# ESTRUCTURAS ADITIVAS Y GENERALIZACIÓN

Gilberto Obando Zapata
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Las matemáticas, tradicionalmente, han sido consideradas como la ciencia de lo abstracto y lo general por excelencia. Esto debido a que sus definiciones, postulados y teoremas no hacen referencia más que a los objetos matemáticos y a las relaciones entre éstos. Así, la validez de una proposición no depende de su comprobación empírica, sino, de la posibilidad de ser obtenida desde los axiomas y otros teoremas a partir de un proceso deductivo. Por esta razón lo axiomático–deductivo constituye la forma canónica de presentación del cuerpo teórico de las matemáticas.

Pero esta forma de presentación del conocimiento matemático oculta todo rastro de su origen y génesis. El matemático, en su que hacer, comete errores, elabora hipótesis, realiza inducciones, generalizaciones, etc., y posteriormente, cuando juzga que ha encontrado un resultado digno de ser c*omunicado,* elige, del gran laberinto de sus reflexiones, aquello que es comunicable y "susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás" (Brousseau, 1993, p. 4). Esto es, "El autor despersonaliza, descontextualiza y destemporaliza lo más posible sus resultados" (Brousseau, 1993, p. 4). Y después de pasar la crítica del resto de la comunidad de matemáticos del momento, quienes lo reformulan, lo generalizan, o incluso lo destruyen, pasa a ser conocimiento válido.

Para que los saberes matemáticos ingresen a la escuela deben sufrir una re–elaboración didáctica, que los re–contextualiza, los re–personaliza y los re–temporaliza. Es en esta re–elaboración didáctica donde se debe centrar la actividad profesional del maestro de matemáticas, a fin de propiciar para el alumno una verdadera actividad científica.

> El trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etc.. (Brousseau, 1993, p 4 y 5).

Esta actividad matemática del alumno tiene un objetivo primordial: hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, es decir que pueda, ante una determinada situación, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través clases generales de problemas. Pero dado que la construcción del conocimiento es contextualizado por naturaleza, entonces, el paso a la generalización no es ni fácil ni inmediato. Esto implica que el profesor debe proponer múltiples situaciones en variados contextos a fin de que el alumno pueda identificar los invariantes comunes a todas las situaciones, los cuales son los elementos constitutivos del conocimiento que se le desea enseñar, y entonces, pueda entrar a diferenciarlos de los elementos particulares de cada situación. La identificación de estos invariantes permite la constitución de esquemas generales de pensamiento y son los que hacen que los alumnos ante dos situaciones distintas puedan reconocer que constituyen variantes de una misma situación conceptual. En este sentido, generalizar es algo más complejo que ir de particular a lo general. "La abstracción implica la utilización de los recursos estructurales del medio, para producir versiones más refinadas del conocimiento, es decir, más generales en el sentido clásico" (Moreno, en prensa).

Por ejemplo, cuando el profesor dibuja un triángulo rectángulo, él ve en su dibujo el representante de una clase conceptual (la clase de todos los triángulos rectángulos), pero para el alumno este dibujo "es el triángulo", y por lo tanto, cuando se le dibuja otro triángulo rectángulo en una posición distinta puede no identificar un triángulo rectángulo en el dibujo. Esto es, el alumno no logra distinguir aquellas características que le son particulares de la construcción gráfica que se le ha presentado inicialmente, de las propiedades generales que caracterizan a un triángulo rectángulo, y por lo tanto, al no identificarlas (las particulares y las generales ) en la nueva construcción, entonces, no puede identificar el nuevo triángulo como triángulo rectángulo. Por lo tanto, se hace necesario que el alumno este en contacto con múltiples situaciones en las que pueda confrontar las hipótesis particulares que construye sobre cada situación, a fin que pueda encontrar las características generales que definen un triángulo rectángulo, independiente de la forma como este le sea presentado. Como puede verse es algo más profundo que aprenderse la definición de triángulo rectángulo.

Estas ideas sobre la generalización muestran cómo el proceso de generalización no es independiente de los procesos de conceptualización. Es decir, no se aprenden conceptos de un lado, y después se aprende a generalizar por otra vía, sino que un proceso de conceptualización es en sí mismo un camino hacia la generalización. En esta perspectiva conviene señalar que un proceso de conceptualización no se agota en una serie de enunciados o definiciones, sino que por el contrario pone en juego una serie de elementos en estrecha relación. En este sentido Vergnaud plantea: "la conceptualización en matemáticas, como en cualquier otra área, consiste en elaborar los medios intelectuales de tratar progresivamente situaciones cada vez más y más complejas" (1997, p. 7). Un concepto es una "tripla de conjuntos C = (S, I, R), donde S es el conjunto de situaciones que dan significado al concepto, I es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades, y relaciones) y que pueden ser reconocidas y utilizadas por los sujetos para analizar y adueñarse de esas situaciones, y R es el conjunto de representaciones simbólicas que pueden ser usadas para enfrentar y representarse esas invariantes, y por tanto, representar las situaciones y procedimientos para manipularlas" (Vergnaud, 1988, p. 141).

Desde esta perspectiva, para el aprendizaje de un determinado concepto, no es suficiente con tratar una sola situación, sino que por el contrario, es necesario el tratamiento de una gran variedad de situaciones, pero además, se tiene que cada situación puede poner en juego una variedad de conceptos, y para el tratamiento de estas situaciones se pueden tener distintos sistemas de representación. Esto hace que el aprendizaje de un determinado concepto sea un proceso complejo que dura un largo período de tiempo, y para el cual se requiere una variedad de situaciones que pongan en juego las características de dicho concepto.

Así pues, al momento de pensar en la enseñanza de un determinado concepto, se hace necesario tener en cuenta que en este proceso intervienen elementos de distinta naturaleza. Entre los más importantes se pueden destacar:

1. Un concepto nunca está aislado, sino en estrecha conexión con otros conceptos matemáticos. Esto implica entonces la necesidad de delimitar la red conceptual en la cual está inscrito el concepto que se desea convertir en objeto de enseñanza. No se trata de la elaboración de un mapa conceptual, sino más bien de lo que Vergnaud llamó un campo conceptual. "Un campo conceptual está constituido, desde un punto de vista práctico, por el conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo llama a una gran variedad de procedimientos y de conceptos en estrecha conexión. Desde el punto de vista teórico, un campo conceptual está constituido por el conjunto de conceptos y de teoremas que contribuyen al dominio progresivo de esas situaciones" (Vergnaud, 1997, p 7).

2. Dado que el proceso de conceptualización implica le tratamiento de múltiples situaciones, se hace necesaria una articulación de estas situaciones para formar una unidad coherente que permita el aprendizaje deseado en los alumnos. Esta articulación sólo puede darse en la medida que se identifiquen de manera clara los medios y mediadores que están presentes en las distintas situaciones, y la manera como estos medios y mediadores permiten transformaciones conceptuales en los alumnos, las cuales se pueden evidenciar a través del nivel de elaboración alcanzado en su producción. Esto implica un análisis por lo menos en dos sentidos: los medios y mediadores puestos en escena a través de cada situación que elementos conceptuales son los que potencian, y que tipo de variables didácticas son las pertinentes para hacer evolucionar la producción del alumno a través de las situaciones propuestas.

3. De igual forma, este proceso hacia una versión más abstracta del conocimiento no sólo implica coordinar situaciones en diferentes contextos, sino también, a propósito de una misma situación, articular distintos registros de representación (o como Duval, 1993, los llama, registros de representación semiótica), a través de su tratamiento[1] y de traducciones[2]. Así por ejemplo, una misma situación puede ser representada a través de un gráfico cartesiano, una ecuación, una función, una tabla de valores, o un programa de computador, entre otros, y una comprensión completa de la situación implica la articulación de estos distintos registros de representación, en tanto que cada uno aporta información distinta sobre la situación y por ende sobre el concepto que se quiere enseñar.

Desde la anterior perspectiva, el trabajo escolar sobre el desarrollo del esquema aditivo trasciende ampliamente lo que tradicionalmente se ha desarrollado, centrado en el aprendizaje de los algoritmos básicos de la suma y de la resta, de un lado, y de la enseñanza de la solución de problemas, de otro, con muy poca conexión entre sí. Según Vergnaud, el esquema aditivo se desarrolla a través de un campo conceptual constituido por los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumentos o disminución (perder o ganar dinero), de relación de comparación cuantificada (tener 3 dulces o 3 años más que), de composición binaria de medidas, (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unitaria, de inversión, de número natural y de número relativo, de abscisa, de desplazamiento orientado y cuantificado, …(Vergnaud, 1990, p 96 y 97).

Pero además de estos esquemas básicos, desde los cuales se puede analizar cualquier situación aditiva, se deben considerar los contextos dentro de los cuales están inmersos los problemas, pues estos afectan la representación que uno pueda darse de ellos. Así, son determinantes en el tipo de representación que un alumno construya de una situación, entre otros, los siguientes elementos: el tipo de magnitud (continua o discreta), el conjunto numérico (naturales, racionales, irracionales, etc.), el tamaño de los números (grandes o pequeños, cercanos o distantes), los referentes materiales de la situación (un juego, una actividad comunitaria, etc.), la formulación del enunciado (una sola proposición, una secuencia de proposiciones, etc.), los medios y mediadores de la situación (se utiliza material concreto, gráfico, etc.), por quién se pregunta (por alguno de los sumandos, o por el resultado).

Por ejemplo, en los siguientes tres problemas se puede evidenciar cómo, al hacer variar algunos de los elementos antes mencionados, se afecta radicalmente el tipo de representación del problema:

- En un caja hay 12 bolas, de las cuales 9 son rojas y el resto azules. ¿Cuántas bolas azules hay?
- ¿Si de una varilla de hierro que mide 14.795 cm se pinta 9.327 cm de roja, qué longitud queda por pintar de azul?
- De una varilla de hierro 19/37 están pintados de rojo y el resto está pintado de azul. ¿cuanto está pintado de azul?

Nótese cómo, en cada uno de ellos, la imagen mental que uno se puede formar es distinta, a pesar que los tres problemas tienen la misma estructura. Mientras que en el primero al ver las nueve rojas ya se ven las tres azules, en los otros dos esta imagen cambia: ya no se sabe, de inmediato cuánto mide la parte azul. Es más, en el segundo se ve de inmediato que más de la mitad de la varilla está pintada de rojo, mientras que en el último no es tan obvio.

1 Transformación de un registro en otra forma equivalente pero dentro del mismo sistema de representación.

2 Transformación de un registro en otro registro de un sistema de representación distinto.

## Referencias bibliográficas

BROUSSEAU, Guy. La teoría de los campos conceptuales. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de: Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. Recherches en didactique des mathematiques. Vol 7. No 2. 1986. p. 33-115.

VERGNAUD, Gerard. Le Moniteur de Mathematique. Edition Nathan, Paris, 1997, p 191.

VERGNAUD, Gerard. La teoría de los campos conceptuales. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3. 1990. p. 133-170.