plicidad de significados para los conceptos multiplicativos, y con altos niveles de integración no solo desde las matemáticas mismas, sino con otras disciplinas de la educación básica.

Bibliografía

LEHS, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional Reasonig. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 93-117.

VERGNAUD, Gerard. El Niño, las Matemáticas y la Realidad. Editorial Trillas. Mexico. P 275, 1991.

VERGNAUD, Gerard. Le Moniteur de Mathematique: Fichier pedagogique. Editons Nathan.Paris 1993a.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative Structures. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 141-146.

VERGNAUD, Gerard. La teoría de los campos conceptuales. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993b. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3. 1990. Pgs. 133-170.

Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
"UNA EMPRESA DOCENTE"

EDGAR A. GUACANEME S.

En la escuela la identificación de una función polinómica usualmente se logra a través de su representación algebraica, particularmente a través de polinomios de una variable; así, a menudo se asocia un polinomio de grado uno con la función afín[1], uno de grado dos con la cuadrática, uno de grado tres con la cúbica, etc. El trabajo escolar —particularmente en los cursos de Precálculo— que se hace con estas funciones así definidas, contempla asuntos y procedimientos tales como construir sus gráficas cartesianas, calcular los ceros de la función, examinar el crecimiento relativo de las variables, determinar características de la función tales como su paridad o su carácter biyectivo, etc. En la mayor parte de este trabajo, la idea de correspondencia prima sobre la de variación conjunta. Por ejemplo, para construir la gráfica casi siempre se elabora previamente una tabla de valores por medio del cálculo de las imágenes a partir de valores estándares de las preimágenes, lo cual implica *evaluar el polinomio* para cada valor de las preimágenes. Eventualmente, como en la descripción del carácter monótono de la función, la variación conjunta de las variables relacionadas se convierte en objeto y medio de estudio de la función; sin embargo, casi siempre el estudio de este aspecto se limita a señalar —a partir de la visualización de la gráfica— si la función es o no monótona, o si es creciente —o decreciente— en un intervalo específico.

La reflexión llevada a cabo en "una empresa docente" en torno a las representaciones de las funciones, a la caracterización de las funciones a través de éstas y al margen de las mismas, y a la variación conjunta de las variables, nos ha permitido explorar rasgos característicos de las funciones polinómicas que permiten caracterizarlas por la manera cuantitativa —numérica y no numérica— como varían sus variables.

Examinemos, en primer lugar, el caso de una función afín cualquiera, a través de su gráfica cartesiana sin ejes graduados. A través de segmentos verticales equidistantes dos a dos se puede hacer una partición *constante* del dominio de la variable independiente, cada uno de estos segmentos determina un punto de corte con la curva que como se sabe corresponde a una pareja de la función; a partir de estos puntos se pueden construir hacia la derecha[2] segmentos horizontales que representan las diferencias de dos valores *consecutivos*[3] de la variable independiente, y a partir del extremo derecho de cada segmento, trazar sendos

[1] Desde nuestra perspectiva la denominación correcta para estas funciones es afín y no lineal como se presenta en muchos libros de texto y clases de matemáticas. Consideramos que las funciones lineales deben satisfacer las condiciones de linealidad (homogeneidad y aditividad) y que las funciones descritas por polinomios de grado uno (v.g., $f(x)=ax+b$) sólo cumplen esta condición cuando b es cero.

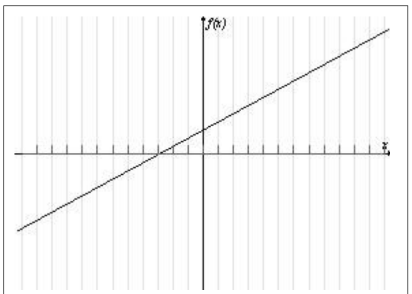
[2] También podría seleccionarse como norma de construcción el trazo hacia la izquierda, pero en tal caso el dibujo obtenido sería un poco diferente.

[3] Llamamos valores consecutivos a las abcisas de los puntos adyacentes de corte de los segmentos con el eje denotado con la letra x.

segmentos verticales hasta la curva, segmentos que representan las diferencias de los valores correspondientes a aquellos de la variable independiente (ver Gráfica 1).

Gráfica 1

Como resultado de tal construcción obtenemos un dibujo que deja ver una secuencia de triángulos rectángulos *colgados* de la curva que representa la función o *posados* sobre ésta; el primer caso se da para funciones crecientes en tanto que el segundo para funciones decrecientes. En cualquiera de los casos los triángulos serían congruentes, sus bases horizontales tendrían la misma longitud y, en consecuencia, sus alturas verticales tendrían entre sí la misma longitud. Esta congruencia entre las alturas se observaría de manera diferente si los catetos de cada triángulo se desplazan verticalmente hasta hacerlos coincidir con el eje de las abcisas; se obtendría así un dibujo que evoca tanto las representaciones gráficas de Nicole Oresme como la gráfica de una función constante (ver Gráfica 2).



Gráfica 2

Quizá el lector esté familiarizado con un tratamiento geométrico similar al esbozado antes para este tipo de funciones, pues es habitual hacer una aproximación geométrica similar cuando se aborda el estudio de la idea de pendiente. Sin embargo, consideramos que no es tan habitual aplicar este tratamiento a otras funciones polinómicas. Para ejemplificar lo que en éstas se obtiene, consideremos a continuación el caso de una función cuadrática. Si en su gráfica cartesiana hacemos un proceso similar al reseñado antes para el caso de la función afín, se obtienen figuras que asemejan triángulos rectángulos, algunas de las cuales están *colgadas* a la curva y otras se *posan* sobre ésta (ver Gráfica 3).

Gráfica 3

De manera similar, si desplazamos estas figuras hasta hacer coincidir sus segmentos horizontales con el eje denotado como x, obtenemos un dibujo que nos permite evocar la gráfica de una recta, pues los extremos de todas las alturas serían colineales (ver Gráfica 4).

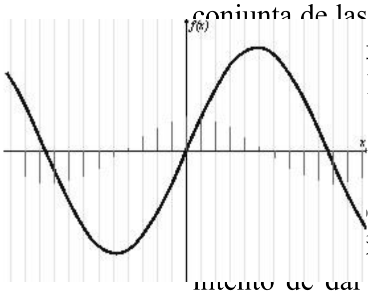
Gráfica 3

Para esta misma función cuadrática, pero trabajando en una de sus tablas de datos (ver Tabla 1) en la que los valores de la variable x forman una progresión aritmética se observa que las diferencias de las imágenes presentan un comportamiento similar al de una función afín (ver Tabla 1), para lo cual basta hacer las diferencias entre los valores de las diferencias $\Delta f(x)$.

Tabla 1

A través de estos tratamientos aplicados a las representaciones gráficas y tabulares de las funciones cuadráticas se obtiene que las diferencias de imágenes correspondientes a valores consecutivos de preimágenes configuran algo similar a una función afín. De manera análoga, al aplicar estos tratamientos a las mismas representaciones de una función afín, se obtiene que las diferencias de las imágenes configuran algo similar a una función constante. Este par de afirmaciones constituyen un resultado que es fácilmente extrapolable a las demás funciones polinómicas; su validez es fácilmente demostrable a través de un manejo simbólico de las expresiones algebraicas. Este resultado ofrece una herramienta para, de un lado, identificar si una gráfica de una función corresponde aproximadamente a la de una función polinómica —sin necesidad de disponer de su representación tabular o algebraica— y de otro lado, reconocer si una tabla específica[4] es la representación de una función polinómica —sin recurrir a graficar sus datos.

Como el lector habrá podido advertir los tratamientos reseñados arriba si bien recurren a la función como correspondencia, implican fundamentalmente una aproximación a ésta desde la variación conjunta de las variables relacionadas. En suma, a [illegible]dio de la variación conjunta se pue[illegible] las funciones polinómicas.

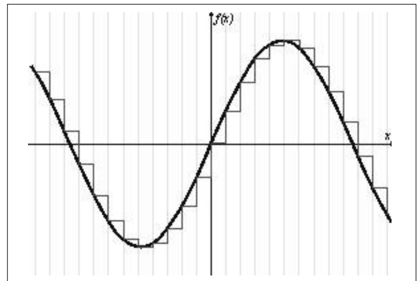


[illegible]ene el anterior resultado, es apenas [illegible]en si las funciones no polinómicas [illegible]irse a partir del estudio de la varia[illegible]le las variables relacionadas. En un intento de dar respuesta a esta inquietud hemos podido establecer que:

- las diferencias de las imágenes para la función seno se comportan de manera similar a la función coseno;
- para la función logarítmica las diferencias se comportan de manera similar a una función de proporcionalidad inversa; y,
- las diferencias de las imágenes de una función exponencial configuran algo similar a una función exponencial.

Para ilustrar parcialmente lo anterior presentamos las gráficas que corresponden al tratamiento para la gráfica de la función seno (ver Gráficas 5 y 6)

[4] Los datos de la variable independiente deben formar una progresión aritmética.



Gráfica 5

Gráfica 6

Estos resultados se pueden establecer también a través del estudio de las representaciones tabulares de tales funciones. Sin embargo, la *autoreferencia* implicada en la forma de variación conjunta para la función exponencial y la *referencia circular* para el caso de las funciones seno y coseno hacen que la identificación de las funciones a través de sus representaciones tabulares específicas deje un sinsabor, ausente en la referencia a la función de grado inferior para las funciones polinómicas.

A modo de reflexión

Los resultados antes descritos no pueden entenderse como un abordaje seudoformal del Cálculo, pero sí pueden concebirse como una posible ruta de acceso intuitivo a nociones de éste. Esta ruta involucra una aproximación cuantitativa no numérica en el tratamiento que se hace de las gráficas de las funciones; así mismo, involucra un tratamiento cuantitativo numérico cuando se asumen las representaciones tabulares como medio de estudio de la función en cuestión. En cualquiera de los dos casos el estudio de la variación conjunta de las variables relacionadas juega un papel fundamental.

Esta perspectiva ofrece un panorama de reelaboración del conocimiento matemático de los profesores y una posibilidad didáctica de estrategias y diseños curriculares que complementarían la aproximación desde la correspondencia al estudio de las funciones y que conectaría más ampliamente el estudio escolar del Precálculo con el estudio del Cálculo.