresiones, patrones y regularidades propios del pensamiento algebraico utilizando elementos y situaciones propias del contexto en el cual se desenvuelven a diario.

En otras aproximaciones teóricas, con respecto a la generalización de patrones como una de las formas a través de las cuales se puede introducir el álgebra en la Educación Primaria se exhiben los aportes y pensamientos de Radford (2010b) quien considera que el

acercamiento al estudio de patrones ofrece posibilidades a los estudiantes de familiarizarse con situaciones de variación necesarias para el desarrollo del pensamiento algebraico. En suma, Radford (2010b) plantea la necesidad de caracterizar aquellos conceptos propios de la etapa escolar inicial que proveen a los estudiantes de herramientas útiles para el desarrollo del pensamiento algebraico con el fin de proporcionar insumos que les permitan avanzar en el desarrollo de dicho pensamiento en los próximos niveles de escolaridad.

Con el propósito de enriquecer su teoría Radford (2010a) propone, clasifica o estratifica tres formas del pensamiento algebraico donde incluye dentro de la actividad reflexiva elementos como: la percepción, los gestos, los movimientos; en otras palabras, elementos propios del lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes en términos de Radford (2010a):

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas: por ejemplo: a través del trabajo sobre números. Por esto podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí” señala y dice “más dos” (p. 5-6).

En esta forma de pensamiento se hacen presentes todos los modos kinestésicos, pictóricos y de representación que el estudiante utiliza para dar a conocer sus razonamientos y explicaciones acerca del objeto matemático que desea abordar; en este caso, patrones y regularidades halladas en diferentes tipos de progresiones aritméticas y geométricas. Seguido, como segunda forma del pensamiento algebraico Radford (2010a) propone:

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el

total”. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica en tanto hay evolución de nodos semióticos (p. 7-8).

Este tipo de pensamiento algebraico, se caracteriza por concebir una serie de argumentaciones y explicaciones más elaboradas por parte del estudiante, análogas a una representación algebraica de orden simbólico, tal y como se puede observar en los ejemplos propuestos por Radford (2010a) en el apartado inmediatamente anterior, luego el autor plantea un tercer y último tipo de pensamiento algebraico:

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases claves son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como $n + (n - 1)$ o $2n - 1$. En este estrato hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso, a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (p.8).

Con relación a esta última forma de pensamiento algebraico expuesta por Radford (2010a), es necesario precisar que dentro de esta investigación se fija como propósito describir las características que presentan los estudiantes del grado segundo de la Educación Básica primaria con respecto a los niveles: pensamiento algebraico factual y pensamiento algebraico contextual bases del pensamiento algebraico simbólico.

Dentro de la presente investigación se asume el concepto de patrón desde la perspectiva de Radford (2013) exhibida en párrafos anteriores, quien además considera la generalización algebraica de patrones como una actividad que involucra acciones como identificar una característica común, establecida al observar detenidamente elementos propios de una sucesión, seguido, expone que esta actividad también requiere de la aplicación de dicha característica a todos los elementos que conforman la sucesión y finalmente se suma la capacidad de deducir una expresión común que permita establecer el valor de cualquiera de los términos de la secuencia.

Hasta ahora, se presentan a lo largo de este capítulo los elementos conceptuales que giran alrededor del concepto de patrones como objeto matemático que se aborda dentro de la

presente investigación, a continuación se enseña una Ilustración 4. Síntesis conceptos relación con la categoría de patrones, que sintetiza los conceptos expuestos hasta ahora dentro del marco teórico.

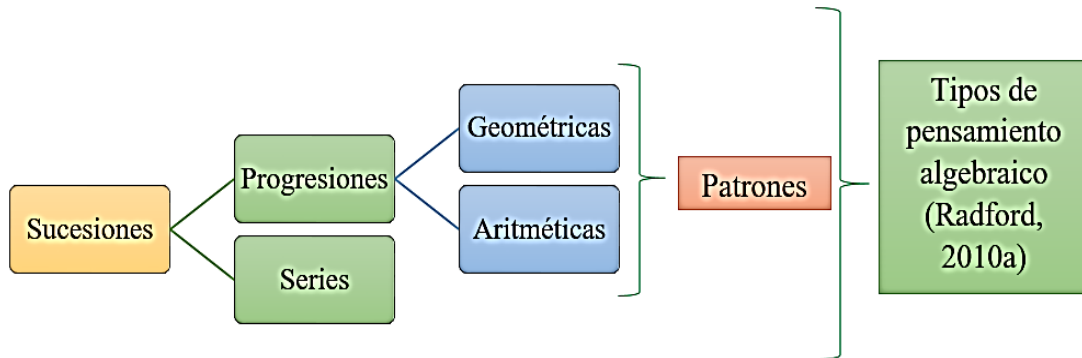


Ilustración 4. Síntesis conceptos relación con la categoría de patrones

3.2 Teoría cultural de la objetivación

Como se ha mencionado a lo largo del texto, la presente investigación pretende además de abordar como objeto de conceptualización el estudio de patrones en estudiantes de segundo grado, también pretende explorar otras posibilidades de enseñanza, otras teorías de aprendizaje que favorezcan la interacción entre el maestro – estudiante – objeto de conocimiento, al igual que la interacción entre estudiante – estudiante – objeto del conocimiento. Es por ello, que en línea con lo anterior y con el propósito de describir las formas de pensamiento algebraico Radford (2010a) exhibidas por los estudiantes durante la solución de problemas propios del entorno, se han retomado los elementos proporcionados por la teoría cultural de la objetivación propuesta por este mismo autor (Radford, 2006).

Esta teoría surge inspirada en el estudio y análisis de las escuelas antropológicas e histórico culturales del conocimiento, donde la interacción social, el intercambio de ideas, el significado y el uso de los artefactos, además de una concepción antropológica del pensamiento y otra esencialmente social del aprendizaje (Radford, 2006) hacen del aula de clase un laboratorio de intercambio de experiencias y saberes, allí el aprendizaje es en esencia

“una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico – culturales históricamente formados” (Radford, 2006, p.103).

Desde esta perspectiva, se define entonces en primera instancia el pensamiento, asumido como una actividad indiscutiblemente presente en el desarrollo de cualquier aprendizaje; seguido, se enumera la importancia y el significado de los objetos nombrados dentro de la teoría cultural de la objetivación como artefactos e inmediatamente después se presentan los elementos que componen la teoría de la objetivación dentro del espacio de aula.

3.2.1 El pensamiento.

Cualquier actividad de aprendizaje involucra el pensamiento. Éste se presenta como insumo del aprendizaje, en palabras de Radford (2006) “el pensamiento aparece como sustrato del aprendizaje, aquello a través del cual se establece la relación entre el ser y el mundo” (p. 104). En este sentido el pensamiento permea cualquier intento de aprendizaje, incluso en aquellos donde la acción parece ser simple adaptación.

Al contrario de otras escuelas y otras teorías, la teoría cultural de la objetivación concibe el pensamiento desde una perspectiva que va más allá de lo interno, lo invisible, lo que no se puede ver, es decir, va más allá de lo mental. Es por esto, que el pensamiento visto desde esta mirada se define como la “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados” (Radford, 2006, p. 105), convirtiendo el pensamiento en un modo colectivo, en una categoría que incluye la interacción con los otros, con los objetos, con el mundo y sus significados.

De manera más precisa, la cultura y todos los elementos que la componen se filtran subrepticamente en el pensamiento, lo movilizan y lo nutren continuamente de significados, reflexiones, conexiones, objetos, experiencias, entre otros. En palabras de Radford (2006) “el pensamiento es considerado *una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos*” (p.107). Esta idea permite inferir que el estudiante no realiza tales reflexiones desde concepciones individuales sino más bien construye significados a partir de reflexiones y acciones propuestas por la cultura. En el presente estudio la cultura,

las acciones cotidianas que se llevan a cabo diariamente giran en la periferia, un contexto que territorialmente es considerado rural donde sus conflictos son similares a los que se presentan en cualquier comuna de la ciudad.

Continuando con la línea del pensamiento, puede asegurarse que éste no ocurre solamente en el plano de lo no observable también sucede en el plano de lo social donde los artefactos asumen un papel como mediadores. Es decir, desempeñan un papel facilitador, potenciador, promotor dentro del pensamiento, para Radford (2006): los artefactos “*mediatizan y materializan el pensamiento*” (p. 107) y a su vez asume tal mediatización como una característica inherente al mismo.

Avanzando en el orden de ideas expuesto desde el inicio, se explica la segunda característica del pensamiento expuesta por Radford (2006) el carácter reflexivo, donde la reflexión es entendida como una actividad de ida y regreso, allí dialogan la realidad constituida desde un contexto histórico y el individuo que la conserva o la modifica según su subjetividad y el modo de interpretarla. Es dicha subjetividad permeada por el contexto y la cultura quien penetra indeterminadamente cualquier tipo de pensamiento.

En síntesis, se ha presentado hasta este momento el carácter mediatizado y reflexivo del pensamiento según la teoría cultural de la objetivación. Sin embargo, estas reflexiones están enmarcadas por los significados culturales que van mucho más allá de los contenidos en sí mismos, “dichos significados *orientan* la actividad y le dan cierta *forma*” (Radford, 2006, p.109). De esta manera, las actividades propuestas en el aula de clase dentro del presente estudio están mediatizadas por los artefactos cuyos significados están sujetos a los modos de pensar y de comprender el mundo de quienes interactúan dentro del espacio de la clase.

Cuando en el presente texto se enumeran los significados como resultado de los modos de pensar, interactuar, comprender el mundo, se refiere en palabras de Radford (2006) a los modos semióticos de significación cultural que dan lugar a dos aspectos: uno que tiene que ver con el modo de realizar la actividad y el segundo los modos específicos del saber. El primero hace alusión al momento histórico y el segundo se refiere al cúmulo de reglas, pautas, saberes

que hacen que los razonamientos, explicaciones y conclusiones formuladas en torno a los objetos del conocimiento sean validadas o refutadas.

Con el objeto de presentar de manera precisa la relación entre artefactos, reflexión, modos semióticos de significación cultural, el pensamiento y el aprendizaje se definen a continuación las fuentes que viabilizan la elaboración de significados, el papel de las actividades de aprendizaje y lo que se denomina “objetivación del saber” (Radford, 2006) dentro de las fuentes de significación se encuentran las comunidades de aprendizaje como formas de interacción dentro del aula (Radford, 2006, p.115).

3.2.2 Fuentes de elaboración de significados.

Dentro de la teoría cultural de la objetivación se concibe el aprendizaje como una continua elaboración y reelaboración de significados, los significados van y vienen de acuerdo al momento histórico, a la interacción entre los sujetos y los objetos, a las concepciones que tienen dichos sujetos, a las condiciones sociales, entre otros aspectos propios de los contextos particulares donde se llevan a cabo tales aprendizajes. Por lo tanto, se hace necesario definir dentro de este estudio, cuáles son esas fuentes generadoras de significado.

3.2.2.1 Los artefactos: dueños de saberes milenarios.

Los artefactos guardan en sí mismos un significado incluso de generaciones anteriores, al contacto con ellos el ser humano intenta interactuar con el objeto, apropiarse de él, darle utilidad y una vez usado el artefacto, el ser humano reestructura un modo de pensar y de significar ese artefacto, para Radford (2006) los objetos por sí solos no pueden encarnar de manera fidedigna el saber que se ha depositado en ellos, es preciso utilizarlos. Es en el uso y en el contacto con otras personas que conocen la inteligencia puesta por los antepasados en el artefacto, es que se desarrollan nuevos significados, nuevos aprendizajes. Desde esta postura emerge la interacción social como una segunda fuente de significación.

3.2.2.2 La interacción social.

Como se ha mencionado, los artefactos guardan saberes que recogen los conocimientos y las construcciones de generaciones anteriores, dichos saberes son reconstruidos con la ayuda de la interacción con los otros. Dentro de la teoría cultural de la objetivación la interacción cumple un papel protagónico en la construcción de los aprendizajes, en la elaboración de nuevas significaciones, ya que tal y como lo plantea Radford (2006):

El punto crucial es que las actividades, los medios materiales que las mediatizan y sus objetivos están impregnados de valores científicos, estéticos, éticos, etc... las acciones que los individuos realizan están sumergidas en modos culturales de la actividad. Es por eso que el salón de clases no puede verse como un espacio cerrado, replegado en sí mismo, en el cual se negocian las normas del saber, pues esas normas tienen toda una historia cultural y como tal pre-existen a la interacción que ocurre en el salón de clases.

En la perspectiva que estamos sugiriendo, la interacción desempeña un papel diferente. En lugar de desempeñar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando la interacción es consustancial del aprendizaje (p.113-114).

De esta manera y a modo de conclusión, un escrito realizado por D'Amore, Radford, & Bagni (2007) concluye que la clase generalmente pretende desarrollar un modo de vida comunitario donde todos los actores son protagonistas, que participan de manera activa y responsable en la construcción de significados dentro del aula de clase. En esta dirección el aula reaparece como “el espacio de crecimiento de formas culturales de pensamiento y de ser” (Radford, 2013, p.45) donde los estudiantes intercambian experiencias, concepciones y significados sobre el mundo, sus formas y sus conceptos mediados por el uso de artefactos, la interacción social incluidos en el diseño de actividades de aprendizaje.

Este trabajo de investigación realiza una apuesta fuerte dentro del componente de interacción en el aula, por ello todas las actividades metodológicas propuestas incluyen

momentos de discusión en pequeños grupos, en intercambio de grupos, discusiones generales, entre otras, que permitan la circulación de significados dentro de los espacios de aprendizaje.

3.2.3 Actividades de aprendizaje.

Las actividades de aprendizaje se encuentran en la misma línea de los facilitadores o fuentes de elaboración de significados en tanto se plantean con fines y objetivos que las direccionan, los cuales se convierten en el hilo conductor del diseño y ejecución de dichas actividades y que orientan la acción del aula.

Generalmente, durante la clase de matemáticas algunos estudiantes y maestros se dedican a la solución de una serie de problemas cuyos planteamientos, contenidos, lenguaje y presupuestos están fuertemente influenciados por el contexto, al igual que sus interpretaciones; sin embargo, éstos no pueden convertirse en los fines que guían las actividades de clase Radford (2006), el fin ha de ser orientado hacia el desarrollo de diferentes aprendizajes que retomen todas las formas posibles de pensamiento. En palabras de Radford (2006) “desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, hacer matemáticas no se reduce a resolver problemas” (p.114) y es así como lo ha asumido el presente estudio, las actividades propuestas para abordar el concepto de patrón van más allá de la simple resolución de problemas o ejercicios matemáticos.

Visto de este modo, la resolución de problemas se constituye en un medio y no en un fin permanente e inamovible; “para nosotros la resolución de problemas no es el fin sino un medio para alcanzar ese tipo de praxis cognitivas o reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático” (Radford, 2006, p. 114) lo que significa que tras el objetivo de la clase o de la actividad particular existe un objetivo mayor, uno que tiene que ver con el desarrollo de las capacidades del sujeto, con las herramientas que aspira brindar la escuela para su desempeño dentro de la sociedad, dentro de su contexto, en otras palabras los objetivos han de ir orientados hacia el desarrollo del ser en todas sus dimensiones.

3.2.4 La objetivación de saberes

Como ya se ha descrito en apartados anteriores el pensamiento es una reflexión mediatizada por los objetos y la interacción social, es decir va más allá del discurso; para Radford (2006) lo mismo sucede con los objetos matemáticos, éstos pueden ser percibidos a través de los pensamientos. En otras palabras, en una doble dirección donde el pensamiento materializa, significa y comprende la naturaleza de los objetos y sus múltiples aplicaciones y la otra donde el objeto se constituye en medio para la evolución del pensamiento.

En este orden de ideas, las actividades propuestas han de colocar en juego todos los elementos contextuales que le dan sentido a dichos objetos, remitir a los estudiantes a sus rasgos esenciales, a lo que le ha dado significado a lo largo del tiempo, a su utilidad dentro de la sociedad. El aprendizaje es precisamente “un proceso dialéctico entre sujeto y objeto mediatizado por la cultura, un proceso en el que a través de su acción (sensorial o intelectual) el sujeto nota o toma conciencia del objeto” (Radford, 2006, p. 116).

En consecuencia, la objetivación se constituye en el proceso que permite al estudiante tomar conciencia de los objetos, las formas, los significados de manera gradual, captar la esencia y el sentido del mismo. La objetivación se basa en los procesos sociales que se llevan a cabo con el propósito de guiar al estudiante hasta estados de comprensión que van más allá de la identificación, la objetivación dota de significado los conceptos matemáticos a través de objetos y prácticas culturales.

Por lo tanto, la teoría cultural de la objetivación en palabras de Radford (2013) “hace un esfuerzo por rastrear las acciones del alumno que lo conducen a objetivar el saber y a posicionarse como individuo crítico, responsable y abierto” (p.45) en este sentido la objetivación se convierte en un ejercicio donde la subjetividad comprende de manera abierta la subjetividad de los objetos y conocimientos matemáticos, los involucra dentro de su realidad gracias a la mediación de los artefactos y a las interacciones en las que participa dentro del contexto del aula y en su entorno, de ahí que las dinámicas de la clase cobren verdadera importancia dentro de los planteamientos de dicha teoría.

3.2.5 El aula de clase: una comunidad de aprendizaje

El aula de clase es el espacio donde se encuentran todas las versiones de la cultura, donde “*elabora* esa reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural” (Radford, 2006, p. 116). Es el lugar donde interactúan el sujeto y el objeto del conocimiento, por lo tanto el proceso de objetivación que viabiliza dicho encuentro no es individual, es una apuesta social. Una apuesta de formación conjunta de la conciencia, de significados, de saberes.

Por lo tanto, para la teoría de la objetivación el aula de clase es un espacio para aprender a interactuar en comunidad, en esta línea aprender es estar con otros, escuchar y comprender otras voces, otros modos de ver y de pensar, otras posibilidades. En palabras del autor:

La sociabilidad del salón de clases significa una unión a través de vínculos y relaciones que son prerequisites de esa reflexión que hemos mencionado anteriormente, definida como relación común y activa que elabora el alumno con su realidad histórico-cultural. Esa sociabilidad no solamente deja su huella en el contenido conceptual perseguido, sino que es consustancial de éste.

La naturaleza intrínsecamente social del saber y del pensamiento matemático nos ha llevado, pues, a concebir la sala de clase como una comunidad de aprendizaje, cuyo funcionamiento está orientado a la objetivación del saber (Radford, 2006, p. 117).

Es por ello, que dentro del aula de clase los estudiantes interactúan de tal modo que todos aportan a la construcción de saberes, en el espacio del aula se privilegian valores como el respeto, la flexibilidad, se acuerdan normas conjuntas con el propósito de generar compromiso por parte de todos los participantes, entre otros valores y actitudes dirigidas a promover el cambio, la modificación y transformación de significados, ningún miembro de la comunidad de aprendizaje conformada dentro del aula de clase sale de ella igual, al finalizar cada interacción los sujetos son transformados, tocados de algún modo.

Esta transformación aborda diferentes aspectos del ser, entre ellos el conocimiento. Es evidente que a través de la interacción, los estudiantes modifican de manera constante sus

formas de pensar, de construir el conocimiento, de operar e incluso modifican los modos de interpretar, comprender y resolver un problema. Dentro de la enseñanza del concepto de patrones las comunidades de aprendizaje han sido concebidas y dinamizadas de manera constante, los estudiantes intercambian ideas, pensamientos, conclusiones de forma ininterrumpida. Lo anterior se hace evidente en el capítulo siguiente dentro del diseño metodológico.

Es así, como en la siguiente Ilustración 5. Elementos de la teoría cultural de la objetivación; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, especifican aspectos que hacen parte fundamental de la teoría de la objetivación propuesta por Radford (2006). Estos elementos dentro de este estudio han sido utilizados como insumo para la elaboración de la propuesta de intervención en el aula.



Ilustración 5. Elementos de la teoría cultural de la objetivación

4 Metodología

4.1 Paradigma cualitativo

El presente trabajo dado su interés en caracterizar las explicaciones planteadas por los estudiantes del grado segundo a través del estudio de problemas que involucran el uso de patrones en contextos de interacción, requiere por su naturaleza (Vasilachis, 2006) un tratamiento desde un enfoque cualitativo. Considerando la realidad como una “realidad epistémica” (Sandoval, 2002) es decir, una realidad construida por los sujetos, de ahí la necesidad de interactuar en ella de manera directa. En línea con lo anterior, este proyecto opta por la Investigación Acción Educativa.

4.2. Investigación Acción Educativa

La Investigación-Acción Educativa es una metodología que presenta unas características particulares que la distinguen de otras opciones bajo el enfoque cualitativo; entre ellas se puede señalar la manera cómo se aborda el objeto de estudio, las intencionalidades o propósitos, el accionar de los sujetos sociales involucrados en la investigación, los diversos procedimientos que se desarrollan y los logros que se alcanzan.

La Investigación Acción Educativa en este proceso implica a la población estudiada como agente activo del conocimiento de su propia realidad, en este caso a los estudiantes del grado segundo del C.E.R. 20 de Julio del municipio de Urrao. Asimismo, la relación que se establece no es la de sujeto-objeto (como en la investigación clásica), sino la de sujeto-sujeto: de objeto de estudio, en este caso los alumnos pasan a ser sujetos protagonistas de todo un proceso. De igual manera esta investigación es acción, porque la misma actividad de investigar genera procesos de actuación, organización, movilización, sensibilización y concientización de la población involucrada en el proceso investigativo.

Adicionalmente, a este tipo de investigación se le suma una característica fundamental: la transformación de una realidad. La investigación Acción Educativa, en este caso no se agota en el mero registro de datos, además de ello, busca transformar las habilidades que poseen los

estudiantes del grado segundo para resolver problemas que involucran patrones en contextos de interacción, al mismo tiempo que se transforman las prácticas de enseñanza de los maestros frente a la orientación de las matemáticas en general y al abordaje de los patrones en particular. Es una modalidad pertinente para el presente trabajo ya que permite dar cuenta de lo que realmente sucede en el aula de clase, lo que transita por las mentes de los estudiantes, lo que piensan, sus explicaciones, sus argumentos y cómo éstas se van transformando a partir del trabajo propuesto por el maestro.

Por tanto, la investigación acción, es una opción metodológica acorde al paradigma cualitativo, teniendo en cuenta que permite la reflexión y construcción del conocimiento sobre aquellos problemas que se detectan y afectan la práctica educativa, tanto fuera o dentro del aula, como ocurre en este caso. Desde esta perspectiva se fortalece el trabajo colectivo que busca generar y fortalecer el bien común, las problemáticas giran alrededor de realidades que los miembros de la comunidad comparten. Dentro de este método de investigación, el presente estudio se centra en establecer diálogos, entre la reflexión, la transformación de la realidad y la ampliación de comprensiones, cada uno de los participantes, estudiantes, docentes, e investigadores, actúan desde una posición horizontal en la solución del problema.

A continuación, se presenta una ilustración que resume el proceso metodológico aplicado a la presente investigación.

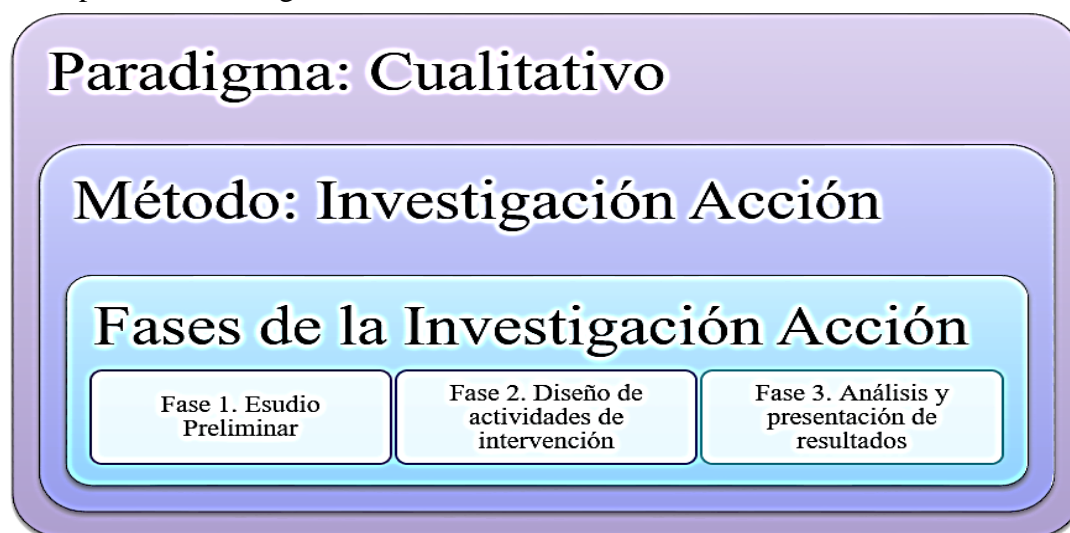


Ilustración 6 Síntesis metodología de investigación

Ahora bien, para lograr transformar una realidad educativa, la Investigación Acción considera las siguientes fases que se explican a continuación.

4.2.1. Fase I. Estudio preliminar.

Esta fase implica identificar y delimitar el problema, lo cual demanda tiempo, además de la necesidad de triangular diferentes fuentes de información. Para el caso del presente proyecto, tal como se desarrolló ampliamente en el apartado 1.1 Planteamiento del problema, se acudió a diferentes fuentes que permitieron identificar la situación problema, como lo fue la observación participante, los diarios de campo y el análisis de documentos como: resultados de pruebas externas y el plan de área de matemáticas.

De esta manera se estableció el estado preliminar de los participantes de esta investigación, que en este caso son los estudiantes y profesora del grado segundo del C.E.R. 20 de Julio del municipio de Urrao. Dicho estado inicial comprende dos grandes líneas: la primera relacionada con la enseñanza de las matemáticas en general y la segunda con el abordaje de los patrones en particular.

Con respecto a la primera línea que tiene que ver con la enseñanza de las matemáticas, las observaciones de clase registradas a través de los diarios de campo, permitieron identificar que las prácticas de enseñanza que se estaban privilegiando tenían que ver con un docente instructor, que configuraba sus clases desde el orden de lo deductivo (presentar la teoría, realizar un ejemplo, asignar un taller y cerrar con un examen) y donde el trabajo se organiza la mayoría de las veces de forma individual, lo que repercutía en que los estudiantes no estuvieran interesados en lo que se les estaba enseñando.

Con relación a la segunda línea que involucra directamente el trabajo con patrones en el aula, la revisión documental permitió señalar que éstos como objeto matemático, no eran un asunto que se trabajara en clase y como consecuencia de ese no abordaje, es que los estudiantes que presentaron las pruebas SABER en tercero el año pasado vengan desmejorando en ese aprendizaje específico.

En consecuencia, este estado preliminar crea la necesidad de estudiar el uso de patrones en situaciones en contextos de interacción, y para ello se requiere de una fase de diseño de actividades de intervención.

4.2.2. Fase II. Diseño de actividades de intervención.

De acuerdo al estudio preliminar, se hizo necesario diseñar una situación problema teniendo en cuenta las características que ésta presenta con respecto a la vinculación con el contexto, es decir, su diseño siempre está relacionado con inquietudes y situaciones propias del entorno en el cual se desenvuelven los estudiantes, además incluye el uso de materiales que están de manera natural en el medio, la integración de varios aprendizajes, la formulación y proposición de múltiples soluciones, lo que potencia las habilidades y conocimientos de los estudiantes. El planteamiento de la situación problema permite aplicar los conocimientos y conceptos matemáticos en situaciones reales, auténticas, que dan sentido y significado al concepto de patrones.

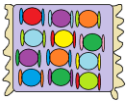



Además de cumplir con las características mencionadas en el párrafo anterior, la situación problema posibilita llevar a cabo la interacción dentro del aula, por tanto, cada una de las sesiones de clase inicialmente plantea el desarrollo de tareas en pequeños grupos; posteriormente un intercambio de información y experiencias entre dichos grupos y finalmente una actividad de socialización colectiva.

En este orden de ideas, la fase de intervención en el aula se lleva a cabo en seis sesiones de clase con el propósito de dar posibilidad a los estudiantes de interactuar de manera progresiva con el objeto matemático: patrones. Cada sesión presenta una duración de dos horas, con una regularidad de dos días por semana, lo que ha permitido ejecutar la propuesta en el transcurso de tres semanas.

El desarrollo de las sesiones es registrado en audio, video, fotos. A partir de dichos registros se retoman algunos episodios ocurridos dentro de las clases transcritos y presentados dentro del apartado Resultados del Análisis, éstas dan cuenta de las afirmaciones que allí se presentan y de los procesos de objetivación que ocurren dentro de la enseñanza de patrones.

4.2.2.1 Situación problema.

Los estudiantes del grado segundo desean realizar una pequeña celebración con motivo de la finalización del año, para tal evento deberán seleccionar los pasabocas que se ofrecerán a los asistentes durante el encuentro. La maestra ha presentado las siguientes opciones: confites, paletas, torta, queso dulce, helado, colombinas. Durante el transcurso del año el grupo ha recolectado \$50.000 aproximadamente. Es por ello que deben realizar una propuesta que permita a los estudiantes del grado segundo invertir de la mejor manera su presupuesto.

Producto	Unidades por paquete	Valor paquete	Valor unidad	Promoción
Confites 	30 unidades	\$1.200	\$50	2 paquetes por \$2.000
Paletas 	10 unidades	\$1.800	\$200	3 paquetes por \$3.600
Torta 	1 unidad	\$10.000	\$10.000	2 tortas por \$18.000
Queso dulce 	15 unidades	\$2.500	\$200	5 cajas por \$10.000



<p>Helado</p> 	6 unidades	\$3.000	\$600	4 paquetes por \$8.000
<p>Colombinas</p> 	24 unidades	\$1.800	\$100	2 paquetes por \$3.200

Tabla 1. Elementos que componen la situación problema

4.2.2.2 Sesión 1. Comprensión de la situación.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

Teniendo en cuenta el planteamiento del problema anterior, diseña en compañía de tus compañeros (3 estudiantes) un esquema donde representes un posible camino para la solución de la situación. Dicho esquema debe incluir además aquellos elementos que necesitas para ello.

Esquema
Explicación del esquema.

Tabla 2, Diseño de esquema sobre la situación

Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

Momento 1.

Cada grupo intercambiará el esquema elaborado con otro grupo, y deberá diligenciar la siguiente rúbrica con el propósito de retroalimentar el esquema de sus compañeros y a su vez retomar y extraer aquellos elementos que puedan nutrir el propio.

N°	Ítem	Si	No	¿Por qué?
1	La información que se presenta en el esquema es clara.			
2	Reúne todos los elementos necesarios para la solución del problema.			
3	Consideran que le sobra información al esquema.			
4	Es importante anexar alguna información al esquema que puede ser requerida para la solución de la situación.			
5	Es suficiente la explicación que se anexa al final del esquema.			
6	Desean incluir alguna otra sugerencia.			

Tabla 3. Rúbrica cotejo diseño de esquema

Momento 2.

Después de diligenciar la rúbrica anterior cada equipo realizará la respectiva retroalimentación a sus compañeros y éstos a su vez evaluarán las observaciones realizadas e incluirán aquellas que consideren convenientes dentro de su esquema, luego lo pasarán en limpio en un cuarto de papel bond. Posteriormente, deberán colocarlo en un lugar visible dentro del salón de clase.

Actividad 3. Discusiones generales.

Cada equipo socializa a sus compañeros el esquema que ha construido y bajo la orientación del docente podrá responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué información necesitamos para resolver el problema?
2. ¿Qué debemos hacer con dicha información?
3. ¿Cuáles esquemas se asemejan?
4. ¿Cuál de las soluciones presentadas por tus compañeros (diferente a la de tu grupo) es la que más te llama la atención? ¿Por qué?

4.2.2.3 Sesión 2. Saberes que circulan.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

Tal y como se ha presentado en la sesión anterior, los estudiantes del grado segundo cuentan con un presupuesto aproximado de \$50.000, pero ellos antes de realizar las compras han decidido verificar el valor de su presupuesto, la tarea del equipo es por lo tanto comprobar la cantidad de dinero recolectado por los estudiantes y organizarlo en la tabla que se presenta¹.

¹ Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes pueden utilizar billetes didácticos que contengan la misma denominación.

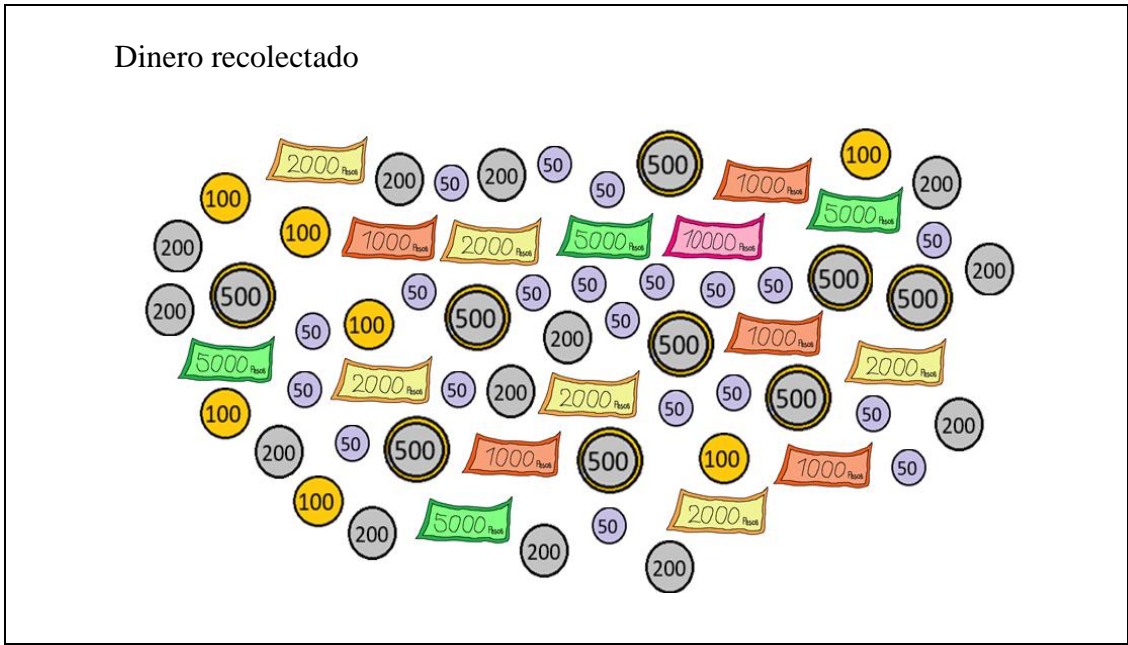





Ilustración 7. Representación de billetes

Después de observar el dibujo anterior, cada equipo diligencia la siguiente tabla con el propósito de determinar el presupuesto con el que cuenta el grado segundo para la compra de los pasabocas.

Nominación billetes	Forma de conteo (representación)	Total
		
		
		






		
		
		
		
		
Explica el método utilizado por el equipo para realizar el conteo.		

Tabla 4. Conteo de billetes

Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

A modo de carrusel cada uno de los grupos pasará la ficha diligenciada en la actividad anterior, todos los equipos observarán las respuestas de los demás compañeros e irán registrando los diversos modos de representación y organización de la información planteada en cada una de las tablas².

Actividad 3. Discusiones generales.

² Para esta actividad el docente puede colocar una pista de música o sonido que indique a los estudiantes el momento de rotar las fichas. Lo anterior, con el propósito de regular y optimizar el desarrollo de la actividad.

En este momento de la clase, se realiza una actividad de socialización donde se dan a conocer los diferentes modos de representación, para ello se puede utilizar la estrategia del “tingo tango” o “alcance la estrella”, donde algunos de los estudiantes darán a conocer las diferentes formas de conteo utilizadas para determinar el presupuesto con el que cuentan los estudiantes del grado segundo para la ejecución de la actividad. El docente puede plantear preguntas como:

1. ¿Cuánto dinero hay en billetes de \$5.000? ¿Cómo lo sabes? ¿Existe otra manera de contar dicha cantidad?
2. ¿Con cuánto dinero en monedas de \$50 disponen los estudiantes del grado segundo? ¿Escribe cómo lo hiciste?
3. Si pudieran contar el dinero con monedas o billetes de la misma denominación ¿Cuál billete o moneda utilizarían y por qué? ¿Muéstralo con un ejemplo?

En este momento de la clase el docente puede incluir y plantear otras preguntas que inviten a los estudiantes a dar a conocer los patrones utilizados para las actividades de conteo de los billetes y las monedas presentadas.

4.2.2.4 Sesión 3. Representación pictórica de patrones.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.


Con tus compañeros de grupo (2 integrantes) planteen algunas soluciones para el siguiente problema, pueden utilizar los bloques lógicos para ilustrarse un poco.


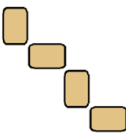
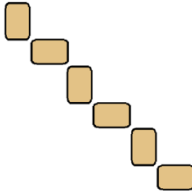
La maestra del grado segundo, ha solicitado a sus estudiantes que por grupos organicen de manera creativa en una bandeja los dulces que ellos consideran deben comprar para el día de la celebración. Sin embargo, ha planteado las siguientes condiciones:

1. La cantidad de dulces para cada estudiante no puede ser superior a diez.
2. Deben presentar su propuesta en una secuencia de imágenes o figuras. La figura 4 será la que determine la cantidad y variedad de dulces para cada estudiante.

Después de aclaradas dichas condiciones, los grupos han presentado las siguientes propuestas:

Grupo 1.

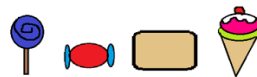
El grupo uno solo ha propuesto repartir  queso dulce y diseñó la siguiente presentación.

 Figura 1.	 Figura 2.	 Figura 3.

¿Por qué creen que esa es la respuesta? ¿Cómo lo hicieron?		

Tabla 5. Sucesión grupo 1

Grupo 2.



Ha seleccionado los siguientes dulces, cantidades y presentación para cada estudiante.




  
<p>Figura 1. Figura 2. Figura 3.</p> <p>-----</p>
<p>Explicar su respuesta. ¿Cómo lo saben?</p>

Tabla 6. Sucesión grupo 2

Grupo 3.

El grupo tres por su parte, ha presentado la siguiente propuesta.


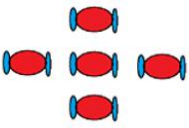
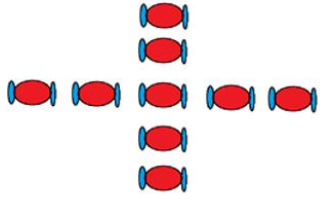
  
<p>Figura 1. Figura 2. Figura 3.</p> <p>-----</p>
<p>¿Por qué creen que es la respuesta? ¿Qué conclusiones plantearon para saberlo?</p>

Tabla 7. Sucesión grupo 3

Luego de observar las propuestas de cada uno de los grupos organizados por la maestra del grado segundo, en cada equipo deberán resolver:

1. ¿Cuál es la figura que corresponde al lugar 4 en el diseño elaborado por cada uno de los equipos?
2. ¿Todos los equipos han cumplido a cabalidad con las condiciones de la maestra?
Justifique su respuesta.

Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

Seguido, cada grupo deberá reunirse con otro, es decir conformar uno nuevo, allí ambos socializan, realimentan y corrigen aquellas respuestas que valoran como necesarias. Si existen diferentes métodos de solución para una misma respuesta, ambas serán verificadas y validadas por el docente.

Terminada la actividad anterior, los nuevos equipos deben sugerir una serie diferente de figuras que cumpla con las siguientes condiciones:

1. La cantidad de dulces para cada estudiante no puede ser superior a diez.
2. La secuencia debe ser presentada en forma descendente, es decir, de la figura 4, 3, 2 y la figura 1 será presentada como incógnita.

Al mismo tiempo, cada grupo realizará una explicación por escrito de la secuencia que ha creado. Dichos productos serán consignados en un lugar visible dentro del aula de clase.

Actividad 3. Discusiones generales.

Después de expuestas las producciones, se da paso a la realización de la marcha silenciosa, donde los estudiantes leen las producciones y explicaciones diseñadas por los demás grupos, posteriormente, el docente guía la discusión alrededor de las propuestas. Se sugiere que la socialización sea guiada en torno a la identificación de patrones y secuencias presentes en la elaboración de las series.

4.2.2.5 Sesión 4. Patrones en secuencias numéricas.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

La actividad que se presenta a continuación es desarrollada en parejas, cada una deberá responder los siguientes problemas y explicar el razonamiento llevado a cabo para resolverlos.

Problema 1.

La maestra del grado segundo ha propuesto diferentes posibilidades para la repartición de los dulces, inicialmente ha pensado que si los reparte de la siguiente manera podrá ir contando cuantos dulces ha repartido, así:


Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dulces									
Cantidad repartida	2	4	6		10	12	14		18
Explica tu respuesta									

Tabla 8. Análisis de patrones

Después de observar la tabla y de plantear algunas hipótesis al respecto, el equipo diligencia los espacios en blanco dentro de la tabla y estima: ¿Cuántos dulces habrá repartido la maestra cuando entregue los confites al estudiante número 18?

Explica tu respuesta

Problema 2.

La maestra ha decidido luego de un rato repartir otra bolsa de dulces, cuando la maestra entregó los dulces al primer estudiante en ella quedaron 27 dulces, después del segundo estudiante había 24 dulces en la bolsa, luego del tercero 21 y así sucesivamente. ¿Cuántos dulces creen que se encontraban en la bolsa después de entregar los dulces que correspondían al noveno estudiante?

Representen y expliquen su respuesta.

Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

Luego cada una de las parejas anteriores se reunirá con otro grupo para formar equipos de 4 integrantes, allí además de socializar las respuestas propuestas para los problemas anteriores, deberán crear un problema de series o patrones donde se utilicen los siguientes elementos: los estudiantes del salón y las 20 monedas de \$50.

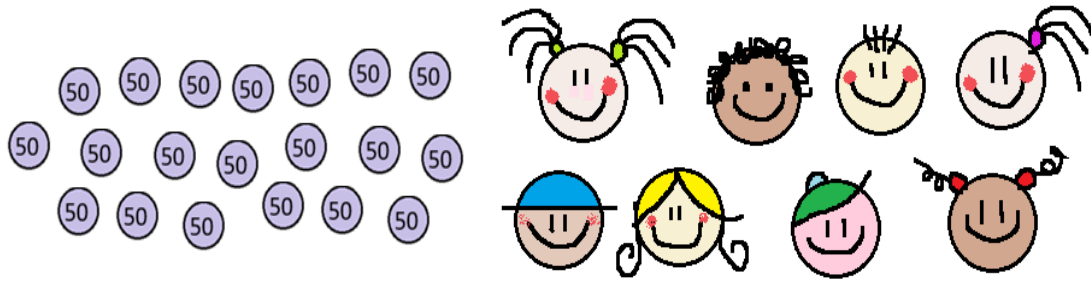


Ilustración 8. Insumos para el planteamiento del problema

Actividad 3. Discusiones generales.

Para el desarrollo de esta discusión cada equipo depositará en una bolsa el problema diseñado anteriormente y luego un miembro del mismo, deberá tomar un problema al azar, evaluar si éste cumple con las condiciones y plantear su solución. Para ello se puede utilizar la siguiente rúbrica.

Nombre de los autores del problema: _____

Nombre de los evaluadores: _____

N°	Ítem	Si	No	¿Por qué?
1	Se plantea una situación conflictiva dentro del texto.			
2	Se incluyen una serie de elementos que contribuyen a su solución.			
3	Se presenta un patrón recurrente dentro del planteamiento del problema.			

4	Existe una sucesión de elementos dentro del planteamiento del problema.			
5	Existe una solución para el problema.			
6	Te gustó el problema.			


Tabla 9. Rúbrica evaluación diseño de problema

4.2.2.6 Sesión 5. El uso de patrones en la búsqueda de la solución.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

Para desarrollar esta actividad los estudiantes pueden utilizar paquetes con piedras, palillos, chaquiras, frijoles u otros objetos que permitan representar de manera concreta cada uno de los conteos.

Inicialmente cada uno de los grupos (equipos de 3 integrantes) debe determinar la cantidad de unidades que adquiere al comprar cada una de las promociones que se presentan al inicio de la situación y posteriormente debe establecer cuántas unidades necesita para realizar la celebración con sus compañeros de clase. Es de anotar que durante la aplicación de esta actividad cada estudiante deberá diligenciar su propia ficha.

Producto	Unidades/paquete	Promoción	Proceso ejecutado para realizar el conteo ¿Cómo lo sabes?	Total/ unidades	Cuántas U necesitamos
Confites 	30 unidades	2 paquetes			






Paletas 	10 unidades	3 paquetes			
Torta 	1 unidad	2 tortas			
Queso dulce 	15 unidades	5 cajas			
Helado 	6 unidades	4 paquetes			
Colombinas 	24 unidades	2 paquetes			

Tabla 10. Hipótesis de solución de la situación

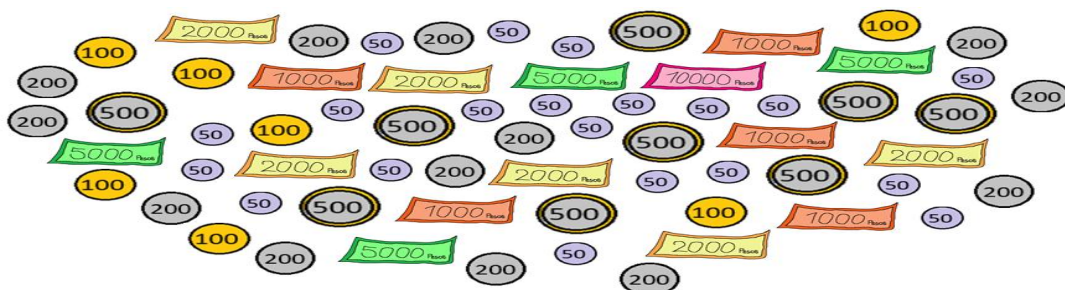
Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

Con el propósito de asegurar la distribución de los estudiantes de manera aleatoria se sugiere llevar a cabo dicho reparto a través de una dinámica, en este sentido se recomiendan algunas de las más populares como: jugo de limón, ardillas a sus cuevas, primera letra del nombre³, pueblos y ciudades⁴, entre otros.

³ Se conforman equipos de personas que lleven la misma letra al inicio de su nombre, o la misma sílaba.

⁴ Se escriben los nombres de diferentes pueblos o ciudades en un papel y se entrega a cada participante un papel, luego deberán juntarse quienes compartan el mismo nombre de ciudad o pueblo.

Después de conformar tales equipos, los estudiantes comparten con los nuevos miembros de su grupo las respuestas propuestas en la actividad anterior y realizan las respectivas correcciones en los casos donde haya lugar. Sucesivamente, deben diseñar un plan de compra con los dulces que servirán de pasabocas para la celebración que el grupo proyecta llevar a cabo en los próximos días y justificar su respuesta.



Producto	Cantidad de unidades	Valor en pesos	¿Cómo lo pagarías? ¿Qué billetes o monedas utilizarías para pagar?	¿Por qué elegimos este producto?

Tabla 11. Segunda hipótesis de solución de la situación

Actividad 3. Discusiones generales.

Todos los estudiantes de la clase realizan en compañía del maestro la lista de pasabocas a comprar, el maestro dirige la conversación procurando representar algunas secuencias numéricas en el tablero u otro lugar visible dentro del aula, tales secuencias pueden estar dirigidas a establecer el número de dulces por cada estudiante, por dos, por tres... la cantidad de monedas de \$50, \$100, \$200... o billetes \$1.000, \$2.000, \$5.000... a utilizar para su pago, en las vueltas...

4.2.2.7 Sesión 6. Propongamos sucesiones.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

Luego de establecer el menú de pasabocas, cada estudiante recibirá la porción de dulces que le corresponden y con sus compañeros de grupo (equipos de 3 integrantes) deberá formar tantas sucesiones de dulces con diferentes patrones como le sean posibles, seguido cada equipo deberá ilustrar al menos dos sucesiones y explicarlas (enumerar la sucesión e identificar el patrón).

Sucesión 1. Representación pictórica.
Sucesión 1. Representación numérica.
Explicación.
Sucesión 2. Representación pictórica.
Sucesión 2. Representación numérica.
Explicación.

Tabla 12. Sucesiones pictóricas y simbólicas propuestas por estudiantes

Actividad 2. Intercambio entre pequeños grupos.

Dentro de una bolsa, el docente con anterioridad deberá depositar papeles marcados con las siguientes condiciones: sucesión numérica, sucesión geométrica, tantas veces como grupos desee conformar. Luego, los estudiantes serán distribuidos en nuevos grupos de manera aleatoria, cada uno, deberá elaborar una sucesión después de extraer uno de los papeles dispuestos en la bolsa, los demás grupos deben adivinar cuál es el patrón y la serie de la sucesión, el equipo que más aciertos tenga al final de la actividad será el ganador.

Actividad 3. Discusiones generales.

Para esta sesión los estudiantes podrán llevar a cabo la actividad propuesta en la situación inicial, donde además de celebrar podrán compartir los aprendizajes llevados a cabo a través del desarrollo de las actividades en grupo, para ello cada estudiante de forma individual diligencia la siguiente ficha y posteriormente será socializada con los demás miembros del grupo.

Nombre: _____
¿Qué aprendí?
¿Cuál de las actividades llevadas a cabo fue la que más me gustó? ¿Por qué?
¿Qué aprendí de los aportes de mis compañeros?
¿Qué fue lo que más me gusto de realizar el trabajo en equipo?
¿Cuál de los elementos que utilizamos fue el que te ayudó a comprender mejor el tema? ¿Por qué crees que te ayudó a comprender mejor éste?

¿Cuál es para ti la diferencia entre sucesión numérica y sucesión no numérica?
Con tus propias palabras escribe: ¿Qué entiendes por patrón?

Tabla 13. Autoevaluación

El maestro consigna en el tablero algunas conclusiones finales, que pueden también ser escritas por los estudiantes en un pliego de papel (se recomienda utilizar uno para cada pregunta y desarrollarlas a manera de carrusel).

4.2.3. Fase III. Exploración de las actividades.

Como se ha mencionado anteriormente, las actividades diseñadas en la etapa anterior, fueron implementadas con los estudiantes del grado segundo del C.E.R. 20 de Julio del municipio de Urrao, departamento de Antioquia.

Dicha implementación se realizó en el cuarto periodo académico de la institución el cual, va entre el 12 de septiembre y el 25 de noviembre del año 2016, con un total de 10 semanas. Las respectivas intervenciones a la luz de una situación problema que involucra el uso de patrones en contextos de interacción, se realizaron en las horas de matemáticas, las cuales tienen una intensidad de 4 horas a la semana distribuidas en dos bloques, cada uno de 120 minutos.

Ahondando un poco en los participantes de la presente investigación, hay que recordar que son los estudiantes que cursan en este año 2016 el grado segundo, el cual, está conformado por 12 estudiantes, 7 niñas y 5 niños, con edades que oscilan entre los 8 y 12 años de edad. El grupo en general, fue colaborativo en la participación y desarrollo de las

actividades, especialmente en aquellas que requerían la exploración con material concreto y las que demandaban trabajo en equipo.

A medida que se iban implementando las actividades propuestas, el docente recopilaba los diferentes productos del trabajo de los estudiantes: explicaciones, fichas desarrolladas, tablas, registros, fotografías, audios, en fin, todas aquellas evidencias que dan cuenta de los procesos de objetivación que los estudiantes llevan a cabo con respecto al concepto de patrones presentados en progresiones numéricas y geométricas.

Son pues todas aquellas evidencias recopiladas durante la implementación, las que permiten pasar a la fase de análisis.

4.2.4. Fase IV. Análisis.

El análisis que se realiza a las diferentes fuentes de recolección de datos, es llevado a cabo bajo la técnica de la triangulación con el propósito de dar a la investigación un grado de validez mayor, en este caso la triangulación se plantea desde dos fuentes de recolección de información y la teoría; en palabras de Denzin (1970) “triangulación múltiple”. Las fuentes de recolección de datos a triangular dentro de este estudio son las observaciones de clase, los registros audiovisuales, fotografías y fichas elaboradas por los estudiantes; lo que permite verificar las tendencias reveladas por los participantes del grupo y contrastarlas seguidas por la teoría.

Con el objeto, de ser consecuentes con el paradigma de investigación al cual se inscribe este estudio; el análisis de los datos se realiza bajo la premisa de permitir a las categorías de análisis emerger mientras éstos van siendo agrupados, de este modo las categorías de análisis dan cuenta de lo que presentan los datos, es decir de lo que ha ocurrido en el aula de clase. Es así como los resultados que arroja la presente investigación están ajenos a falsas interpretaciones, a subjetividades del autor y por el contrario asume la realidad desde la mirada de los participantes.

Las categorías de análisis que se establecen giran en torno al objeto matemático de estudio (patrones) y a las características propias de la teoría cultural de la objetivación como propuesta didáctica.

4.2.5. Fase V. Presentación de resultados

Los datos que se presentan en el estudio llevado a cabo en el CER 20 de Julio son de tipo cualitativo, se incluyen en el apartado inicial las categorías que emergen del análisis, seguido se encuentran los aportes de información de los estudiantes y se presenta un breve análisis de la información suministrada donde se tienen en cuenta conceptos y conocimientos, asimismo, se presentan hipótesis y descripciones relacionadas con el proceso de objetivación del saber.

Finalmente, los resultados son exhibidos como una compilación del análisis realizado a través de la técnica de triangulación de forma descriptiva, que permite comprender de manera profunda la realidad en la que se sumergen los participantes con respecto al objeto de estudio, plantear posibilidades y abrir nuevas perspectivas en el camino de la enseñanza de las matemáticas.

5 Resultados del Análisis

5.1 Procesos de objetivación en el estudio de patrones

Como ha sido enunciado en apartados anteriores la objetivación es el proceso a través del cual los estudiantes hacen evidentes sus conocimientos acerca de “algo” (Radford, 2006), desde esta perspectiva se han observado algunas características que emergen en los estudiantes del grado segundo con respecto al concepto de patrones. La sistematización de las observaciones de clase, algunas transcripciones de los diálogos que establecen los estudiantes en pequeños grupos y las fichas de trabajo han dado lugar a diferentes categorías de análisis, la primera tiene que ver con las *formas de representación que emplean los estudiantes para interpretar la información y establecer los patrones dentro de una progresión* (representación pictórica y representación simbólica).

Seguido, se describe *el papel que cumplen los artefactos en el proceso de objetivación del concepto de patrones en el grado segundo de la Básica Primaria*, al igual que las *comunidades de aprendizaje y la evaluación en la construcción del concepto de patrones*, uno de los aportes más significativos de la presente investigación además de abordar de manera juiciosa el concepto de patrones en los primeros años de formación es la implementación de nuevas teorías dentro del proceso de enseñanza, que han sido exploradas en el campo de la Básica Secundaria por autores como Radford (2006), sin embargo su aplicación en contextos rurales y de formación inicial (Básica Primaria) aún no han sido realizados.

Para dar por terminada la fase de análisis, se presentan los *tipos de pensamiento algebraico expuestos por Radford (2006): factual y simbólico, con relación al concepto de patrones en estudiantes del grado segundo*. Allí se establecen algunas particularidades con respecto a los modos de pensar de los estudiantes con relación al pensamiento algebraico, donde se hace evidente que los estudiantes a pesar de encontrarse en un grado de escolaridad inicial son capaces de establecer relaciones, conjeturas y procesos de inducción con respecto al concepto de patrones.

5.1.1 Formas de representación de la información en el contexto de patrones.

Dentro del estudio de los patrones los estudiantes han expuesto diferentes formas de representar la información, algunos lo hacen de manera pictórica, otros incluyen el uso de símbolos y otros por su parte utilizan dos o más formas de representación a la vez, tal y como se puede evidenciar en las siguientes producciones (ver Ilustración 9. Formas de representación de información con respecto al estudio de patrones

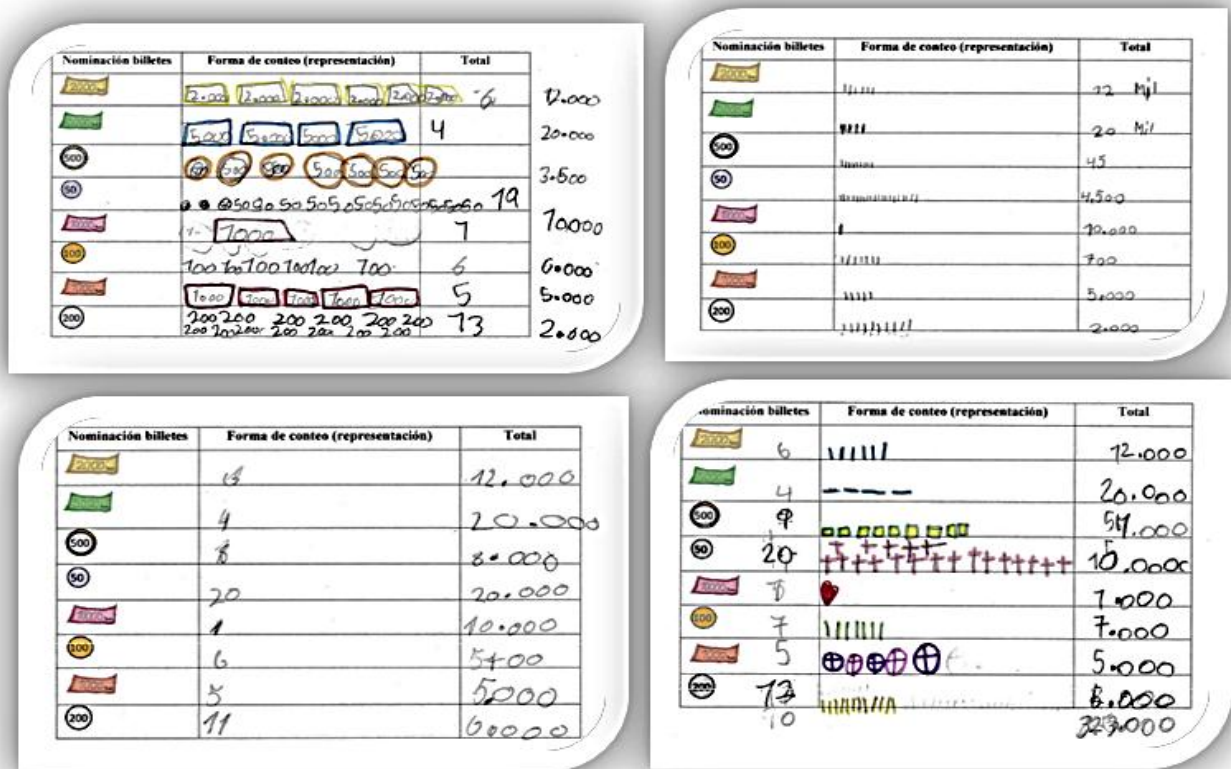


Ilustración 9. Formas de representación de información con respecto al estudio de patrones

Como se observa, en el transcurso del proceso de objetivación del concepto de patrones los estudiantes del grado segundo, manifiestan diferentes formas de interpretar y representar los datos, estos modos de interpretar y representar se clasifican a su vez en tres subcategorías: pictórica, simbólica y combinación de ambas.

5.1.1.1 Representación pictórica de patrones.

La representación pictórica de patrones aparece como una categoría, debido a la recurrencia de los estudiantes en utilizar dibujos, íconos, formas durante la construcción de sucesiones tal y como se evidencia en la Ilustración 10, presentada a continuación.

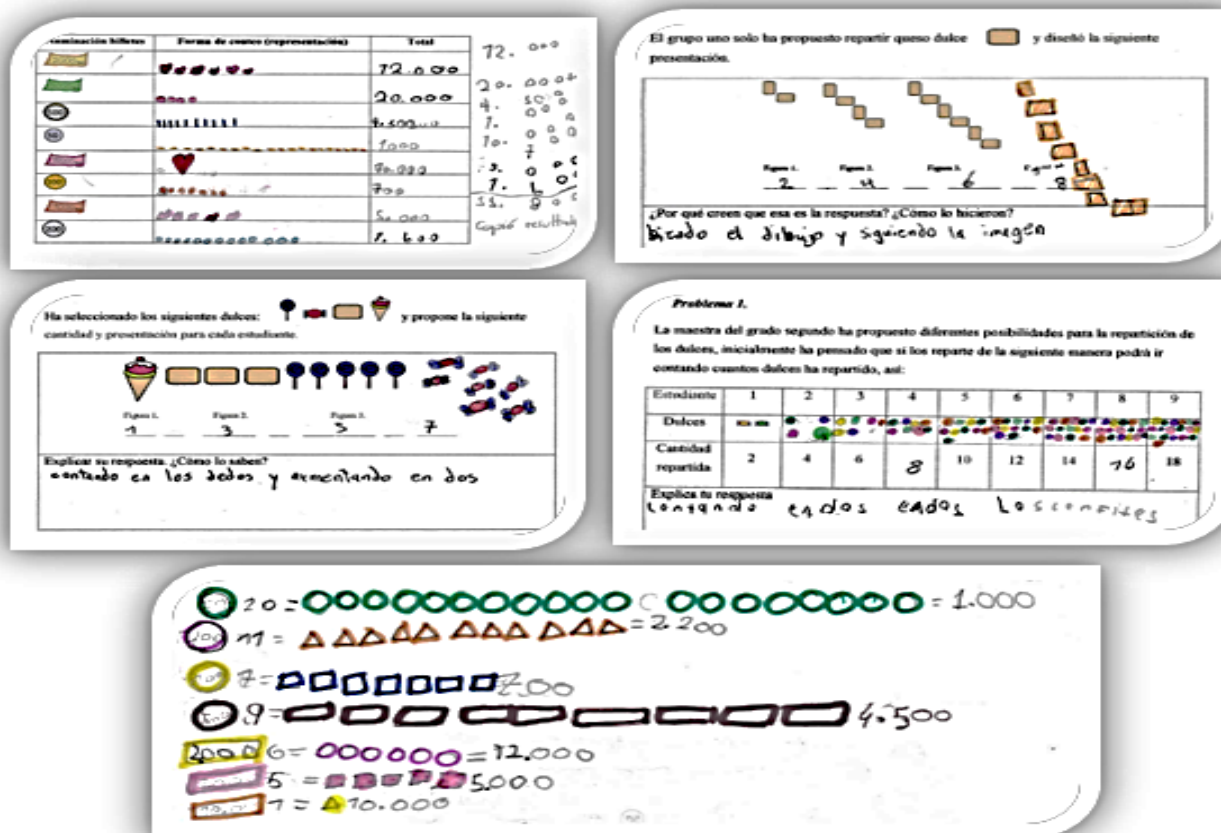


Ilustración 10. Forma de representación pictórica de patrones

Las representaciones pictóricas tienen un reconocido uso como herramienta en el estudio y abordaje de patrones, los dibujos y representaciones icónicas permiten a los estudiantes identificar las transformaciones y regularidades que se presentan en una sucesión, tal y como se puede observar en la parte superior derecha de la Ilustración 10 uno de los estudiantes del grado segundo ha escrito que considera que su respuesta es correcta porque lo hizo “viendo el dibujo y siguiendo la imagen” esta afirmación permite inferir que las representaciones pictóricas ofrecen a los estudiantes instrumentos de interpretación, análisis y

comparación de una sucesión, lo que en consecuencia facilita la determinación de dichos patrones.

De igual modo, las representaciones pictóricas posibilitan a los estudiantes el reconocimiento de patrones aditivos, tal y como se observa en la imagen uno de los estudiantes expresa que ha obtenido la respuesta “aumentando en dos”. Lo anterior apunta, a la posibilidad de incluir dentro de las actividades de clase dirigidas al estudio y desarrollo del pensamiento numérico, específicamente en el campo de las estructuras aditivas el estudio de patrones, dichas estructuras generalmente se abordan desde la solución de diferentes tipos de problema: composición, transformación, igualación. Sin embargo, su aporte al desarrollo del pensamiento variacional es tratado de manera independiente dentro de la escuela, cada uno va por su lado, lo que interfiere en la construcción de redes de relación entre los distintos conceptos que conforman cada uno de los pensamientos; en esta línea, las representaciones pictóricas se convierten en un instrumento que permite abordar aspectos de ambos pensamientos de manera sincrónica.

Asimismo, las representaciones icónicas brindan alternativas a los estudiantes en torno a la forma de verbalización de sus razonamientos, aquí es de anotar que, dentro del aula, no todos tienen la posibilidad de verbalizar sus ideas a través del uso del lenguaje formal, es por ello que en este caso los dibujos y figuras se convierten en el vehículo a través del cual los estudiantes dan a conocer sus modos de pensar, de organizar la información, de clasificarla, de hacer conjeturas y conclusiones alrededor de la búsqueda del patrón que corresponde a cada sucesión.

En suma, cualquier forma de representación llevada a cabo por los estudiantes ha de ser valorada por el docente como una evidencia de sus modos de pensar, de ver el concepto que se aborda, como una evidencia de significados, de comprensión crítica, en palabras de (Radford, 2013) como un modo de objetivación del aprendizaje donde el estudiante permea de sus concepciones y aprendizajes cada una de sus producciones, el estudiante cuando dibuja o escribe quiere decir “algo” el maestro debe interpretar y analizar antes de diseñar una nueva actividad de clase.

5.1.1.2 Representación simbólica de patrones.

En este aparte, se dejan entrever algunas elaboraciones de los estudiantes que involucran el uso de signos y símbolos propios del lenguaje matemático, lo que marca la diversidad de pensamientos, concepciones, razonamientos y subjetividades que interactúan dentro del aula, cada uno de los estudiantes es en esencia un planeta habitado por diversas subjetividades que interactúan unas con otras, incluso en el área de matemáticas, concebida desde tiempos atrás como una ciencia objetiva. Es por esta razón, que cada una de las producciones de los estudiantes tiene un significado especial para esta investigación de aquí que se tengan en cuenta todos los tipos de representación utilizados por los educandos, entre ellos la representación simbólica.

En palabras del Ministerio de Educación Nacional (2006) “el sistema simbólico: se pinta, se escribe o se habla” (p. 22) en este orden de ideas, se da paso a las producciones escritas de los estudiantes al establecer patrones en diferentes situaciones propuestas dentro del aula de clase, pero que a su vez tienen relación con el contexto en el cual interactúan a diario. Si bien es cierto que inicialmente los estudiantes utilizan representaciones pictóricas como las enseñadas en la Ilustración 10 para establecer patrones, mientras avanzan en el desarrollo de actividades relacionadas con este concepto, empiezan a utilizar de manera habitual, números y signos dentro de sus formas de representación y organización de la información.

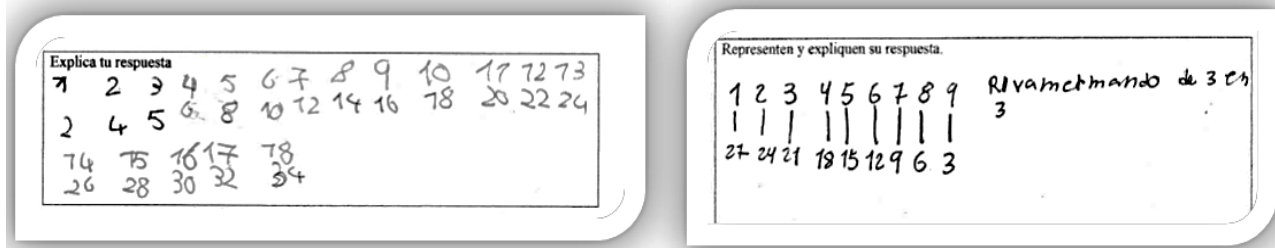


Ilustración 11. Ejemplo 1 de representaciones simbólicas

De lo anterior, se puede concluir que el estudiante avanza de manera progresiva en el desarrollo de las representaciones establecidas en la solución de problemas ya que en medio de

la interacción con los otros va asumiendo como propias y compartidas otras formas de dar a conocer la información. En la

Ilustración 11 se observa cómo estas propuestas van evolucionando: en primera instancia, se relaciona el lugar que ocupa un objeto dentro de la sucesión con la cantidad de objetos que deben hallarse en dicha posición y más adelante, se utilizan otros símbolos que hacen explícita dicha relación. Lo que evidencia, el perfeccionamiento de los estudiantes en las formas de comunicar sus razonamientos, ideas, hallazgos y formulaciones a través de la utilización de signos y símbolos cada vez más refinados. Ver

Ilustración 11 e Ilustración 12.

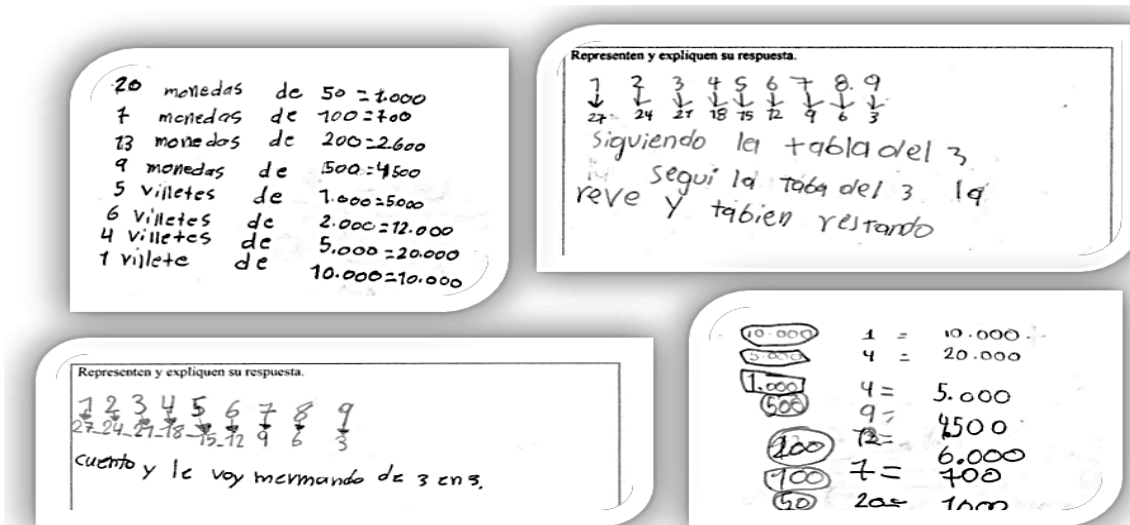


Ilustración 12, Ejemplo 2 representación simbólica de patrones

En esta fase, las representaciones simbólicas propuestas por los estudiantes dan lugar a interpretaciones relacionadas con los conceptos y preconceptos que éstos construyen con relación a la estructura aditiva y multiplicativa. Igualmente, se puede inferir que las representaciones simbólicas dan cuenta de procesos de razonamiento un poco más elaborados a través de los cuales los estudiantes colocan a la luz los procesos de formalización que llevan a cabo con relación al concepto de patrones; en la parte inferior izquierda de la ilustración 13 se evidencia como uno de los estudiantes manifiesta “cuento y le voy mermando de 3 en 3” lo que permite establecer la regla de formación decreciente con la que ha elaborado la sucesión que da respuesta a uno de los problemas propuestos dentro de la situación.

De esta manera, el estudio de las representaciones simbólicas dentro del proceso de objetivación, permite establecer la habilidad de los estudiantes para interpretar, evaluar posibilidades, representar, describir relaciones, establecer ideas; en esta dirección la objetivación puede determinarse teniendo en cuenta que dichas formas de representación no son estáticas al contrario evolucionan constantemente. En línea con lo expuesto por Radford (2013) “aprender no es simplemente adquirir un conocimiento sino también un proceso *formativo y trans-formativo* del ser, del sujeto que aprende” (p. 44) y cada producción del estudiante es una evidencia de ello.

5.1.2 El papel de los artefactos en la objetivación del concepto de patrones.

En el proceso de objetivación el artefacto es asumido como mediador entre el aprendizaje y el objeto matemático, en el presente estudio los educandos han utilizado diferentes artefactos que les permiten establecer conexiones, dar ejemplos, aclarar ideas, formular hipótesis y explicar conclusiones a sus compañeros de equipo. Un ejemplo de ello se presenta en la siguiente ilustración.



Ilustración 13. Ejemplo 1 uso de artefactos

Según la teoría de la objetivación “una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de los artefactos culturales de nuestro

entorno” (Radford, 2006, p. 113), durante la ejecución de las actividades los artefactos cumplieron a cabalidad con tal afirmación, en las imágenes que se observan en la ilustración 14 los diferentes grupos de estudiantes utilizan uno de los tantos objetos incluidos dentro de las sesiones de trabajo; allí, cada uno de los miembros del grupo utiliza el material e intenta representar las sucesiones que constituyen alternativas de solución para los problemas que emergen de la situación en cada clase, cada objeto ha representado un elemento de la sucesión.

En consecuencia, algunas de las respuestas suministradas por los equipos corresponde a las representaciones concretas diseñadas con los artefactos, de lo anterior dan cuenta algunos de los diálogos establecidos entre los estudiantes, registrado dentro de las grabaciones recopiladas por las investigadoras.

Para esta actividad la maestra dispuso de varias monedas y billetes didácticos, los estudiantes que conforman el equipo 1, desarrollaron el siguiente diálogo:

Estudiante 1: son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 billetes de dos mil, entonces son... (Levanta la mirada y con la mano derecha empieza a contar los dedos que están en su mano izquierda) dos mil, tres mil – cuatro mil, cinco mil – seis mil, siete mil – ocho mil, nueve mil – diez mil, once mil – doce mil, doce mil – trece mil. Son trece mil.

Estudiante 2: No son trece mil, vea porque son seis billetes. Señala la ficha que corresponde al equipo y coloca un billete y escribe una X sobre el billete de dos mil, seguido pone sobre el escritorio otro billete y escribe otra X sobre el billete de dos mil siguiente dibujado en la ficha... y así sucede con los demás billetes. Luego de tachar todos los billetes de dos mil, el estudiante recoge los que tiene sobre su pupitre y empieza a contar: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si ve... son 6 y enseña los billetes en forma de baraja a sus compañeros.

Enseguida todos los estudiantes desarrollan el conteo de los billetes de dos mil disponibles para la solución del problema utilizando sus dedos y los billetes didácticos. Finalmente consignan el número 12.000 en la ficha.

En el diálogo anterior, se evidencia claramente el uso de los artefactos como instrumentos de construcción de hipótesis, de generación de aprendizajes, de deconstrucción y

reconstrucción de distintos planteamientos. Es frecuente encontrar, sobre todo en los primeros grados, estudiantes que utilizan sus dedos para elaborar cálculos, los dedos se han convertido en un artefacto dentro del aula que les permite desarrollar habilidades para el cálculo, puede afirmarse que el uso de los dedos para actividades de conteo se ha convertido en una práctica común, por lo menos así ocurre en el momento de clase que se ha presentado anteriormente. Sin embargo, para los compañeros de equipo del estudiante 1, el conteo llevado a cabo no es correcto y es ahí donde entra en escena otro artefacto con una alta dosis de significado cultural (dinero) a modificar y reestructurar los planteamientos hechos por el primer estudiante.

En este caso el artefacto, les ofrece a los estudiantes la posibilidad de simular la situación de manera concreta y además, proporciona al estudiante 2 elementos que le permiten formular contra argumentos a las proposiciones elaboradas por el estudiante 1; a través del uso de éste los estudiantes proponen demostraciones y conjeturas, evalúan, confirman o modifican los de sus demás compañeros, es por ello que el artefacto “requiere de su uso en actividades y del *contacto con otras personas* que saben “leer” esa inteligencia y ayudarnos a adquirirla” (Radford, 2006, p. 113) creando posibilidades y oportunidades de aprendizaje dentro del aula de manera colectiva y cooperativa.

Pero el uso de los artefactos no se limita sólo a la inclusión de materiales y objetos dentro del aula de clase, los artefactos también se encuentran inmersos dentro del diseño y proposición de las actividades, situaciones y problemas que se formulan a los estudiantes. Es decir, las situaciones problema que se han diseñado en la presente investigación incluyen dentro de sus enunciados una serie de objetos cargados de significación cultural, son utilizados de manera frecuente en el contexto particular donde interactúan los estudiantes, por tanto, son de fácil representación para ellos. A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran esta afirmación.

Contando los otros quesos dulces.

Contando en dos en dos los confites.

Ilustración 14. Ejemplo 2 uso de artefactos

La inclusión de elementos como: quesos dulces (propios de la región), confites, colombinas, helados, tortas, billetes, entre otros, dentro de los enunciados, permite a los estudiantes formular una representación mental de la situación, ya que dichos objetos son manipulados de manera frecuente en el desarrollo de las actividades que llevan a cabo dentro y fuera de la escuela, es por ello que la recreación de la situación ha tenido lugar de modo natural. Incluso algunos de los estudiantes escriben en sus respuestas el nombre de aquellos artefactos que han sido representados y manipulados para dar solución a la situación. Asimismo, en el desarrollo de la evaluación de las actividades ejecutadas, los estudiantes consideran que el uso de los artefactos ayudan a mejorar la comprensión del concepto abordado, tal y como se evidencia en la Ilustración 15. Uso de artefactos en procesos de comprensión de la situación

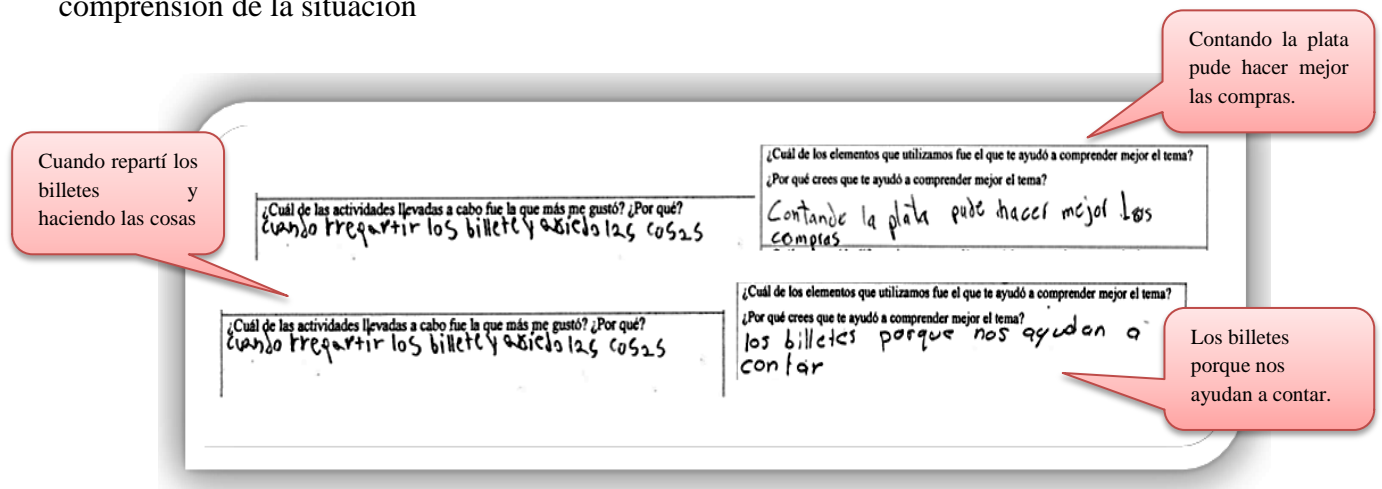


Ilustración 15. Uso de artefactos en procesos de comprensión de la situación

Los artefactos utilizados son dotados de sentido a través de la interacción social, como se ha evidenciado en el desarrollo de esta categoría, los diálogos que establecen los estudiantes en los grupos conformados permiten a sus miembros dar nuevos significados a los artefactos.

5.1.3 Comunidades de aprendizaje en torno al concepto de patrones.

La interacción social dentro de la comprensión del concepto de patrones ha asumido un papel protagónico, desde el momento de la planeación hasta la ejecución y por supuesto

durante la evaluación, a través del trabajo en comunidad los educandos han construido y reconstruido concepciones y conclusiones con respecto al concepto de patrón, lo anterior se evidencia en una de las conversaciones de los estudiantes, al intentar resolver una sucesión.

Los estudiantes tratan de resolver la siguiente situación:

En torno a la solución de la misma entablan el diálogo que a continuación se presenta:

Estudiante 1: hay un helado, 3 quesos dulces, 1, 2, 3, 4, 5... 5 colombinas y entonces que siga torta.

Estudiante 2: torta no es, no ve que arriba dice que los dulces son: colombina, confite, queso y helado, falta es el confite.

Estudiante 3: sí, la profe dijo que leyéramos bien, y observáramos lo que cambia para resolver el problema, ahí dice que faltan confites.

Estudiante 1: entonces... ¿Cuántos confites hay que poner? 6, de 5 sigue 6 (el estudiante empieza a dibujar en su ficha confites).

Estudiante 3: yo creo que sí son 6, (empieza a contar los objetos que se presentan en la sucesión) 1, 3, 5, 6. Pero hay que escribir primero el número en la rayita de abajo. Mientras él y sus compañeros escriben los números, el estudiante después de escribir el tres y el cinco dice: - falta el 2.

Estudiante 2: pues también falta el 4.

Estudiante 3: eso está quedando malo, llamemos a la profe.

En el episodio anterior, se observa cómo a través del diálogo con otros, los estudiantes van elaborando hipótesis acerca de las construcciones que hacen, la verbalización de sus pensamientos les ayuda a establecer ciertas inconsistencias en sus modos de razonar con relación a los objetos matemáticos, en este caso han determinado un “error” dentro de la sucesión planteada inicialmente. La identificación del error puede llevar al reconocimiento del patrón que guía la sucesión; reflexiones comunitarias que hacen los estudiantes del objeto de

conocimiento los guían hacia nuevas comprensiones, las cuales han sido construidas desde la interacción.

En línea con lo anterior, Radford (2006) asegura que “a menudo, la interacción es vista como negociación de significados o como simple ambiente que ofrece los estímulos de adaptación que requiere el desarrollo cognitivo del estudiante” (p.113) pero como se aprecia en el momento de la clase, la interacción es un compendio de reflexiones compartidas, que se dan de manera creciente, una vez el grupo comienza a plantear reflexiones en torno a un objeto de estudio, éstas no paran y jamás regresan al punto de partida, cada uno de sus miembros construye significados diferentes a los iniciales con respecto al objeto de estudio.

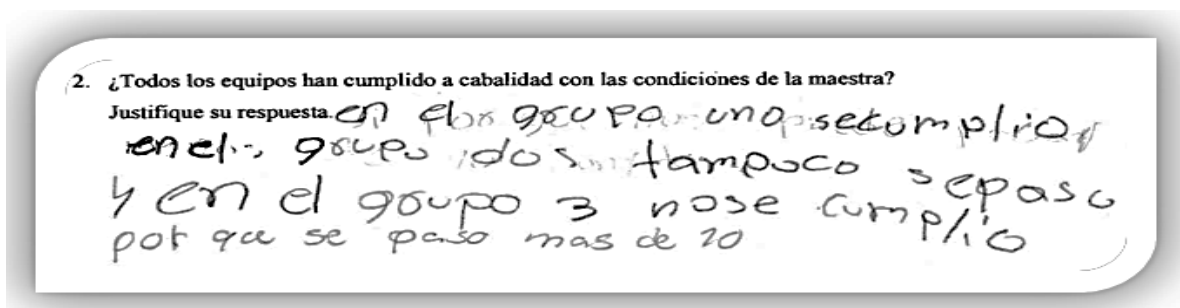


Ilustración 16. Retroalimentación comunidades de aprendizaje

Dentro de las dinámicas propuestas en la clase instauradas gracias a la teoría cultural de la objetivación planteada por Radford (2006) existe un momento de intercambio de grupos, allí los estudiantes socializan las producciones creadas en grupos anteriores, existe una especie de trabajo de grupo entre grupos, en reiteradas ocasiones los grupos se nutren entre sí, cada producción es retroalimentada y evaluada por otros participantes, tal y como se observa en la ilustración 17. Es por ello que el aula no debe observarse y disponerse como un espacio cerrado donde los estudiantes escuchan atentamente las instrucciones del maestro y ejecutan órdenes.

La retroalimentación de grupos dentro del contexto del estudio de patrones, permite a los estudiantes identificar puntos de referencia, recurrencias, establecer reglas de formación, entre otros, estas características hacen de la interacción un elemento “consustancial del

aprendizaje” (Radford, 2006, p.114). En este punto, la interacción en el aula se convierte en una posibilidad de las tantas que emergen en medio de la construcción del concepto de patrones, allí los estudiantes justifican y validan sus respuestas, presupuestos e hipótesis.

La interacción social en la presente investigación también aporta elementos relacionados con la motivación, dentro de las evaluaciones y reflexiones realizadas alrededor de las actividades de clase los estudiantes comparten expresiones como: “me gustó que compartimos mucho y nos ayudamos los unos a los otros”, “me gustó que todos nos respetábamos y respetábamos la opinión del otro”, “aprendí de los otros a organizar las cosas”, entre otras expresiones que recogen una percepción positiva de los estudiantes con respecto al desarrollo de las actividades en comunidad de aprendizaje. Algunas de las expresiones escritas por los educandos se presentan en la Ilustración 17. Percepciones de los estudiantes sobre comunidades de aprendizaje

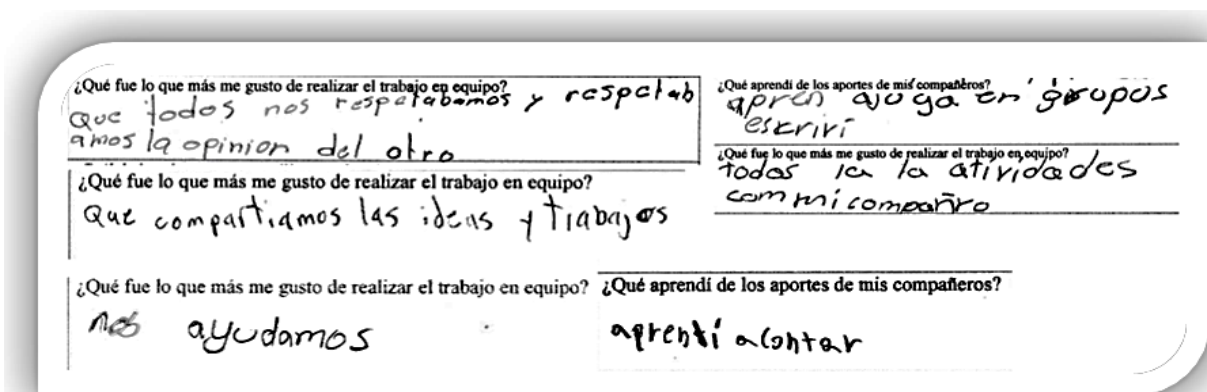


Ilustración 17. Percepciones de los estudiantes sobre comunidades de aprendizaje

A propósito de la evaluación, la presente investigación incluye dentro del proceso de objetivación una categoría dirigida a describir el papel de la evaluación. En el rastreo teórico realizado a los escritos publicados por Radford son escasos los apartes que se dedican a este asunto, por tanto esta investigación procura realizar aportes que permitan explorar un poco más este campo.

5.1.4 La evaluación en el proceso de objetivación.

Sobre la evaluación en el proceso de objetivación, puede decirse que es un continuo hacer, donde el estudiante participa de manera activa y constructiva en el proceso de aprendizaje. Desde el inicio, en la ejecución de la actividad en pequeños grupos los aportes de unos y otros son validados por el grupo y en consenso se elaboran conclusiones, hipótesis y propuestas de solución que luego son socializadas y dadas a conocer a grupos similares, pares. Cada uno de estos grupos realiza análisis y valoraciones de las propuestas de sus compañeros, tal y como se observa en la

Ilustración 18

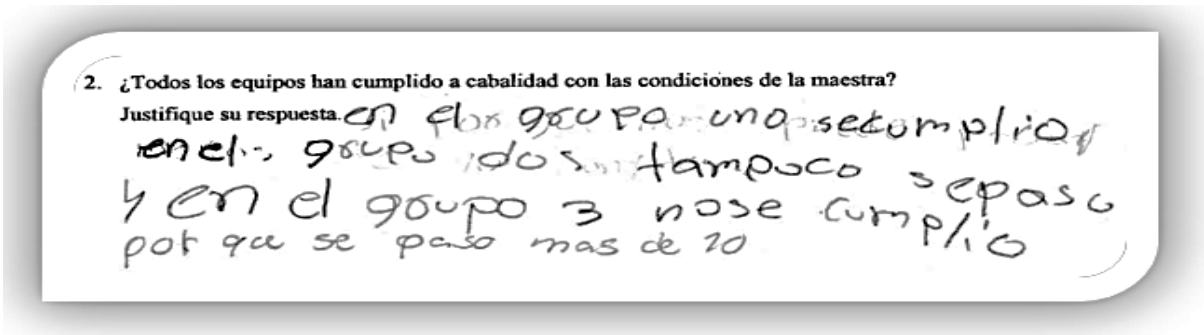


Ilustración 18. Ejemplo de valoración y realimentación al trabajo en grupos

Este trabajo de pares, permite a los estudiantes participar en el proceso de construcción del aprendizaje de manera activa e intervenir a su vez en el proceso de aprendizaje de sus compañeros de grupo, en este sentido el aula se convierte en un laboratorio de experiencias donde todos aportan y todos aprenden, y la evaluación en una herramienta que posibilita y fortalece tales aprendizajes.

La evaluación en el proceso de objetivación no es el resultado de una serie de acciones o el producto de algo, es más bien, el compañero de camino, hace parte activa del proceso, cada una de las actividades desarrolladas es evaluada de manera conjunta inicialmente por los mismos estudiantes y seguida por la retroalimentación del maestro, en este proceso todos los estudiantes aprenden, un ejemplo de ello es el siguiente.

Aprendí a contar, a organizar cosas, a contar plata, dibujar patrones, seguir series.

Aprendí de los otros a organizar cosas

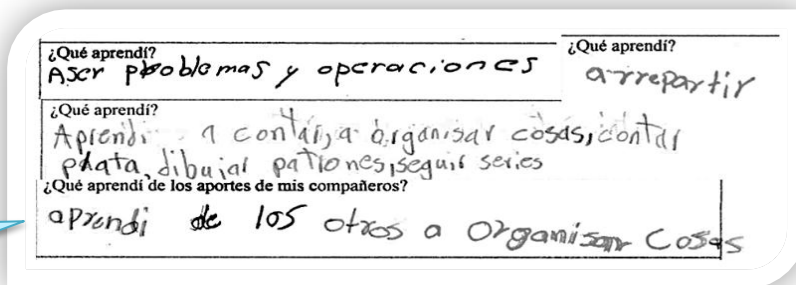


Ilustración 19. Consideraciones de los estudiantes respecto a lo aprendido

En este sentido la evaluación permite establecer lo que el estudiante ha aprendido y cómo lo ha hecho. Lo anterior se evidencia en la Ilustración 19 donde uno de los estudiantes afirma: “aprendí de los otros a organizar cosas” lo que asegura que el proceso de evaluación dentro de la teoría de la objetivación es un aprender con otros y en esas relaciones de dar y recibir información se llevan a cabo procesos de evaluación informales que perfeccionan y optimizan los aprendizajes elaborados por los estudiantes. Éste se evalúa a sí mismo y a los otros en torno a la interacción social y las conclusiones que van siendo validadas y aprobadas por la comunidad del aula. En suma, la evaluación en la objetivación cultural es resultado de la interacción.

5.2 Tipos de pensamiento algebraico en el concepto de patrones

Es usual encontrar en la escuela diferentes formas de representar la información, que dan cuenta del proceso de objetivación llevado a cabo por el estudiante y a su vez permite determinar el tipo de pensamiento de algebrización en el que se encuentra inmerso con respecto al dominio y apropiación de saberes que circulan dentro del pensamiento variacional, en la presente investigación, se aborda el concepto de patrones desde la teoría de la objetivación y asimismo se describen algunas características que pueden ser incluidas dentro de los niveles de algebrización.

5.2.1 Pensamiento algebraico factual.

Dentro de la investigación se han extraído evidencias donde los estudiantes realizan proposiciones, hipótesis y posibles soluciones que se inscriben dentro de este pensamiento, allí los gestos como contar con los dedos, señalar artefactos y afirmaciones como “mire, cuenta de

dos en dos los billetes (señalando el artefacto: billetes didácticos)” dan cuenta de características propias de este tipo, aquí también se inscriben aquellas otras formas de presentar el pensamiento algebraico con dibujos, gráficas, representaciones icónicas como las que a continuación se exhiben.

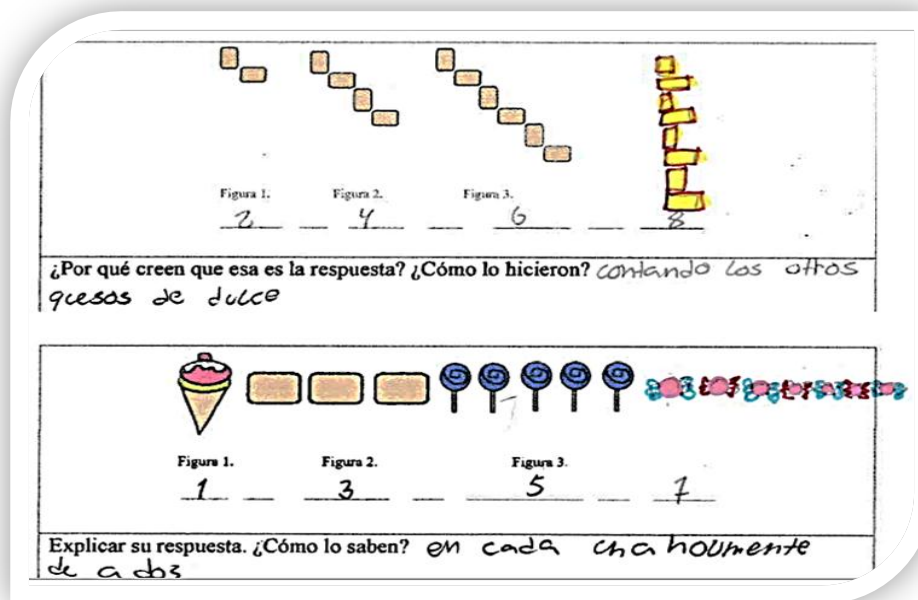


Ilustración 20. Formas del pensamiento factual

En la ilustración anterior, se evidencia la utilización de dibujos y del artefacto como guía dentro de la solución de la situación; en la sucesión 1 se observa dentro de la explicación “contando los otros quesos de dulce” como el estudiante aún no da cuenta del patrón que guía la sucesión si no que hace mayor énfasis en la figura, en la posición del artefacto dentro de la misma, el estudiante asegura que ha contado, pero aún no suministra información precisa acerca de cómo ha llevado a cabo dicha actividad de conteo.

Más adelante, en otra sucesión el estudiante expresa que ha contado de dos en dos y que dicha cantidad aumenta, lo que se refiere entonces a la regla de formación que ha establecido para dar solución a la sucesión. Aunque sus explicaciones tienden a ser formuladas de manera progresiva y a suministrar de forma más precisa información acerca del proceso y

las conclusiones a las que ha llegado, siempre ha utilizado el dibujo como estrategia de solución y el lenguaje cotidiano como forma de argumentar sus respuestas.

Ante este mismo problema, otro estudiante presenta una explicación más completa acerca del modo como ha elaborado su respuesta sin embargo conserva las características propias de este nivel, ya que es evidente dentro de su argumento la ausencia de signos y símbolos propios del lenguaje matemático. Se presenta el ejemplo.

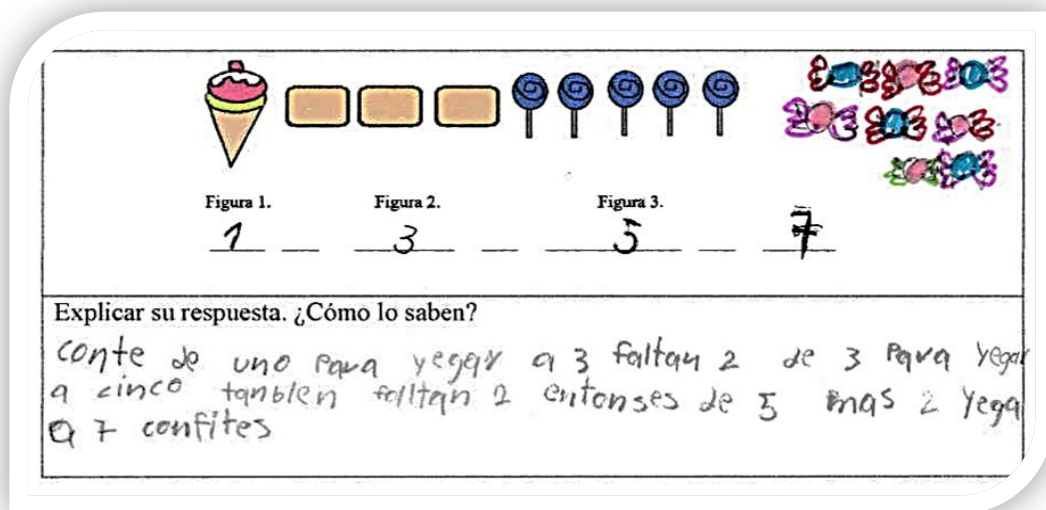


Ilustración 21. Ejemplo de modo de pensamiento factual

En la evidencia anterior, se puede observar de manera más detallada el razonamiento llevado a cabo por el estudiante para dar a conocer la respuesta al problema planteado inicialmente, el estudiante propone una situación de igualación donde asegura que “a uno le faltan dos para llegar a tres” es decir intenta igualar la cantidad uno con la cantidad tres y lo mismo sucede con el conteo que determina la figura 3 de la sucesión, sin embargo para determinar la cantidad de dulces que componen la figura 4, el estudiante propone una situación de transformación donde cinco más dos es igual a siete.

En este tipo de pensamiento, los estudiantes plantean soluciones orientados por la intuición, por el uso de los artefactos, por la representación de situaciones a través de dibujos o

íconos y, en este caso sus aprendizajes con respecto al concepto de patrones se reducen a determinar, donde la formación de la sucesión se da de manera creciente o decreciente, para establecer la figura o la cantidad de objetos que componen la siguiente figura o posición, pero aún no son capaces de inferir cuántos elementos o qué forma tienen a_n . Lo anterior se evidencia en algunas de las autoevaluaciones llevadas a cabo por los estudiantes.

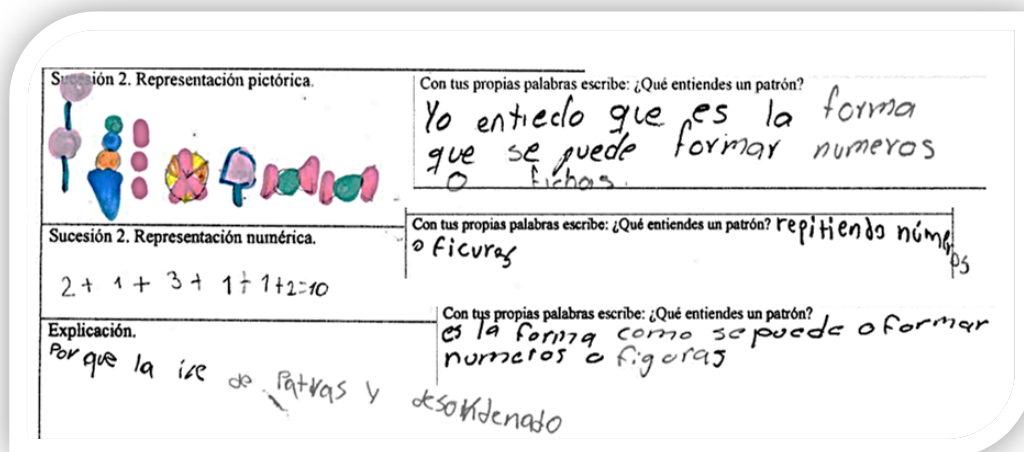


Ilustración 22. Aprendizajes manifestados por los estudiantes dentro del pensamiento factual

Para finalizar esta categoría es de anotar que, aunque los estudiantes en su mayoría se inclinan hacia el tipo de pensamiento factual, se hace necesario establecer en el aula una especie de subniveles dentro del mismo, y diseñar actividades de aprendizaje que contribuyan a la producción de explicaciones y argumentos más elaborados, que involucren el uso del lenguaje matemático, de este modo se desarrolla de manera progresiva el proceso de objetivación, de acuerdo a las características y saberes que circulan dentro del aula, a los significados, construcciones teóricas y conceptuales que enuncian los estudiantes.

5.2.2 Pensamiento algebraico simbólico.

Teniendo en cuenta los postulados de Radford (2010b) quien asegura que en el pensamiento algebraico simbólico “las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra” (p.8) puede asegurarse según las evidencias encontradas que los

estudiantes del grado segundo del CER Veinte de Julio aún no presentan respuestas inscritas en este tipo de pensamiento; en consecuencia, se evidencian algunas elaboraciones de los estudiantes que más se acercan a dichos presupuestos.

Algunos de los estudiantes han acudido al uso de tablas para representar la información, lo que constituye una forma de razonar cercana a las formas de representar patrones lineales, por tal razón, se considera esta forma de representación cercana al pensamiento simbólico.

Después de observar la tabla y de plantear algunas hipótesis al respecto, el equipo diligencia los espacios en blanco dentro de la tabla y estima: ¿Cuántos dulces habrá repartido la maestra cuando entregue los confites al estudiante número 18?

Explica tu respuesta									Use la tabla y me fui contando 2 endos endos hasta 18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	
20	22	24	26	28	30	32	34	36	

Ilustración 23. Forma de representación del pensamiento simbólico

La ilustración anterior, contiene diversas formas de representación, que les permite a los estudiantes inferir modos de determinar la cantidad de elementos que se hallan en la posición 18 de la secuencia o en cualquier otra posición; también posibilita establecer el patrón que guía la sucesión. Por lo tanto, esta forma de representación se acerca silenciosamente desde la perspectiva del investigador a lo que constituye en el grado segundo de la Educación Básica Primaria el tipo de pensamiento simbólico.

De esta manera, el nivel simbólico teniendo en cuenta el grado de escolaridad de los estudiantes, determina de manera contundente el estado de objetivación que presentan los estudiantes con relación al concepto matemático, cuando los estudiantes superan el campo de

las palabras y empiezan a utilizar el espacio de los signos y los símbolos, tal y como se presenta en la Ilustración 24 se puede inferir que éstos se encuentran cada vez más cerca de alcanzar mejores niveles de razonamiento, argumentación, solución de problemas y en consecuencia a la adquisición de sistemas de ideas y de signos que llevan en sí mismos estructuras sociales, históricas y simbólicas, Radford (2010b).

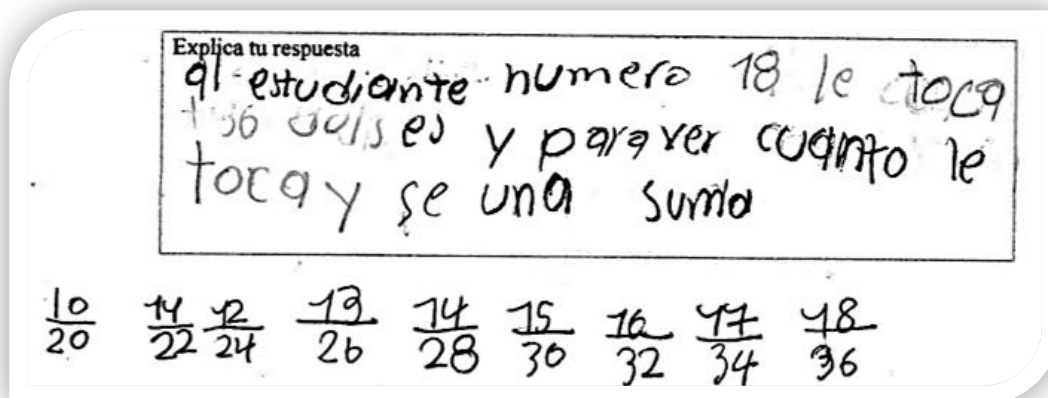


Ilustración 24. Acercamiento a formas de representación simbólica

Finalmente, en la forma de representación que se observa en la Ilustración 24 los estudiantes se acercan de manera intuitiva al concepto de razón, lo anterior permite inferir que a pesar de encontrarse en el primer ciclo de escolaridad, los educandos del grado segundo a través de la implementación de contextos de interacción pueden ir más allá de lo que se plantea en los referentes de calidad, incluso de las expectativas del maestro.

6 Reflexiones finales

6.1 Reflexiones generales acerca del trabajo de investigación

En este apartado del texto, que se ha desarrollado a lo largo de esta investigación, se dan a conocer algunas reflexiones en torno a varios aspectos propios de la práctica de aula, el primero tiene que ver con la importancia de explorar nuevas formas de diseñar y acompañar las actividades que se proponen dentro del aula, con ofrecer nuevas posibilidades para el desarrollo de aprendizajes.

En esta línea, la teoría cultural de la objetivación ofrece recursos y modos de aplicación que le permiten al maestro involucrar de manera activa, participativa y colaborativa a los estudiantes no sólo en la ejecución de las actividades sino también en el diseño y en la determinación de sus propósitos, la escuela se configura como el lugar donde interactúan un sin fin de subjetividades cuya finalidad es darle sentido a lo que se aprende a través de los artefactos, medios e interacciones que el entorno les proporciona. Esta teoría es aplicable a cualquier tipo de conocimiento matemático y no matemático lo que la convierte en una potencial fuente de inspiración para otros maestros.

Dentro de esta investigación, la teoría de la objetivación se ha convertido en el vehículo a través del cual el docente ha expuesto e incluido dentro del aula de clase, en los grados del primer ciclo de Educación Básica Primaria, el desarrollo de conceptos que giran en torno al pensamiento variacional y que son pre-requisito para el reconocimiento del álgebra y su respectiva comprensión. En este orden de ideas, el estudio de patrones a través de la teoría de objetivación, expuesta y explicada de manera detallada dentro del marco teórico de la presente investigación, además particularizada de modo descriptivo dentro del análisis de los resultados, ha permitido identificar incluso los tipos de pensamiento algebraico en los cuales se inscriben los estudiantes del grado segundo.

La anterior afirmación, da paso a la segunda reflexión que surge del desarrollo de esta investigación, relacionada con el tipo de pensamiento algebraico que manifiestan los estudiantes con respecto al concepto de patrones. En su mayoría los estudiantes se encuentran

en el pensamiento factual, donde los dibujos, los íconos, los gestos, el lenguaje informal toman protagonismo, ésta es quizá la conclusión que ha de marcar la ruta de nuevas investigaciones, una que permita diseñar y establecer acciones dentro del aula, direccionadas a fortalecer el pensamiento algebraico de los estudiantes del grado segundo, acciones que den paso a nuevos razonamientos, nuevas explicaciones y nuevos argumentos más elaborados y acompañados de un lenguaje formal, que incluya el uso de signos y símbolos matemáticos.

Pero esta evolución en las formas de pensamiento algebraico dirigidas hacia la objetivación del saber, son el resultado, según la presentación que se ha llevado a cabo en este trabajo de investigación de diferentes formas de interacción propuestas en el aula de clase, donde en primera instancia los objetos, artefactos que se involucran en las acciones didácticas cumplen un papel mediador dentro de la construcción de los conceptos matemáticos, las matemáticas son por tanto una ciencia aplicada que surge a partir de necesidades y prácticas culturales donde estudiantes, artefactos y cultura intervienen de manera activa en la construcción de nuevos significados.

Asimismo, dentro del proceso de perfeccionamiento de los tipos de pensamiento algebraico enmarcados dentro de un proceso de objetivación se encuentra la interacción social, esta permea toda la actividad del aula, le da otro sentido y significado a la comunidad que aprende de sí misma, cada uno de sus integrantes aporta a la construcción de saberes que circulan por todas partes pero que son definidos, sintetizados, comprendidos y aplicados de manera más amplia dentro de la escuela. En este modo de interacción cada estudiante trae consigo un saber cultural, que está marcado y nutrido por otros modos de saber que se presentan fuera de la escuela pero que al mismo tiempo la permean, marcan y delimitan. En esta concepción, el estudiante aprende a ser, al mismo tiempo que aprende el saber, saber que es en síntesis saber ser.

En el ir y venir de la cultura, se envuelven e involucran de manera análoga los procesos de evaluación, este es uno de los aportes que sugiere esta investigación a la teoría de la objetivación, las recomendaciones, refutaciones y diálogos que establecen los estudiantes dentro de la ejecución de actividades de aula, deben ser registradas y tenidas en cuenta a la

hora de llevar a cabo procesos de evaluación; bajo esta mirada sociocultural y de interacción los estudiantes evalúan constantemente las conclusiones, soluciones e hipótesis a las que llegan dentro de los grupos, subgrupos y la colectividad, es una especie de reflexión constante donde ellos intervienen. En este orden de ideas, la evaluación dentro de la teoría de la objetivación incluye de manera puntual la participación activa de los estudiantes en dicho proceso, eximiendo al docente de ese papel protagónico en la evaluación y que ha asumido a lo largo de los años, el maestro se convierte en un observador, atento, receptivo, acompañante de los procesos.

Es así, como este proyecto de investigación en profundización, hace evidente que es posible trabajar aspectos del pensamiento variacional durante los primeros grados de escolaridad a través de teorías socioculturales que movilizan dichos saberes y le dan sentido. Al inicio de este trabajo los estudiantes manifestaban una y otra vez sus inquietudes frente al establecimiento e identificación de patrones dentro de una serie. Sin embargo, mientras avanzan las actividades los estudiantes proponen conclusiones, respuestas y representaciones más elaboradas, nutridas por las observaciones y contribuciones de sus compañeros de clase.

En este punto se hace necesario agregar que, el presente estudio abre la puerta al surgimiento de nuevas investigaciones dirigidas a establecer, describir y caracterizar la implementación de la teoría de la objetivación en otros escenarios de la Educación Matemática, como por ejemplo los procesos de objetivación en las diferentes áreas de enseñanza: lenguaje, ciencias naturales, ciencias sociales, entre otras que hacen parte del currículo de la escuela, en otros niveles de escolaridad, en torno a otros conceptos; de igual manera genera expectativas en cuanto al diseño y ejecución de acciones encaminadas a explorar otras formas de pensamiento en la escuela con respecto al concepto de patrones, a la interrelación de éstos con otros pensamientos y a la búsqueda de elementos, situaciones y realidades inmersas en la cultura que puedan contribuir a la objetivación de dicho conocimiento dentro del aula.

6.2 ¿Cómo es el proceso de objetivación del saber de los estudiantes del grado segundo de la Básica Primaria a través del estudio de problemas que involucran el uso de patrones?

El proceso de objetivación en el grado segundo de la Básica Primaria en el desarrollo de problemas que involucran el uso de patrones en contextos de interacción, presenta diferentes características que lo hacen posible, constante y dinámico.

Inicialmente, dicho proceso sucede como un producto de la *interacción social*, en él es evidente que los estudiantes en primera instancia pasan por una etapa de *interpretación, de comprensión del problema y de búsqueda del patrón*, esta es llevada a cabo inicialmente de manera *visual*, es de anotar que dentro de la presente investigación las progresiones presentadas a los estudiantes siempre han sido acompañadas de representaciones visuales debido al grado de escolaridad en el que se encuentran y a los conocimientos previos que éstos manifestaron durante la etapa inicial de la investigación.

Seguido, los estudiantes pasan por una *etapa de discusión, de diálogo, de negociación* alrededor de las mismas que generan nuevas interpretaciones y conjeturas, etapa a la que se le considera *reinterpretación o negociación de sentidos*, donde los estudiantes avanzan en el proceso de objetivación, que se ve reflejado en las elaboraciones que presentan los estudiantes, sus producciones son mucho más refinadas, en algunos casos se incluye el uso de signos y símbolos matemáticos y finalmente cuentan con características generales halladas dentro de la progresión.

Luego del proceso de interpretación se lleva a cabo un *consenso y determinación del patrón*, allí los estudiantes exponen sus respuestas en el colectivo donde nuevamente son discutidas bajo la orientación del maestro, es de agregar que no todas las respuestas de los grupos de trabajo son iguales, algunas de ellas cuentan con características similares mientras otras no; además presentan variaciones en el modo de razonar con respecto al patrón establecido y a la manera como éste es presentado, igualmente ciertas soluciones acuden al planteamiento de respuestas acompañadas del lenguaje informal y otras tantas incluyen el uso de signos y símbolos matemáticos tal y como se presenta en la etapa de análisis.

Finalmente, en los educandos se evidencia una etapa de *transformación*, donde retoman las ideas que son matemáticamente aceptables para ellos, seguido las reutilizan y fusionan con las respuestas ya propuestas en los momentos de clase anteriores, el proceso de objetivación descrito de este modo, se convierte en reconstrucción del saber, en constante rehacer, replantear, retomar, realimentar; cada respuesta con relación al estudio de patrones es enriquecida por el colectivo lo que significa que de manera constante su nivel de razonamiento, su representación y sus respuestas son cada vez más elaboradas y refinadas, cada vez que “algo” sucede en las respuestas da cuenta de un proceso de objetivación.

6.3 Caracterización de los procesos de objetivación

Teniendo en cuenta lo expuesto a lo largo del presente capítulo se caracterizan los procesos de objetivación durante la enseñanza de patrones en el grado segundo, en cinco etapas: *interacción social-interpretación, búsqueda de patrones, reinterpretación o negociación de sentidos, consenso y determinación del patrón, transformación.*

Estas etapas son las que emergen durante el desarrollo del proceso de investigación, cada una de ellas es progresiva y está mediada por la semiótica y la interacción social. A su vez, los procesos de objetivación emergen de manera paulatina teniendo en cuenta la interacción que se presenta dentro del aula en torno al objeto de estudio, en este caso la enseñanza de patrones dentro de la formación Básica Primaria.

7 Referencias Bibliográficas

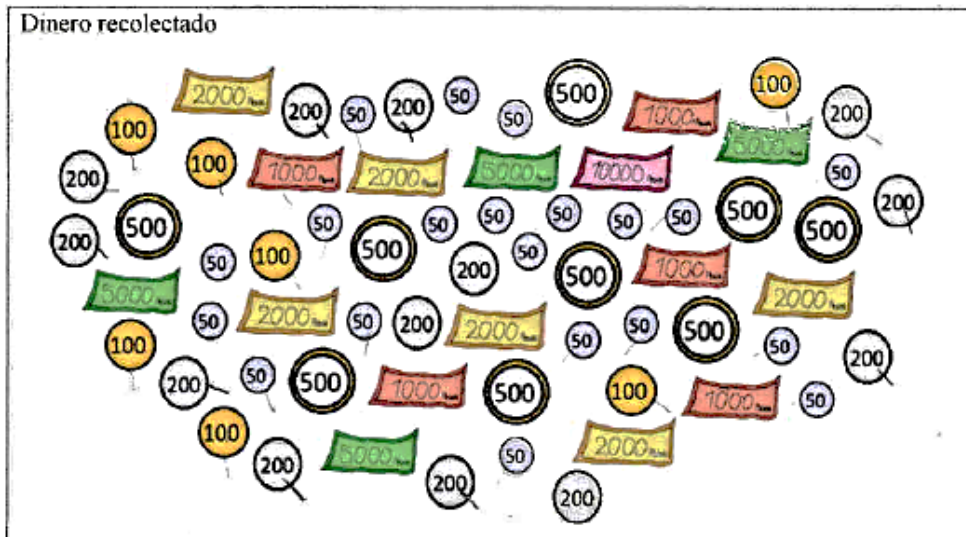
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Granada - España: Universidad de Granada.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, L. (s.f de s.f de 2012). *Sucesiones y series*. Obtenido de Sucesiones y series: <http://www.fic.umich.mx/~lcastro/sucesiones.pdf>
- Cuartas, J. (2015). *Maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. (2007). *Obstáculos Epistemológicos y perspectiva sociocultural de la matemática*. Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Bogotá: Colección "cuadernos del seminario en educación".
- Denzin, N. (1970). *Sociological Methods: a Source Book*. Chicago: Aldine Publishing Company.
- García, F. (2015). *Matemática discreta*. Madrid: Thompson.
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Whilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros . *Enseñanza de las ciencias* , 199 - 219.
- Godino, J., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. En D. d. Educación, *Matemáticas y su didáctica para Maestros* (págs. 771 - 926). Granada : Reprodigital C/Baza, 6. La Mediana .
- Guzmán, L., Seguro, S., & Sepúlveda, L. (s.f.). *Diarios de campo grado segundo*. Urrao, Antioquia, Colombia.

- Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *EDMA-Educación Matemática en la Infancia*, 24 - 40.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Matriz de referencia Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2008). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. USA: Inc.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, 103-129.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 1 - 19.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 37- 62.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutierrez, M. Molina, & I. Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 3-12). Granada, España: Comares.
- Radford, L. (2013). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada*, 33 - 49.
- Rivera, E., & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: generalización de patrones numéricos*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Colombia: Instituto Colombiano por el Fomento de la Educación Superior. ICFES.

- Vasilachis, I. (2006). La investigación cualitativa. En I. Vasilachis, *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa Editorial.
- Velásquez, L. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes del grado quinto de la Básica Primaria*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Vergel, R. (2005). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 193-215.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educ Stud Math*, 67, 171-185.
- Zazkis, R., & Lilgedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation . *Educational Studies in Mathematics*, 379-402.

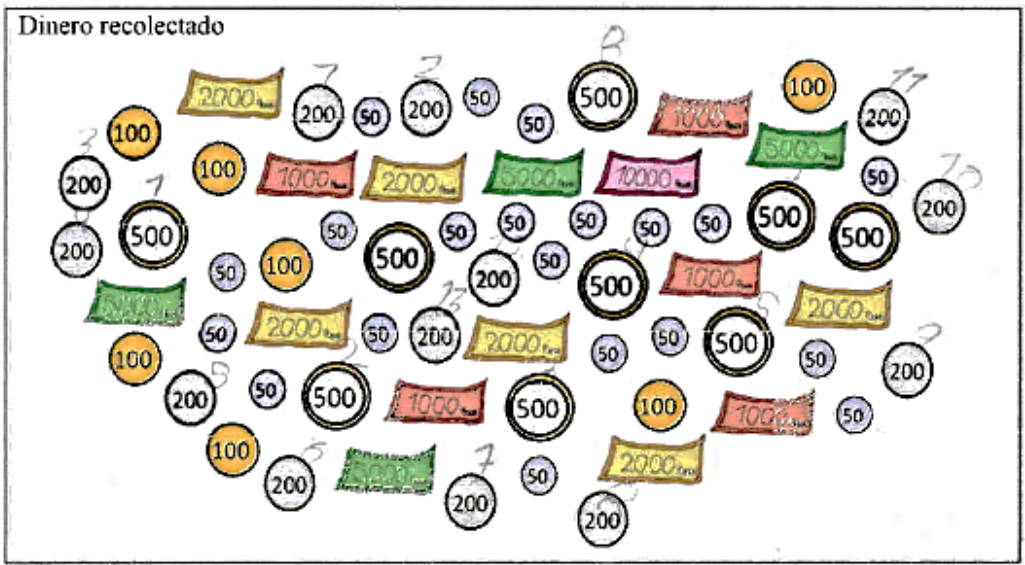
8 Anexos

Ejemplo desarrollo de las actividades.



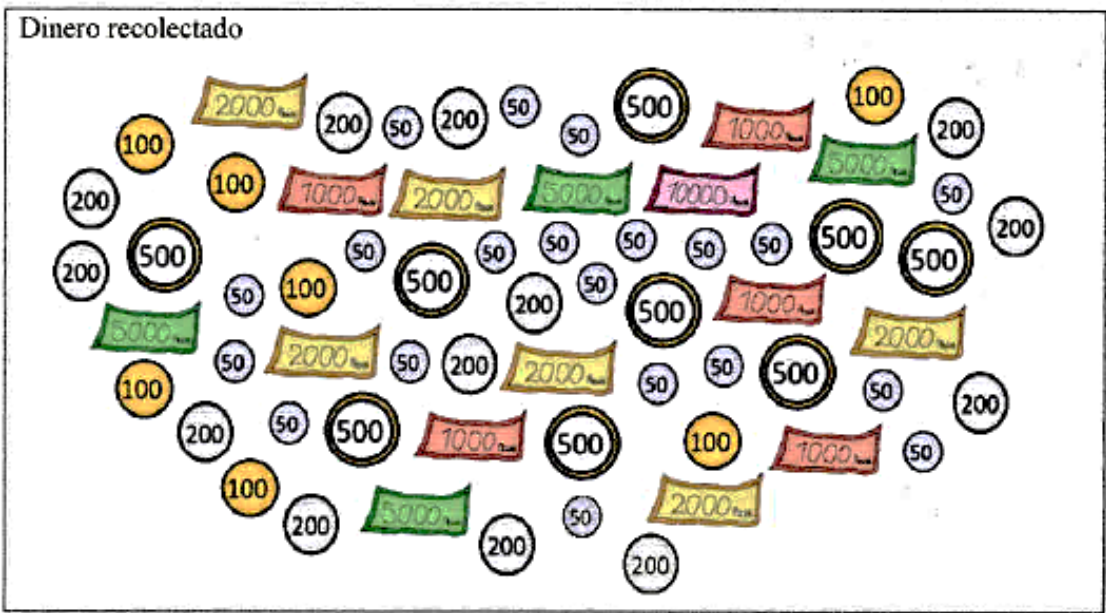
Después de observar el dibujo anterior cada equipo diligencia la siguiente tabla con el propósito de determinar el presupuesto con el que cuenta el grado segundo para la compra de los pasabocas.

Nominación billetes	Forma de conteo (representación)	Total
		72 Mil
		20 Mil
		45
		4,500
		70,000
		700
		5,000
		2,000



Después de observar el dibujo anterior cada equipo diligencia la siguiente tabla con el propósito de determinar el presupuesto con el que cuenta el grado segundo para la compra de los pasabocas.


Nominación billetes	Forma de conteo (representación)	Total
	6	12.000
	4	20.000
	7	3.500
	19	950
	1	10.000
	6	600
	5	5.000
	13	2.600



Después de observar el dibujo anterior cada equipo diligencia la siguiente tabla con el propósito de determinar el presupuesto con el que cuenta el grado segundo para la compra de los pasabocas.

Nominación billetes	Forma de conteo (representación)	Total
		72.000
		20.000
		4.500,00
		1.000
		70.000
		700
		5.000
		7.600

72.000
 20.000 +
 4.500,00
 7.000,00
 70.000,00
 75.000,00
 7.600,00
 55.800
 Copio resultad

El grupo uno solo ha propuesto repartir queso dulce  y diseñó la siguiente presentación.

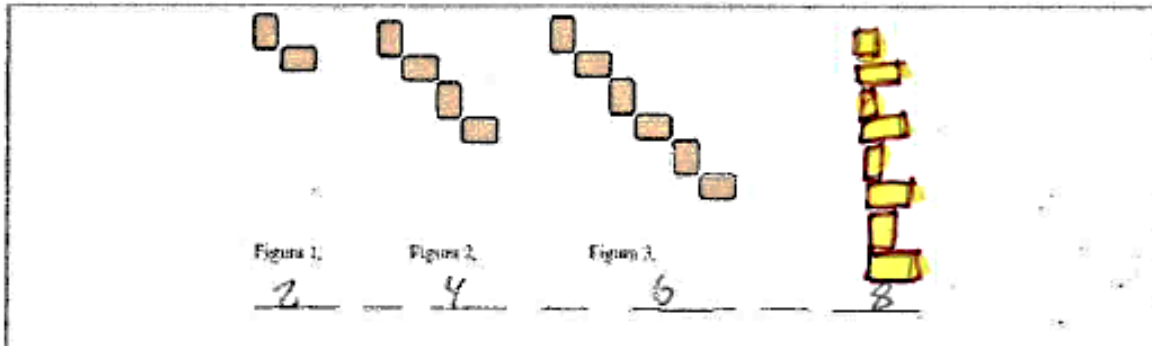


Figura 1. 2 Figura 2. 4 Figura 3. 6 8

¿Por qué creen que esa es la respuesta? ¿Cómo lo hicieron? *contando los otros quesos de dulce*

Ha seleccionado los siguientes dulces:     y propone la siguiente cantidad y presentación para cada estudiante.

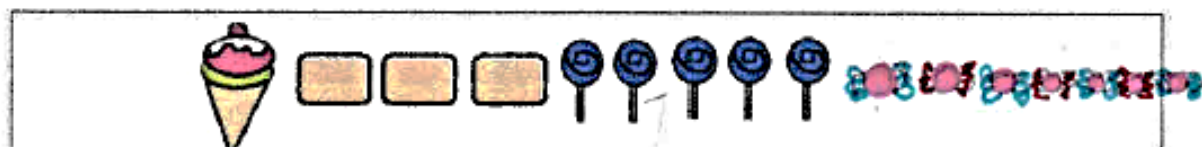

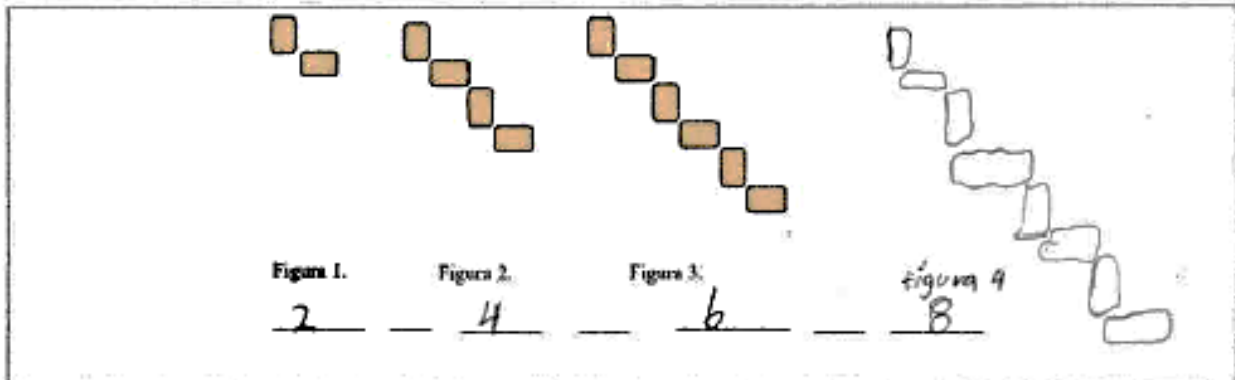


Figura 1. 1 Figura 2. 3 Figura 3. 5 7

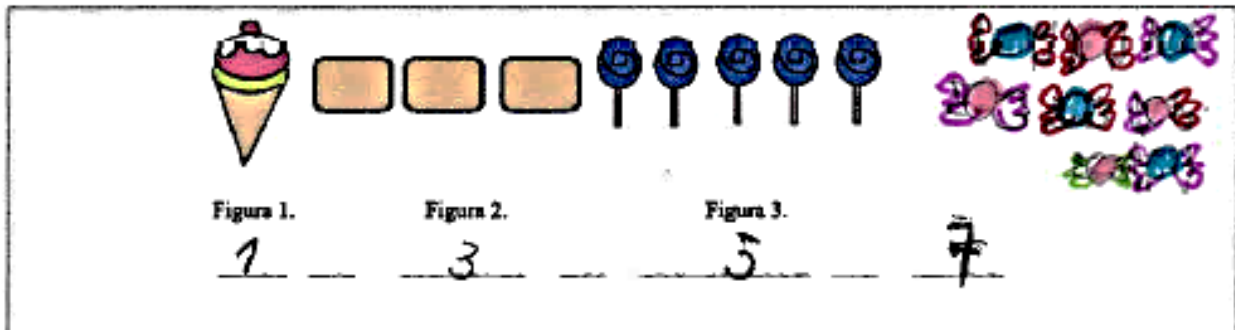
Explicar su respuesta. ¿Cómo lo saben? *en cada cha noumente de a dos*

El grupo uno solo ha propuesto repartir queso dulce  y diseñó la siguiente presentación.




¿Por qué creen que esa es la respuesta? ¿Cómo lo hicieron? *contando de 2 en 2*

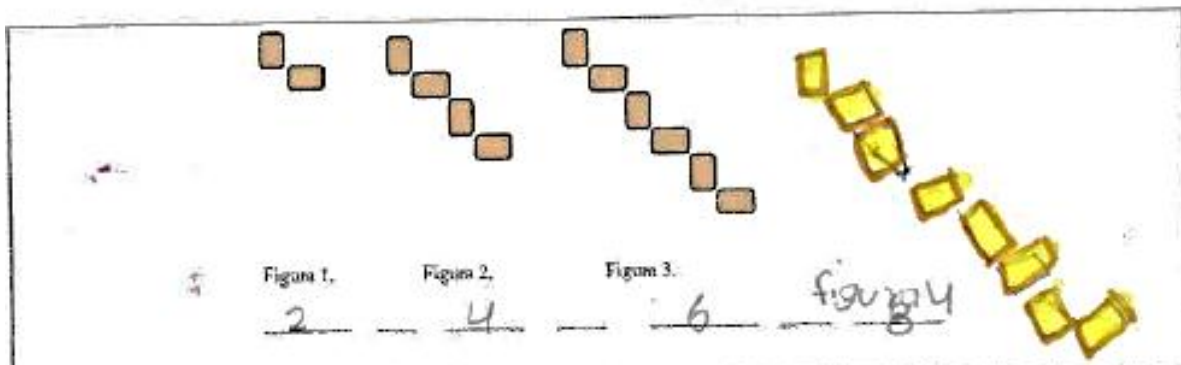
Ha seleccionado los siguientes dulces:     y propone la siguiente cantidad y presentación para cada estudiante.



Explicar su respuesta. ¿Cómo lo saben?

Conte de uno para llegar a 3 faltan 2 de 3 para llegar a cinco tambien faltan 2 entonses de 5 mas 2 llega a 7 confites

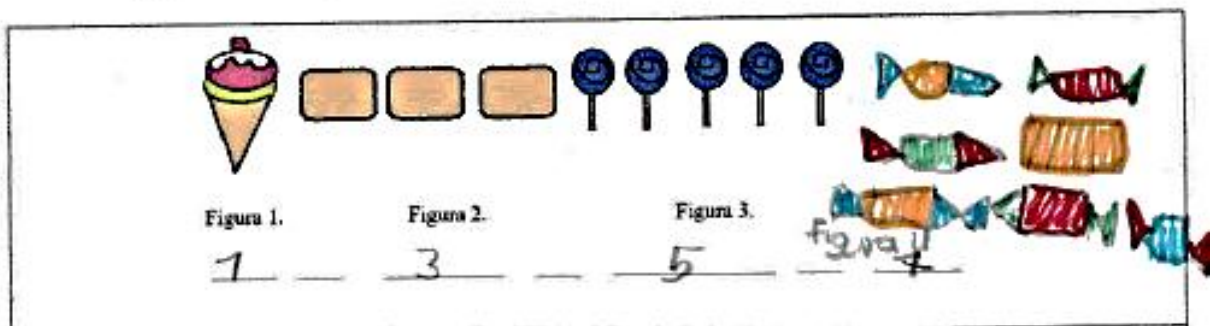
El grupo uno solo ha propuesto repartir queso dulce  y diseñó la siguiente presentación.



¿Por qué creen que esa es la respuesta? ¿Cómo lo hicieron?

Poniendo un queso vertical y otro horizontal
 Los quesos se van agrandando de a dos

Ha seleccionado los siguientes dulces:     y propone la siguiente cantidad y presentación para cada estudiante.



Explicar su respuesta. ¿Cómo lo saben?

tenia 7 helado y en el queso ^{tenia 7} me dieron 2 mas
 en las colombinas tenia 3 me dieron 2 Confiteo 5
 me dieron 2 mas

El grupo tres por su parte, ha presentado la siguiente propuesta.

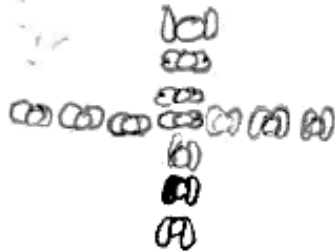
Figura 1. Figura 2. Figura 3. *Figura 4*

1 5 9

¿Por qué creen que es la respuesta? ¿Qué conclusiones plantearon para saberlo?

contando con los dedos y en cuatros

1. ¿Cuál es la figura que corresponde al lugar 4 en el diseño elaborado por cada uno de los equipos?












En el lugar 4 hay 16

2. ¿Todos los equipos han cumplido a cabalidad con las condiciones de la maestra?

Justifique su respuesta. *en el grupo 1 se cumplió, en el grupo 2 no se cumplió y en el grupo 3 no se cumplió por que se pasó más de 20.*

Problema 1.

La maestra del grado segundo ha propuesto diferentes posibilidades para la repartición de los dulces, inicialmente ha pensado que si los reparte de la siguiente manera podrá ir contando cuantos dulces ha repartido, así:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dulces									
Cantidad repartida	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Explica tu respuesta

contando de dos en dos

Después de observar la tabla y de plantear algunas hipótesis al respecto, el equipo diligencia los espacios en blanco dentro de la tabla y estima: ¿Cuántos dulces habrá repartido la maestra cuando entregue los confites al estudiante número 18?







Explica tu respuesta

al estudiante número 18 le toca 36 dulces y para ver cuánto le toca y se una suma

$$\frac{10}{20} \quad \frac{14}{22} \quad \frac{12}{24} \quad \frac{18}{26} \quad \frac{14}{28} \quad \frac{15}{30} \quad \frac{16}{32} \quad \frac{17}{34} \quad \frac{18}{36}$$

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.







Cada uno de los grupos debe determinar la cantidad de unidades que adquiere al comprar cada una de las promociones que se presentan al inicio de la situación y posteriormente debe establecer cuántas unidades necesita para realizar la celebración con sus compañeros de clase.

Producto	Unidades/ paquete	Promoción	Proceso ejecutado para realizar el conteo ¿Cómo lo sabes?	Total/u nidades	Cuántas U necesitamos
Confites 	30 unidades	2 paquetes	Sumo dos paquetes $30 + 30 = 60$	60	60
Paletas 	10 unidades	3 paquetes	Sumo tres paquetes $10 + 10 + 10 = 30$	30	20
Torta 	1 unidad	2 tortas	Sumo las dos tortas $1 + 1 = 2$	2	2
Queso dulce 	15 unidades	5 cajas	Sumo cinco paquetes $15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 75$	75	60
Helado 	6 unidades	4 paquetes	Sumo cuatro paquetes de Helado $6 + 6 + 6 + 6 = 24$	24	20
Colombinas 	24 unidades	2 paquetes	Sumo dos paquetes de colombina $24 + 24 = 48$	48	40

Sesión 5. El uso de patrones en la búsqueda de la solución.

Actividad 1. Trabajo en pequeños grupos.

Cada uno de los grupos debe determinar la cantidad de unidades que adquiere al comprar cada una de las promociones que se presentan al inicio de la situación y posteriormente debe establecer cuántas unidades necesita para realizar la celebración con sus compañeros de clase.

Producto	Unidades/ paquete	Promoción	Proceso ejecutado para realizar el conteo ¿Cómo lo sabes?	Total/u nidades	Cuántas U necesitamos
Confites 	30 unidades	2 paquetes	sume $30 + 30 = 60$	60	60
Paletas 	10 unidades	3 paquetes	sume $10 + 10 + 10 = 30$	30	20
Torta 	1 unidad	2 tortas	sume $1 + 1 = 2$	2	2
Queso dulce 	15 unidades	5 cajas	multiplique $15 \times 5 = 75$	75	60
Helado 	6 unidades	4 paquetes	multiplique $6 \times 4 = 24$	24	20
Colombinas 	24 unidades	2 paquetes	sume $24 + 24 = 48$	48	40