

PROFESIONALIZACIÓN DEL EDUCADOR MATEMÁTICO, UNAS ONZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Pablo Flores Martínez
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA, ESPAÑA

En esta conferencia trataré de precisar la tarea profesional del profesor de matemáticas. Para ello he añadido un subtítulo deliberadamente ambiguo, ya que puede interpretarse de diversos modos. En primer lugar puede referirse a una expectativa de los profesores asistentes a un curso de formación, o a esta conferencia, es decir, *un poco de educación matemática* (didáctica de la matemática) *para profesores*.

También puede referirse a una esperanza profesional del profesor en su tarea: *que los alumnos salgan “algo” educados matemáticamente*. Por último, la reunión de un término que sugiere medida fraccionaria (onza = un dieciseisavo de libra) con el nombre genérico de educación matemática, puede sugerir que vamos a realizar algunas reflexiones sobre la enseñanza de las fracciones y la medida a partir de la didáctica de las matemáticas.

En la conferencia vamos a situarnos en las tres perspectivas, tratando con ello de mostrar algo sobre como la didáctica de la matemática puede ayudar a profesionalizar al educador matemático, concretamente cuando afronta la enseñanza de las fracciones.

Para ello vamos a distinguir dos partes y unas pequeñas conclusiones. En la primera, trataremos de aclarar lo que entendemos por educación matemática, distinguiendo el proceso de socializar por medio de las matemáticas, de la rama científica que se ocupa de teorizar sobre este proceso. Estas dos acepciones se influyen, la educación matemática como rama del saber ayuda a los educadores a llevar a cabo su tarea de socialización. Para analizar esta ayuda, en la segunda parte haremos un recorrido por las competencias profesionales del educador matemático, concretando éstas en las necesarias para afrontar la enseñanza de las fracciones en la educación primaria o secundaria. Para ello emplearemos algunos conceptos teóricos provenientes de la didáctica de la matemática. Las conclusiones finales nos permitirán hacer un balance del recorrido emprendido.

El problema del profesor: ¿qué es enseñar matemáticas?. ¿Qué es educar – enculturar en matemáticas?

La onza es una unidad de medida del peso que ustedes emplean para algunos productos (el queso, por ejemplo). Su empleo social obedece a una necesidad: la de medir una cantidad. Cuando un comprador pide en una tienda cuatro onzas de queso está señalando la cantidad que quiere recibir y por la que va a pagar. Las onzas responden a una necesidad social: medir, compartir la medida. Y para cubrir esta necesidad es preciso que el comprador y vendedor la conozcan y la manejen.

En el proceso de educación se hace preciso, pues, que los niños aprendan el significado de la *onza*, incluso la *relación de la onza con la libra*, para poder comprar y vender. La comunidad escolar asume que este contenido es preciso en esta tierra, y lo convierte en contenido de la enseñanza: los alumnos deben aprender a *nombrar, medir, estimar y calcular en onzas*. De esta forma, la medida de peso se convierte en un contenido de las matemáticas de la educación primaria. Podemos pues, decir que el conocimiento matemático forma parte del currículo de la educación primaria y secundaria porque ayuda a desenvolverse en la sociedad, aunque también hay que reconocerle sus cualidades formativas.

Bishop, profesor del Departamento de Educación de la Universidad de Cambridge, ha llegado a establecer las características culturales básicas para desenvolverse en la sociedad, que están relacionadas con las matemáticas. Son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar, explicar. Estas destrezas matemáticas surgen, pues, como respuestas a problemas sociales. Posteriormente, la sociedad se ha tecnificado, y con ello se ha dado más importancia a que los ciudadanos desarrollen ciertas destrezas matemáticas. Con ello la enseñanza no se ha limitado a ayudar a la socialización, sino que se ha constituido en una actividad encaminada al éxito social de los alumnos, lo que ha pro-

movido la aparición de criterios de excelencia, pero también de fracaso. Por desgracia, con demasiada frecuencia, los conocimientos que los alumnos demuestran tener en matemáticas se han empleado como referentes para desmarcar a los “menos brillantes”, y con ello colaborar a la diferenciación social jerárquica.

La educación matemática trata de recuperar el papel educador de la matemática (se educa a todo el mundo), y dejar de lado el papel selectivo del rendimiento en matemáticas. Como dice Bishop, se trata de enculturar por medio de las matemáticas, y todos los miembros de un grupo forman parte de su cultura. Partimos, pues, de que la educación matemática tiene como fin ayudar al individuo en su desarrollo personal dentro de una cultura, y esto no acepta el fracaso, ya que el referente es el propio individuo. Para conseguir este fin, las matemáticas deben dejar de considerarse como un lenguaje esotérico, sólo apto para aquellas personas que tienen el suficiente grado de abstracción, y que son capaces de emplear el lenguaje formal del álgebra. Se trata de hacer ver el papel enculturador de las matemáticas, y en ello el educador matemático tiene un papel fundamental.

La imagen que la sociedad tiene de las matemáticas hace que se enfatice su naturaleza formal, y como consecuencia su papel de selección, sobre su papel educador. Esto se ve favorecido por la preponderancia de la formación matemática de los profesores, sobre una formación profesional como educadores.

Competencias profesionales del educador matemático

Los educadores matemáticos tienen, pues, una tarea específica, que va más allá de la transmisión de unos conocimientos establecidos. Pero esta tarea no es evidente, y aunque sea de carácter práctico, tiene que buscar elementos que ayuden a ejercerla de manera racional. Así, el educador matemático tiene que disponer de criterios que le permitan seleccionar los libros de texto más idóneos para trabajar el concepto de *onza* en su clase, o para diseñar actividades adecuadas a que sus alumnos trabajen las *unidades de peso*, o a seleccionar el grado en el que se puede trabajar el *sistema métrico aplicado a pesos y masas*, cuando en su comunidad se emplean otras unidades, y tiene que dominar estrategias para trabajar las fracciones, incluso cuando los alumnos repiten los mismos errores. En una

sociedad como la actual, en la que domina la especialización, las demandas anteriores se reducen a plantear la necesidad de que el educador matemático adquiera *profesionalidad* en su tarea social. Pero ¿qué cualidades distinguen a un educador profesional?

De nuevo Bishop nos permite establecer algunas cualidades del profesor concebido como enculturador matemático. Según este autor, el enculturador matemático tendría una comprensión amplia de las matemáticas como fenómeno cultural, una comprensión profunda de los valores de la cultura matemática, de la tecnología simbólica, a la vez que tendría unas competencias adecuadas en estos campos, y finalmente, tendría un fuerte metaconcepto de su proceso de enculturación. Trataremos de estudiar estas cualidades con relación a las fracciones.

Llamamos *currículo* a un plan de formación. En el caso que nos compete, el currículo de matemáticas tiene que afrontar la enculturación de los alumnos en aspectos relacionados con la medida y con los números. Pero ¿qué competencias tiene que tener el educador para afrontar este currículo de una manera profesional?

Analizando el currículo como campo de actuación del educador matemático, podemos considerar que según dice el profesor Luis Rico, el currículo de matemáticas responde a demandas que pueden formularse por medio de las siguientes cuestiones:

- ¿Qué es y en qué consiste el conocimiento?
- ¿Qué es y en qué consiste el aprendizaje?
- ¿Qué es y en qué consiste la enseñanza?
- ¿En qué consiste el conocimiento útil?

Para responder a esas cuestiones la didáctica de la matemática recurre a distintas dimensiones:

- Dimensión cultural/conceptual
- Dimensión cognitiva
- Dimensión ética
- Dimensión social

El educador matemático tendría que disponer de competencias que le permitieran afrontar estas dimensiones respecto a los contenidos matemáticos elegidos. Shulman, investigador en didáctica, ha llamado *conocimiento didáctico del contenido matemático* a las formas más corrientes de representar un contenido, las analogías más poderosas, ilus-

traciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. En una palabra, la comprensión de lo que hace que determinado tópico sea más fácil o difícil. El análisis curricular del Dr. Rico ha llevado a concebir unos *organizadores*, que define como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”. Los organizadores están fundamentados en las dimensiones destacadas antes. El profesor Rico enuncia los siguientes:

- 1) Evolución histórica del contenido
- 2) Fenomenología de los conocimientos implicados
- 3) Errores y dificultades del aprendizaje del contenido, así como los obstáculos para ello
- 4) Representaciones utilizadas en cada concepto, así como los modelos usuales
- 5) Materiales y recursos para la enseñanza del contenido

Tal como puede apreciarse, los dos primeros están influidos por la dimensión conceptual del currículo, los dos siguientes por la cognitiva, y la última por la ética y social. Para mostrar con mas claridad el interés de estos organizadores, como indicadores del conocimiento profesional del educador matemático, volveremos a los temas matemáticos que llevamos empleando.

La onza es una sub-unidad de medida de peso. Tomando como unidad la *libra*, la onza es la dieciséisava parte de la unidad. Su manejo matemático supone un dominio de la relación entre medidas, especialmente las fracciones. Sabemos que las fracciones son uno de los contenidos claves en la enseñanza de las matemáticas, más aún cuando son la base del número racional. Son causa del fracaso matemático escolar de multitud de alumnos. Pero además parecen ser objetos necesarios para realizar transacciones comerciales y técnicas. Veamos los organizadores que pueden ayudar al educador matemático a abordar la enseñanza de las fracciones:

En primer lugar conviene estudiar los conceptos matemáticos implicados. Conceptualmente, el número racional amplía al número entero con la posibilidad de resolver todas las ecuaciones de la forma $ax+b=c$, y con ello todos los problemas reducibles a estas ecuaciones. Este hecho acarrea formalmente la construcción del cuerpo de fracciones en un anillo, pero también la posibilidad de realizar la división y con ello la ruptura de la matemática discreta, para generar un conjunto denso. La densidad es una característica de muchas de las magnitudes, por lo

que los números racionales permiten encarar la medida de magnitudes, con todo lo que esto aporta a la ciencia, la técnica y la práctica social.

El empleo social de los números racionales está relacionado con los fenómenos que se aplican. Las fracciones (origen de la construcción de Q) aparecen en muchas ocasiones como la *relación entre una parte y un todo* que actúa como unidad de referencia (*a medio camino*). En otros casos aparecen como *una división sin realizar* (*le toca a cada uno un tercio*). También puede indicar *el resultado de una medida* (*cuarto y mitad*). También puede ser un *operador* (*le corresponden los dos tercios del total*). Pero el sentido que más se aproxima al de número racional es el de la fracción *razón*, entendida como relación parte a parte, o como proporción. El número racional está, pues, en la base del razonamiento proporcional. Ligados a estos sentidos de uso de las fracciones, aparecen las equivalencias y las operaciones entre números racionales. La suma y resta se deducen fácilmente a partir de la suma y resta de números naturales, especialmente cuando se refieren a la misma unidad, pero la multiplicación y división obedecen a otros criterios y sentidos diferentes de las operaciones en N . En general, la multiplicación exige la actuación como operador de una fracción sobre el resultado obtenido por la otra, mientras que la división se refiere a la comparación entre partes, más que al reparto. Como se observa, los números racionales tienen su propia significación, que no siempre coincide con la de los números enteros y naturales, por lo que el profesor debe conocer estas características.

El origen histórico de los números racionales se encuentra en la necesidad de medir, lo que lleva a proponer expresiones numéricas para llevar a cabo la operación. Los Babilonios y Egipcios emplean fracciones de numerador unidad con las que obtienen relaciones numéricas y medidas. La matemática griega encara el problema de la búsqueda de la parte alícuota entre dos longitudes, para establecer la medida de una respecto a la otra, con la expectativa de que siempre sea posible. La constatación de que es imposible encontrar la medida común entre el lado del cuadrado y su diagonal lleva a los matemáticos griegos a una crisis que les hace dirigir su atención a la geometría. La matemática árabe va a dar un auge importante al manejo de los números racionales, introduciendo una notación más actual. Es Stevin, en el siglo XVI, quien establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal, dando un fuerte empuje a su aceptación generaliza-

da. La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, construyendo como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros.

Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, en forma de *fracción*, y con *notación decimal*. La escritura en forma de fracción tiene su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes, como el tiempo, da lugar a la notación decimal.

El estudio de los conceptos tiene que hacerse mediante representaciones. Tal como indican Llinares y Sánchez, las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada ($3/5$), representación como razón ($3:5$), representación decimal (0.6), representación de porcentajes (60%). En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco.

Entre los modelos usuales en el trabajo con números y operaciones podemos destacar los siguientes: lineales, utilizan la recta numérica como modelo de representación numérica; métricos, emplean longitudes, superficies, balanzas para el estudio de conceptos numéricos; geométricos, que utilizan figuras geométricas para representar partes de la unidad; funcionales, aunque no son los modelos habituales actualmente se emplean para operaciones con racionales pero no con decimales, excepto algunos casos de porcentajes.

El conocimiento de los obstáculos, errores y dificultades permite al educador conocer aquellos conceptos que van a tener una especial dificultad y con ello emprender el diseño de instrumentos para su diagnóstico y tratamiento. Algunos errores conceptuales aparecen al relacionar distintas interpretaciones de la fracción. La identificación de la fracción con una cantidad es un obstáculo para interpretar y manejar la fracción como razón, y para el número racional. La noción de equivalencia de fracciones es origen de errores debidos al manejo simultáneo de di-

versos sentidos de fracción y de equivalencia, y otras veces por los problemas originados ante la transitividad del signo igual. La introducción demasiado pronto del cálculo algorítmico provoca confusiones en su manejo. Estos equívocos también se pueden producir por la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre un aumento de la cantidad. Cuando operan con decimales, los alumnos tienen problemas con las operaciones, con el uso del cero, con la lectura y escritura de los números y con el orden entre decimales. Errores que, como antes comentábamos, se deben en gran medida, a la persistencia en los conocimientos de los números naturales.

Para la enseñanza de las fracciones podemos emplear materiales y recursos relacionados con la enseñanza de los números, como los marcadores, los ábacos, etc. También se pueden emplear otros materiales generales, como el Tangram y la calculadora. La calculadora potencia las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes; el sentido común y la estimación como control de las operaciones realizadas; la relación entre las operaciones; la generalización a partir de la obtención de pautas y regularidades; la construcción de tablas y gráficas así como el dominio de una función; la comprensión cualitativa del dominio de una función; los métodos iterativos. Otros recursos específicos son: el círculo de fracciones, los puzzles troquelados de fracciones, el dominó de fracciones, la baraja de fracciones y cualquier objeto que se preste a la partición y estudio de las relaciones entre las partes. Hay que destacar la importancia de los instrumentos de medida en la enseñanza de los racionales: reglas graduadas, escalas, vasos graduados, jeringuillas, calibradores, cartulinas, papel cuadriculado, balanzas y pesas, etc.

Conclusiones

En esta conferencia hemos insistido en que educar matemáticamente a las personas es, en palabras de Bishop, una manera de conocer, que requiere una conciencia fundamental de los valores que subyacen a las matemáticas y un reconocimiento de la complejidad de enseñar estos valores a los niños. No basta con enseñar matemáticas,

también debemos educarles acerca de las matemáticas, mediante las matemáticas y con las matemáticas.

Para lograr estos fines, el educador matemático tiene que tener conciencia de su tarea y sus competencias, y en esta conferencia hemos tratado de ejemplificarlas. Los organizadores curriculares pueden aportarle puntos de referencia que, una vez descritos para cada contenido mate-

mático, le permitirán tener un repertorio de conocimientos gracias a los que podrá llevar a cabo una tarea en el aula más acorde con los fines, seleccionando con mayor racionalidad, en función de las circunstancias en que se mueva. Puede que sólo aspire a unas *onzas de educación matemática* (como proceso) de sus alumnos, pero el educador tiene que tener *varias libras de educación matemática* (como rama del saber) para llegar a ello.

CONSTRUCCIÓN HISTÓRICA DEL UNO Y LA UNIDAD: Perspectivas aritmética y geométrica¹

Jorge Arce
Gloria Castrillón
Myriam Vega

GRUPO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
UNIVERSIDAD DEL VALLE

Resumen

El análisis de la construcción histórica y epistemológica del *uno* y la *unidad* se aborda desde una opción metodológica, según la cual, dichos conceptos se han venido estructurando a lo largo del desarrollo y evolución de las matemáticas mismas. No se asumen como objetos ya constituidos sobre los cuales se puede develar su historia en épocas distintas. La historia da razones que explican los procesos que dieron lugar a la constitución del *uno* y la *unidad* en las perspectivas aritmética y geométrica y de cómo las relaciones entre lo aritmético y lo geométrico han marcado, en su estatus de problema, el desarrollo matemático de los últimos 23 siglos. A partir de la clasificación de los 13 libros de Euclides, propuesta por Jean-Louis Gardies², a través de la cual explicita la separación de los libros aritméticos de los geométricos y las relaciones entre éstos, se presentan algunas conclusiones resultado de un análisis centrado en el papel que Euclides le asignó al *uno* y la *unidad* en dichos contextos.

Se da relevancia al problema de cómo la indivisibilidad de la *unidad* plantea una dualidad muy importante entre los números que son primos entre sí y las magnitudes inconmensurables y, por otra parte, entre números que no sean primos relativos y magnitudes conmensurables.

Otro aspecto que se resalta en la historia del *uno* y la *unidad* lo constituyen los trabajos de Peano, Stevin y Viète. La declaración del *uno* como número y el papel que se le asigna a la *unidad* direccionan las preguntas que se pueden hacer sobre lo que verdaderamente interesa: la función que cumplen dichos objetos en los contextos teóricos donde están enmarcados.

Otro aspecto crucial en la construcción histórica del *uno* y la *unidad* es la concepción de Descartes de la *unidad* como neutro multiplicativo lo cual le permite crear la cerradura para el producto de dos segmentos y la extracción de la raíz cuadrada de un segmento dado. Se trata de un nuevo funcionamiento del *uno* y la *unidad*.

Finalmente, el encuadre cultural, filosófico y epistemológico de los actores y sus contribuciones al desarrollo de las teorías, ayuda a dibujar una imagen que puede aportar a la comprensión de la formación de pensamiento matemático en diferentes contextos socioculturales y, en particular, en el contexto escolar.

1 Adaptación del segundo capítulo del Informe Final de la investigación: *Formación de pensamiento matemático en el contexto escolar: implicaciones de la cultura del Uno y la Unidad*. Proyecto COLCIENCIAS, Cód. 1106-11-222-95. Jorge Arce Chaves, Gloria Castrillón Castro y Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Cali, Feb. de 1.999, pp. 20-45.

2 GARDIES, Jean-Louis (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Tétrète à Archimède*. Librairie Philosophique J. Vrin, France, pp. 219 – 221. 2 Adaptación del segundo capítulo del Informe Final de la investigación: *Formación de pensamiento matemático en el contexto escolar: implicaciones de la cultura del Uno y la Unidad*. Proyecto COLCIENCIAS, Cód. 1106-11-222-95. Jorge Arce Chaves, Gloria Castrillón Castro y Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Cali, Feb. de 1.999, pp. 20-45.