RAZONAMIENTO ASOCIADO A LA PROPORCIONALIDAD ENTRE ÁREAS EN CORRESPONDENCIA CON EL MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

GLORIA AMPARO LONDOÑO SALAS

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2017

Razonamiento asociado a la proporcionalidad entre áreas en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele en estudiantes de grado séptimo

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Estudiante
GLORIA AMPARO LONDOÑO SALAS

Asesor:
EDISON ALBERTO SUCERQUIA VEGA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios por darme la vida y permitirme llegar a la culminación de esta investigación de manera satisfactoria.

A mis hijas Carolina y María Camila, hermanas y familia, que paso a paso me apoyaron para que continuara en el camino de la superación, por brindarme ese apoyo incondicional y la comprensión en este recorrido con paciencia y amor.

A mi asesor Edison Alberto Sucerquia Vega, por su apoyo incondicional, dedicación, aportes y conocimientos para llevar a cabo la culminación de este proyecto de investigación.

A la Gobernación de Antioquia, por otorgarme la beca en el programa de Maestría en Educación Matemática, pues al hacerlo he adquirido más idoneidad a mi carrera docente.

A la Universidad de Medellín y profesores del programa por compartir sus conocimientos y aportar un grano de arena en mi profesionalización.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

Esta investigación pretende identificar el nivel de razonamiento con respecto a las relaciones proporcionales que presentan los estudiantes en correspondencia con el Modelo Educativo de van Hiele, en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel ubicada en zona urbana del municipio de Barbosa, Antioquia. En este grado, según el currículo institucional organizado a partir de los estándares básicos de competencias en matemáticas, la proporcionalidad es un concepto fundamental que se origina a partir de relaciones geométricas y que es enseñado en este nivel de estudio. Los estudiantes realizaron un cuestionario de preguntas abiertas construido en correspondencia con el modelo, para identificar el nivel de razonamiento que posee cada estudiante en relación al concepto de proporcionalidad entre áreas de figuras planas. Esta investigación cualitativa se abordó a partir de un estudio de casos, analizando tres estudiantes del grado y de los cuales la visualización geométrica les permitió exhibir un razonamiento que los ubica en un nivel de acuerdo con sus respuestas. Como resultados del estudio, se logra identificar el nivel de razonamiento, gracias a la construcción de descriptores y la secuencia de actividades, que puede ser extendida a otros estudios y otros conceptos para facilitar la comprensión de la manera como razonan los estudiantes.

PALABRAS CLAVES: nivel de razonamiento, descriptores de nivel, razón, relaciones proporcionales entre áreas.

ABSTRACT

This investigation it tries to identify the level of reasoning with regard to the proportional relations that they present the students in correspondence with the Educational Model of VAN HIELE on in students of the seventh grade, of the Educational Institution Luis Eduardo Arias Reinel located in urban zone of Barbosa - Antioquia – Colombia. In this grade, according to the institutional curriculum organized from the basic standards of competences in mathematics proportionality is a fundamental concept that originates from geometric relationships and is taught at this level of study The students realized a questionnaire of opened questions constructed in correspondence with the Model. To identify the level of reasoning that every student possesses in relation to the concept of proportionality between areas of flat figures. This qualitative investigation was approached from a study of cases, analyzing three students of the grade and of which the geometric visualization allowed them to exhibit a reasoning that places them in a level of agreement with their answers. As a result of the study, it is possible to identify the level of reasoning, thanks to the construction of descriptors and the sequence of activities, which can be extended to other studies and other concepts to facilitate the understanding of how students reason.

KEY WORDS: level of reasoning, level descriptors, reason, proportional relations between areas.

INTRODUCCIÓN

En la Educación Matemática y en el aprendizaje de conceptos, es importante indagar por las características relacionadas con la capacidad de pensar, razonar y analizar conceptos de naturaleza abstracta, que permiten adquirir conocimientos y deducir reglas que den cuenta del proceso de pensamiento que cada individuo posee al momento de enfrentarse a una situación del contexto. Este trabajo de investigación se enmarca en el programa de Maestría en Educación Matemática del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín, el cual tiene el propósito de analizar mediante el método de estudio de casos, el razonamiento que tienen los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel, ya que actualmente se desconoce el nivel de razonamiento de estos en relación con en el concepto de proporcionalidad de áreas.

En general, en el contexto de la institución educativa, los estudiantes presentan dificultades en la forma como están razonando, por lo tanto no se tiene claridad de este hecho; además, la institución no tiene políticas claras y carece de estrategias que permitan la identificación de estos procesos y que, al mismo tiempo, favorezcan la apropiación de los Estándares en Competencias Básicas en Matemáticas, asociadas a mejorar el nivel de razonamiento descrito en el modelo educativo de van Hiele. Este modelo se retoma como el marco teórico de esta investigación, buscando orientar los procesos de análisis del fenómeno objeto de estudio.

El modelo educativo de van Hiele, se concibe como una guía para los profesores, ya que además de permitir al profesor una forma de comunicación e interacción con el estudiante, da pautas claras para observar el proceso evolutivo del razonamiento, con miras a generar nuevos conceptos en pro del aprendizaje y desarrollo de la capacidad de comprensión de los mismos.

Para analizar la manera como están razonando los estudiantes en relación al concepto de proporcionalidad entre áreas, se hace necesario abordar un estudio a partir de un enfoque cualitativo, empleando un método de estudio de casos, teniendo en cuenta, preguntas elaboradas y estructuradas a partir de descriptores de nivel, asociadas al modelo educativo de van Hiele desde una perspectiva geométrica y con la utilización de material concreto de tal manera que puedan pensar y enlazar conocimientos previos de la Matemática con la Geometría, lo que conlleva a razonar y a mantener una red de relaciones que permiten adquirir y desarrollar nuevas capacidades de pensamiento.

El método de estudio de casos en esta investigación, es una herramienta que proporciona claridad y asentamiento para indagar sobre el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes sobre el concepto de proporcionalidad entre áreas, siendo una estrategia de aprendizaje significativa que puede contribuir a la problemática que cada estudiante tiene con respecto a sus capacidades.

El Capítulo 1, presenta la problemática que se aborda en el campo de la educación matemática, haciendo énfasis en el contexto escolar de manera general y especificando la institución en la cual se desarrolla el estudio, además, se explica la importancia de abordar el concepto de proporcionalidad en dicho contexto a partir del modelo educativo de van Hiele, así como también se plantean el problema y los objetivos propuestos en esta investigación.

El Capítulo 2, hace referencia al Marco Teórico, específicamente a las características y componentes del modelo educativo de van Hiele que se implementan como eje fundamental para analizar los razonamientos de los estudiantes presentados en relación a la proporcionalidad entre áreas que lo dimensionan como una herramienta útil en el proceso de enseñanza de la Geometría. Además, se aborda el concepto de proporcionalidad haciendo énfasis en raíces epistemológicas e históricas para dar cuenta de sus conocimientos relacionados y su definición, centrado en las relaciones proporcionales entre áreas.

El Capítulo 3, plantea el enfoque cualitativo como metodología de investigación utilizada, a partir del método de estudio de casos como herramienta para analizar los datos y dar respuesta a la pregunta de investigación, explicitando los instrumentos para la recolección de datos en relación con el modelo de van Hiele.

El Capítulo 4, describe el análisis realizado a partir de la secuencia de actividades diseñada para identificar el nivel razonamiento de los estudiantes, describiendo cada caso y de acuerdo a los descriptores de nivel elaborados en correspondencia con el modelo educativo y con las características del concepto de proporcionalidad.

El Capítulo 5, contiene las conclusiones y recomendaciones que se consideran de acuerdo con los resultados del análisis y que pueden dar respuesta a la pregunta de investigación, así como también, se plantean obstáculos generados durante el proceso y sugerencias para nuevas investigaciones, que aborden problemáticas semejantes.

Finalmente, se presentan las Referencias Bibliográficas utilizadas durante toda la investigación, de autores reconocidos tanto a nivel nacional como internacional.

Los Anexos, refieren la encuesta desarrollada acorde al modelo educativo de van Hiele para la enseñanza del concepto de proporcionalidad entre áreas desde una perspectiva geométrica y respuestas dadas por los estudiantes partícipes en esta investigación.

1. CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

1.1. El papel de las matemáticas en el contexto educativo

Las matemáticas se caracterizan por su naturaleza lógico-deductiva, aunque es un proceso lento y laborioso, es uno de los pilares básicos de la sociedad y el estado para crear en los alumnos la capacidad de pensar, analizar, decidir y formar ciudadanos capaces de resolver situaciones con complejas responsabilidades profesionales. Los conocimientos matemáticos, presentan una particularidad, son de naturaleza abstracta, en los cuales para su enseñanza, es fundamental tener en cuenta los procesos de pensamiento y su desarrollo.

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) son referentes que orientan los procesos educativos en el área de matemáticas, que se desarrolla en la básica primaria y secundaria, lo cual ha permitido una nueva estructura y modificaciones al currículo de matemáticas, brindando pautas para abordar conocimientos matemáticos relacionados con los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven (MEN, 2006) ya que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, proporcionan privilegios y ventajas intelectuales a quien las desarrolla, con sus aptitudes y capacidades, lo cual resalta la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de los pensamientos matemáticos orientados en el MEN (1998), se considerada el pensamiento espacial y sistemas geométricos, constituido por elementos, operaciones y transformaciones, y las relaciones que existen entre ellas; la generalización de patrones aritméticos, fenómenos de variación y cambio, interpretación, análisis de relaciones funcionales como herramienta para la modelación y contextualización de diversos modelos que conllevan a la aplicación de conceptos de proporcionalidad y que pueden modelarse con un lenguaje técnico (modelos gráficos), que favorece la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales que son importantes en las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio y la ubicación, lo que constituye una herramienta de exploración y representación en el desarrollo del análisis matemático.

Por lo tanto, el enfoque de la matemática en el contexto escolar está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de conceptos y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos y su desempeño en la cultura para conseguir una vida sana, de esta forma, las matemáticas han estado ligadas a grandes creaciones y constituyen uno de los hilos conductores de la historia de las ideas y del pensamiento humano.

1.2. Contexto educativo (institucional)

La presente investigación se desarrolla en la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del municipio de Barbosa, ubicada en el extremo norte del Valle de Aburra; la cual hace parte del área metropolitana, ubicado a solo 36 kilómetros de la ciudad de Medellín. La institución, para el año 2016, cuenta con 1550 estudiantes, distribuidos en Preescolar, Básica primaria, Básica secundaria y media.

Además de la educación básica y media, tiene convenio con el Servicio Nacional de Aprendizaje - Sena, con el programa Técnico en Operación de Eventos. También, la gobernación de Antioquia en su programa “Antioquia digital”, certifica a la institución como Colegio Digital, por esto adjudica un equipamiento tecnológico, y cuenta con un aula abierta para el servicio de la comunidad, la cual es solicitada por los docentes de las diferentes áreas del conocimiento para el desarrollo de sus clases. Esta tiene como propósito educar, enseñar, informar y comunicar, para que los estudiantes amplíen sus conocimientos sobre otros medios de información, que propicien el aprendizaje autónomo, mediante las nuevas tecnologías.

Figura 1. Imagen tomada de:
http://www.ielear.edu.co/index.php?id=8693&idmenutipo=1040&tag=#4

La Institución Educativa cuenta con cuatro grupos de 40 estudiantes que cursan grado séptimo, la cual se atiende por profesorado, y para efectos de esta investigación permite en el área de Matemáticas centrarnos en las dificultades que presentan los estudiantes dentro del análisis del desarrollo del pensamiento matemático y geométrico, que tiene sus raíces desde la básica primaria hasta la básica secundaria en términos de desarrollo de competencias que se producen de forma gradual o integradamente, con el fin de superar algunos niveles de complejidad que se presentan a lo largo del proceso educativo.

La base de los procesos y procedimientos, análisis e interpretación de situaciones de la vida diaria, propio del desarrollo de las matemáticas en correspondencia con la geometría, son de gran dificultad en nuestros estudiantes para su comprensión al matematizar situaciones asociadas al concepto de proporcionalidad, la cual está directamente relacionada con múltiples situaciones de la vida diaria.

Como docente investigadora del área de matemáticas y de acuerdo a mi experiencia como docente, pretendo referenciar de manera general algunas dificultades que presentan los estudiantes en estos niveles de estudio, especialmente del grado séptimo:

- ✓ Algunos estudiantes no reconocen el concepto de proporcionalidad asociándolo a problemas en contextos geométricos.
- ✓ No tienen claridad en la relación entre objetos y su matematización.
- ✓ Los razonamientos que implican análisis y correlación entre variables y medidas tienen poco fundamento o simplemente no los identifican.

Las respuestas que dan los estudiantes ante cualquier situación planteada asociada con la proporcionalidad, no es clara, ya sea desde su fundamentación teórica o la forma de integrar las estructuras para su reconocimiento, quedándose corta la interpretación, el análisis y la valoración de parte del docente y de los estudiantes.

1.3. ¿Por qué enmarcar un estudio en el modelo educativo de van Hiele?

Dentro de la propuesta de renovación curricular planteada por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), se retoma la enseñanza de la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio; por lo tanto, el estudio de la geometría debe favorecer un gran número de interacciones por parte del alumno para reflexionar y razonar sobre propiedades geométricas abstractas ayudándose con figuras y símbolos, operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas, y la importancia de las transformaciones para la comprensión de dichas figuras.

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, según investigaciones preliminares sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico, indican una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, siendo esto motivo de preocupación al proceso de enseñanza en la escuela. En este sentido, se indica que el Modelo Educativo de Van Hiele, es la propuesta que parece describir la evolución de los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y que este a su vez adquiere mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a geometría escolar. La estructura para el aprendizaje de la geometría la propone van Hiele en cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, apoyado igualmente en cinco fases de aprendizaje, orientada a la didáctica en la que los docentes debemos ser más críticos y ubicar a los estudiantes en las posibles etapas de acuerdo a la capacidad de pensamiento y conocimiento para el progreso de un nivel a otro, considerado como un avance significativo a la hora de valorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Este modelo señala, dentro de la educación media, cómo los estudiantes comprendían los conceptos de geometría, por lo tanto, los esposos Dina y Pierre van Hiele en su libro titulado "Structure and Insight" (van Hiele, 1986), diseñaron un sistema que describe el proceso de comprensión en niveles de pensamiento que no se identifican con el desarrollo biológico del estudiante y que ayudan a secuenciar los contenidos cuando se abordan conceptos matemáticos que tienen un componente visual geométrico, teniendo en cuenta la experiencia de aprendizajes previos como factor principal para alcanzar un nivel más alto y las fases para una didáctica adecuada que facilita el paso de un nivel a otro donde concreta que *"alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos"* (van Hiele, 1986, p.289) lo que permite la adaptación en el currículo de Geometría.

La teoría del modelo educativo de van Hiele está diseñada para la didáctica de la matemática, especialmente para la geometría, aunque un modelo especifica pasos o procedimientos, no está sujeto a los comportamientos de los estudiantes para obtener el perfeccionamiento del mismo, cabe aclarar, que el modelo es independiente de cómo se produce el desarrollo intelectual o aprendizaje en el estudiante, pero sí ayuda a generar rutas o pautas para mejorar el método en la enseñanza y lograr resultados satisfactorios en el proceso, siendo una excelente guía para los profesores, lo que permite descubrir cómo el profesor se comunica con el estudiante para presentar nuevos conceptos que le sean comprensibles y genere aprendizaje en pro del desarrollo de la capacidad de razonamiento en sus estudiantes. Al aplicar un modelo no necesariamente se siguen las reglas dadas por él mismo, se sugieren rutas para su aplicación y se debe comprender los diversos factores que afectan el comportamiento y aprendizaje de las matemáticas.

Un aspecto que marca el modelo educativo de van Hiele, es la secuencia con que se maneja cada uno de los niveles y las fases que se deben aplicar en cada uno de ellos para generar un nuevo aprendizaje y avanzar a otro nivel superior, siendo relevante el dominio que el profesor tenga sobre el tema y la claridad en las actividades para cada uno de los niveles de comprensión de sus estudiantes.

Para la comprensión del modelo enunciamos algunos puntos esenciales que enmarcan los principios del modelo según Jaime A. y Gutiérrez, A. (1990):

- ✓ Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- ✓ Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- ✓ Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
- ✓ No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma. (p.305)

Además, es importante resaltar que, en la base de aprendizaje de la Geometría hay dos elementos importantes: el lenguaje utilizado, implica que los niveles van unidos al dominio del lenguaje, y la significatividad de los contenidos, es la asimilación de su razonamiento hasta que lo alcancen para introducir conceptos matemáticos nuevos.

Dentro del plan de estudios se consideran los estándares básicos de competencias en matemáticas orientados por el Ministerio de Educación Nacional, como un referente que permite orientar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la educación básica primaria y secundaria que, para el grado séptimo, se abordan los pensamientos: numérico, espacial y variacional (MEN, 2006, p.84-85). Para efectos de este estudio, el cual centra su interés en lo relacionado con la proporcionalidad, se pueden identificar como estándares asociados a este conocimiento matemático, los siguientes:

1. Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
2. Utilizo números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
3. Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, et.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
4. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
5. Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
6. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
7. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
8. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
9. Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
10. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
11. Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
12. Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
13. Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

14. Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
15. Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Teniendo en cuenta la importancia de la proporcionalidad en este nivel de estudio, se destacan que las propiedades de este conocimiento matemático están relacionadas con aspectos geométricos, inicialmente planteadas por Thales de Mileto (600 A.C.); en este sentido, el modelo educativo de van Hiele, es el que me permite analizar algunos aspectos asociados en relación a conceptos de naturaleza geométrica, que se pretenden realizar dentro del estudio en el contexto de la institución educativa.

1.4. Aspectos históricos de razón y proporcionalidad

Con el ánimo de recopilar hechos históricos relacionados con los conceptos de razón y proporción, son muchos los historiadores de las matemáticas y filósofos de las ciencias que relacionan dicho tema. La historia y trascendencia conlleva a diversos análisis y desarrollo de los conceptos a veces muy aislados, lo cual he pretendido organizar de manera secuencial con la intención de describir varias épocas de la historia lo más acorde posible que nos generan los conceptos de razón y proporción, así:

El más antiguo de los filósofos griegos presocráticos es Thales de Mileto llamado también el primer matemático de la historia, que vivió entre los años 640 y el 544 antes de Cristo. Aprendió la geometría de los egipcios y es tenido como uno de los 7 sabios de Grecia, escribió tratados sobre astronomía, se le atribuye haber descubierto el triángulo escaleno y que el triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo, además creador de la filosofía natural, predijo el eclipse de sol en el año 585 a.C., llegó a medir la altura de las pirámides de Egipto, por la sombra que proyectaban. Estos descubrimientos nos acercan a mirar que la geometría siempre ha estado aplicada a problemas de la vida cotidiana lo que nos permite prestarle importancia a la proporcionalidad como base para nuestro trabajo.

Thales escribió cinco teoremas geométricos, entre ellos uno que lleva su nombre "Teorema de thales", por considerarse que fue el primero en demostrar sus afirmaciones y utilizarlas para medir distancias siendo así considerado el primer matemático de la historia, sus teoremas se enuncian así:

Todo diámetro bisecta a la circunferencia.

Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Dos triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales son iguales.

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Veamos:

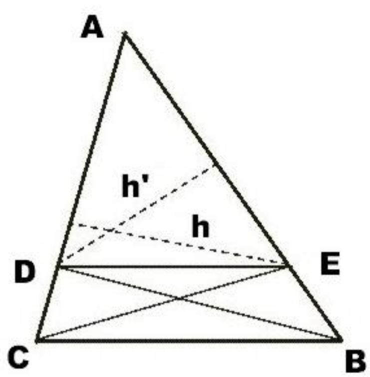


Figura 2. Imagen tomada de: https://www.google.com.co/search?q=tales+de+mileto&espv=2&biw=1024&bih=421&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ve

En la gráfica nos señala que los triángulos BED y CED tienen la misma área porque tienen la misma base y la misma altura. Para comprender este enunciado de la proporcionalidad, cabe aclarar que los triángulos, no son iguales, semejantes o congruentes, se habla de que son proporcionales.

En la llamada escuela pitagórica fundada por el filósofo y matemático griego Pitágoras, entre los años 580 y 500 a.C.se consideran grandes aportes en el campo de las

Matemáticas, Astronomía y la Geometría y Música; los pitagóricos estudiaron los números clasificándolos según sus propiedades, la clasificación de los ángulos en sus tres categorías, la concepción geométrica del espacio, además grandes descubrimientos como los tonos musicales se pueden expresar numéricamente, ya que los sonidos dependen del grosor, longitud, tensión y vibración de las cuerdas, lo que genera la relación entre la armonía de un tono y la proporción de lo que produce el tono, esto conlleva a la relación que producen las notas musicales que eran representadas mediante razones de números enteros.

Pitágoras fue el creador de las tablas de multiplicar y presta gran relevancia el teorema el cual lleva su nombre "Teorema de Pitágoras" que se enuncia: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los otros dos catetos"; sin este teorema no sería posible otros avances en la matemática ni en la geometría, ya que preocupados por demostrar la representación de los números sin notación algebraica adecuada, se tenían que inventar procesos geométricos que sustentaran problemas algebraicos, considerándose importante el descubrimiento de las identidades geométricas como productos notables, por lo tanto, los pitagóricos fueron los primeros en realizar las demostraciones matemáticas mediante razonamientos deductivos, las cual fueron escritas por Euclides.

En la época existía la teoría de las proporciones, pero con el surgimiento de la crisis por el descubrimiento de la inconmensurabilidad, llevó a los matemáticos griegos a replantear la teoría de la proporción de tal forma que se pudiera hablar de razón y proporción sin necesidad de especificar si las magnitudes eran inconmensurables o no; así mismo menciona Rusnock y Thagard (1995) diferentes conceptos ligados al mismo análisis como la construcción geométrica, la estructura lógica, la teoría de los números y la teoría de razón/proporción al problema de la inconmensurabilidad, "limitando la aplicación de la razón en geometría y reformulando la geometría tanto como sea posible sin el uso de la razón; o […] generalizar los conceptos de razón y proporción" (p.115), por lo tanto, la teoría euclidiana de las proporciones es considerada como una guía que se relaciona con hacer matemáticas y de comunicarlas, característico de la época.

De la tradición matemática occidental, en la época dorada de los griegos, representada fundamentalmente por Eudoxo de Cnido, Euclides y Apolonio, en la que Eudoxo, astrónomo griego, (llamado padre de la astronomía matemática, 400 A.C.) realizó grandes aportes a la astronomía y a la geometría, estudió el problema del continuo matemático, introdujo la noción de magnitud para trabajar con entidades continuas geométricas como líneas, ángulos, áreas y volúmenes, por lo tanto estableció lo que se ha considerado la primera organización deductiva de las matemáticas, como[1] "*…el objetivo del método deductivo era explicar. Explicar era demostrar. Para explicar, en cualquier ciencia, hay que partir de primeros principios. La estructura de una ciencia completa debía ser por tanto un sistema deductivo de enunciados. Esta organización, ya de carácter global, para el caso de la geometría quedó plasmada en los Elementos de Euclides….*" Dando como empatía los conceptos de razón y proporción como la base de la matemática griega, lo que se considera como la trascendencia de lo visual (Concreto) a lo abstracto, ya que Euclides estructura o axiomatiza y describe las proporciones separando lo aritmético de lo geométrico.

En la época del surgimiento de la geometría analítica, se hace uso de la teoría de las proporciones en la solución de problemas geométricos, a través de procedimientos analíticos.

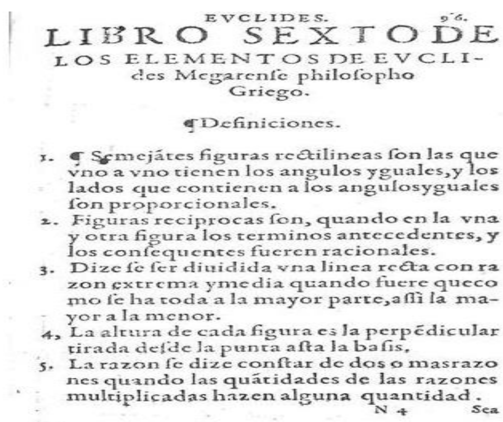
Otra época relevante es la del renacimiento donde la teoría de las proporciones sufre un cambio ampliando su aplicación a magnitudes no geométricas y relacionándolas con otras ciencias.

Con la creación del Cálculo fue sustituido el lenguaje de las proporciones y determinado por el lenguaje de las funciones, lo cual ocasionó una época de estancamiento al concepto de proporción.

[1]https://cuentos-cuanticos.com/2011/11/01/euclides-y-la-organizacion-deductiva/

Con el surgimiento de la construcción del conjunto de los números reales se hace evidente la teoría euclidiana para apoyar los trabajos realizados frente a este tema. (Matemático alemán Julius W.R. Dedekind y del matemático y filósofo GottlobFrege).

De acuerdo a las anteriores anotaciones se ha considerado de vital importancia la teoría euclidiana de la proporción en sus libros del V al X, se retoma el libro VI que contiene la teoría eudoxiana de la proposición a la geometría plana, dando relevancia para este trabajo, definiciones plasmadas en su libro original[2] como parte del tratamiento histórico y epistemológico para retomar los conceptos de razón y proporcionalidad.



EVCLIDES. 96.

LIBRO SEXTO DE
LOS ELEMENTOS DE EVCLI-
des Megarenſe philoſopho
Griego.

¶Definiciones.

1. ¶ Semejátes figuras rectilineas ſon las que vno a vno tienen los angulos yguales, y los lados que contienen a los angulosyguales ſon proporcionales.
2. Figuras reciprocas ſon, quando en la vna y otra figura los terminos antecedentes, y los conſequentes fueren racionales.
3. Dize ſe ſer diuidida vna linea recta con razon extrema ymedia quando fuere queco mo ſe ha toda a la mayor parte, aſſi la mayor a la menor.
4. La altura de cada figura es la perpẽdicular tirada deſde la punta aſta la baſis.
5. La razon ſe dize conſtar de dos o masrazones quando las quãtidades de las razones multiplicadas hazen alguna quantidad.

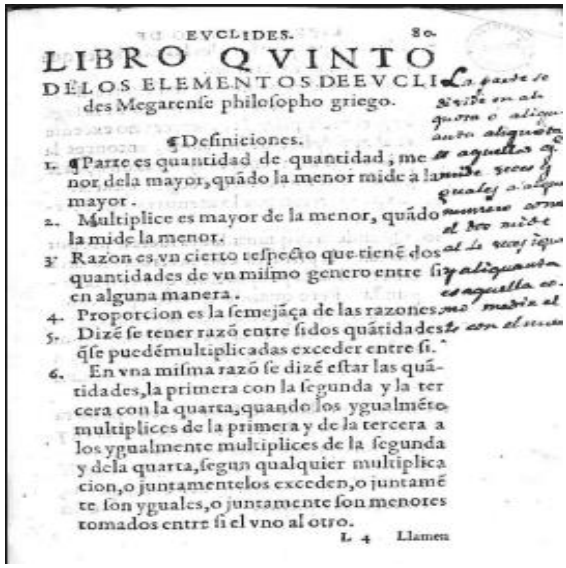
N 4 Sea

Figura 3: Libro VI de *Los elementos de Euclides*, Definiciones.

Dentro del análisis realizado se considera importante que en ninguno de los libros aparece el concepto de "razón" definido de forma clara y precisa, sólo el término aparece en el libro V como "*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*" (V, def.3) y que "*guardan razón entre sí, las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra*" (V, def.4) , lo que se deduce que no se concibe las razones como números, ni la proporción como igualdad entre razones, sólo "*guardar la*

[2] Tomado del libro original de:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Los_Elementos_de_Euclides_(1576)_-_Libro_VI.pdf

misma razón” (V, def.5), o de “*guardar una razón mayor”* (V, def. 7), ni operaciones entre razones, sólo se llevan con regla y compás al estilo de la época[3].



EVCLIDES. 80.

LIBRO QVINTO
DE LOS ELEMENTOS DE EVCLIdes Megarense philosopho griego.

¶Definiciones.

1. ¶Parte es quantidad de quantidad, menor dela mayor, quãdo la menor mide a la mayor.
2. Multiplice es mayor de la menor, quãdo la mide la menor.
3. Razon es vn cierto respecto que tienẽ dos quantidades de vn mismo genero entre si en alguna manera.
4. Proporcion es la semejãça de las razones.
5. Dizẽ se tener razõ entre si dos quãtidades q̃ se puedẽ multiplicadas exceder entre si.
6. En vna misma razõ se dizẽ estar las quãtidades, la primera con la segunda y la tercera con la quarta, quando los ygualmẽte multiplices de la primera y de la tercera a los ygualmente multiplices de la segunda y dela quarta, segun qualquier multiplicacion, o juntamente los exceden, o juntamẽte son yguales, o juntamente son menores tomados entre si el vno al otro.

L 4 Llamen

Figura 4. Tomada de original Libro V de Los Elementos de Euclides.

Solo en el libro VII aparece la razón entre dos números enteros positivos, dando un sentido entre magnitudes homogéneas, mientras que el producto de magnitudes carecía de sentido. Esto hace que exista la dificultad de aplicarse la teoría a las situaciones prácticas de la aritmética y por consiguiente, solo se encuentren aplicaciones al mundo de la física. Dentro de los elementos se encuentran algunas dificultades epistemológicas en algunas definiciones, lo que se señala solo hasta el siglo XVIII con la “restauración” de los elementos.

La idea griega reconoce a los números y las magnitudes como cantidades *no abstractas* asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general.

Para continuar con la fundamentación teórica, se deben retomar otras culturas diferentes a la griega que aportaron en la búsqueda de métodos generales de justificación

[3] Documento preparado como soporte al Cursillo con el mismo nombre, realizado en el marco del IX Coloquio Regional de Matemáticas en la universidad de Nariño, del 6 al 8 de marzo de 2008.

(no demostración), la cual está considerada dentro del arte matemático chino alrededor del siglo I d.C. teniendo en cuenta el desarrollo gradual de las antiguas matemáticas orientales en los períodos Zhou y Qín y los posteriores avances realizados en la Dinastía Hán hasta formar un sistema completo que trata de colecciones de problemas acompañados de una solución numérica o un enfoque práctico, escrito en forma de preguntas y respuestas y que consta de doscientos cuarenta y seis problemas dividido en Nueve Capítulos, considerado como el escrito más antiguo especializado que se conservaba y la obra con mayor influencia que sirvió de base para el desarrollo de las matemáticas.

Cabe mencionar dentro de la investigación sus tres primeros capítulos que hablan de:

Capítulo I: “Medición del terreno”, su tema central es el cálculo de áreas y una discusión sobre el cálculo con fracciones.

Capítulo II: “Alpiste y arroz”, trata de porcentajes y proporciones relacionados con estos cereales.

Capítulo III: “Distribuciones proporcionales”, se ocupa de la distribución de la propiedad y del dinero, donde se requiere de la proporcionalidad, como la aplicación de la regla de tres.

Según, menciona Algarra (2004)[4], algunos ejemplos sobre el tema de proporciones son: Distribuciones proporcionales: “Tenemos 5 piezas de caza y las tenemos que repartir entre oficiales de cinco rangos diferentes: 5, 4, 3, 2 y 1” (p.22). En “Justos impuestos” se estudia la recaudación de impuestos en proporción directa con el tamaño de la población de las provincias y en proporción inversa la distancia a la capital. En Exceso y defecto: Los problemas de este tipo son como el siguiente: Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarán 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedarán16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el coste de las gallinas?.

[4] “Las Matemáticas chinas” Algarra, María y otros, Octubre 2004.Recuperado de: http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

Estos y los demás capítulos dentro del arte matemático chino están ligados a aplicaciones de la vida real que reflejan la importancia en investigaciones de diferentes dinastías adquiriendo relevancia en Japón y Corea.

Estos aspectos históricos muestran que la proporcionalidad es un concepto discutido de hace mucho y que tienen innumerables situaciones en las que se encuentra relacionado. Cabe anotar que, su naturaleza es de carácter geométrica, sin embargo, actualmente la proporcionalidad se retoma desde su aspecto numérico, lo cual hace pensar que su comprensión podría mejorar si se retoma desde dicha naturaleza. Estos aspectos conllevan a identificar la naturaleza de este conocimiento matemático, con el propósito de estructurar una secuencia de actividades que permita observar el razonamiento de los estudiantes en este objeto de estudio; destacando la observación y comparación de áreas para establecer relaciones de proporcionalidad.

Basado en el rastreo de aspectos históricos de los conceptos de razón y proporción, se pudo dar cuenta de la importancia que revela la noción de ir adquiriendo facultades cognitivas que conllevan a procesos asociados a la observación, la reflexión y la experimentación aplicada al aprendizaje de las matemáticas y a la resolución de problemas que ponen de manifiesto unos principios y reglas para observar, recoger y analizar información desde el punto de vista matemático y geométrico, que contribuyan al alcance del objetivo de este trabajo de investigación.

1.5. Problema de Investigación

Cuando se aborda el tema de proporcionalidad entre áreas se presentan dificultades de comprensión, tanto en el lenguaje oral como escrito, ya que los estudiantes no evidencian tener claridad de las relaciones de los enunciados con la situación planteada. Otro aspecto relevante dentro de la problemática de comprensión del concepto de proporcionalidad entre áreas, que se refiere a la visión que tienen los estudiantes desde una perspectiva geométrica, ya que la enmarcan como el todo y no relacionan la proporcionalidad como una parte de la figura; de esta forma no razonan de manera clara frente a la situación planteada .

Al resolver situaciones de proporcionalidad entre áreas los estudiantes toman de manera aislada los conceptos sin relacionar la proporcionalidad y sin llevar una secuencia del proceso matemático.

Por lo tanto, para resolver situaciones de proporcionalidad entre áreas, son los profesores de estos Niveles los responsables de la enseñanza de las matemáticas y, así mismo, deben indagar sobre la forma en que los estudiantes comprenden conceptos y procesos matemáticos, lo cual se logra "a través de: reconocimiento de ejemplos y contraejemplos; uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representarlos…" (MEN, 1998, p. 77).

Es cierto que a través del razonamiento proporcional se pueden modelar situaciones que involucran al estudiante a realizar operaciones desde diferentes niveles de igualdad como equivalencia entre números o razones entre números, equivalencia entre expresiones de números o unidades de medida, transformaciones o manejar diferentes variables, lo que implica confusión o mala interpretación de los conceptos y generalización entre ellos.

Dentro de la enseñanza de las matemáticas y de la geometría, se considera un aspecto importante como los estudiantes no alcanzan a comprender acerca de las ideas claves en su representación, su simbología y su interpretación, lo que permite dentro de esta investigación aplicar el modelo educativo de van Hiele para determinar los niveles de razonamiento que poseen los estudiantes teniendo en cuenta las fases de aprendizaje planteadas por el modelo y que estén en correspondencia con los lineamientos curriculares bajo tres perspectivas:

- ✓ La formativa (potenciar estructuras intelectuales, generar capacidades científicas como observación, interpretación, síntesis y valoración) ,

- ✓ La Instrumental (Herramienta útil para interpretar, conocer y hacer frente a las necesidades que se le plantean a los estudiantes en estudios posteriores).
- ✓ Fundamentación teórica (al cuerpo de conocimientos mediante definiciones, demostraciones y adquirir rigor en el pensamiento científico), por lo tanto, se hace necesario conocer las relaciones proporcionales entre áreas en un contexto geométrico, lo que se considera como un objeto de estudio.

1.6. Pregunta de investigación

¿Cuál es el nivel de razonamiento relacionado con la proporcionalidad en el marco del modelo educativo de van Hiele que poseen los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel?

1.7. Objetivos

1.7.1. General

Identificar el nivel de razonamiento con respecto a las relaciones proporcionales entre áreas, que presentan los estudiantes, en correspondencia con el modelo educativo de Van Hiele.

1.7.2. Específicos

Describir los razonamientos de los estudiantes bajo descriptores previamente establecidos en correspondencia con las características de los niveles del modelo educativo de van Hiele.

Establecer las regularidades de los razonamientos a través de descriptores que estén en correspondencia con los niveles del modelo educativo de van Hiele y el concepto de proporcionalidad entre áreas.

2. CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Modelo educativo de van Hiele

Este modelo educativo tiene su origen en el año 1957, diseñado principalmente para la Enseñanza y Didáctica de las Matemáticas y en especial de la Geometría; fue planteado por los esposos Holandeses Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele para su tesis Doctoral orientada por Hans Freudenthal.

Los esposos van Hiele, profesores de matemáticas de educación media, no comprendían cómo sus estudiantes entendían los conceptos geométricos que el docente les planteaba y resolvían problemas de forma rutinaria, pero no sabían aplicarlos en otros contextos, lo que les permitió diseñar un sistema de niveles de pensamiento en geometría y, Dina van Hiele enfocó sus estudios en el progreso de los niveles de pensamiento de los estudiantes (Hoffer, 1983).

De acuerdo con Jaime (1993), citado por Vargas y Gamboa (2013), el modelo propuesto por los van Hiele abarca de manera general, dos aspectos importantes dentro de su estructura:

- **Descriptivo:** mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.
- **Prescriptivo:** marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

En el campo de la geometría surge el modelo de van Hiele, el cual proporciona una descripción de los procesos de pensamiento para el progreso de los estudiantes que transcurre por una serie de niveles de razonamiento, lo que favorece el proceso de enseñanza de las matemáticas.

Y el avance en el aprendizaje que un estudiante adquiere en su proceso de formación, implica que ningún nivel de razonamiento es independiente de otro, y se debe realizar de manera continua de acuerdo a los conocimientos adquiridos, secuenciales y ordenados.

Según Jaramillo y Esteban (2006), afirman que cada nivel supone una forma de comprensión; una forma de pensamiento que cada estudiante asimila de acuerdo a su nivel de razonamiento en la manera de comprender y razonar el concepto matemático, por lo tanto, se debe dominar un nivel para subir al siguiente.

Este modelo fue elaborado por los van Hiele a través de 5 niveles, los cuales, algunos autores etiquetan como niveles del 0 al 4 y otros como 1 a 5. Para este estudio se interpretan los niveles del 0 al 4 según Jaramillo y Esteban (2006), así: nivel 0: básico o predescriptivo; nivel I: de reconocimiento o visual; nivel II: de análisis; nivel III: de clasificación y nivel IV: de deducción formal, que serán definidos más adelante en los descriptores de nivel.

En este sentido, la presente investigación se centrará en el aspecto descriptivo del modelo, el cual intenta explicar cómo razonan los estudiantes cuando adquieren un concepto matemático como la proporcionalidad que conllevan al estudiante a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la integración de la visualización, la conceptualización, para que comprendan de manera ordenada y sencilla los conceptos previos de una situación geométrica que provea de grandes posibilidades de exploración, análisis y formulación de conjeturas, y se apropien del nivel de razonamiento que se encuentran para poder pasar a otro nivel superior.

Según Vargas y Gamboa (2013), el modelo de van Hiele ayuda a explicar cómo, en el proceso de enseñanza de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles, en los cuales se deben cumplir ciertos procesos de aprendizaje para lograr pasar de un nivel a otro superior, además, plantea que debe ser de forma escalonada distribuidos en cinco niveles secuenciales y ordenados sin tener la posibilidad de saltarse ninguno.

Esto además conlleva a dominar cada nivel consiguiendo un grado de comprensión y conocimiento del área cada vez mejor, lo que involucra conceptos con un alto componente visual geométrico.

Según Jaramillo y Esteban (2006), se describen a continuación los cinco niveles cada uno con su caracterización desde la perspectiva de aprendizaje de los estudiantes con respecto a conceptos de la geometría.

Nivel 0: básico o predescriptivo

En este nivel se perciben los objetos geométricos sin diferenciar atributos esenciales, sólo se reconocen y se comparan con los del entorno, no se reconoce ningún lenguaje geométrico llamado por su nombre, las descripciones son solamente visuales.

Nivel 1: de reconocimiento o visual

En este nivel el estudiante puede reconocer cada uno de los objetos y describir componentes y propiedades del mismo, pero no relacionarlas con otras figuras; concibe los componentes y las propiedades de las figuras desde la observación y la experimentación sin clasificarlas.

Nivel 2: de análisis

Alcanzar este nivel significa que se describen las figuras y se nombran propiedades del objeto, se realizan clasificaciones lógicas ya que el nivel de razonamiento matemático se lo permite, esto significa que al reconocer unas propiedades las asemeje a otras, construyendo interrelaciones entre figuras lo que conlleva a entender el significado de las definiciones; aunque se siguen las demostraciones no se entienden en su estructura, es capaz de seguir pasos individuales pero no asimilarlos en su globalidad, esto impide que el estudiante no pueda realizar razonamientos lógicos ni comprenda la naturaleza axiomática de la geometría.

Nivel 3: de clasificación

En este nivel existen justificaciones más precisas para demostrar, deducir y justificar las proposiciones planteadas; se comprende y manejan las relaciones en sistemas axiomáticos, dando claridad a la naturaleza de la geometría.

Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado. Además, se entiende en este nivel que el estudiante ha alcanzado un nivel de razonamiento alto, ya que sabe con claridad desarrollar secuencias de proposiciones para alcanzar un resultado satisfactorio.

Nivel 4: de deducción formal

Este último nivel capta la geometría de forma abstracta, por lo tanto es considerado de naturaleza teórica ya que no presenta ejemplos concretos para trabajar la geometría. El estudiante conoce la existencia de diferentes axiomas de la geometría y se le exige un grado de profundización el cual está capacitado para analizar varios sistemas deductivos y compararlos entre sí, de tal manera que sus razonamientos sean formales.

La estructura de los niveles de razonamiento planteada por los esposos van Hiele, permite describir la manera en que un estudiante razona en relación a determinados conceptos matemáticos, por lo tanto, en el modelo de razonamiento de van Hiele es posible observar la concordancia que poseen los diferentes niveles entre sí, lo que hace que sean secuenciales y que un individuo no puede saltarse ningún nivel de razonamiento.

Teniendo en cuenta el grado de escolaridad en el que se desarrolla la investigación sólo se retoma del modelo hasta el nivel 3 que corresponde al de clasificación, dado que se considera pertinente esta estructura para caracterizar la manera como los estudiantes de grado séptimo razonan con respecto a la proporcionalidad entre áreas.

2.2. Características del modelo

En el modelo de van Hiele es necesario identificar algunas características esenciales que se relacionan con la manera de asimilación de conceptos y razonamientos de la concepción visual en cada uno de los niveles y que son significativas e inherentes al docente para impartir instrucciones y que le permitan aplicar una estrategia en la que el estudiante comprenda de manera fácil y clara, además, que pueda progresar en los niveles de pensamiento para así mejorar su proceso de comprensión de la geometría; entre ellos están:

Secuencial: Como todo proceso de desarrollo, para pasar de un nivel a otro siempre se debe haber adquirido un orden específico, por lo tanto los procesos funcionan con éxito de forma secuencial.

Progresivo: El paso de un nivel a otro depende de la instrucción y contenido asimilado, lo que permite a un estudiante el progreso o paso a otro nivel, independientemente sin considerar la edad.

Según este modelo, van Hiele señala la posibilidad de enseñar a un estudiante un tema específico sin definir el concepto de manera que adquieran habilidades por encima de su nivel actual; como por ejemplo en aritmética hablar de fracciones sin decir qué significan las fracciones.

Además, para comprender el modelo (Beltrametti, Esquivel y Ferrarri, 2005; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez 1990)[5] es necesario tener en cuenta las siguientes características:

[5] Citado por Vargas, G. y Gamboa, R, (2013). Revista UNICIENCIA Vol.27.N.1.

Recursividad: Lo que fundamenta el paso a otro nivel son las estrategias y asimilación de un nivel actual, esto permite que su nivel de comprensión asuma la posición de otro nivel superior.

Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), afirma que "(…) el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel" (p. 14).

Secuencialidad: Todo nivel de razonamiento debe tener conocimientos del nivel anterior, lo que permite avanzar de forma ordenada a otro nivel secuencial, teniendo en cuenta haber superado las dificultades anteriores; así mismo, afirma van Hiele que la edad no es un factor determinante para avanzar a un nivel superior.

Especificidad del lenguaje: En el avance del aprendizaje de la geometría cada nivel debe tener un lenguaje apropiado y van unidos a su vocabulario y al significado de los contenidos que sólo van a asimilar aquello que va acorde con su nivel de razonamiento, por lo que se deben ajustar a cada nivel de razonamiento de los estudiantes.

Continuidad: Debe existir una continuidad de los niveles para que el estudiante pueda asociar conceptos y asimilar cada paso de forma eficaz, lo que puede tardar varios años en pasar de un nivel a otro.

Localidad: Se refiere a que una persona puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría, esto hace que no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento para un concepto específico; pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría será más fácil asimilar ese mismo nivel para otros conceptos.

Dentro de las características del modelo debemos tener claro, según Fouz y de Donosti la "*jerarquización"*, el orden en los niveles no se puede alterar lo que indica que "*lo que es implícito en un nivel se convierte en explícito en el segundo nivel",* (p.70-71).

Se puede dar más claridad de acuerdo a la siguiente tabla sin tener en cuenta el último nivel.

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	**ELEMENTOS IMPLÍCITOS**
NIVEL 0	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

La segunda característica es *"el lenguaje"* específico para cada nivel de acuerdo al progreso en cada uno y necesario para el aprendizaje, lo que refleja dentro de esta investigación la importancia de comprensión de los conceptos que los ubica en un nivel específico.

La tercera característica radica en determinar si el aprendizaje para el paso de un nivel a otro, se hace de una manera *"continua o discreta"*.

2.3. Descriptivo, niveles de razonamiento

En este modelo se pueden describir aspectos que están relacionados con el "aprendizaje" desde las distintas formas de razonamiento geométrico que poseen los estudiantes desde los primeros años de escolaridad en su análisis visual de descripción de figuras geométricas, hasta la manera de mirar como es el progreso individual de su capacidad en su razonamiento[6] visual para evaluarlo desde de la perspectiva geométrica, lo que es considerado dentro de este modelo como diferentes niveles de razonamiento.

Uno de los elementos fundamentales en investigación centra su evolución en la visualización espacial que poseen los estudiantes mediante la abstracción y el uso de la lógica de acuerdo a formas sistemáticas y movimiento de los objetos físicos, lo que permite tener claridad al momento de razonar, cómo obtener esas representaciones mentales que son consideradas en los procesos de evaluación y comprensión de las capacidades para realizar las tareas que requieren ver o imaginar objetos geométricos espaciales, realizar transformaciones y relacionar estos objetos con la información bi o tridimensional y poderla describir y analizar desde la concepción matemática en cada uno de los niveles de comprensión.

2.4. Prescriptivo, fases de aprendizaje

Este modelo, enmarca desde la "didáctica" de la geometría un aspecto relacionado con las pautas que debe seguir un profesor para tratar de conseguir un buen nivel de razonamiento geométrico en sus estudiantes, que evidencie la comprensión de los conceptos y favorezca su aprendizaje en el afán de poder superar y alcanzar niveles de razonamiento más altos cada día, por lo tanto, en esta práctica se ha intentado precisar el concepto de representación dentro del proceso de comprensión de objetos matemáticos. (Janvier, 1987; Kaput, 1991; Duval, 1995; Brown, 1996).

Según Font (2001) plantea que *"Parece haber acuerdo en que las representaciones matemáticas externas – ostensivas – influyen en el tipo de representaciones internas – no ostensivas – que construye el sujeto y, recíprocamente, el tipo de representaciones internas que posee una persona determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar";* como complemento a esta teoría se quiere señalar que la geometría permite la

[6] Conjunto de actividades mentales consistentes en conectar unas ideas con otras de acuerdo a ciertas reglas, o en un sentido amplio, se entiende por razonamiento la facultad humana que permite resolver problemas.(EcuRed, junio 22 e 2016)

posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos se lleven a una forma de representación espacial para obtener más comprensión y mejor conceptualización del estudio en contexto, que conecta una mejor aplicación de la didáctica en geometría, lo que se ha denominado las fases de aprendizaje.

Dentro de los estudios realizados para describir el modelo de van Hiele dentro del marco teórico de mi investigación, se han precisado elementos importantes para el desarrollo y aplicación de teoría:

✓ En cuanto a estudiar con claridad las diferentes etapas que se presentan para la perfección en el razonamiento que deben adquirir los estudiantes para una mejor comprensión dentro del estudio de la matemática.

✓ La compresión que adquieren los estudiantes tiene su evolución desde la dinámica que el profesor extiende y le permita al estudiante entender los conceptos y relacionarlos en su vida de acuerdo a su percepción y nivel de razonamiento individual.

✓ Se debe entender que cada persona razona de forma diferente y que nuestros estudiantes también tienen ritmos de aprendizaje diferentes, lo que considera que es el docente el que busca la forma que permita ayudar a entender y alcanzar un nivel de razonamiento superior con una enseñanza adecuada a su nivel de comprensión.

Dentro de las características del modelo, los van Hiele propusieron dentro del aspecto prescriptivo cinco fases de aprendizaje que guían al docente cómo organizar las actividades dentro del marco de una adecuada enseñanza aprendizaje para propender el progreso de los estudiantes de un nivel a otro.

Conviene aclarar que van Hiele enfatiza en que: *“el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez”*, lo que permite ayudar a la organización del proceso de enseñanza y conlleva a generar experiencias de aprendizaje para pasar a un nivel de razonamiento superior.

Las fases de aprendizaje que postulan en su modelo son cinco: fase 1, Información; fase 2, Orientación dirigida; fase 3, Explicitación; fase 4, Orientación libre; fase 5, Integración. A continuación se realiza una descripción de cada una de ellas.

Información

Es la primera parte donde los estudiantes deben conocer de su profesor los temas que se van a trabajar, que tipo de problemas se van a plantear y materiales a utilizar, igualmente, los estudiantes tendrán un primer acercamiento sobre conocimientos básicos para ser aplicados al trabajo matemático propiamente dicho; reconocen y aprenden la utilidad de los materiales y conceptos para verificar el nivel de razonamiento y qué saben del mismo.

Orientación dirigida

Es la fase donde los estudiantes empiezan a explorar el material proporcionado con el fin de que descubran, comprendan y aprendan relaciones, propiedades, conceptos, etc., del tema que están tratando de manera que los conceptos y estructuras se presenten de forma progresiva. También se considera de vital importancia la manera que el docente busque las herramientas y aplique las estrategias adecuadas para una mejor asimilación y relación del tema.

Según van Hiele (1986): *"las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior"* (p.10), esto conlleva a los estudiantes a unos resultados satisfactorios que favorecen el progreso de cada uno de los niveles.

Explicitación

Denominada fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias), donde el estudiante comenta y explica su experiencia de acuerdo a lo observado y realizado, la vivencia que ha obtenido para sacar conclusiones y confrontarlas con sus compañeros, corregir el lenguaje requerido para el nivel, ordenar ideas y expresarlas de tal manera que justifiquen un análisis comprensivo.

Orientación libre

Esta fase se considera como la consolidación del aprendizaje, donde aparecen actividades más complejas que se refieren a la aplicación de los conceptos adquiridos para relacionarlos con otro contexto, para ser aplicados y perfeccionarlos de forma tal que se combinen adecuadamente para llegar a una solución eficaz. Se considera el planteamiento del problema de diversas formas para que el estudiante busque la manera de resolverlo aplicando los conceptos adquiridos.

Integración

En esta fase no se trabajan contenidos nuevos, se trata de sintetizar los conceptos adquiridos y compararlos o sustituirlos por los que ya tenía. Esto nos refleja una estructura más acorde para el nivel de razonamiento establecido actual, que además, los estudiantes se puedan integrar en actividades de recuperación para aquellos estudiantes que no hayan adquirido conocimientos geométricos acordes al nivel, o como una actividad de evaluación.

El paso por cada una de estas fases y la observación de las mismas, potencia en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

2.5. El Insight y la red de relaciones

El modelo de van Hiele considera que el paso de un nivel al siguiente se produce mediante una red de relaciones que se crea cuando se incorporan nuevos conceptos a los que se tiene en un momento dado, por lo tanto se relaciona con la transformación de las estructuras mentales en otras nuevas que permiten mejorar su aprendizaje para adquirir un nivel avanzado de pensamiento; por lo tanto, afirma que sin la existencia de una red de relaciones el pensamiento es imposible (van Hiele, 1986, p. 50). El sentido común es comprender las cosas en sus relaciones.

La estructura aborda concretamente la regularidad en el funcionamiento de un esquema, como el conjunto ordenado de relaciones que lleva a conclusiones explícitas de que si no funcionan, no existen; así mismo, el individuo no elige si desea comprender, está obligado, no por su propia decisión sino por su naturaleza a un comportamiento inteligente. El progreso consiste en una realización de ciertas ideas, lo cual conduce a la realización de otras hasta que todo un conjunto coherente sea concretamente eficaz.

Según Jurado y Londoño (2005): [7] "En la psicología Gestalt se puede encontrar la siguiente proposición: "Estamos seguros de insight cuando la persona que se está estudiando se encuentra con una conclusión a causa de una estructura mental". Van-Hiele en su disertación, Concepción e insight de 1957 escribió: "El insight existe cuando una persona actúa adecuadamente en una nueva situación y con intención" (p.16).

Para el desarrollo de este trabajo se analiza la red de relaciones que cada estudiante tiene sobre la proporcionalidad entre áreas, en el momento que se indague por cada uno de los conceptos y la manera de transformar ese conocimiento para producir y actuar frente a las decisiones de manera que se pueda identificar la estructura mental que se tiene y el nivel de razonamiento que se adquiere; por lo tanto, la construcción de la red se facilita mediante mecanismos de visualización geométrica, verbales o escritos.

2.6. Descriptores de nivel

Los descriptores de nivel permiten describir el proceso de razonamiento que posee un estudiante cuando resuelve situaciones que implican conceptos con un alto componente

[7] Trabajo de investigación de maestría enmarcado en el proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite".

visual geométrico. Estudios posteriores han extendido el modelo educativo a conceptos del análisis matemático, construyendo y consolidando descriptores haciendo una adaptación para el área de geometría, logrando una ampliación de éstos.

Según Matsuo (1993) el nivel de razonamiento lo ha relacionado con la consistencia entre la definición de un concepto, la imagen de ese concepto y la elección de ejemplos del mismo, lo cual nos permitirá tener en cuenta los procesos de razonamiento matemático, los procesos de demostración y la visualización.

Además, Gutiérrez y Jaime (1998) citado en Venegas, M (2015) identifican una serie de procesos de razonamiento clave, como características de todos los niveles de Van Hiele:

- Reconocimiento de los tipos y de las familias a la que pertenece la figura geométrica. Identificación de componentes y propiedades de las figuras.
- Definición geométrica de un concepto, visto bajo 2 puntos de vista: la lectura o uso de las definiciones, y la formulación de la definición.
- Clasificación de las figuras geométricas o conceptos en diferentes familias.
- Prueba de propiedades o estados. Se trata de determinar de manera convincente la veracidad del estado. (p.7).

Las características de los procesos clave correspondientes a cada uno de los niveles se resumen en la tabla siguiente:

Matriz de atributos distintivos de los procesos de razonamiento de cada uno de los niveles de van Hiele descritos por Gutiérrez y Jaime (1998)

PROCESOS	RECONOCIMIENTO VISUAL	ANÁLISIS	CLASIFICACIÓN	DEDUCCIÓN FORMAL
RECONOCIMIENTO Y DESCRIPCIÓN	Atributos físicos(posición forma, tamaño)	Propiedades matemáticas		
USO DE DEFINICIONES		Definiciones con estructura simple	Definiciones con estructura matemática compleja	Aceptar definiciones equivalente
FORMACIÓN DE DEFINICIONES	Listado de propiedades Físicas	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Prueba la equivalencia de definiciones
CLASIFICACIÓN	Exclusiva basado en atributos físicos	Exclusiva basado en atributos matemáticos	Clasificar con diferentes definiciones exclusiva e inclusiva	
DEMOSTRACIÓN		Verificación con ejemplos Demostraciones empíricas	Demostraciones lógicas e informales	Demostración matemática formal

Como se observa en la tabla, no todos los niveles presentan todos los procesos clave. Está evaluado desde el nivel 1 sin tener en cuenta el nivel 0 (Jaime & Gutiérrez, 1994)

De acuerdo al planteamiento anterior y considerando el desarrollo de la presente investigación, se presentan los descriptores de nivel desde el 0 hasta el 3 que fueron elaborados y diseñados para efectos de esta investigación y que serán caracterizados dentro de los razonamientos de los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel dentro del concepto de proporcionalidad entre áreas. El nivel 4, de deducción formal no se tendrá en cuenta para efectos de este estudio ya que los esposos van Hiele afirman que es de difícil detección, debido a que los estudiantes de grado séptimo por lo general, aplican reglas sin reflexionar acerca del uso que les estén dando, por lo tanto no se considera a la población como pensadores proporcionales, lo que implica alejarnos del propósito para el cual se efectúa esta investigación; además se podrá considerar, hacer un seguimiento y análisis del razonamiento proporcional a estudiantes que posean este nivel.

Los descriptores para este trabajo de investigación se plantearon en una primera oportunidad de acuerdo a las características del modelo educativo de van Hiele, diseñando un test de preguntas asociadas al concepto de proporcionalidad entre áreas y agrupadas en bloques de acuerdo a la jerarquización en los niveles de razonamiento del modelo y profundización del concepto objeto de estudio, de la siguiente manera: Las preguntas de la 1 a la 5 se clasificaron de acuerdo a la aproximación del concepto de área, teniendo en cuenta la identificación, reconocimiento y representación del área de una figura; las preguntas de la 6 a la 11 reconocen, establecen y comparan figuras por sus atributos; el siguiente bloque corresponden a las preguntas de la 12 a la 17 refiere al concepto de razón entre áreas y se concluye con las preguntas de la 18 a la 20 en la identificación y reconocimiento de la proporcionalidad entre áreas.

A los estudiantes se les aplicó la actividad la cual permitió que se refinaran algunas preguntas debido a la poca claridad que se tenía de ellas no siendo explícita la misma, la cual los mismos estudiantes encontraron dificultades para abordarla y replantearse nuevamente.

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se busca la aproximación al reconocimiento del concepto sobre área o identificación de los conocimientos previos sobre áreas grandes y pequeñas y su representación.

- ✓ Identifica y reconoce el concepto de área en una figura.
- ✓ Reconoce cuándo una figura representa áreas diferentes.
- ✓ Representa gráficamente el área de una figura.

Nivel 1: De reconocimiento visual

Se trabaja el concepto de áreas permitiendo la comparación entre diferentes figuras para determinar la razón entre ellas.

- ✓ Representa simbólicamente el área de una figura.
- ✓ Reconoce la igualdad entre razones.
- ✓ Compara mediante atributos físicos el área entre figuras.
- ✓ Reconoce el número de veces que una figura está contenida en otra, aplicando el concepto de área.

Nivel 2: De análisis

El estudiante establece la razón entre áreas, a través de la comparación entre sus medidas y utiliza la propiedad fundamental.

- ✓ Establece la razón de acuerdo al número de veces que una figura está contenida en otra.
- ✓ Establece la razón entre dos áreas divididas en M partes iguales y las expresa simbólicamente.
- ✓ Reconoce la razón entre dos áreas.
- ✓ Identifica características relacionadas con la propiedad fundamental para reconocer las relaciones proporcionales presentes en dichas áreas.
- ✓ Utiliza definiciones con cualquier estructura que permite realizar comparaciones entre áreas.

Nivel 3: De clasificación o red de relaciones

Se analizará en este nivel, la relación de equivalencia que cumplen las razones entre áreas, apoyados en las propiedades para establecer la proporcionalidad entre ellas.

- ✓ Identifica la relación de equivalencia de las razones entre áreas.

- ✓ Reconoce las propiedades de la proporcionalidad y las aplica.
- ✓ Diferencia y justifica la proporcionalidad con argumentos propios con respecto a áreas de figuras.
- ✓ Reconoce la proporcionalidad entre áreas de figuras divididas entre M partes iguales.

2.7. Razón y proporción

Los conceptos de razón y proporción siempre han estado presentes a través de la historia del mundo que rodea al hombre donde surge inicialmente la necesidad en la astronomía y otras ciencias, como la física, la química, la biología, etc. al no poder medir directamente distancias, buscan la forma de compararlas, también para poder expresar relaciones numéricas, trabajar con índices, constantes o tasas.

Por lo tanto, dentro de la enseñanza y aprendizaje de la matemática existe una gran dificultad ya que los estudiantes se enfrentan a diferentes situaciones que deben resolver por medio de la complejidad numérica, tipos de magnitudes asociadas, representaciones geométricas, etc., lo que constituye una barrera en el aprendizaje que confunde de manera significativa ante los diversos conceptos u obstáculos en la comprensión de los contenidos y que guardan relación con la proporcionalidad.

Se considera importante señalar el concepto de razón y proporción para nuestro estudio y la comprensión del paso a la visión geométrica.

Razón

El concepto de razón o razón matemática[8], "es un vínculo entre dos magnitudes[9] que son comparables entre sí" que resulta cuando una de las magnitudes o cantidades se divide

[8] Recuperado de: Definición de razón matemática - Qué es, Significado y Concepto http://definicion.de/razon-matematica/#ixzz4EdeXQo1I

o se resta con otra, además suelen tener distintas interpretaciones ya que pueden expresarse como fracciones o como decimales, aunque el término no siempre es una fracción por lo que se presentan dificultades que confunde a los estudiantes en su concepto.

Es el paso de comparar dos cantidades mediante operaciones matemáticas por medio de una diferencia a – b o por medio de un cociente a/b, donde $b \neq 0$.

Así, la edad de un padre de 36 años y la de su hijo es de 12 años. Para saber en cuanto excede la edad del padre a la del hijo entonces haríamos una resta 36 – 12 = 24. Cuando comparamos dos cantidades a través de la resta entonces la llamamos Razón Aritmética; por otro lado si quisiéramos saber cuántas veces contiene la edad del padre a la edad de su hijo tendríamos que hacer una división así: 36 / 12 =3 esto significa que la edad del padre es el triple de la edad de su hijo, comparamos dos cantidades a partir de su cociente, lo que se llama Razón Geométrica.

Hoffer[10] (1983), menciona la diferencia entre fracción y razón; las fracciones son "*cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"* y razón es "*un par ordenado de cantidades de magnitudes*", lo que constituye una gran diferencia entre varios aspectos como:

Las razones se escriben con símbolos diferentes a las fracciones, comparan objetos que se miden con unidades diferentes, el segundo componente puede ser cero, no siempre se escriben como números racionales por lo que las operaciones no se realizan como las fracciones.

En una razón geométrica cualquiera, los números que la forman reciben los nombres de: el primero *antecedente* y el segundo *consecuente*, y se pueden escribir de dos modos:

1º) En forma de fracción

2º) En forma de división

[9] Propiedad de un objeto que se puede medir o cuantificar; este concepto se explicará en el siguiente ítem.
[10] Citado en: Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*.

Así: ¾ o 3: 4 (tres es a cuatro)

Además cabe aclarar que las propiedades de una razón geométrica, serán las mismas de una fracción.

EQUIVALENCIA ENTRE LOS TÉRMINOS

Fracción…………………………..Cociente……………………..….Razón

Numerador…..……………………Dividendo……………………..Antecedente

Denominador……………....……Divisor………………………...Consecuente

Representación gráfica:

1 : 2

1÷2

0,5 $\frac{1}{2}$

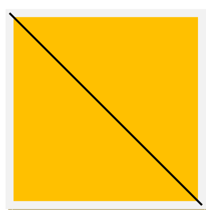


Figura elaborada por la autora.

Teniendo en cuenta el propio significado de razón según Freudenthal (2001) citado por Fiallo, J. (2010) se puede argumentar como igualdad de razones sin conocer el tamaño de la razón, el cual plantea su teoría referida a objeto mental que requiere un nivel de desarrollo considerablemente alto. Además, el estudiante adquiere un tratamiento de la razón con el concepto de congruencia y semejanza como una equivalencia operativa que se aleja de la percepción óptica, lo que influye en su construcción de conocimiento si no existe una familiaridad del tema a temprana edad. Son varios los criterios que se deben tener en cuenta tanto para la conservación de la razón como para la formación del objeto mental semejanza, como: igualdad, longitudes, congruencia, razones internas, razón externa, conservación de los ángulos y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios *“Para construir un puente de razones no visuales a razones visuales, la visualización estricta por semejanza ha de ser debilitada*” (Freudenthal, 2001, p. 84).

Magnitud

Es la propiedad de un objeto que podemos medir o cuantificar, como la longitud de una pared, la temperatura, el peso de una persona, la velocidad de un auto, el volumen que ocupa un cuerpo.

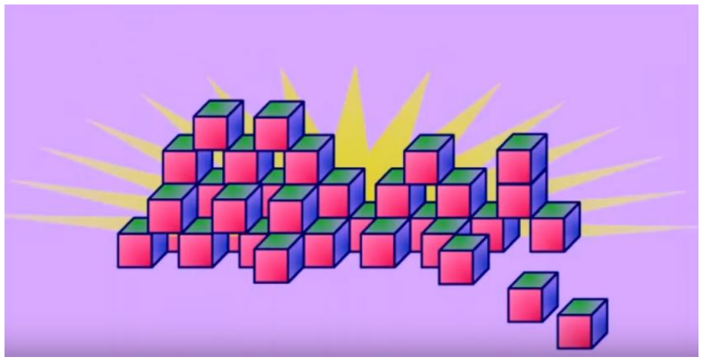


Figura 5. Imagen tomada de https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4

Cuando se comparan dos magnitudes homogéneas, existe una relación o razón entre ellas, como la velocidad y el tiempo, la amplitud de un coche y el número de personas que caben, comparar la relación entre diferentes segmentos, comparar las áreas entre dos figuras geométricas diferentes, entre otras.

Magnitudes directamente proporcionales

Se presenta este concepto a partir de la relación entre dos magnitudes de tal forma que cuando una cantidad se duplica, triplica, cuadruplica, las otras cantidades respectivamente; igualmente si se reduce a la mitad, a la tercera, a la cuarta, sus correspondientes en las otras magnitudes, también tienen el mismo comportamiento. Se puede decir que la razón directa de los valores en cualquiera de una de las magnitudes, es igual a las razones directas de los valores correspondientes en las otras magnitudes. Algunos ejemplos son: El número de artículos y el valor de los mismos, el salario de un obrero y el tiempo durante el cual trabaja, el perímetro de los polígonos con la longitud de los lados, y el área de figuras geométricas con la longitud de los segmentos que la determinan.

Al dividir dos magnitudes directamente proporcionales siempre se presenta un valor constante llamado Razón de proporcionalidad. Ejemplo: 6/3 = 12/6 = 18/9 donde cada razón es igual a 2.

Magnitudes inversamente proporcionales

Se presenta el caso contrario al anterior, al duplicar, triplicar, una la otra disminuye a la mitad, la tercera parte, etc. En este caso, la razón directa de los valores en cualquiera de las magnitudes, es igual a la razón inversa de los valores correspondientes en la otra magnitud.

Proporción

Es la comparación de dos razones iguales ya sean aritméticas o geométricas.
Ejemplo: 13-6 =11-4 o 6/2 =12/4.

Dentro de la tradición griega, el concepto de proporción se establece de forma homogénea desde la relación entre dos magnitudes de la misma naturaleza, debido al significado geométrico que tenían las magnitudes, ya que la comparación entre razones de diferentes magnitudes carecía de significado.

Para llegar al concepto de proporcionalidad se deben entender algunos conceptos como fracción, razón, relación entre otros, siendo de vital importancia la perspectiva geométrica que conlleva al análisis de los conceptos como un todo.

Una proporción geométrica se puede escribir:

- ✓ En forma de fracciones relacionadas por el signo igual.
- ✓ Escribiendo los términos de forma horizontal relacionados con 4 puntos (::) y se lee: el antecedente de la primera razón es a su consecuente, como el antecedente de la segunda es a su respectivo consecuente.

3 / 4 = 9 / 12

3 es a 4 como 9 es a 12.

Por lo tanto, en toda proporción, el *antecedente* de la primera razón y el *consecuente* de la segunda, son los “extremos”; *consecuente* de la primera razón y el *antecedente* de la segunda, son los “medios”

a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.

En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Así: a x d = b x c.

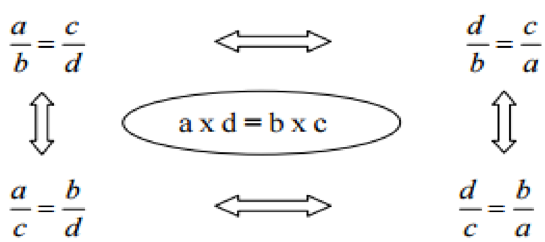


Figura 6. Tomada de: s://www.google.com.co/search?q=proporcionalidad&biw=1024&bih=470&tbm=isch&source=lnms&sa=X&ved=0ahUKEwilm-yWn77SAhUKSyYKHTBSAPcQ_AUIBigB&dpr=1

Proporción aritmética discreta: una proporción aritmética es discreta si sus términos medios son diferentes.

a-b =c –d donde b ≠c; d es la cuarta diferencial de a, b y c.

Proporción aritmética continua: una proporción aritmética es continua si sus términos medios son iguales. a –b = b –c; c es tercera diferencial de a y b.

Proporción geométrica Discreta: una proporción geométrica es discreta si sus términos medios son diferentes. a/b = c/d donde b ≠c, d se llama cuarta proporcional de a, b y c.

Proporción geométrica continua: una proporción geométrica es continua si sus términos medios son iguales. a/b=b/c, donde b es media proporcional de a y c, y c es tercera proporcional de a y b.

Finalmente, los conceptos de razón y proporción nos dan elementos para que los estudiantes logren llegar a un razonamiento sobre la proporcionalidad demostrándolo en la aplicación de las actividades propuestas aportando al desarrollo de esta investigación.

3. CAPITULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología empleada para dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos propuestos, está orientada a la elaboración de los descriptores de nivel y aplicada a los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del Municipio de Barbosa, para determinar el nivel de razonamiento de cada uno de ellos dentro del concepto objeto de estudio. Además, se describen los pasos que permitieron analizar y validar la información relacionada con el objeto de estudio como es la actividad programada que sirvió de guía para tales fines.

3.1. El enfoque de investigación - cualitativo

La investigación del presente proyecto se sitúa en el enfoque cualitativo, donde la finalidad de la investigación es la identificación del nivel de razonamiento del concepto de proporcionalidad entre áreas, teniendo en cuenta la visualización geométrica como parte fundamental en su interpretación y análisis propio de cada estudiante partícipe de la investigación dentro de descriptores previamente establecidos.

El diseño de los descriptores que nos permiten identificar el nivel de razonamiento de cada estudiante está fundamentada en los niveles uno y dos, de visualización y análisis, respectivamente. La observación, análisis e interpretación, están en correspondencia con las fases de aprendizaje que aplica el docente en una propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial, lo que permite ayudar a progresar a un estudiante de un nivel a otro en concordancia con el concepto objeto de estudio.

La investigación cualitativa hace referencia en este caso a una actividad para la comprensión, la observación de figuras geométricas y la realización del análisis de comprensión.

Para concluir, la investigación cualitativa nos ayuda a identificar el proceso de avance y conocimiento de los razonamientos de las personas que en este caso participan en el proceso de aprendizaje en la institución, para detectar la evaluación y procurar el mejoramiento que se debe realizar a la realidad social educativa. Unido al estudio de casos que nos impulsa a lograr conocer las capacidades de los estudiantes para detectar el nivel de razonamiento que poseen al abordar el concepto de proporcionalidad entre áreas.

3.2. Método de investigación

El presente trabajo de investigación se enmarca en un estudio de casos, el cual tiene como propósito básico alcanzar una comprensión en profundidad del caso en sí mismo; según Stake (1999) "solo se estudia un caso, o unos pocos casos, pero se estudian en profundidad" (p. 19). Por su parte Salkind (1999) lo define como "el método empleado para estudiar a un individuo o una institución, en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible" (citado por Londoño, 2011, p. 182). Además, el estudio de casos se considera como el más pertinente, ya que se requiere un tratamiento específico para obtener información detallada de la manera como razonan los estudiantes entrevistados, en relación al concepto objeto de estudio.

Además, según lo planteado por Stake (1999), el estudio de casos abordado es de carácter colectivo, por cuanto se analiza el proceso de razonamiento de cada uno de los estudiantes, para posteriormente caracterizarlos a través de unos descriptores previamente diseñados de acuerdo con lo planteado en el modelo educativo de van Hiele, y a la vez, determinar el nivel de razonamiento en el que se encuentran razonando cada uno de ellos.

Para la elección de los casos objeto de estudio, depende de los objetivos de la investigación, "debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas, quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador y que cuente con actores (las personas estudiadas) dispuestas a dar su opinión" (Stake, 1999, p. 17). Además, el estudio de casos se considera una herramienta útil de investigación en el contexto educativo que permite observar y analizar particularidades que otros métodos no logran identificar.

El estudio de casos se considera un método eficiente, dadas las ventajas que brinda en la solución de problemas prácticos o situaciones que surgen de la vida diaria, o al momento de justificar comportamientos, formas de razonamiento y conocimientos dentro del avance que cada uno de los entrevistados presentes al momento de realizar los análisis respectivos de manera particular, enfrentados a la comprensión de los razonamientos sobre las relaciones de proporcionalidad entre áreas.

Además, se tiene en cuenta otra característica esencial del estudio de casos que tiene relación con el producto final que para efectos de esta investigación se basa en el análisis riguroso del concepto de proporcionalidad entre áreas de forma exploratoria, lo que permite que se realice una descripción cualitativa sin mostrar directamente datos numéricos, sólo son considerados los pertinentes para alcanzar a comprender, a describir y a producir imágenes e interpretar conceptos.

Una ayuda importante y relevante de este método es la comprensión y visualización del objeto geométrico, que pretende iluminar el camino para lograr nuevos conocimientos o confirmar lo que se sabe, de manera que se pueda alcanzar el objetivo planteado. Los conceptos previos nos sugieren hipótesis que se pueden ir mejorando a medida que avanza la actividad, lo que permite la reformulación del trabajo de campo.

3.3. Población y muestra.

Para efectos de la investigación, se determinó una muestra de tres estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del municipio de Barbosa, para la cual se eligieron de acuerdo a algunos factores determinantes como: su disponibilidad para trabajar en el proceso de las actividades en horas diferentes a las clases en correspondencia con la autorización respectiva de sus padres, su motivación por el interés de aprender y explorar diferentes acciones extracurriculares en el área, y su dificultad evidente para abordar conceptos geométricos que generaban expectativas sobre la proporcionalidad entre áreas.

Los siguientes estudiantes fueron los que participaron en la investigación, a los cuales se les asignó seudónimos para proteger sus identidades: Camila de 11 años, Juan de 12 años y Andrés de 13 años.

3.4. Descripción del trabajo de campo y análisis

Para dar inicio a la participación de los estudiantes en el desarrollo de esta investigación, se realizó una inducción a un grupo de 40 estudiantes del grado séptimo para informarles la dinámica del trabajo que se pretendía desarrollar, explicándoles los procesos del concepto como tal y la forma como aparecen las preguntas dentro del cuestionario a responder.

Además, se trabajó con antelación una actividad de manipulación de material concreto con el tangram realizando diferentes figuras como actividad lúdica para la comprensión inicial en la aplicación de conceptos de identificación de polígonos, medición de perímetros y áreas. Se realiza la actividad en diferentes espacios y tiempos para no saturar, ni confundir a los estudiantes que realicen sus actividades contra reloj.

De igual manera, surgió una segunda parte dentro de la identificación de la población para determinar la muestra que sería objeto de análisis; teniendo en cuenta algunos principios y motivaciones la muestra estuvo reducida a 6 estudiantes que presentaban mayor grado de interés, ya que en algunos estudiantes se manejaba el temor de no poder responder con eficacia a la actividad propuesta. Dentro del seguimiento del proceso en la identificación de factores que motiven a los estudiantes para realizar este estudio, se tuvo en cuenta tres estudiantes que presentaron algunas características determinantes enunciadas inicialmente en el ítem 3.3 lo que verifica realmente cuáles estudiantes se identificaron con este trabajo de investigación.

La docente investigadora, realizó un acompañamiento continuo a los estudiantes quienes de forma individual desarrollaron la actividad, para la cual, la docente siempre interactuó dándole apoyo constante ya que para el trabajo y la apropiación de los conceptos de razón y proporcionalidad se ha tenido dificultades en la comprensión. De esta forma, la docente investigadora, puede reconocer con más facilidad las falencias y características del proceso de razonamiento que cada estudiante pueda tener al momento de realizar el análisis que determina el nivel de razonamiento con respecto a la proporcionalidad entre áreas desde una visualización geométrica. También se tiene como trabajo de campo para el posterior análisis el material escrito dado a cada uno de ellos como herramienta que evidencia lo plasmado en el papel como forma de expresión al momento de contestar las preguntas.

Como evidencia del trabajo investigativo se tomaron registros fotográficos que muestran la veracidad del desarrollo de la actividad propuesta.

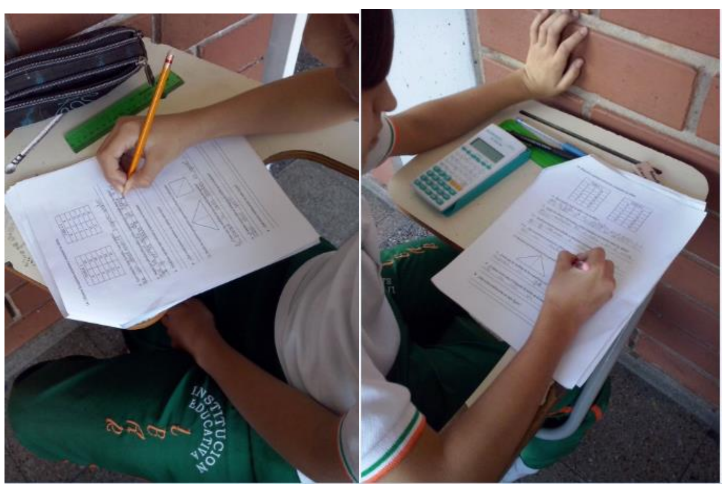


Figura 7.

3.5. Instrumentos para la recolección de datos

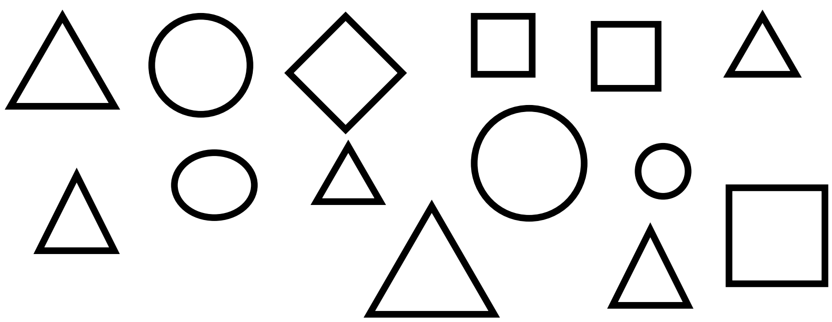
Para la recolección de datos del presente estudio y teniendo en cuenta los objetivos propuestos, se diseño un test de preguntas abiertas validadas por el asesor antes de ser aplicadas a los tres estudiantes que conformaron el grupo de estudio. Con los resultados se miden los niveles de razonamiento que tienen los estudiantes participantes respecto a las relaciones proporcionales de áreas aplicadas a una visión geométrica.

ACTIVIDADES PARA LOS ESTUDIANTES

A continuación, encontrarás una serie de preguntas y actividades, las cuales pretenden identificar el nivel en el cual estás razonando en relación a conceptos relacionados con la proporcionalidad. Por favor lee cuidadosamente cada actividad y responde lo que consideras sobre las diferentes situaciones planteadas.

Nota: Las imágenes que se encuentran durante el desarrollo de las actividades fueron construidas por la autora para efectos de la investigación.

1. En la siguiente imagen se observan superficies planas



- ¿Puedes mencionar el nombre de algunas de ellas? ¿Cuáles?

____

____

- ¿Consideras que estas figuras podrían tener la misma área?

____

____

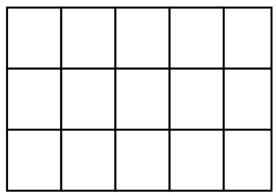
- ¿Crees que dos figuras iguales podrían encerrar la misma cantidad de superficie? ¿por qué?

____

____

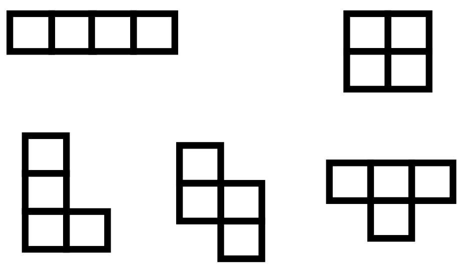
Aporte de información

El área de una figura representa la cantidad de superficie encerrada por dicha figura. Se mide en unidades de longitud cuadradas, por ejemplo m^2, cm^2 etc.



Cada cuadrado mide 1 cm^2, por lo tanto el área total es de 15 cm^2

2. De acuerdo a las siguientes figuras, determina si sus áreas son iguales. Explica tu respuesta.



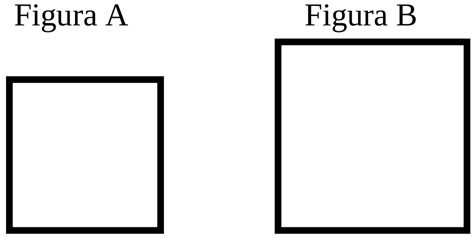
____

____

3. Calcula el área de las siguientes figuras:

Figura A Figura B

2 cm

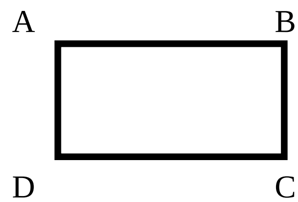


4 cm

2 cm 4 cm

- Con los resultados anteriores, ¿cómo es el área del cuadrado menor con respecto al mayor?

4. De acuerdo al siguiente rectángulo, divídelo en dos partes:



- El rectángulo anterior, ¿podrías dividirlo en más partes? De ser posible, marca otras divisiones.

- Simboliza los rectángulos que observas.

- Divide el rectángulo ABCD en dos partes iguales; a éstos puntos los llamaremos EF. ¿cómo es el área del rectángulo AEFD con respecto al área del rectángulo EBCF? (mayor, menor o igual).

- ¿Cuántas veces debes utilizar AEFD para formar el rectángulo ABCD?

____

____

- ¿Se puede afirmar que con dos AEFD puedes formar un rectángulo ABCD? Explica.

____

____

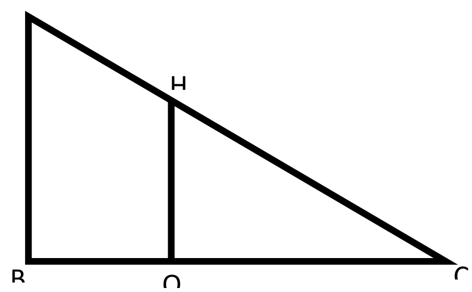
- ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?

____

____

____

5. La siguiente figura es el triángulo rectángulo ABC, si se traza una línea vertical se forma el triángulo HQC.



- ¿Cómo crees que sería el área de cada uno?

____

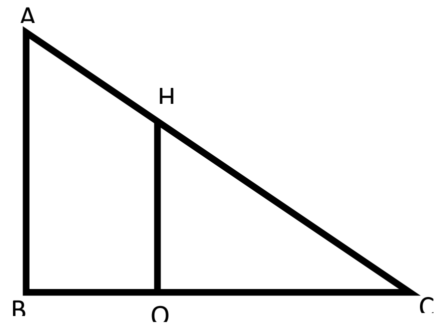
____

- ¿Consideras que el área se modifica? ¿A la mitad? Explica.

____

____

6. Retomando el triángulo de la pregunta anterior:

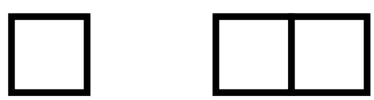


➢ ¿Cómo podrías comparar el área del triángulo ABC y el área del triángulo HQC?

7. Dibuja una superficie rectangular y traza un segmento por la mitad de ésta.

➢ ¿Crees que se podría decir que la superficie rectangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué? Explica.

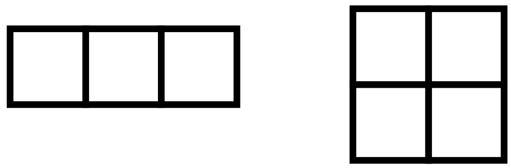
8. Si se consideran los siguientes cuadrados:



➢ ¿Cómo consideras el área del cuadrado pequeño con respecto al área del cuadrado grande?

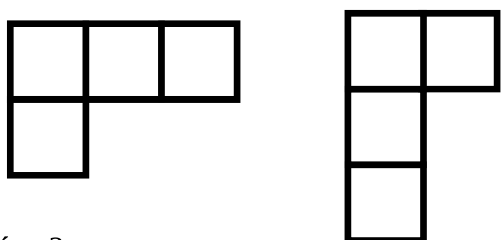
➢ ¿Cuál crees que es la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande?

9. Si relacionas el cuadrado pequeño con estas figuras, ¿cuál sería la razón de cada una?



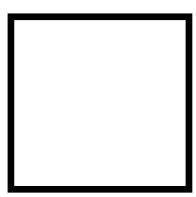
- Si se divide el cuadrado grande en M veces, ¿cuál sería la razón?

10. Si comparamos estas dos figuras:



- ¿Cómo crees que sería el área?

11. Como relacionarías la razón del cuadrado pequeño con respecto al siguiente cuadrado.

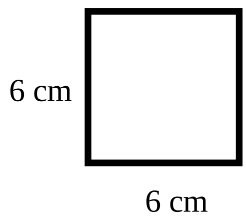


- ¿Cuál es la razón en este caso?

- ¿Qué razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande?

- ¿Cómo crees que sería la razón entre ellas?

12. El siguiente cuadrado tiene un área de 36 cm^2:



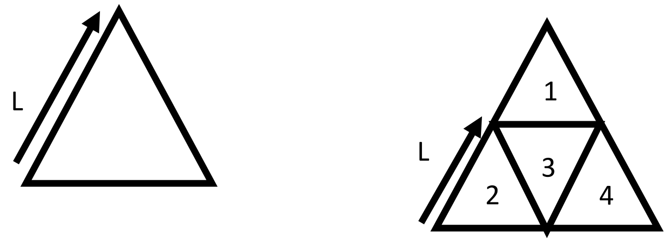
- Divídela en dos partes iguales y determina nuevamente sus áreas.

- Compara y explica que pasó con las medidas.

- ¿Consideras que esto puede pasar con otras figuras?

- ¿Cómo explicas la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras?

13. Si consideras la siguiente figura, ¿cómo compararías la relación entre el triángulo grande y los pequeños?



- ¿Qué podrías decir sobre el área de cada uno?

____

____

- ¿Se podrían hacer otras comparaciones? Explica.

____

____

- ¿Se podría calcular la razón entre ellas? ¿Cómo?

____

____

- Si el triángulo grande se dividiera en otros más pequeños, ¿qué pasaría con cada una de las áreas?

____

____

- ¿Qué pasaría con respecto a la razón?

____

____

- Si tomas un rectángulo pequeño ¿cómo lo relacionarías con respecto al rectángulo grande?

____

____

- ¿Cómo es el área del triángulo 3 con respecto al triángulo inicial?

____

____

- El área del triángulo 4 es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo inicial, ¿porqué?

____

____

14. Observa la siguiente estructura y compara las tablas.

TABLA 1	
6	30
5	25
8	40
10	50
12	60
9	45

TABLA 2	
4	8
3	6
5	10
9	18
12	24
15	30

- Qué relación tiene la tabla 1 con la tabla 2.

____

____

- Según los cálculos efectuados, ¿cómo consideras la relación entre las tablas?

____

____

- Establece razones equivalentes y determina su constante.

____

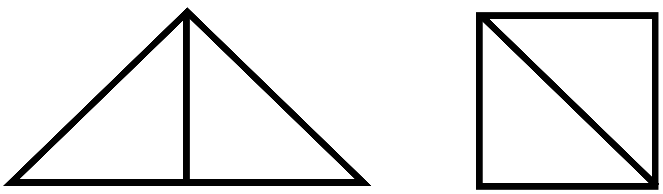
____

- ¿Qué conclusiones amerita las tablas anteriores?

____

____

15. Desde la siguiente perspectiva geométrica observa e interpreta:



- ¿Crees que las medidas de las superficies son iguales?

____

____

- ¿Cuántas veces cabe el triángulo de arriba en el cuadrado?

____

____

- ¿Qué razón establecerías en cada figura?

____

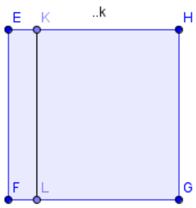
____

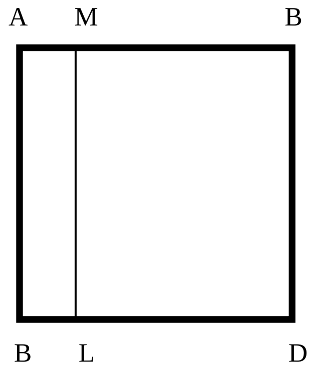
- ¿Se podría decir que la anterior superficie triangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué?

____

____

16. Observa las siguientes figuras divididas en k partes iguales.



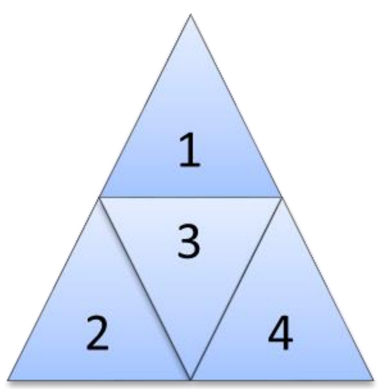


- ¿Cuántas veces cabe el cuadrado más pequeño en el grande?

- Si el lado del cuadrado grande mide 6 cm, ¿cuál es la relación proporcional en dichas áreas?

- ¿Cómo aplicarías la propiedad fundamental con respecto a cada figura?

17. Con respecto al siguiente triángulo establece:



- ¿Cuál es la razón de los triángulos pequeños comparados con el triángulo grande?

____

____

- Igualmente, divide en diferente cantidad de triángulos y determina la razón entre ellas: (6, 8,10, 12, 16, 32, etc.)

____

____

- ¿Qué pasa en cada uno de ellos?

____

____

- ¿Cómo compararías sus áreas?

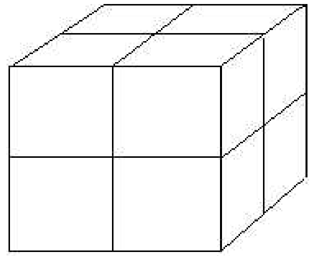
____

____

Aporte de información

Proporcionalidad: Es la comparación de dos razones iguales; aplicando el concepto de las propiedad fundamental de las proporciones se dice que: "En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios" Así: a x d = b x c.
a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.
Además, es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño, consecuentemente las partes de una figura con respecto al todo.

18. Determina algunas características con respecto a la siguiente figura para establecer la proporcionalidad entre áreas:



- ¿Los cubos pequeños son proporcionales?

____

____

- ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande? ¿Cómo sería esa relación?

____

____

- Si el área de un cubo pequeño es 1 cm^2. ¿cuál sería al área del cubo grande?

____

____

- ¿cómo relaciona la proporcionalidad?

____

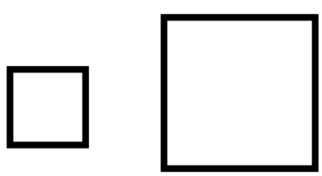
____

- Uno de los cubos es $\frac{1}{8}$ del cubo grande. ¿Porque?

____

____

19. Compara los dos cuadrados de acuerdo a su área y determina la razón



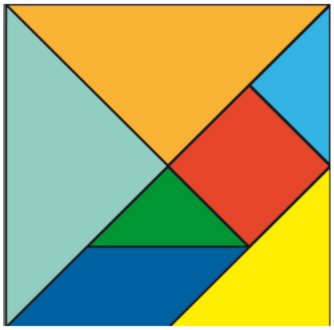
1cm 2 cm

- ¿Crees que son proporcionales? ¿Porque? Explica.

____

____

20. Si tienes el Tangram de 7 piezas, establece la relación de equivalencia entre cada una de sus figuras.



- Con la ayuda de cada una de las figuras de forma independiente construye algunas relaciones de proporcionalidad de cada figura con respecto al cuadrado grande.

____

____

¿Cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo? ¿Cuál es su razón?

____

____

- ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿cuál es la relación de equivalencia?

____

____

- Compara las otras figuras y analiza otras proporciones.

____

____

¡MUCHAS GRACIAS POR TUS RESPUESTAS!

3.6. Validación

Este análisis se realiza después de haber aplicado el método de estudio de casos, se evidencia que el tiempo que los estudiantes emplearon para las actividades estuvieron muy cercanos a la finalización de año, donde la preocupación por definir notas en otras áreas influyeron sustancialmente en la prueba, por lo tanto no lograron una concentración real en sus respuestas y además, dejaron algunas preguntas sin contestar y en algunos casos no siguieron las instrucciones dadas por la docente investigadora. Las preguntas fueron diseñadas de manera secuencial, cada una con sus descriptores fundamentales para la comprensión sin diferenciar el nivel de razonamiento al que pertenece.

El estudio de casos empleado para ser aplicado como herramienta dentro del modelo educativo de van Hiele valida la teoría aplicada a la proporcionalidad entre áreas utilizada en los estudiantes de la investigación.

Las pautas que marcaron el estudio las componen la asimilación de conceptos y razonamientos de la concepción visual unificada de acuerdo a las características del modelo en la parte descriptiva. (Niveles de razonamiento).

El análisis presentado nos muestra la poca comprensión que tienen nuestros estudiantes sobre conceptos básicos de razón, relaciones proporcionales y propiedades fundamentales de la proporción, lo que permitió encontrar que el nivel de razonamiento del objeto de estudio es muy bajo y se debe mirar nuevas estrategias para enfrentar esta problemática y buscar herramientas que nos permitan llegar a mejorar las capacidades en los estudiantes.

El primer bloque de preguntas que comprende de la 1 a la 5 está relacionado con los descriptores del nivel 0, en el que se evidencia que la aproximación al reconocimiento del concepto de área se presenta de manera muy corta y superficial en sus respuestas. No poseen un lenguaje técnico que se pueda definir para garantizar el razonamiento en otras preguntas.

El segundo bloque comprende las preguntas 6 a la 11 correspondiente a los descriptores del nivel 1. Se evidencia la poca especificidad en el lenguaje, simbología y la no secuencialidad en el proceso, tomando de manera aislada algunas preguntas que comparten descriptores del mismo nivel como se presenció en los ítems de la pregunta 4, 7 y 8. La perspectiva geométrica en algunos casos la manejan de manera aislada con la intuición del poco razonamiento o desconcentración para continuar con la secuencia en cada una de las preguntas, a medida que se avanza en el proceso.

El tercer bloque comprende las preguntas 12 a la 17 relacionando los descriptores del nivel 2, en el que se encontraron falencias en la manera de reconocer, establecer y comparar las razones entre áreas lo que nos indica que el análisis no tiene un razonamiento justificado al momento de relacionar su percepción geométrica en diferentes objetos con la especificación del lenguaje, se quedan cortos al responder o responden estrictamente lo necesario quedando preguntas sin responder.

El último bloque de preguntas correspondientes de la 18 a la 20 pertenece al nivel 3 con sus descriptores establecidos, buscando relaciones de equivalencia entre áreas. Se incluye en este bloque la pregunta 20 con sus ítems que fue realizada de manera lúdica inicialmente para que aportara algunos conocimientos y estrategias de comprensión en las que se pudo observar que sólo en dos estudiantes al momento de la prueba se evidenció un poco más la comprensión sin valorar el conocimiento del concepto de razón y proporción.

4. CAPÍTULO 4. ANÁLISIS

4.1. Consolidación de los descriptores de nivel dentro del modelo educativo de van Hiele

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se busca la aproximación al reconocimiento del concepto sobre área o identificación de los conocimientos previos sobre áreas de diferentes tamaños y sus respectivas representaciones.

- ✓ Identifica y reconoce el concepto de área en una figura.
- ✓ Reconoce cuándo una figura representa áreas diferentes.
- ✓ Representa gráficamente el área de una figura.

Nivel 1: De reconocimiento visual

Se trabaja el concepto de áreas permitiendo la comparación entre diferentes figuras para determinar la razón entre ellas.

- ✓ Representa simbólicamente el área de una figura.
- ✓ Reconoce la igualdad entre razones.
- ✓ Compara mediante atributos físicos el área entre figuras.
- ✓ Reconoce el número de veces que una figura está contenida en otra, aplicando el concepto de área.

Nivel 2: De análisis

El estudiante establece la razón entre áreas, a través de la comparación entre sus medidas y utiliza la propiedad fundamental.

- ✓ Establece la razón de acuerdo al número de veces que una figura está contenida en otra.

- ✓ Establece la razón entre dos áreas divididas en M partes iguales y las expresa simbólicamente.
- ✓ Reconoce la razón entre dos áreas.
- ✓ Identifica características relacionadas con la propiedad fundamental para reconocer las relaciones proporcionales presentes en dichas áreas.
- ✓ Utiliza definiciones con cualquier estructura que permite realizar comparaciones entre áreas.

Nivel 3: De clasificación o de relaciones

Se analizará en este nivel, la relación de equivalencia que cumplen las razones entre áreas, apoyados en las propiedades para establecer la proporcionalidad entre ellas.

- ✓ Identifica la relación de equivalencia de las razones entre áreas.
- ✓ Reconoce las propiedades de la proporcionalidad y las aplica.
- ✓ Diferencia y justifica la proporcionalidad con argumentos propios con respecto a áreas de figuras.
- ✓ Reconoce la proporcionalidad entre áreas de figuras divididas entre M partes iguales.

4.2. Análisis de los resultados

Las actividades aplicadas a los estudiantes se realizaron a través de grupos de preguntas, elaboradas en correspondencia con los descriptores de nivel del modelo educativo de van Hiele, que pretenden identificar en cuanto al concepto de razonamiento en el cual se encuentran los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del Municipio de Barbosa, por lo tanto, las preguntas permiten al estudiante exhibir, modificar o ampliar su red de relaciones con respecto a los conceptos relacionados con la proporcionalidad entre áreas desde una perspectiva geométrica.

4.3. Análisis de los casos

En el desarrollo del análisis de la entrevista tipo test , para abordar los casos objeto de estudio, se enuncian de 1 a 4 de la siguiente forma, empleando seudónimos para proteger la identidad de ellos.

Estudiante 1: Camila

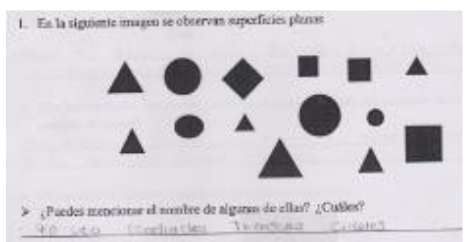
Estudiante 2: Juan

Estudiante 3: Andrés

Para cumplir con el propósito del trabajo de investigación, se realiza el análisis de cada uno de las respuestas de los estudiantes con respecto a las preguntas de la entrevista, lo que permite describirlas a continuación:

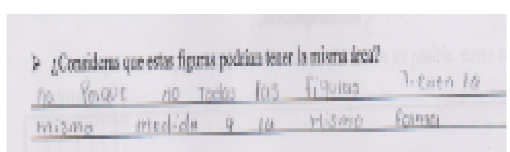
4.3.1. ESTUDIANTE CAMILA

Pregunta 1.a.



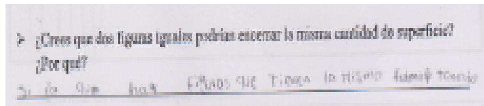
La estudiante percibe e identifica de forma clara las figuras planas dentro de conocimientos previamente adquiridos como el nombre de algunas de ellas.

Pregunta 1.b.



Su respuesta frente al reconocimiento del área es no, al afirmar que no tienen el mismo tamaño y la misma forma por lo que se considera argumento valioso para el descriptor sobre el reconocimiento cuando una figura representa áreas de diferentes tamaños dentro del nivel 0 o predescriptivo.

Pregunta 1.c.

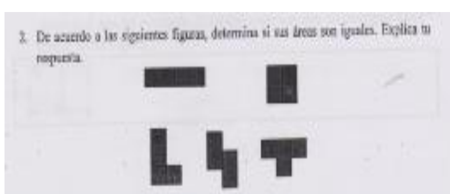


La pregunta se realiza teniendo en cuenta el concepto de área mediante la comparación de dos figuras iguales. La estudiante relaciona su respuesta al afirmar que dos figuras tienen la misma superficie si poseen la misma forma y tamaño; esta estudiante reconoce el concepto de área sobre dos figuras iguales; por lo tanto ubica su respuesta en el descriptor del nivel 0 sobre la pregunta asignada.

Aporte de información:

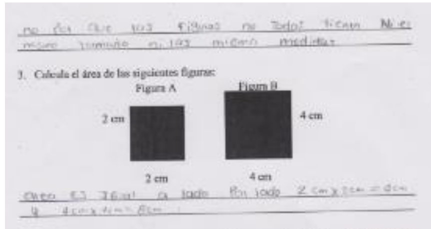
Se presentó un aporte de información sobre el concepto de área y su respectivo ejemplo para las preguntas posteriores.

Pregunta 2.



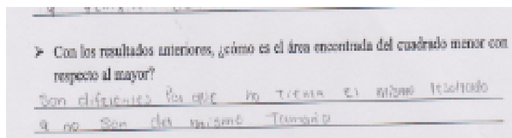
Con respecto a las figuras dadas, los estudiantes deberán determinar si las áreas son iguales de tal forma que sus respuestas teniendo en cuenta la perspectiva geométrica apunten inicialmente a lograr el nivel 0 descriptor 3. La estudiante Camila no comprendió el área dentro de la visión geométrica ya que relaciona las figuras solamente por su forma y tamaño.

Pregunta 3.a.



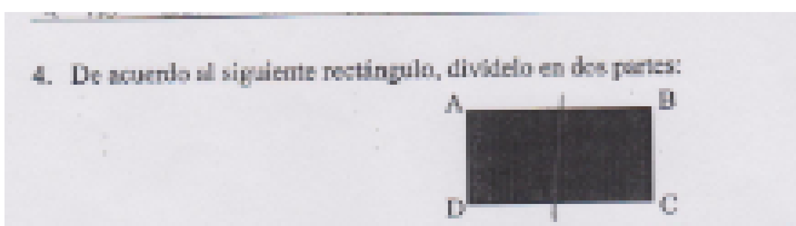
Se pedía calcular el área de dos cuadrados mediante una figura dada con sus respectivas medidas. Camila sabía la fórmula aplicando la multiplicación de sus lados, pero al realizar el segundo cuadrado se equivocó sumando los dos lados, lo que puede considerarse la asimilación del concepto del descriptor de nivel 0.

Pregunta 3.b.



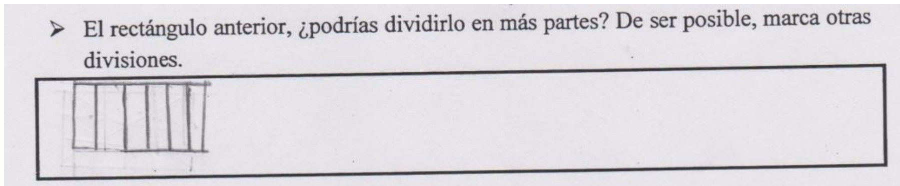
Ahora, con los cálculos anteriores deben reconocer la representación de áreas de diferentes tamaños, dando como respuesta en común la diferencia entre los resultados numéricos y la figura propiamente vista, por lo tanto afirma que una es más grande que la otra; es así como la estudiante reconoce y comprende los conceptos que están acordes con los descriptores del nivel de razonamiento 0.

Pregunta 4.a.



Dado un rectángulo se pide dividirlo en dos partes. Camila respondió a la pregunta entendida como trazar una línea por la mitad que sobresale de la figura para mayor visualización, dando un aporte a sus conocimientos previos en concordancia con el nivel 0 apropiado a sus descriptores.

Pregunta 4.b.

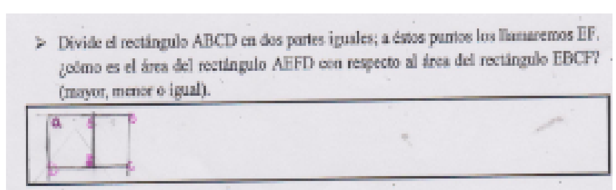


Se da continuación a la pregunta anterior que abarca la división del rectángulo en varias partes, a lo que contesta la estudiante realizando divisiones verticales, siguiendo un patrón como el anterior, considerando una forma de asimilación del descriptor en el nivel 0, ya que divide el rectángulo en iguales partes cada uno.

Pregunta 4.c.

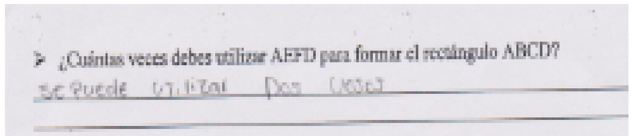
En esta pregunta la estudiante no le da continuidad a la anterior al anotar una respuesta sin fundamento ya que dibuja una nueva figura dividida en 4 partes y no la simboliza; por lo tanto, no identifica la simbología que se le da a una figura para su estudio; esto nos hace pensar que la estudiante no tiene claro algunos conceptos previos que deben ser precisos para el estudio en mención. Por lo tanto, continúa en el nivel 0 sin identificar un descriptor específico.

Pregunta 4.d.



Se propone dividir el rectángulo ABCD en dos partes iguales y llamar a estos dos nuevos puntos EF. Para esta pregunta dentro de la entrevista se aclara el concepto anterior para que la estudiante comprenda la base y pueda comparar el área de una mitad con respecto a la otra, lo que parece ser que no responde a la relación con respecto al área de cada rectángulo teniendo una vista geométrica. Se puede llegar a concluir que no reconoce el descriptor sobre representaciones gráficas del área de una figura ubicándola dentro del nivel 0.

Pregunta 4.e.

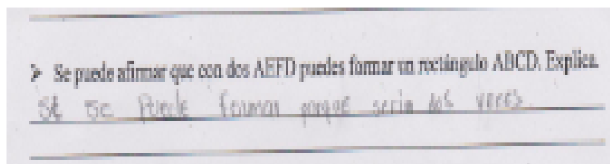


➢ ¿Cuántas veces debes utilizar AEFD para formar el rectángulo ABCD?

se Puede utilizar Dos veces

A la pregunta ¿cuántas veces debe utilizar AEFD para formar el rectángulo ABCD, la estudiante responde dos veces acertadamente, lo que puede alcanzar con esta pregunta reconocimiento visual del nivel 1 apropiado a sus descriptores.

Pregunta 4.f.

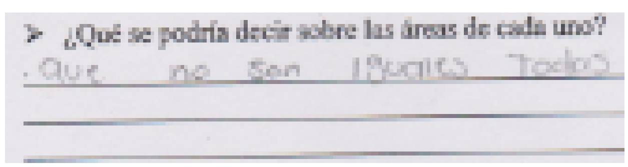


➢ Se puede afirmar que con dos AEFD puedes formar un rectángulo ABCD. Explica.

Sí se Puede formar porque sería dos veces

Esta pregunta se realiza en sentido contrario a la anterior dando la explicación pertinente y siguiendo la instrucción de preguntas anteriores lo que determina que la estudiante responden sí a la pregunta confirmando la aplicación de la anterior, y se puede confirmar el descriptor de reconocimiento del número de veces que una figura está contenida en otra dentro del nivel 1.

Pregunta 4.g.

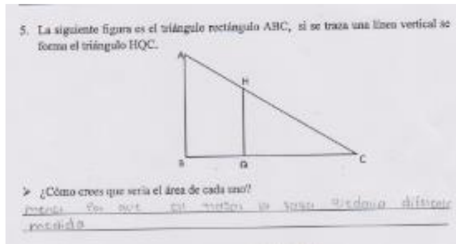


➢ ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?

Que no son iguales todos

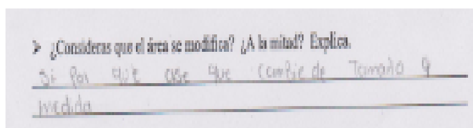
Cuando se pregunta sobre ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?, su respuesta no conecta el concepto de área ni reconoce la simbología, existiendo así poca comprensión al contestar de manera independiente el concepto de área del proceso geométrico, ubicándose en el nivel 0 o básico.

Pregunta 5.a.



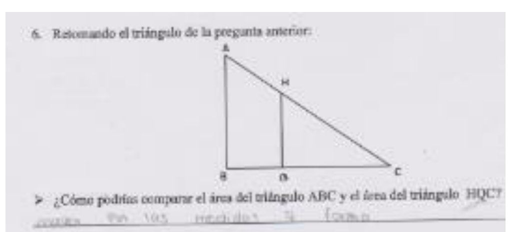
A la pregunta sobre el área del triángulo dividido en dos partes comprende que es diferente, aunque la estudiante anticipa que es menor porque sus medidas se modifican desde la perspectiva geométrica. Su comprensión es razonable y la ubica en el descriptor de reconocimiento cuando una figura representa áreas de diferentes tamaños dentro del nivel 0.

Pregunta 5.b.



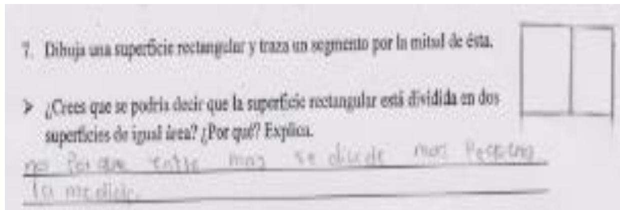
A la pregunta se modifica su área a la mitad, responde con poco fundamento ya que afirma que se puede modificar porque no miden lo mismo y cambia de tamaño y forma, sin tener en cuenta el área como tal, no identifica razones, por lo tanto se ubica dentro del descriptor del nivel 0.

Pregunta 6.



Para esta pregunta sobre comparación de áreas responde mediante su visualización geométrica que era más grande el triángulo ABC con respecto al triángulo HQC. Lo que se considera desde la perspectiva geométrica un argumento válido, y desde el punto de vista del objeto de estudio, no compara razones continuando dentro del mismo nivel, sin alcanzar al siguiente.

Pregunta 7.

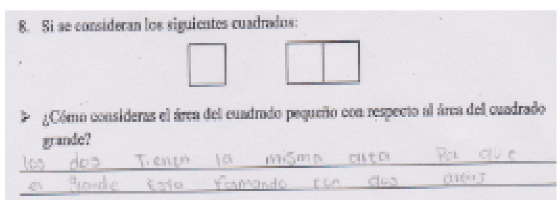

7. Dibuja una superficie rectangular y traza un segmento por la mitad de ésta.

➢ ¿Crees que se podría decir que la superficie rectangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué? Explica.

no Por que entre mas se divide mas Pequeña la medida

Se pide dibujar una superficie rectangular y dividirla por la mitad para identificar si las superficies tienen la misma área. En su respuesta no considera que las superficies tienen la misma área porque entre más se divide más pequeña es la medida de lo que se concluye que esta estudiante considera las superficies por separado ya que el área se reduce de acuerdo a las divisiones que se le hagan; por lo tanto, realiza su análisis de la figura completa con respecto a sus divisiones sin superar el nivel en que se encuentra.

Pregunta 8.a.

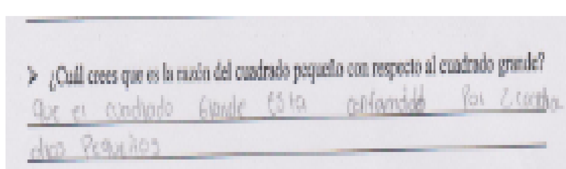

8. Si se consideran los siguientes cuadrados:

➢ ¿Cómo consideras el área del cuadrado pequeño con respecto al área del cuadrado grande?

los dos Tienen la misma area Por que en grande esta formando con dos areas

De acuerdo a las figuras planteadas, afirma que el área del cuadrado grande está formada con dos áreas del pequeño, llegando así a una comprensión acertada en el nivel 1, dentro del descriptor por medio de la comparación de áreas para determinar la razón y el reconocimiento de las veces que una figura contiene a otra aplicando el concepto de área.

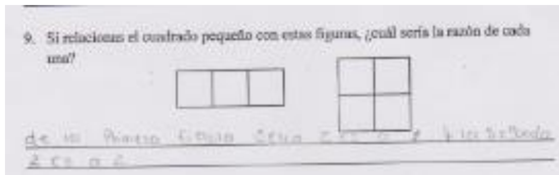
Pregunta 8.b.


➢ ¿Cuál crees que es la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande?

que el cuadrado grande esta conformado Por 2 cuadros dos Pequeños

Cuando se pregunta ¿cuál es la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande? Responde que está conformado por dos cuadrados pequeños; esto nos hace pensar que su nivel de razonamiento desde la visualización geométrica es acertado; pero no identifica las razones del descriptor de reconocimiento visual, concluyendo que no compara áreas para determinar la razón.

Pregunta 9.a.

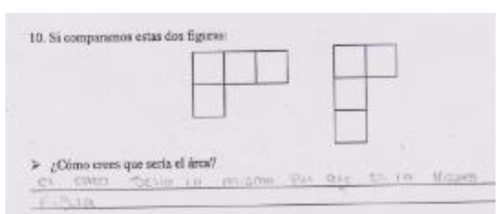


Al relacionar el cuadrado pequeño con las otras figuras, la estudiante no ubica su razonamiento de forma acertada porque relaciona los datos equivocadamente como 2 es a 1 o 2 es a 2 sin tener en cuenta al parecer el cuadrado inicial. Por lo tanto, no comprende descriptores del nivel de razonamiento de reconocimiento visual y no alcanza a determinar la comparación de áreas de dos figuras.

Pregunta 9.b.

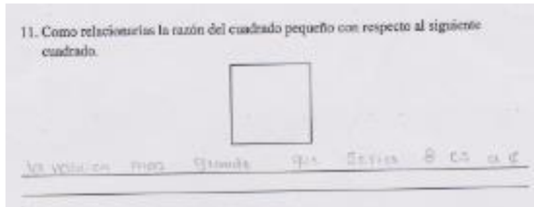
Con relación a dividir un cuadrado en M veces y buscar su razón, Camila no haya una justificación clara al afirmar que se puede multiplicar por M veces, lo que permite analizar que no razona a la pregunta, cumpliendo los descriptores del mismo nivel.

Pregunta 10.



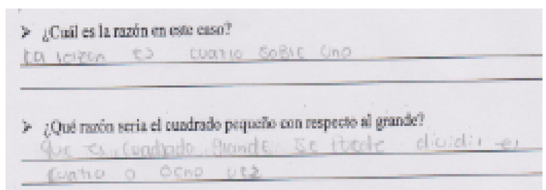
Al comparar las áreas de dos figuras desde una perspectiva geométrica, da lugar a la comparación mediante atributos físicos de una figura para el descriptor de nivel 1 sobre reconocimiento visual, lo que conllevó a responder en este caso que las áreas de las figuras son iguales ya que es la misma figura.

Pregunta 11.a.



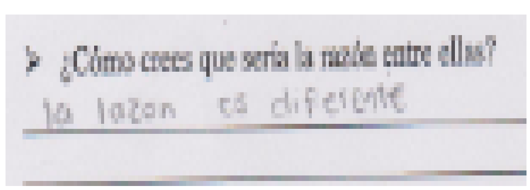
Plantea la relación de la razón del cuadrado pequeño con respecto a un cuadrado más grande, lo que considera en este caso una confusión en la apreciación ya que no relaciona las figuras a la razón correcta con la otra, por lo que no alcanza a cumplir el descriptor de reconocimiento visual, por lo que se considera su ubicación en los descriptores del nivel 0.

Pregunta 11.b.y c.



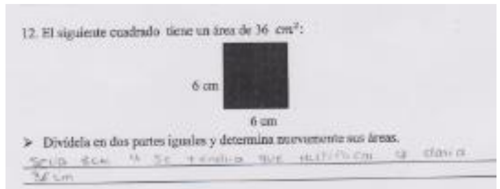
Estas preguntas: ¿cuál es la razón en este caso? ¿que razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande? se han analizado en conjunto a lo que responde la estudiante que parece no ser válido al afirmar que la razón es cuatro sobre uno o afirma que se pueden efectuar otras divisiones. No cumple el descriptor para determinar la razón entre figuras, sin alcanzar el nivel 1.

Pregunta 11.d.



¿Cómo crees que es la razón entre ellas? Responde en este caso sin razonamiento apropiado ya que contesta que la razón es diferente, parece ser que no comprende bien la pregunta ya que sus respuestas no tienen fundamento; no se apropia de los descriptores del nivel 1.

Pregunta 12.


12. El siguiente cuadrado tiene un área de 36 cm^2:

6 cm

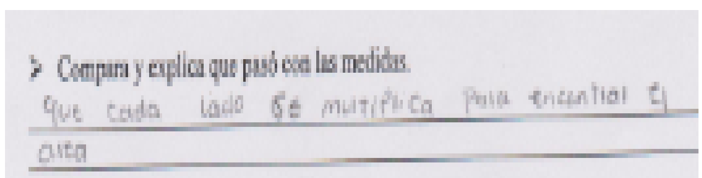
6 cm

➤ Divídela en dos partes iguales y determina nuevamente sus áreas.

Pregunta 12.a.

Esta pregunta identifica un cuadrado con sus medidas de 6cm de lado y divídelo en dos partes para determinar su área y la comparación entre sus medidas. La estudiante Camila deja incompleta su respuesta al no efectuar un razonamiento lógico, esto significa la poca comprensión que tiene para el análisis del concepto como tal, cumple los descriptores del nivel 0.

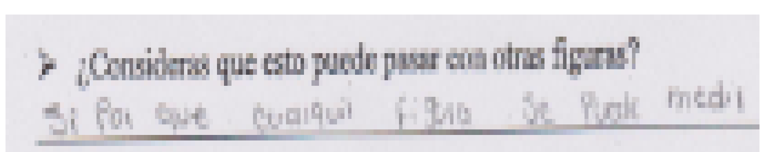
Pregunta 12.b.


➤ Compara y explica que pasó con las medidas.

que cada lado se multiplica para encontrar el area

Debe comparar y explicar que pasó con las medidas de cada una de las áreas; la estudiante sólo responde a la forma de buscar el área de una figura y no encuentra comparación porque sólo halló el área de una de ellas, por lo que cumple los descriptores del nivel 0, presentando confusión para los descriptores en el nivel siguiente.

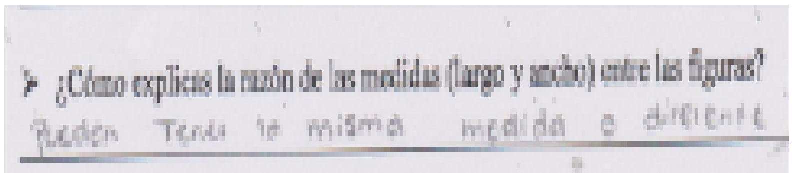
Pregunta 12.c.


➤ ¿Consideras que esto puede pasar con otras figuras?

Si por que cualquier figura se puede medi

Con respecto a la consideración si esto puede pasar con otras figuras afirma que sí porque cualquier figura se puede medir y para sacar el área se necesita multiplicar, esto nos induce a pensar que los estudiantes no poseen los razonamientos suficientes para comparar áreas dadas con respecto a modificar la misma figura, por lo tanto lo ubica en el descriptor de nivel 1.

Pregunta 12.d.

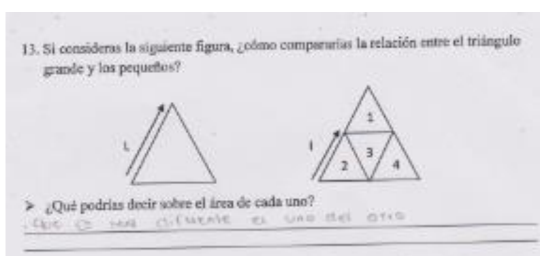

➢ ¿Cómo explicas la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras?

Pueden Tener la misma medida o diferente

Para explicar la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras, la estudiante confirma que pueden tener las mismas medidas o diferentes sin argumentar su razón, por lo tanto no alcanza el nivel de análisis dentro del descriptor razón entre áreas y comparación entre sus medidas.

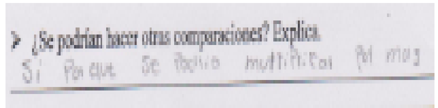
Pregunta 13. Esta pregunta se ilustra con una figura diferente que es el triángulo dividido en 4 partes iguales para comparar la relación entre el triángulo grande y los pequeños.

Pregunta 13.a.



¿Qué se puede decir sobre el área de cada uno? Sus respuestas no fundamentan el análisis de comparación entre áreas ya que interpretan con más facilidad la relación visual de la figura dejando de lado el objeto de estudio, de la siguiente forma: Camila aclara que es muy diferente el uno del otro, tal vez considerando la división de la segunda figura; su razonamiento cumple el descriptor del nivel 0.

Pregunta 13.b.

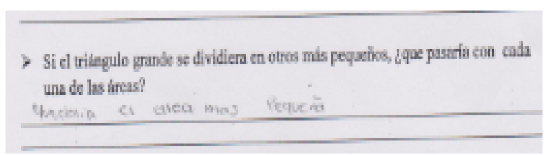


Al preguntar si se pueden hacer otras comparaciones aporta en su análisis que sí se puede pero con palabras no muy explícitas, dando respuestas muy superficiales y con poco razonamiento para un nivel avanzado.

Pregunta 13.c.

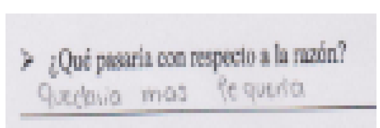
Se pide calcular la razón entre las figuras y ¿cómo es esa razón? En la respuesta de la estudiante se nota que la manera fácil, es multiplicando, pero no realiza los cálculos ni alcanza a comprender el significado de la pregunta. No posee nivel de análisis para el descriptor sin establecer la razón de acuerdo al número de veces que está contenida.

Pregunta 13.d.



A esta pregunta la estudiante comprende que si divide el triángulo en otros más pequeños se disminuiría el área de cada uno de ellos. Su grado de razonamiento para este nivel de análisis no alcanza el descriptor ya que no establece la razón entre áreas de acuerdo al número de veces que está contenida.

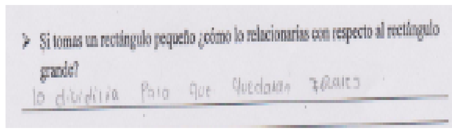
Pregunta 13.e.



Ahora, con respecto a la razón, su respuesta es que quedaría más pequeña, quedando incompleto su análisis sin especificar la razón entre áreas. Solo cumple descriptores del nivel 0.

Pregunta 13.f.

Nota: Esta pregunta se aleja de la secuencia del ejercicio ya que por error se escribió rectángulo en vez de triángulo. Para la actividad en los estudiantes 2 y 3 se corrigió su redacción.

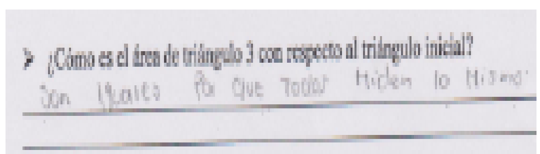


➢ Si tomas un rectángulo pequeño ¿cómo lo relacionarías con respecto al rectángulo grande?

lo dividiria para que quedaran iguales

La relación de uno de los triángulos pequeños con respecto al grande no se comprende en su respuesta, su nivel de razonamiento no alcanza al de análisis, sólo comprende descriptores del nivel 0.

Pregunta 13.g.

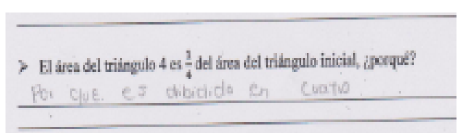


➢ ¿Cómo es el área de triángulo 3 con respecto al triángulo inicial?

Son iguales por que todos miden lo mismo

Tomamos el área del triángulo 3 para compararlo con el triángulo inicial y la estudiante define que son iguales, tal vez sin pensar en el triángulo grande, por lo tanto, no tiene claridad en la pregunta, por lo que su razonamiento cumple descriptores del nivel 0.

Pregunta 13.h.



➢ El área del triángulo 4 es $\frac{?}{4}$ del área del triángulo inicial, ¿porqué?

Por que es dividido en cuatro

Para la pregunta, el área del triángulo 4 es ¼ del área del triángulo inicial. Afirma que el triángulo es dividido en cuatro partes; puede comprenderse que lo toma de la misma pregunta pero sin asimilar la visión geométrica, se puede considerar como descriptor del nivel de análisis.

Pregunta 14.a.

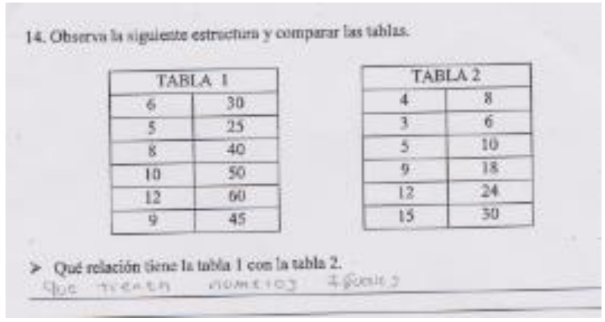

14. Observa la siguiente estructura y comparar las tablas.

TABLA 1	
6	30
5	25
8	40
10	50
12	60
9	45

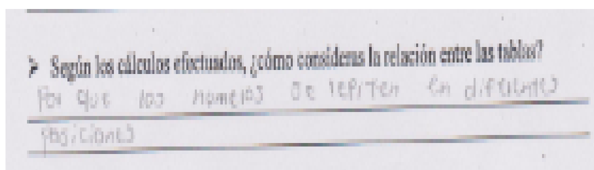
TABLA 2	
4	8
3	6
5	10
9	18
12	24
15	30

➢ Qué relación tiene la tabla 1 con la tabla 2.

que tienen numeros iguales

Esta pregunta se relaciona con la comparación de dos tablas y la relación que el estudiante ve entre ellas, por lo que se observa que la estudiante no relaciona la tabla con la identificación de una constante para hallar una razón, sólo ve números sin ningún fundamento sobre el tema objeto de estudio, continúa cumpliendo con los descriptores del nivel 0, sin avanzar a otro nivel.

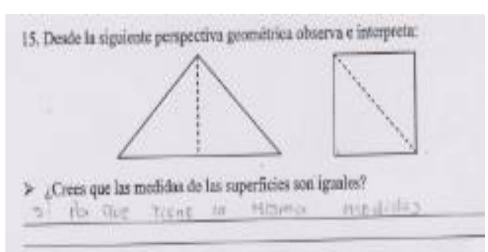
Pregunta 14.b.


➢ Según los cálculos efectuados, ¿cómo consideras la relación entre las tablas?

Por que los numeros se repiten en diferentes posiciones

Camila no realiza los cálculos para verificar la relación de las tablas, por lo tanto carece de análisis en su razonamiento por lo que cumple descriptores del nivel 0.

Pregunta 15.a.

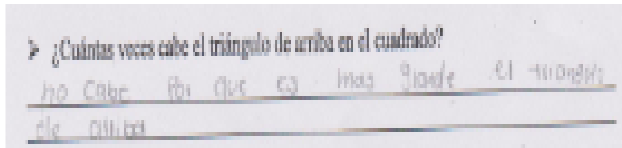

15. Desde la siguiente perspectiva geométrica observa e interpreta:

➢ ¿Crees que las medidas de las superficies son iguales?

Si por que tiene la misma medidas

Teniendo en cuenta la pregunta de las medidas en estas figuras si son iguales; la estudiante contesta que son iguales porque tienen la misma medida. Teniendo una perspectiva geométrica; ella puede asimilar los conceptos y responder bajo criterios estructurados. Por lo tanto, puede llegar al descriptor de análisis utilizando definiciones con cualquier estructura que permite realizar comparaciones entre áreas.

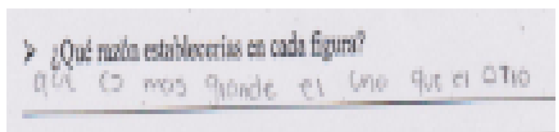
Pregunta 15.b.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo de arriba en el cuadrado?

no Cabe por que es mas grande el triangulo de arriba

Esta respuesta contradice la anterior, lo que se considera falta de concentración o poco razonamiento para el análisis al concluir que el triángulo es más grande que el cuadrado. Se considera que no alcanza un nivel de razonamiento desde una perspectiva geométrica, cumpliendo descriptores del nivel 0.

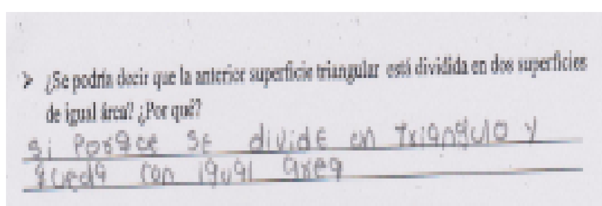
Pregunta 15.c.


➢ ¿Qué razón establecerías en cada figura?

que es mas grande el uno que el otro

La razón que establece la estudiante está relacionada con la confusión de la respuesta anterior que no visualizan de manera razonable y coherente las respuestas, continúa en el nivel 0 comprendiendo sus descriptores.

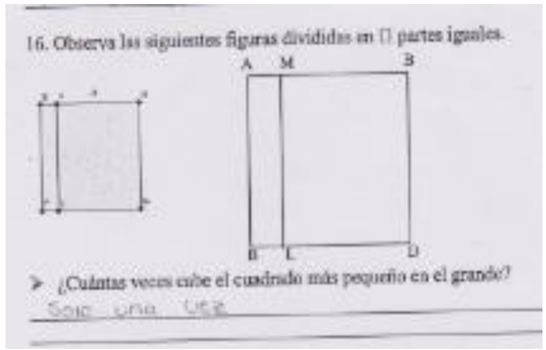
Pregunta 15.d.


➢ ¿Se podría decir que la anterior superficie triangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué?

si Porqce se divide en Triangulo y quedq con igual area

El análisis no coincide con el objeto de estudio, ya que su respuesta no se fundamenta coherentemente y su razonamiento está por debajo de los descriptores del nivel de análisis, cumpliendo sólo los descriptores del nivel 1.

Pregunta 16.a.

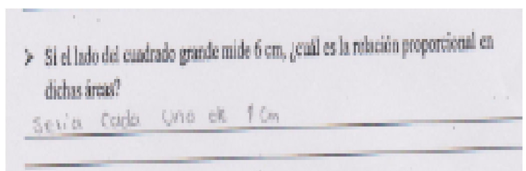

16. Observa las siguientes figuras divididas en □ partes iguales.

➢ ¿Cuántas veces cabe el cuadrado más pequeño en el grande?

Solo una vez

Nota: esta pregunta fue modificada al realizarse a los estudiantes 2 y 3, ya que existió confusión con las gráficas al inicio de la actividad, no comprendieron el contexto de la pregunta, ya que estaba mal elaborada.

Pregunta 16.b.


➢ Si el lado del cuadrado grande mide 6 cm, ¿cuál es la relación proporcional en dichas áreas?

Seria cada uno de 1 cm

Para hallar la relación proporcional en dichas áreas sabiendo que el cuadrado mide 6 cm, la estudiante proporciona un nivel de análisis más acorde con la visión geométrica de la figura dividida en varias partes, continuando en el nivel 1.

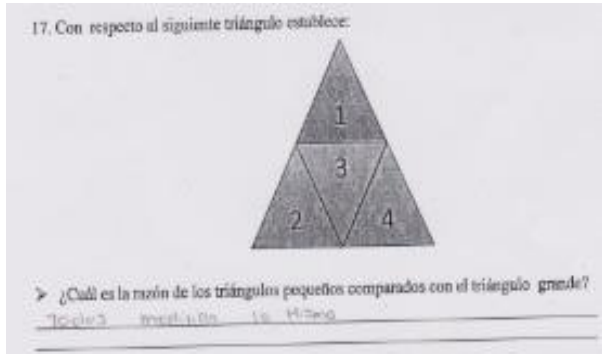
Pregunta 16.c.


➢ ¿Cómo aplicarías la propiedad fundamental con respecto a cada figura?

Se aplicaria dividiendo

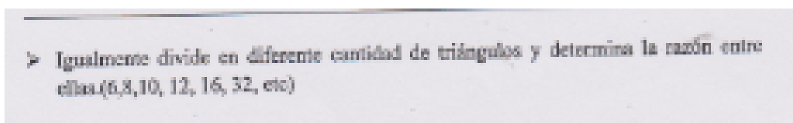
Para el análisis de esta pregunta se deben tener en cuenta conceptos previos a la proporcionalidad para su aplicación, teniendo como consecuencia en la estudiante que sugiere la propiedad fundamental dividiendo y su razonamiento parece ser el concepto sobre razón, sin alcanzar todavía otro nivel.

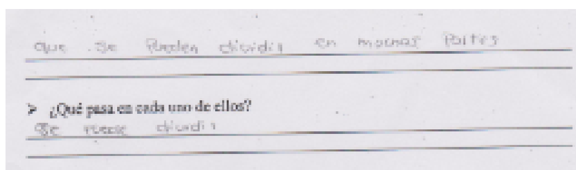
Pregunta 17.a.



Al dividir el triángulo en cuatro partes iguales, la razón la compara con la misma medida entre ellos, identificando solamente las áreas sin comparar o aplicar la razón entre ellos, relacionando el descriptor del nivel 1.

Pregunta 17.b.


➢ Igualmente divide en diferente cantidad de triángulos y determina la razón entre ellas.(6,8,10, 12, 16, 32, etc)

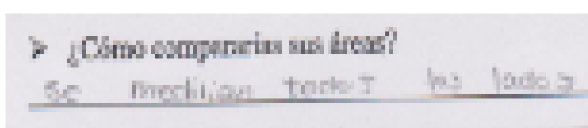

que se pueden dividir en muchas partes

➢ ¿Qué pasa en cada uno de ellos?

se puede dividir

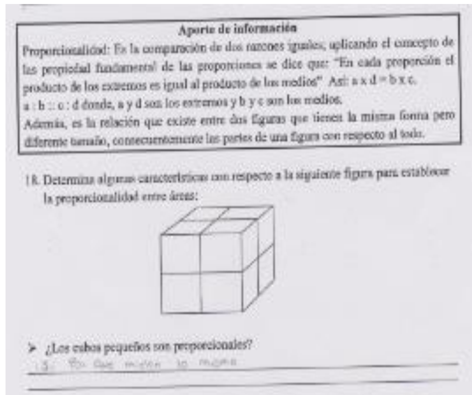
El análisis de esta pregunta es confuso ya que no comprendió lo que se pedía, por lo tanto su respuesta no la concluyó como era debido ya que no realizó los procesos acordes y solo se limitó a contestar que el triángulo se podía dividir en muchas partes, por lo que se puede concluir que no alcanza el nivel de Reconocimiento visual dentro de los descriptores señalados.

Pregunta 17.c.


➢ ¿Cómo compararías sus áreas?

Con la pregunta ¿cómo compararías sus áreas? la estudiante sólo compara áreas si las mide, eso significa que su razonamiento geométrico no alcanza el descriptor ubicado para el nivel 1 por falta de visualización.

Pregunta 18.a.



Aporte de información

Proporcionalidad: Es la comparación de dos razones iguales, aplicando el concepto de las propiedad fundamental de las proporciones se dice que: "En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios" Así: a x d = b x c.
a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.
Además, es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño, consecuentemente las partes de una figura con respecto al todo.

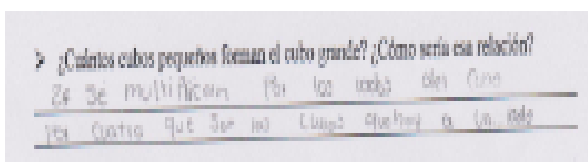
18. Determina algunas características con respecto a la siguiente figura para establecer la proporcionalidad entre áreas:

➢ ¿Los cubos pequeños son proporcionales?

Nota: Aparece un aporte de información sobre el concepto de proporcionalidad y la propiedad fundamental de las proporciones.

Para esta pregunta después de analizar algunas características de la figura planteada puede decir que los cubos pequeños son proporcionales porque miden lo mismo. Al parecer, Camila alcanza a visualizar la figura y relaciona la proporcionalidad entre las áreas alcanzando para esta pregunta el descriptor del nivel 2.

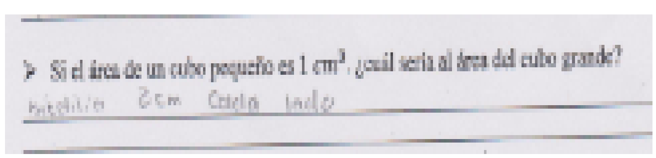
Pregunta 18.b.



➢ ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande? ¿Cómo sería esa relación?

La estudiante afirma que el cubo está conformado por 24 cubos pequeños, se considera que el análisis ha sido errado ya que contó los lados del cubo mas no el cubo como tal; esto significa que no relaciona el área de una figura plana con una tridimensional, su razonamiento no permite avanzar a otro nivel, ubicándola en el nivel 0 o pre descriptivo.

Pregunta 18.c.



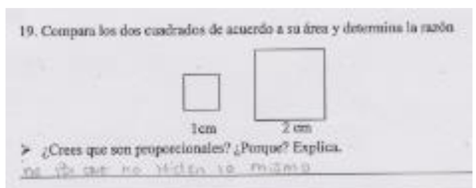
➢ Si el área de un cubo pequeño es 1 cm^2, ¿cuál sería al área del cubo grande?

Sabiendo que el área de una cara del cubo pequeño es un 1cm², esta pregunta evidencia que comprende los conceptos de área del lado de un cubo, permitiendo alcanzar los descriptores del nivel de reconocimiento visual.

Pregunta 18.d.

No relaciona el concepto de proporcionalidad, ya que manifiesta que todos miden lo mismo, sin tener argumentos válidos para su respuesta, no alcanza niveles más altos.

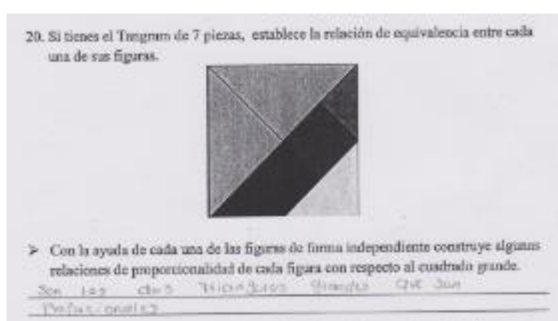
Pregunta 19.



Con respecto a la pregunta de comparación entre áreas de dos cuadrados ¿cree que son proporcionales y por qué? Camila no identifica la proporcionalidad entre figuras ya que en su análisis no permite comprender la igualdad entre dos figuras, por lo tanto, no podría existir proporcionalidad, solo reconoce las figuras aplicando descriptores de nivel 0.

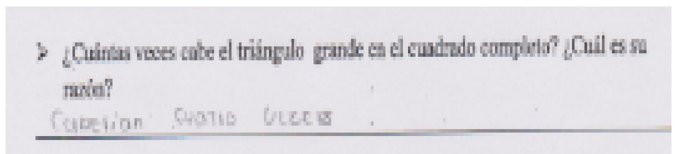
Pregunta 20. Para contestar este bloque de preguntas se realizó una actividad manual donde cada estudiante tiene la forma de manipulación del material concreto.

Pregunta 20.a.



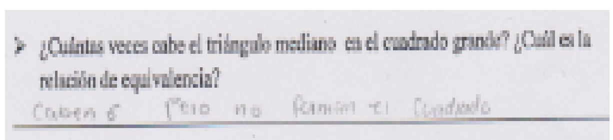
Al construir algunas relaciones de proporcionalidad de cada figura con respecto al cuadrado grande, no logra relacionar la proporcionalidad en cuanto a las diferentes formas de las figuras, sólo utilizan los dos triángulos grandes como la manera de indicar que son iguales y no comprende la relación con el cuadrado grande, cumpliendo descriptores del nivel 0. Por lo tanto, no reconoce las proporciones ni la aplica a otras figuras, esto significa que su lenguaje no es apropiado a un nivel de razonamiento avanzado.

Pregunta 20.b.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo? ¿Cuál es su razón?

Mostrar cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo y cuál es su razón, la estudiante desde la perspectiva geométrica alcanza los pasos de construcción y manipulación de manera acertada, pero no calcula la razón, lo que hace que la ubique en el nivel 0 para sus respetivos descriptores.

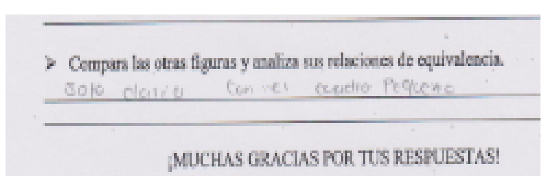
Pregunta 20.c.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿Cuál es la relación de equivalencia?

Caben 6 pero no forman el cuadrado

A la pregunta ¿cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande y su relación de equivalencia?, la estudiante no acierta al decir que cabe 6 veces pero no forman el cuadrado completo; falta comprensión para alcanzar niveles más altos. Solo cumple descriptores del nivel 0.

Pregunta 20.d.

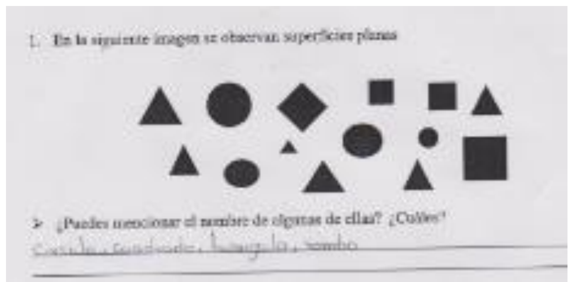

➢ Compara las otras figuras y analiza sus relaciones de equivalencia.

¡MUCHAS GRACIAS POR TUS RESPUESTAS!

Para esta última pregunta, se sugiere que al azar los estudiantes analicen la comparación y las relaciones de equivalencia entre figuras, para lo cual Camila no posee el nivel de razonamiento apropiado para tal análisis al no comprender inicialmente la proporcionalidad y las relaciones de equivalencia necesarias para su razonamiento.

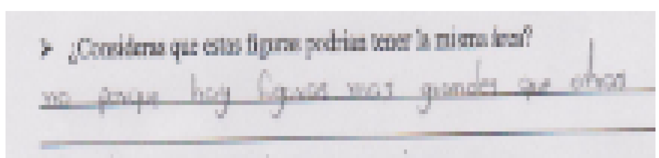
4.3.2. ESTUDIANTE JUAN

Pregunta 1.a.



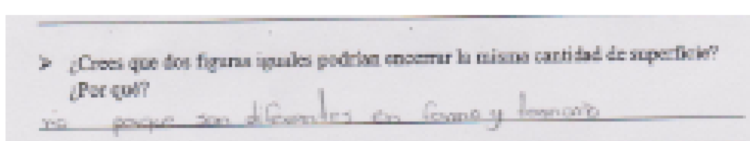
Esta pregunta inicial la contesta con mucha seguridad y correctamente ya que tiene algunos conceptos previos bien definidos y alcanza a mencionar el nombre de varias figuras.

Pregunta 1.b.



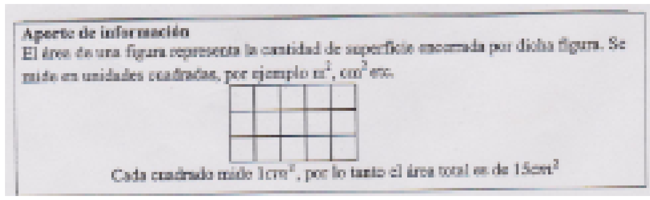
Frente al descriptor del nivel 0, reconoce cuando una figura representa áreas de diferentes tamaños, logra afirmar que no tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Pregunta 1.c.



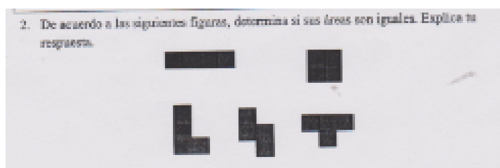
No relaciona su respuesta al afirmar que dos figuras que son diferentes en forma y tamaño no encierran la misma cantidad de superficie; no interpreta la pregunta que se hace sobre dos figuras, por lo tanto no tiene el razonamiento sobre el descriptor del nivel 0 sobre la pregunta asignada.

Aporte de información:



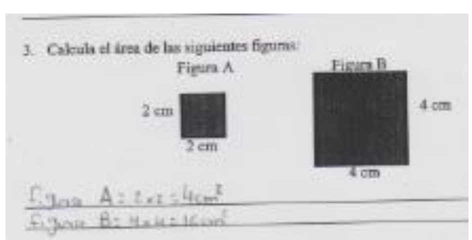
Se presentó un aporte de información sobre el concepto de área y su respectivo ejemplo para las preguntas posteriores.

Pregunta 2.



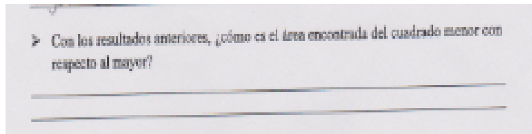
Con respecto a las figuras dadas, determinar si sus áreas son iguales, teniendo en cuenta que la perspectiva geométrica apunte inicialmente a lograr el nivel 0, descriptor 1. Juan comprendió el significado que relaciona la figura con el área al afirmar que sí son iguales porque tienen la misma cantidad de cuadrados.

Pregunta 3.a.



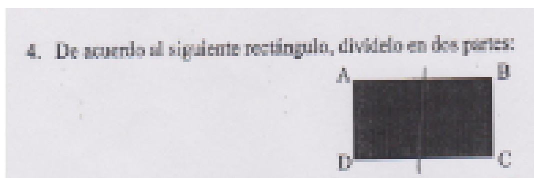
Se pedía calcular el área de dos cuadrados mediante una figura dada con sus respectivas medidas, la cual para el estudiante fue muy clara ya que respondió de manera fácil realizando la multiplicación de sus lados (Lado x lado), lo que permite la asimilación al concepto en el descriptor de nivel 0.

Pregunta 3.b.


➢ Con los resultados anteriores, ¿cómo es el área encontrada del cuadrado menor con respecto al mayor?

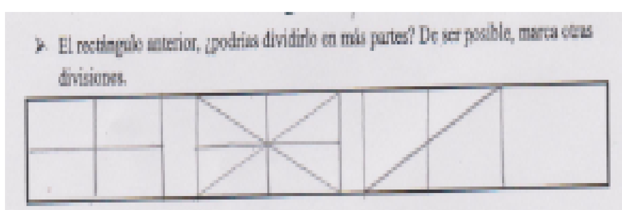
Ahora, con los cálculos anteriores deben reconocer la representación de áreas de diferentes tamaños, dando como respuesta en común la diferencia entre los resultados numéricos y la figura propiamente vista, por lo tanto, el estudiante se abstuvo de contestar o no sabe responder.

Pregunta 4.a.


4. De acuerdo al siguiente rectángulo, divídelo en dos partes:

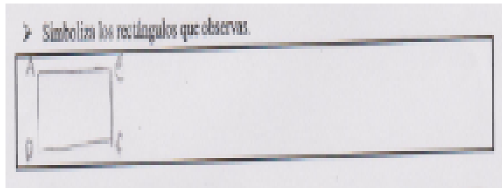
Dado un rectángulo se pide dividirlo en dos partes, a lo que responde como trazar una línea por la mitad que sobresale de la figura para mayor visualización, dando claridad al concepto y cumpliendo los descriptores del nivel 0 o predescriptivo.

Pregunta 4.b.


➢ El rectángulo anterior, ¿podrías dividirlo en más partes? De ser posible, marca otras divisiones.

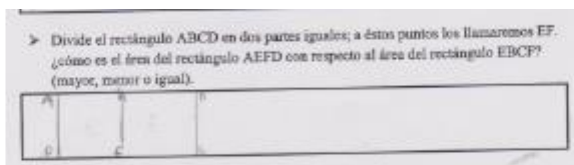
Se da continuación a la pregunta anterior que abarca la división del rectángulo en varias partes, a lo que contesta de diferentes formas; realiza diferentes divisiones sin apropiarse de la continuidad de la pregunta señalando solamente líneas dentro del rectángulo en diferentes direcciones, aunque también se puede pensar que logre asimilar el concepto de área y proporción de acuerdo a la figura construida para definir los descriptores del nivel 0.

Pregunta 4.c.



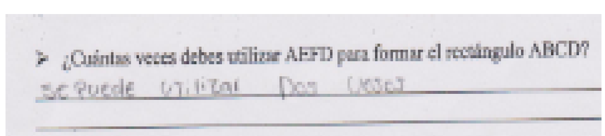
Al contestar, hubo dificultad en asociar el concepto, por lo que no realizó la secuencia de la pregunta al anotar una respuesta sin fundamento y solo simboliza los cuatro vértices de un rectángulo sin realizar las divisiones iniciales del rectángulo; esto significa que no posee comprensión para la identificación desde una perspectiva geométrica de una figura como parte del objeto de estudio, cumpliendo descriptores del nivel 0, sin permitir al estudiante avanzar en los niveles de pensamiento.

Pregunta 4.d.



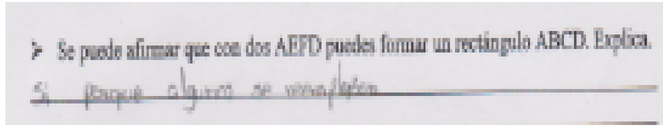
Se propone dividir el rectángulo ABCD en dos partes iguales y llamar a estos dos nuevos puntos EF. Se debe comparar el área de una mitad con respecto al área de la otra, por lo que grafica la figura correspondiente al enunciado pero no responde a la relación con respecto al área; por lo tanto, esta pregunta lo identifica en el descriptor 0 o predescriptivo.

Pregunta 4.e.



En cuanto a esta pregunta, responde dos veces de manera acertada ya que logra fundamentarse por medio de la visualización geométrica, alcanzando el nivel de Reconocimiento visual.

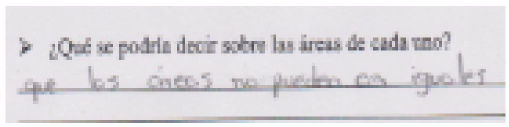
Pregunta 4.f.



➢ Se puede afirmar que con dos AEFD puedes formar un rectángulo ABCD. Explica.

Esta pregunta se realiza en sentido contrario a la anterior dando la explicación pertinente y siguiendo la instrucción de preguntas anteriores lo que determina que al responder sí a la pregunta, confirma la aplicación de la anterior, demostrando su razonamiento para el descriptor del nivel 1.

Pregunta 4.g.

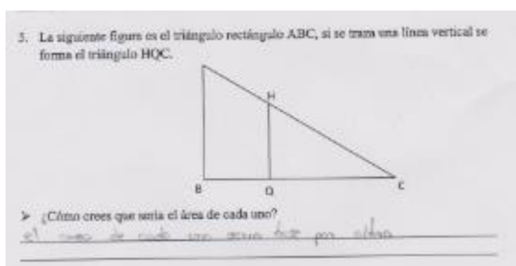


➢ ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?

que los areas no pueden ser iguales

Cuando se pregunta sobre ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?, Juan no conecta la pregunta con el concepto de área ni el reconocimiento de la simbología, existiendo así poca comprensión al contestar de manera independiente el concepto, reconociendo poco el proceso geométrico para el nivel objeto de estudio.

Pregunta 5.a.

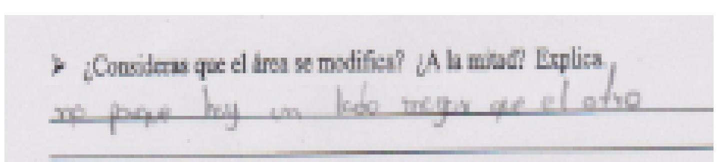


5. La siguiente figura es el triángulo rectángulo ABC, si se traza una línea vertical se forma el triángulo HQC.

➢ ¿Cómo crees que sería el área de cada uno?

A la pregunta sobre el área del triángulo dividido en dos partes, procura identificar con los datos de base por altura pero queda inconclusa su justificación, sin lograr alcanzar el descriptor 2 del nivel 0.

Pregunta 5.b.

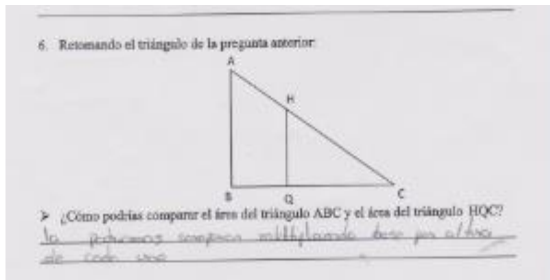


➢ ¿Consideras que el área se modifica? ¿A la mitad? Explica.

no porque hay un lado mayor que el otro

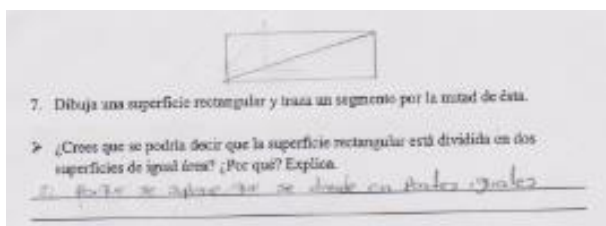
Con respecto a la pregunta si se modifica su área a la mitad, afirma que no, porque hay un lado mayor que el otro, llegando a la conclusión que la figura geométrica (triángulo) ya presenta mayor dificultad de comprensión, cumpliendo dentro del descriptor 2 del nivel 0.

Pregunta 6.



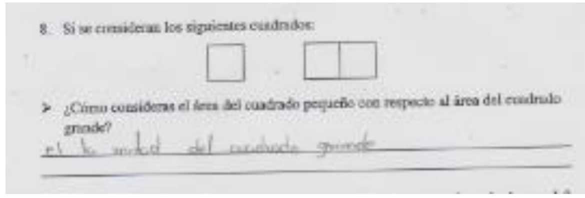
Para esta pregunta sobre comparación de áreas, continúa aplicando la fórmula y se llega a la conclusión de que el estudiante lo haría por separado cada triángulo, concepto que se puede determinar para llegar a la comprensión de la razón entre áreas determinado en el nivel 1 o de reconocimiento visual.

Pregunta 7.



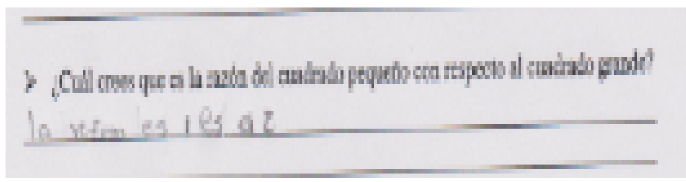
Se pide dibujar una superficie rectangular y dividirla por la mitad para identificar si las superficies tienen la misma área, su respuesta a esta pregunta es acertada de acuerdo al descriptor 3 del nivel 1, ya que considera que las superficies tienen la misma área porque está dividida en partes iguales, por lo tanto, realiza su análisis de la figura completa con respecto a sus divisiones.

Pregunta 8.a.



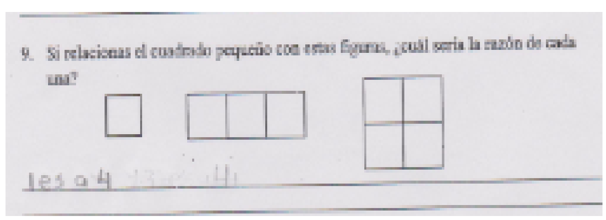
De acuerdo a las figuras planteadas, logra afirmar que el área del cuadrado pequeño es la mitad con respecto al área del cuadrado grande, llegando así a una comprensión acertada para los descriptores del nivel 1 por medio de la comparación de áreas para determinar la razón y el reconocimiento de las veces que una figura contiene a otra.

Pregunta 8.b.



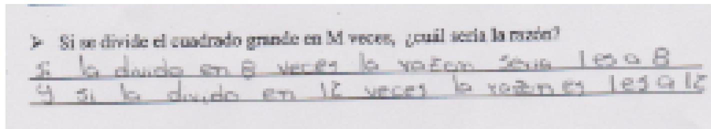
Cuando se pregunta por la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande, el estudiante responde de forma consciente de su conocimiento ya que aporta a su respuesta la simbología que identifica las razones como 1 es a 2, concluyendo su comprensión del concepto objeto de estudio del descriptor de nivel 1.

Pregunta 9.a.



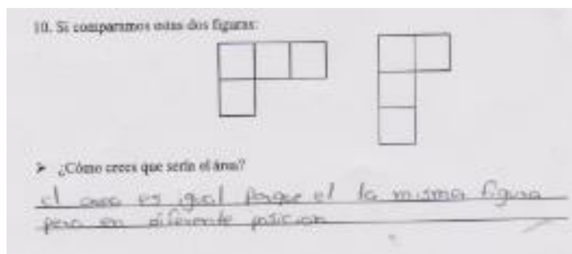
Al relacionar el cuadrado pequeño con las otras figuras, Juan parece comprender la razón pero sólo contesta 1 es a 4 sin determinar la primera figura que aparece dividida en tres partes, aplicando el reconocimiento de las razones de una figura, por lo que igualmente alcanza descriptores del nivel de reconocimiento visual.

Pregunta 9.b.



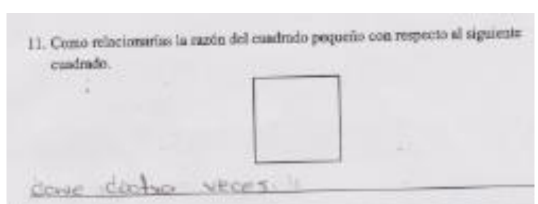
Con relación a dividir un cuadrado en M veces y buscar su razón, afirma el reconocimiento de la razón para su estudio cuando contesta que al dividirlo en 8 veces la razón es: 1 es a 8 y si lo divide en 12 veces la razón es: 1es a 12; se consideran razonamientos bien fundamentados que ubican al estudiante en descriptores del nivel de reconocimiento visual.

Pregunta 10.



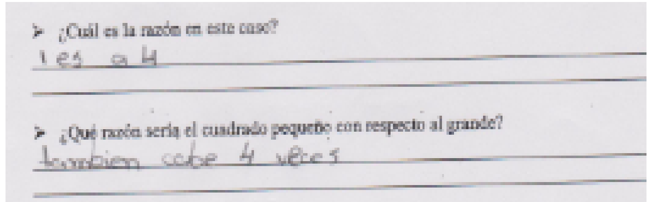
Al comparar las áreas de dos figuras desde una perspectiva geométrica, el estudiante comprende el concepto de área mediante atributos físicos de una figura para el descriptor de nivel 1 o reconocimiento visual, lo que conllevó a responder que las áreas de las figuras son iguales, ya que es la misma figura pero en diferente posición.

Pregunta 11.a.



Plantea la relación de la razón del cuadrado pequeño con respecto a un cuadrado más grande, lo que acierta en su visualización afirmando que el cuadrado pequeño cabe 4 veces en el grande. El razonamiento coincide con los descriptores de nivel 1 de reconocimiento visual.

Pregunta 11.b.y c.



➢ ¿Cuál es la razón en este caso?

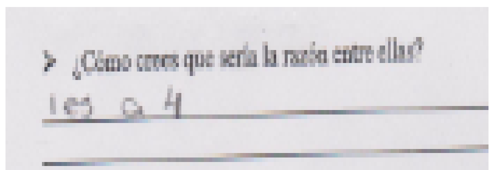
1 es a 4

➢ ¿Qué razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande?

tambien cabe 4 veces

Estas preguntas ¿Cuál es la razón en este caso? ¿Qué razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande? se han analizado en conjunto a lo que responde el estudiante en su nivel de razonamiento que coincide con los aportes anteriores: 1 es a 4 y cabe cuatro veces, lo que se considera como el número de veces que contiene una figura aplicando el concepto de área de los descriptores del nivel 1.

Pregunta 11.d.

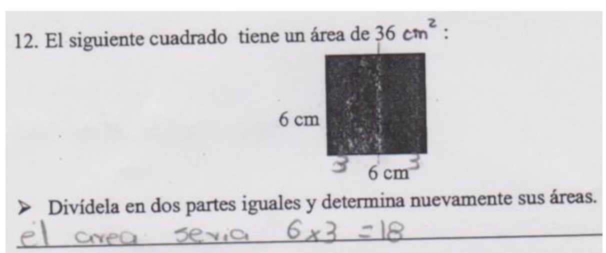


➢ ¿Cómo crees que sería la razón entre ellas?

1 es a 4

¿Cómo crees que es la razón entre ellas? El estudiante continúa su proceso de razonamiento: 1 es a 4, encontrando la razón de manera fácil, cumpliendo descriptores del mismo nivel 1.

Pregunta 12.a.



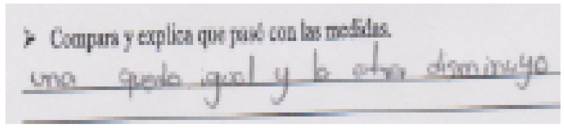
12. El siguiente cuadrado tiene un área de 36 cm^2 :

➢ Divídela en dos partes iguales y determina nuevamente sus áreas.

el area seria 6x3 =18

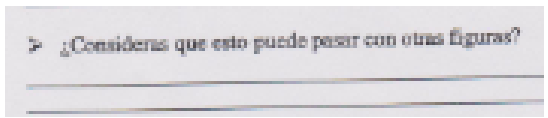
En esta pregunta, desde su perspectiva geométrica, el estudiante identifica un cuadrado con sus medidas de 6cm de lado y lo divide en dos partes iguales para determinar el área de cada rectángulo, lo cual responde acertadamente hallando el área de la figura ya dividida a la mitad y expresa 6x3=18, en este nivel de razonamiento aplica el descriptor 1 del nivel de reconocimiento visual.

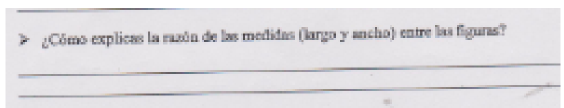
Pregunta 12.b.


➢ Compara y explica que pasó con las medidas.
una quedo igual y la otra disminuyo

Al comparar y explicar que pasó con las medidas de cada una de las áreas, Juan comprendió que una de ellas quedó igual y la otra disminuyó por lo que su razonamiento está ubicado en el descriptor del nivel de reconocimiento visual.

Pregunta12.c y d.

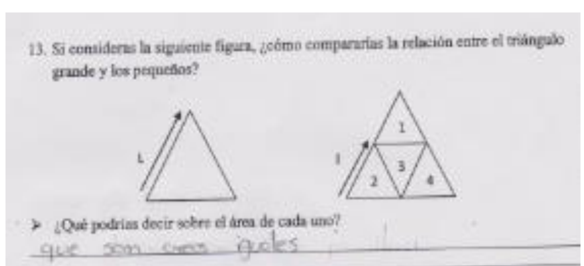

➢ ¿Consideras que esto puede pasar con otras figuras?


➢ ¿Cómo explicas la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras?

Con respecto a estas dos preguntas Juan se abstuvo de responder o no entendió la pregunta.

Pregunta 13. Esta pregunta se ilustra con una figura diferente que es el triángulo dividido en 4 partes iguales para comparar la relación entre el triángulo grande y los pequeños.

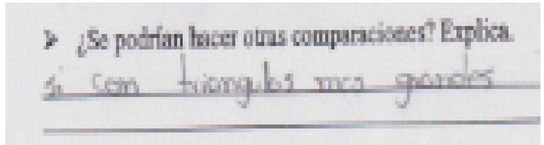
Pregunta 13.a.


13. Si consideras la siguiente figura, ¿cómo compararías la relación entre el triángulo grande y los pequeños?

➢ ¿Qué podrías decir sobre el área de cada uno?
que son areas igales

¿Qué se puede decir sobre el área de cada uno? Su respuesta relaciona que son áreas iguales comprendiendo en su razonamiento la división exacta del triángulo, lo que determina el nivel de reconocimiento visual.

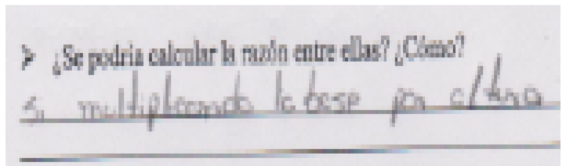
Pregunta 13.b.


➢ ¿Se podrían hacer otras comparaciones? Explica.

si con triangulos mas grandes

Al preguntar si se pueden hacer otras comparaciones aporta en su análisis que sí se puede, considerando su razonamiento en el nivel de reconocimiento visual.

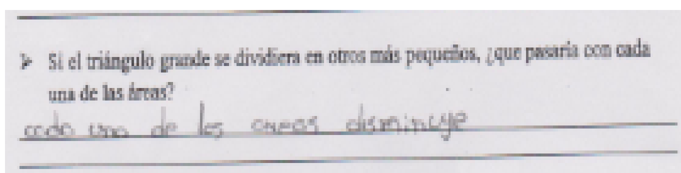
Pregunta 13.c.


➢ ¿Se podría calcular la razón entre ellas? ¿Cómo?

si multiplicando la base por altura

Se podría calcular la razón entre las figuras y ¿cómo?. En su respuesta se nota que la manera fácil es hallando el área, sin alcanzar a comprender el significado de la pregunta, lo que permite cumplir con los descriptores del nivel 0 sin lograr alcanzar otro nivel superior.

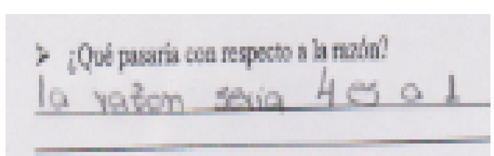
Pregunta 13.d.


➢ Si el triángulo grande se dividiera en otros más pequeños, ¿que pasaría con cada una de las áreas?

cada uno de las areas disminuye

A esta pregunta, Juan responde que si divide el triángulo en otros más pequeños, se disminuiría el área de cada uno de ellos, presentando un razonamiento en el nivel 2 o de Análisis.

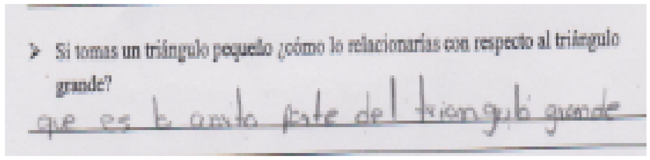
Pregunta 13.e.


➢ ¿Qué pasaría con respecto a la razón?

la razon seria 4 es a 1

Ahora, con respecto a la razón, la respuesta de Juan la describe en el nivel de reconocimiento visual por lo que su respuesta es: 4 es a 1.

Pregunta 13.f.

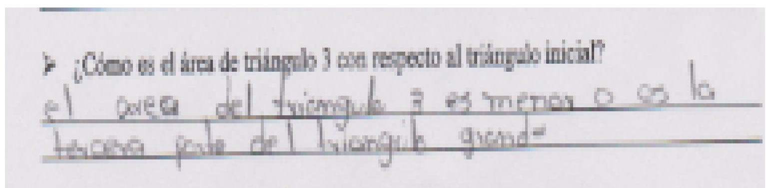


➢ Si tomas un triángulo pequeño ¿cómo lo relacionarías con respecto al triángulo grande?

que es la cuarta parte del triangulo grande

La relación de uno de los triángulos pequeños con respecto al grande, la considera como la cuarta parte del triángulo grande, comprendiendo el descriptor del nivel 2 de análisis.

Pregunta 13. g.

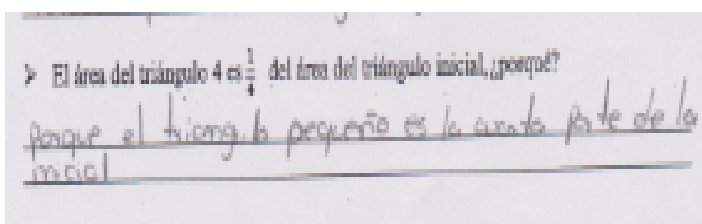


➢ ¿Cómo es el área de triángulo 3 con respecto al triángulo inicial?

el area del triangulo 3 es menor o es la tercera parte del triangulo grande

Tomamos el área del triángulo 3 para compararlo con el triángulo inicial, tal vez sin pensar en el triángulo grande, por lo tanto, no tienen claridad en la pregunta o su razonamiento no alcanza a cumplir con el descriptor de nivel 2, ya que afirma que es la tercera parte del triángulo inicial teniendo una confusión con respecto a su análisis.

Pregunta 13. h.

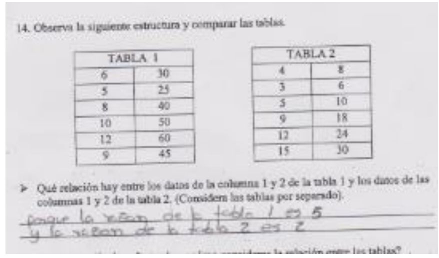


➢ El área del triángulo 4 es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo inicial, ¿porqué?

porque el triangulo pequeño es la cuarta parte de la macl

El estudiante afirma que el triángulo es dividido en cuatro partes o es la cuarta parte del inicial, llegando a la conclusión de que reconoce la razón entre áreas de una figura con esta característica, aportando un razonamiento más claro de los descriptores del nivel de análisis.

Pregunta 14.a.



14. Observa la siguiente estructura y comparar las tablas.

TABLA 1	
6	30
5	25
8	40
10	50
12	60
9	45

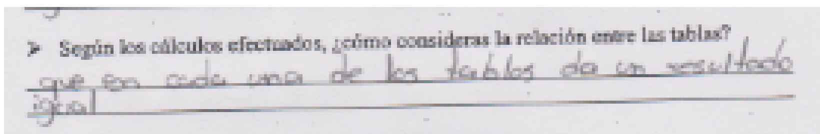
TABLA 2	
4	8
3	6
5	10
9	18
12	24
15	30

➢ Qué relación hay entre los datos de la columna 1 y 2 de la tabla 1 y los datos de las columnas 1 y 2 de la tabla 2. (Considera las tablas por separado).

porque la razon de la tabla 1 es 5
y la razon de la tabla 2 es 2

Al mirar la figura, el estudiante compara las dos tablas y confirma una aproximación al concepto de razón, al observar el factor de multiplicación en cada una de ellas, lo que se considera que es apto para el descriptor del nivel 2 o de Análisis.

Pregunta 14.b.

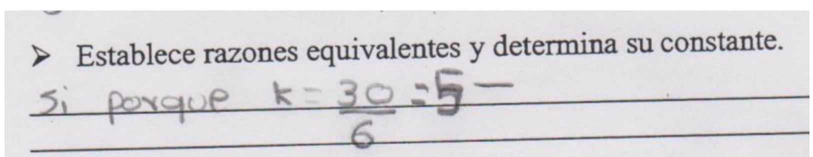


➢ Según los cálculos efectuados, ¿cómo consideras la relación entre las tablas?

que en cada una de las tablas da un resultado igual

La relación entre las tablas la puede identificar como una constante de multiplicación que es 5 y 2, por lo que se deduce que maneja algunos conceptos sobre el tema objeto de estudio, a esta pregunta alcanza los descriptores del nivel de Análisis.

Pregunta14.c.

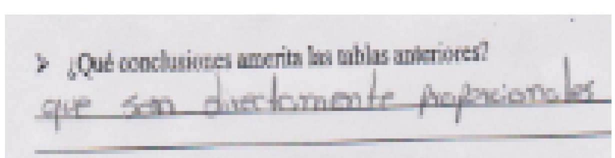


➢ Establece razones equivalentes y determina su constante.

Si porque $k = \frac{30}{6} = 5$

Para establecer las razones equivalentes y determinar la constante, el estudiante realiza de forma razonable los descriptores del nivel de Análisis.

Pregunta 14.d.

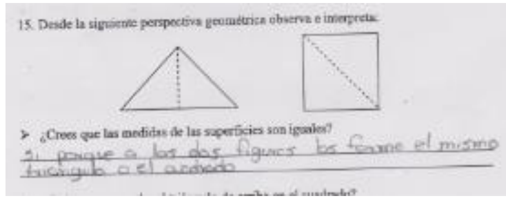


➢ ¿Qué conclusiones amerita las tablas anteriores?

que son directamente proporcionales

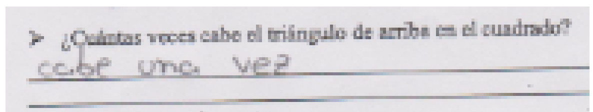
Su respuesta presenta un nivel de razonamiento en los descriptores del nivel de Análisis al comprender otras estructuras para compararlas.

Pregunta 15.a.



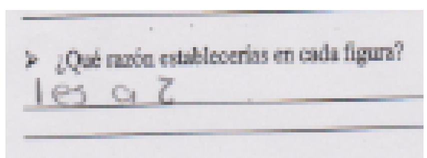
El estudiante contesta que son iguales porque forman el mismo triángulo o el cuadrado, teniendo una perspectiva geométrica alcanzando descriptores para el nivel 2.

Pregunta 15.b.



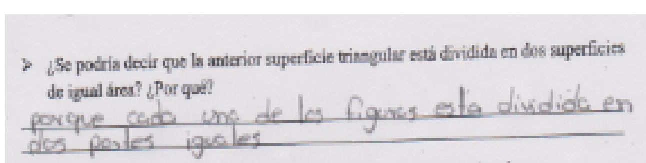
La consideración del estudiante refleja el buen razonamiento para analizar figuras geométricas cumpliendo los descriptores del nivel 2 en su razonamiento.

Pregunta 15.c.



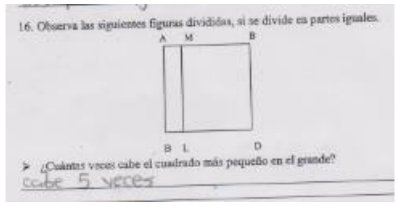
La razón que establece es: 1 es a 2, ya que cada una de las figuras está dividida en la mitad, esto quiere decir que su análisis es consecuente con los datos objeto de estudio y cumple con los descriptores del nivel 2 o de Análisis.

Pregunta 15.d.



El análisis se realiza de forma afirmativa y su explicación es que ve la figura dividida en dos partes iguales, lo que se considera que sus áreas también son iguales, lo que conlleva a pensar que sigue avanzando en su razonamiento para alcanzar otro nivel, por lo tanto, cumple descriptores del nivel de Análisis.

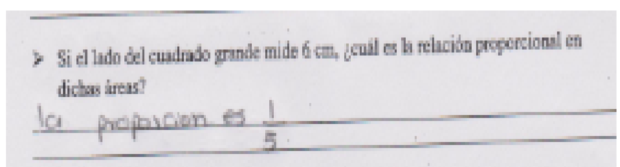
Pregunta 16.a.



Nota: esta pregunta fue modificada al realizarse a los estudiantes 2 y 3, ya que existió confusión con las gráficas al inicio de la actividad; no comprendieron el contexto de la pregunta, ya que estaba mal elaborada.

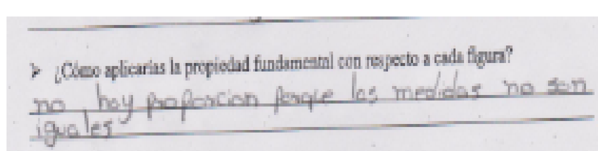
Para más claridad a la pregunta, Juan tentativamente midió el espacio del cuadrado grande para completar la figura con el cuadrado pequeño, dando lugar a señalarlo 5 veces, por lo que logra alcanzar un nivel de Análisis y comprensión del concepto.

Pregunta 16.b.



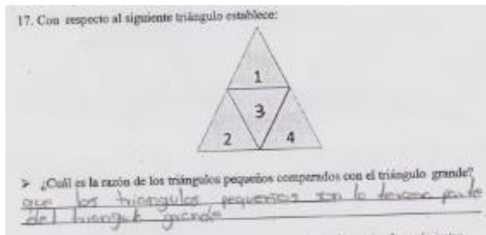
Para hallar la relación proporcional en dichas áreas sabiendo que el cuadrado mide 6 cm de lado, el estudiante afirma que la proporción es 1/5 teniendo en cuenta la pregunta anterior, pero deja de lado la medida que le plantea la pregunta que es 6 cm, concluyendo que como cabe 5 veces entonces la proporción es 1/5, por este motivo su razonamiento alcanza el nivel 2 de Análisis.

Pregunta 16.c.



Para la respuesta de esta pregunta, se deben tener en cuenta conceptos previos a la proporcionalidad para su aplicación, por lo tanto, no existe un razonamiento apropiado para el objeto de estudio por lo que solo cumple descriptores del nivel 2 ya que no alcanza a identificar la proporcionalidad.

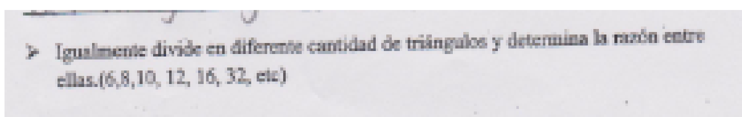
Pregunta 17.a.

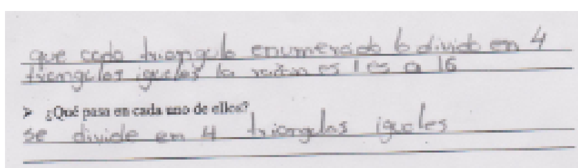

17. Con respecto al siguiente triángulo establece:

➢ ¿Cuál es la razón de los triángulos pequeños comparados con el triángulo grande?
que los triangulos pequeños son la tercera parte del triangulo grande

Al dividir el triángulo en cuatro partes iguales, el estudiante habla de la tercera parte del triángulo grande sin identificar su división en cuatro partes iguales, lo que quiere decir que no comprende de manera adecuada la pregunta, así se considera que cumple descriptores del nivel 1.

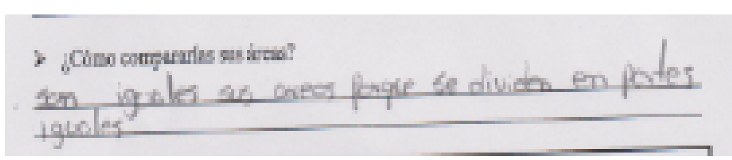
Pregunta17.b.


➢ Igualmente divide en diferente cantidad de triángulos y determina la razón entre ellas.(6,8,10, 12, 16, 32, etc)


que cada triangulo enumerado lo divido en 4 triangulos iguales la razón es 1 es a 16
➢ ¿Qué pasa en cada uno de ellos?
se divide en 4 triangulos iguales

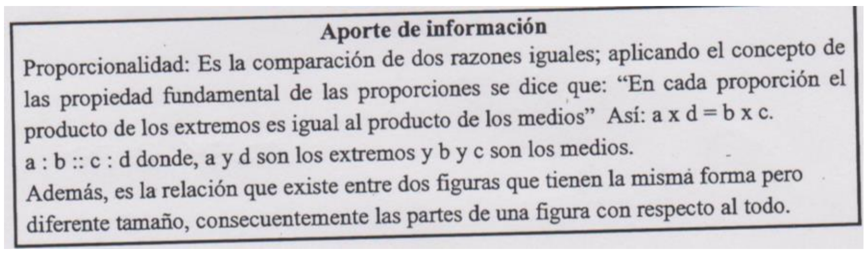
El análisis de esta pregunta la interpreta teniendo en cuenta un solo aspecto numérico, y lo divide en 4 partes llegando así a concluir que la razón es: 1 es a 16, por lo que su razonamiento puede estar acorde con los descriptores del nivel 2 de Análisis.

Pregunta 17.c.

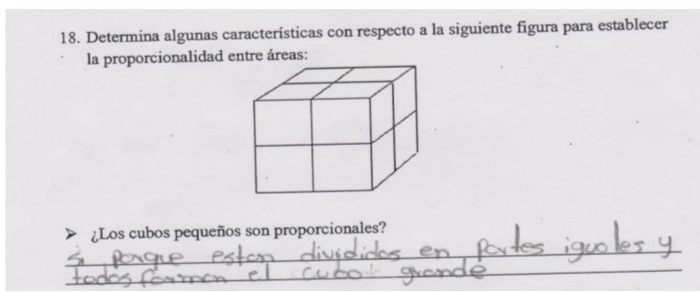

➢ ¿Cómo compararías sus áreas?
son iguales sus areas porque se dividen en partes iguales

Con la pregunta ¿Cómo compararías sus áreas? Juan compara las áreas de acuerdo a la cantidad de divisiones en partes iguales, llegando a considerar una aceptación para los descriptores del nivel de reconocimiento visual.

Nota: Aparece un aporte de información sobre el concepto de proporcionalidad y la propiedad fundamental de las proporciones.

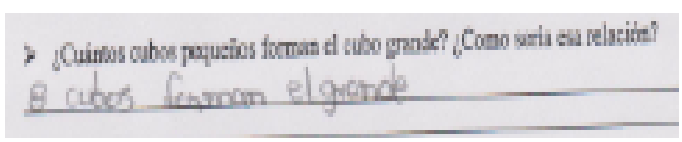

Aporte de información
Proporcionalidad: Es la comparación de dos razones iguales; aplicando el concepto de las propiedad fundamental de las proporciones se dice que: "En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios" Así: a x d = b x c.
a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.
Además, es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño, consecuentemente las partes de una figura con respecto al todo.

Pegunta 18.a.



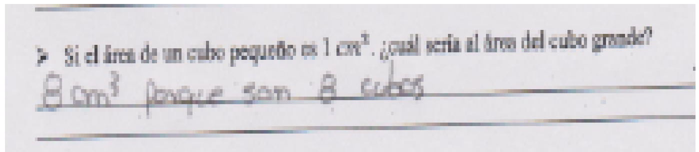
La respuesta a esta pregunta, después de analizar algunas características de la figura planteada, puede decir que los cubos pequeños son proporcionales porque miden lo mismo y tienen el mismo tamaño. O sea, que está dividido en partes iguales, por lo que tiene reconocimiento visual y alcanza los descriptores del nivel 1.

Pregunta 18.b.



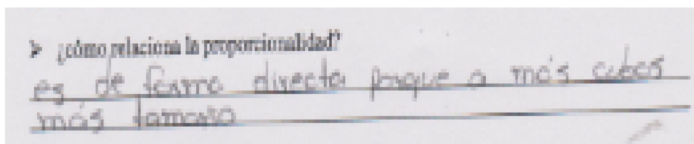
El razonamiento del estudiante si dimensiona la presencia del cubo tridimensional y acierta al decir que 8 cubos conforman el cubo grande, por lo que su razonamiento cumple los descriptores del nivel 2 de Análisis.

Pregunta 18.c.



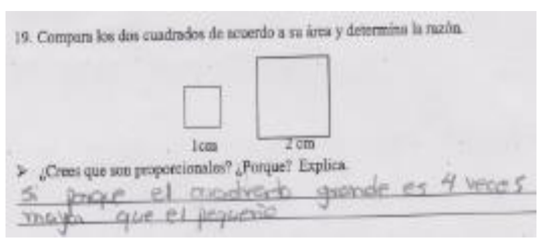
Juan no tiene claro sus conocimientos previos sobre el área de la figura presentada, al relacionar el área de la cara de los cubos con la figura tridimensional, su razonamiento no compara medidas por lo que solo cumple descriptores del nivel 1.

Pregunta 18.d.



En este caso el estudiante entiende la proporcionalidad de forma directa mediante la medida del tamaño de la figura, su análisis cumple descriptores del nivel 2.

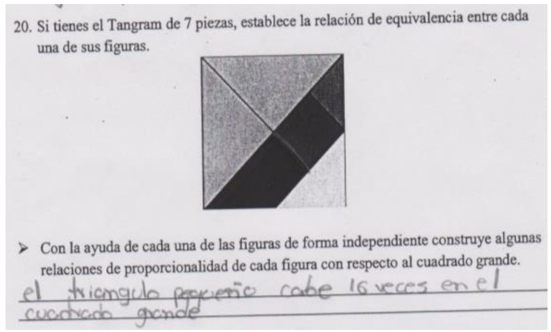
Pregunta 19.



Con respecto a la pregunta de comparación entre áreas de dos cuadrados ¿cree que son proporcionales y porqué? El análisis del estudiante si relaciona proporcionalidad argumentando que el área del cuadrado grande es 4 veces mayor que el área del cuadrado pequeño, lo que se considera como justificación de la proporcionalidad con respecto a áreas entre figuras cumpliendo con el descriptor de nivel 2 de análisis.

Pregunta 20. Para contestar este bloque de preguntas, se realizó una actividad manual donde cada estudiante tiene la forma de manipulación del material concreto.

Pregunta 20.a.

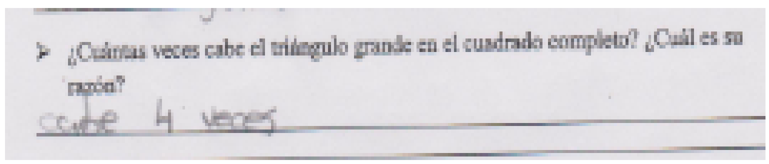

20. Si tienes el Tangram de 7 piezas, establece la relación de equivalencia entre cada una de sus figuras.

➢ Con la ayuda de cada una de las figuras de forma independiente construye algunas relaciones de proporcionalidad de cada figura con respecto al cuadrado grande.

el triangulo pequeño cabe 16 veces en el cuadrado grande

Al construir relaciones de proporcionalidad, Juan coincide en su respuesta con material concreto definiendo solo una forma, ya que compara los triángulos pequeños y comprueba que cabe 16 veces en el cuadrado grande, su nivel de comprensión alcanza los descriptores del nivel 2.

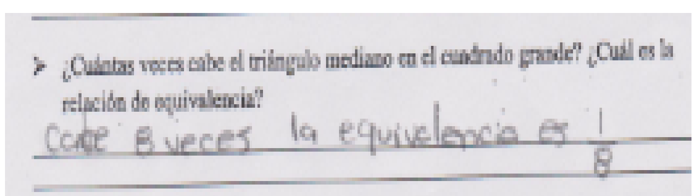
Pregunta 20.b.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo? ¿Cuál es su razón?

cabe 4 veces

Para esta pregunta, el estudiante responde de manera incompleta, ya que realiza los pasos de construcción y manipulación de manera acertada, pero no calcula la razón; por lo tanto, no alcanza un nivel superior quedándose en el descriptor del nivel 1 o reconocimiento visual.

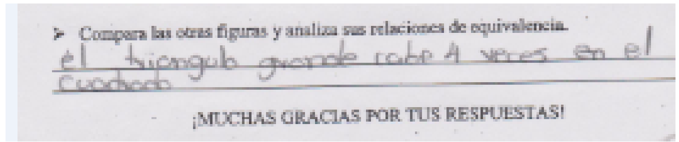
Pregunta 20.c.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿Cuál es la relación de equivalencia?

cabe 8 veces la equivalencia es $\frac{1}{8}$

El estudiante relaciona el triángulo 8 veces y la proporción es 1/8, aplicando en este caso la razón de acuerdo al número de veces que está contenida en la figura, respuesta muy acorde para el descriptor del nivel 2.

Pregunta 20.d.


➢ Compara las otras figuras y analiza sus relaciones de equivalencia.

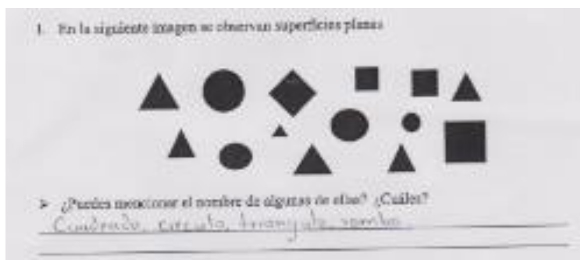
el triangulo grande cabe 4 veces en el cuadrado

¡MUCHAS GRACIAS POR TUS RESPUESTAS!

Esta última pregunta se sugiere que al azar los estudiantes analicen la comparación y las relaciones de equivalencia entre figuras, para lo que el estudiante Juan repite el análisis anterior con el triángulo grande, sin comprender la pregunta.

4.3.3. ESTUDIANTE ANDRÉS

Pregunta 1.a.

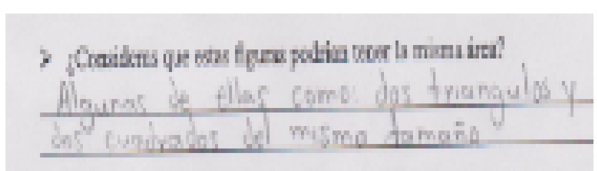

1. En la siguiente imagen se observan superficies planas

➢ ¿Puedes mencionar el nombre de algunas de ellas? ¿Cuáles?

Cuadrado, circulo, triangulo, rombo

El estudiante percibe e identifica de forma clara las figuras planas dentro de conocimientos previamente adquiridos como el nombre de algunas de ellas; conoce el análisis de la pregunta y menciona el nombre de varias figuras. Esta pregunta hace relación a los conocimientos previos adquiridos dentro del objeto de estudio.

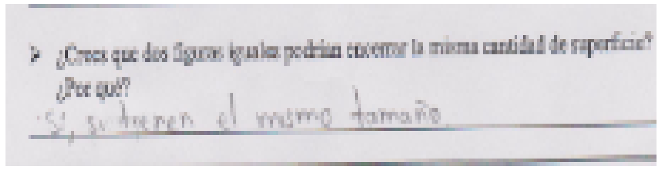
Pregunta 1.b.


➢ ¿Consideras que estas figuras podrían tener la misma área?

Algunas de ellas como dos triangulos y dos cuadrados del mismo tamaño

Para su razonamiento, el estudiante identifica 2 figuras del mismo tamaño; lo que se aprecia en su respuesta es dejar algunas figuras sin interpretación, aunque ubica sus conocimientos en el descriptor del nivel 0 o predescriptivo.

Pregunta1.c.

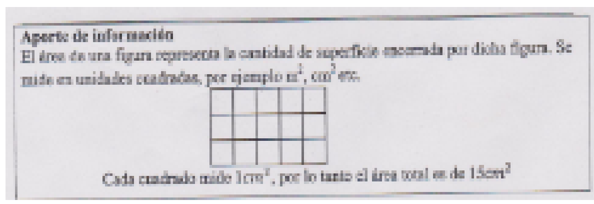


➢ ¿Crees que dos figuras iguales podrían encerrar la misma cantidad de superficie? ¿Por qué?

Sí, si tienen el mismo tamaño

La pregunta se realiza teniendo en cuenta el concepto de área mediante la comparación de dos figuras iguales. Andrés en su análisis, relaciona su respuesta de manera clara al afirmar que dos figuras que sí tienen la misma superficie es porque tienen el mismo tamaño; esto lo ubica en el descriptor del nivel 0 o predescriptivo.

Aporte de información:



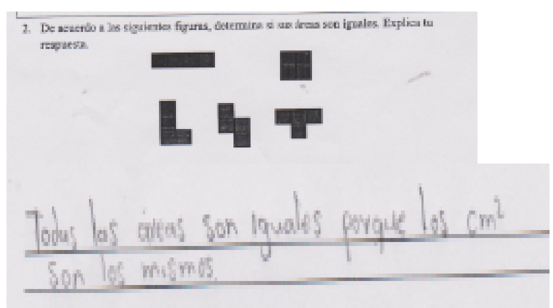
Aporte de información

El área de una figura representa la cantidad de superficie encerrada por dicha figura. Se mide en unidades cuadradas, por ejemplo m^2, cm^2 etc.

Cada cuadrado mide $1cm^2$, por lo tanto el área total es de $15cm^2$

Se presentó un aporte de información sobre el concepto de área y su respectivo ejemplo para las preguntas posteriores.

Pregunta 2.

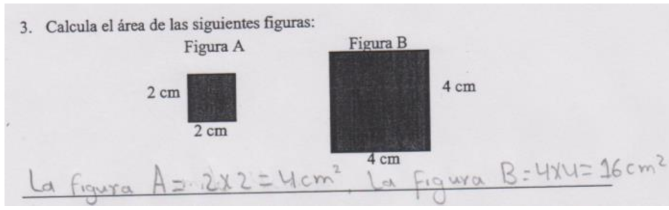


2. De acuerdo a las siguientes figuras, determina si sus áreas son iguales. Explica tu respuesta.

Todas las áreas son iguales porque los cm^2 son los mismos

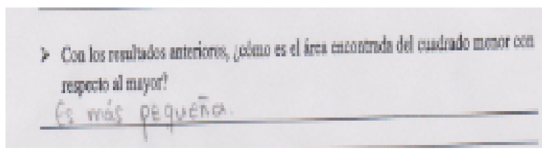
Con respecto a las figuras dadas, los estudiantes deberán determinar si las áreas son iguales de tal forma que sus respuestas, teniendo en cuenta la perspectiva geométrica, apunten inicialmente a lograr descriptores del nivel 0, para lo cual comprende el significado que relaciona la figura con el área al afirmar que sí son iguales porque los centímetros cuadrados son los mismos.

Pregunta 3.



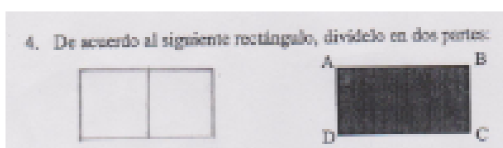
Pregunta 3.a. Se pedía calcular el área de dos cuadrados mediante una figura dada con sus respectivas medidas, la cual para el estudiante fue muy clara ya que las respuestas la acertó de manera fácil, operando la multiplicación de sus lados, lo que permite identificar y reconocer el concepto de área del descriptor de nivel 0.

Pregunta 3.b.



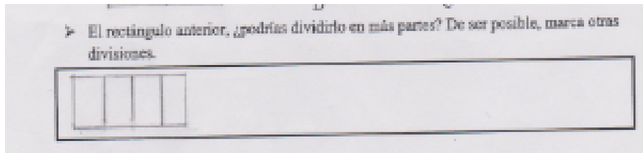
Ahora, con los cálculos anteriores deben reconocer la representación de áreas de diferentes tamaños, dando como respuesta el común que es la diferencia entre los resultados numéricos y la figura propiamente vista, por lo tanto, afirma que es más pequeña, es así como reconoce y comprende los conceptos que están acordes con el nivel de razonamiento del descriptor 0 o predescriptivo.

Pregunta 4.a.



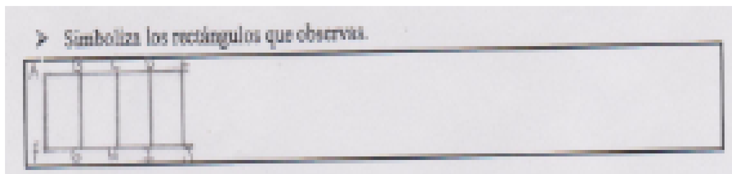
Dado un rectángulo se pide dividirlo en dos partes. La respuesta se identifica con mayor precisión teniendo en cuenta una nueva construcción de lo que se pide, dando claridad al concepto y manteniéndolo bajo su razonamiento en el nivel predescriptivo.

Pregunta 4.b.



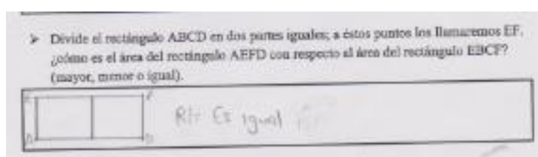
Se da continuación a la pregunta anterior que abarca la división del rectángulo en varias partes, a lo que contesta de manera correcta dando cabida a descriptores del nivel 0 por su comprensión y asimilación de conceptos.

Pregunta 4.c.



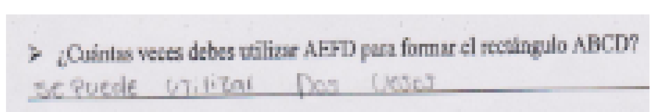
En esta pregunta, el estudiante continúa la secuencia de la actividad y enuncia cada uno de los rectángulos formados de la pregunta anterior, lo que significa que supera el nivel 0 para el objeto de estudio, ya que reconoce y tiene buen nivel de reconocimiento visual, además, se apropia de los conceptos previos.

Pregunta 4.d.



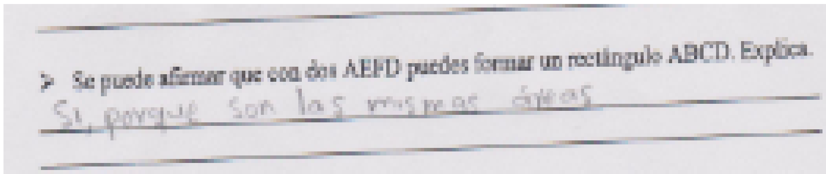
Con respecto a este enunciado, se debe comparar el área de una mitad con respecto a la otra, por lo que el estudiante responde diciendo que es igual, teniendo claros los descriptores del nivel 1 de reconocimiento visual.

Pregunta 4.e.



Andrés responde dos veces acertadamente, ubicándolo en el nivel 1 para los descriptores enunciados.

Pregunta 4.f.

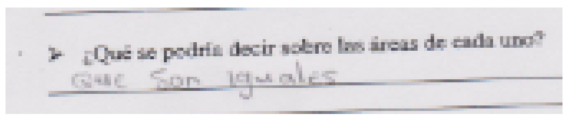


➢ Se puede afirmar que con dos AEFD puedes formar un rectángulo ABCD. Explica.

Si, porque son las mismas áreas

Esta pregunta se realiza en sentido contrario a la anterior, dando la explicación pertinente y siguiendo la instrucción de preguntas anteriores. Andrés tiene muy claro el descriptor del nivel 1 que relaciona el reconocimiento del número de veces contenida en otra figura, aplicando el concepto de área, anticipándose a la pregunta siguiente.

Pregunta 4.g.

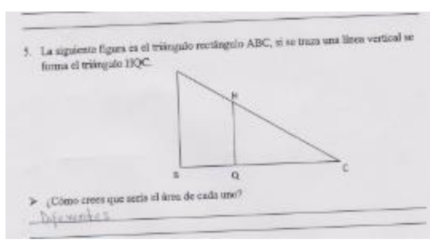


➢ ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?

Que son iguales

Cuando se pregunta sobre ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?, el estudiante inmediatamente responde que son iguales, dando lugar a la comprensión del proceso geométrico y su razonamiento cumple descriptores del nivel 1.

Pregunta 5.a.



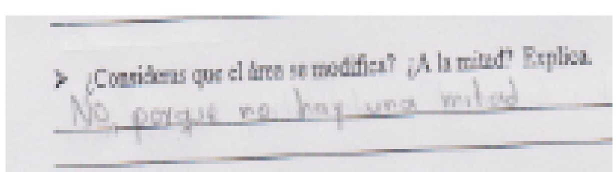
5. La siguiente figura es el triángulo rectángulo ABC, si se traza una línea vertical se forma el triángulo HQC.

➢ ¿Cómo crees que sería el área de cada uno?

Diferentes

A la pregunta sobre el área del triángulo dividido en dos partes, queda inconclusa su justificación, sin cumplir los descriptores del nivel 1de reconocimiento visual.

Pregunta 5.b.

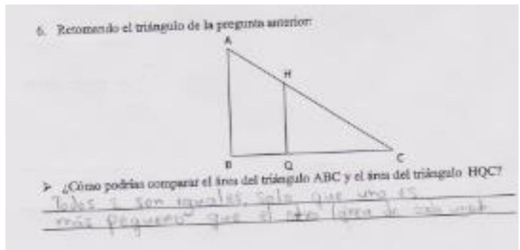


➢ ¿Consideras que el área se modifica? ¿A la mitad? Explica.

No, porque no hay una mitad

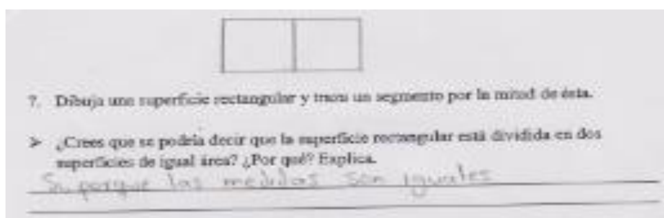
Afirma que no se modifica su área a las medidas porque son diferentes o porque no existe una mitad, llegando a la conclusión que la figura geométrica (triángulo) ya presenta mayor dificultad de comprensión, cumpliendo solo los descriptores del nivel 0.

Pregunta 6.



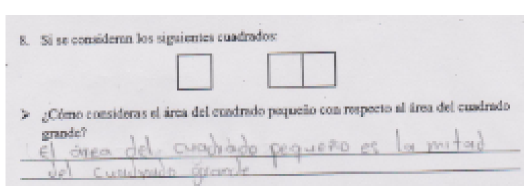
Para esta pregunta sobre comparación de áreas, el estudiante afirma que los dos son iguales, sólo que las áreas una es más pequeña que la otra. Se llega a la conclusión que puede alcanzar la comprensión de la razón entre áreas en el descriptor del nivel 1 de reconocimiento visual.

Pregunta 7.



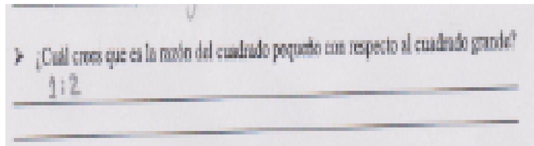
Se pide dibujar una superficie rectangular y dividirla por la mitad para identificar si las superficies tienen la misma área, esto lo interpreta el estudiante teniendo claro el nivel de análisis de la figura por medio de una perspectiva geométrica aplicando los descriptores del nivel 2.

Pregunta 8.a.



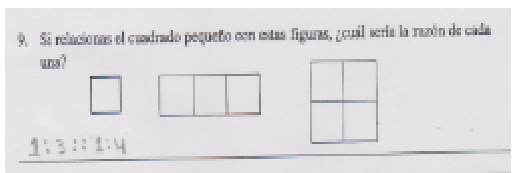
De acuerdo a las figuras planteadas, el estudiante contesta que el área del cuadrado pequeño es la mitad con respecto al área del cuadrado grande, llegando así a una comprensión acertada de descriptores del nivel 2, por medio de la comparación de áreas para determinar la razón y el reconocimiento de las veces que una figura contiene a otra.

Pregunta 8.b.



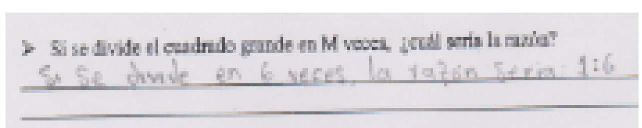
Cuando se pregunta por la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande, en este caso aporta a su respuesta la simbología que identifica las razones como 1:2, concluyendo su comprensión del concepto objeto de estudio para descriptores de nivel 2.

Pregunta 9.a.



Al relacionar el cuadrado pequeño con las otras figuras, el estudiante escribe la relación de la razón en cada uno de ellos de manera acertada como: 1 : 3 :: 1 : 4 dando lugar al reconocimiento de las razones de una figura para el descriptor del nivel 2 de Análisis.

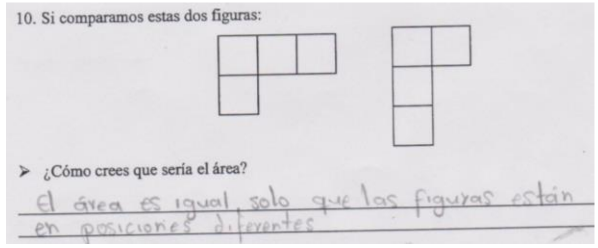
Pregunta 9.b.



.

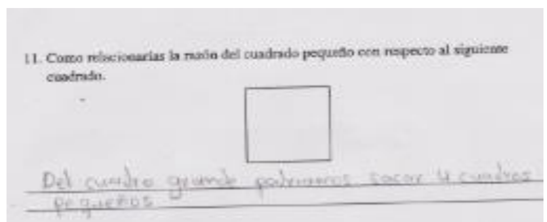
Con relación a dividir un cuadrado en M veces y buscar su razón, Andrés posee un razonamiento muy acorde a los descriptores del nivel 2 de análisis, respondiendo que si lo divide en 6 veces, la razón es 1: 6; se consideran razonamientos bien fundamentados para el nivel objeto de estudio alcanzando un nivel superior.

Pregunta 10.



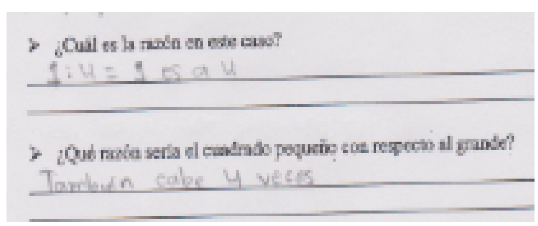
Al comparar las áreas de dos figuras desde una perspectiva geométrica, el estudiante determina su razón mediante atributos físicos ya que lo ubican en el nivel 1 o reconocimiento visual al comprender que el área es igual pero las figuras están en diferentes posiciones.

Pregunta 11.a.



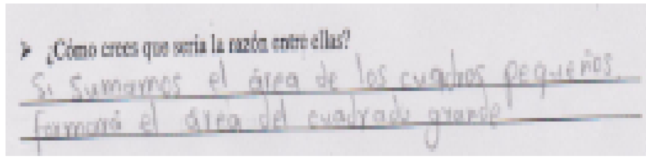
En cuanto a la relación de la razón del cuadrado pequeño con respecto a un cuadrado más grande, considera el estudiante que del grande se pueden sacar 4 cuadros pequeños. Este nivel de razonamiento coincide con los descriptores de nivel 2 de Análisis.

Pregunta 11.b y c.



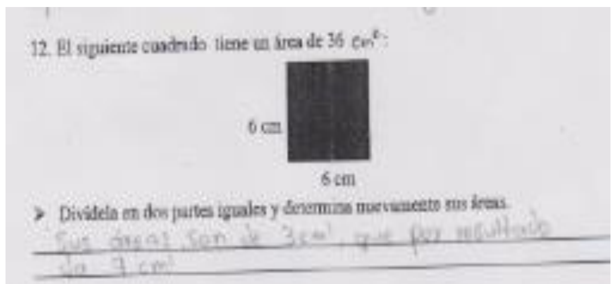
Estas preguntas: ¿Cuál es la razón en este caso? ¿Qué razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande?, se han analizado en conjunto alcanzando al descriptor que establece la razón de acuerdo al número de veces que está contenida una figura en otra, y su aporte es: 1 es a 4 y cabe cuatro veces, lo que se considera en el nivel 2 de Análisis.

Pregunta 11.d.



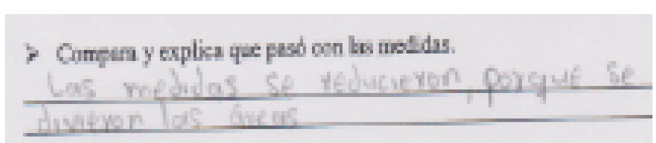
A la pregunta ¿Cómo crees que es la razón entre ellas? el estudiante tiene mejor razonamiento cuando afirma que si se suman las áreas de los cuadros pequeños, formará el área del cuadrado grande, reconociendo la razón entre varias áreas cumpliendo los descriptores del nivel 2 de Análisis.

Pregunta 12.a.



Para responder esta pregunta teniendo una perspectiva geométrica, identifica un cuadrado con sus medidas de 6cm de lado y dividirlo en dos partes para determinar su área y la comparación entre sus medidas, el estudiante considera que el área es la mitad o sea 3 cm, confundiendo la mitad del lado de la figura con la mitad de la medida del área, esto significa la poca comprensión que tiene para el análisis del concepto como tal, por lo que se cumplen descriptores del nivel 1.

Pregunta 12.b.



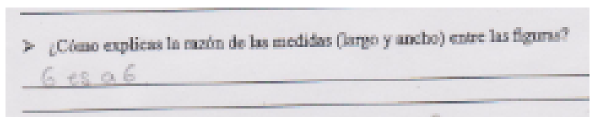
Debe comparar y explicar que pasó con las medidas de cada una de las áreas; su comparación se basa en afirmar que las medidas se redujeron porque se dividieron sus áreas, por lo tanto comprende descriptores del nivel 2.

Pregunta 12.c.


➢ ¿Consideras que esto puede pasar con otras figuras?
Si

Con respecto a la consideración de si esto puede pasar con otras figuras, el estudiante afirma que sí, pero no da una explicación más contundente que aporte al objeto de estudio, esto nos induce a pensar que Andrés posee los razonamientos suficientes para comparar áreas dadas con respecto a modificar la misma figura, por lo que lo ubica en un descriptor de nivel 1 sin alcanzar el análisis del nivel 2.

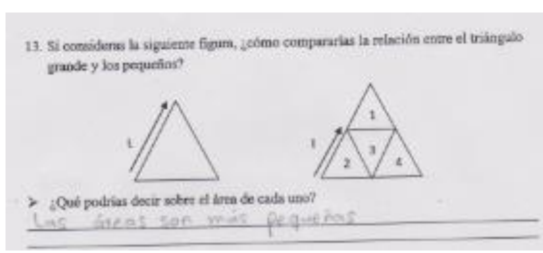
Pregunta 12.d.


➢ ¿Cómo explicas la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras?
6 es a 6.

Para explicar la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras, responde erradamente ya que relaciona una razón 6 es a 6 quedando incompleta también su respuesta, sin alcanzar un nivel superior.

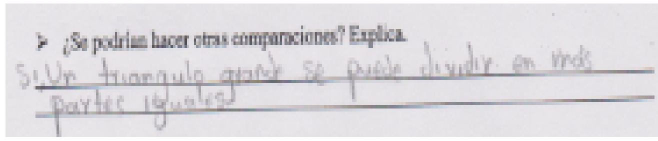
Pregunta 13: Esta pregunta se ilustra con una figura diferente que es el triángulo dividido en 4 partes iguales para comparar la relación entre el triángulo grande y los pequeños.

Pregunta 13.a.


13. Si consideras la siguiente figura, ¿cómo compararías la relación entre el triángulo grande y los pequeños?
➢ ¿Qué podrías decir sobre el área de cada uno?
Las áreas son más pequeñas

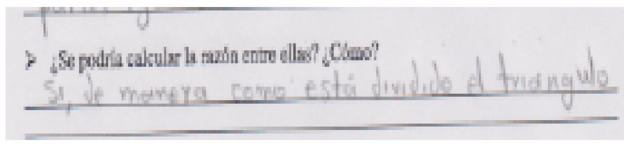
Sus respuestas no fundamentan el análisis de comparación entre áreas ya que interpreta con más facilidad la relación visual de la figura dejando de lado el objeto de estudio de la siguiente forma: relaciona que son áreas más pequeñas considerando descriptores del nivel 1.

Pregunta 13.b.


➢ ¿Se podrían hacer otras comparaciones? Explica.
Si Un triangulo grande se puede dividir en más partes iguales

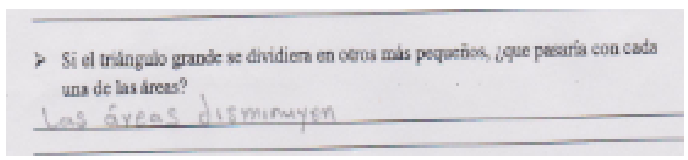
Al preguntar si se pueden hacer otras comparaciones, aunque su respuesta queda incompleta, su comprensión cumple el descriptor del nivel 2 de análisis.

Pregunta 13.c.


➢ ¿Se podría calcular la razón entre ellas? ¿Cómo?
Si, de manera como está dividido el triangulo

En su respuesta, se nota que posee un nivel de reconocimiento visual muy claro, aunque no realiza los cálculos, se puede entender que cumple descriptores del nivel 2 de análisis.

Pregunta 13.d.


➢ Si el triángulo grande se dividiera en otros más pequeños, ¿que pasaría con cada una de las áreas?
Las áreas disminuyen

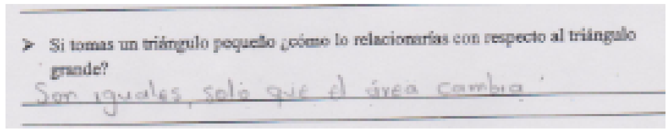
A esta pregunta, el estudiante responde que si dividen el triángulo en otros más pequeños, se disminuiría el área de cada uno de ellos, alcanzando un nivel de razonamiento cumpliendo descriptores del nivel 2 o de Análisis.

Pregunta 13.e.


➢ ¿Qué pasaría con respecto a la razón?
La razón aumenta

Ahora, con respecto a la razón entre áreas y la comparación entre sus medidas, la respuesta es que su razón aumenta, esto quiere decir que comprende el descriptor del nivel de reconocimiento visual.

Pregunta 13.f.

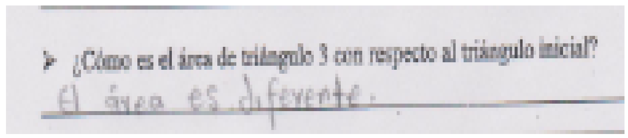


➢ Si tomas un triángulo pequeño ¿cómo lo relacionarías con respecto al triángulo grande?

Son iguales, sólo que el área cambia.

En la relación de uno de los triángulos pequeños con respecto al grande, Andrés afirma que son iguales, sólo que el área cambia; por lo que conlleva a pensar que el análisis desde una visualización geométrica cumple con los descriptores del nivel 2.

Pregunta13.g.

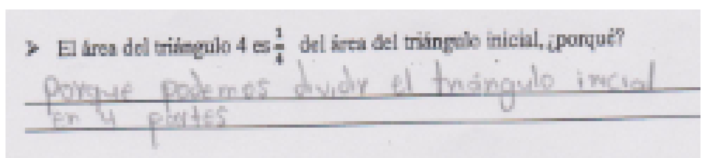


➢ ¿Cómo es el área de triángulo 3 con respecto al triángulo inicial?

El área es diferente.

Tomamos el área del triángulo 3 para compararlo con el triángulo inicial y el estudiante no concluye su respuesta porque simplemente dice que el área es diferente sin alcanzar un nivel superior para descriptores del nivel 1 de reconocimiento visual.

Pregunta 13.h.

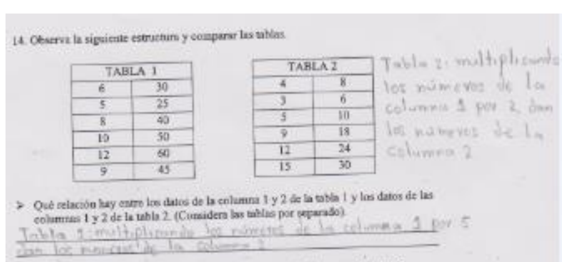


➢ El área del triángulo 4 es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo inicial, ¿porqué?

Porque podemos dividir el triángulo inicial en 4 partes

El estudiante razona de forma más acertada al afirmar que el triángulo es dividido en cuatro partes, cumpliendo descriptores para el nivel 2 de Análisis.

Pregunta 14.a.



14. Observa la siguiente estructura y comparar las tablas.

TABLA 1	
6	30
5	25
8	40
10	50
12	60
9	45

TABLA 2	
4	8
3	6
5	10
9	18
12	24
15	30

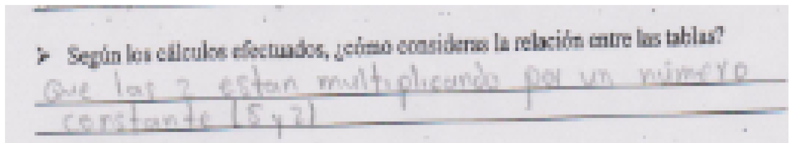
Tabla 2: multiplicando los números de la columna 1 por 2, dan los números de la columna 2

➢ Qué relación hay entre los datos de la columna 1 y 2 de la tabla 1 y los datos de las columnas 1 y 2 de la tabla 2. (Considera las tablas por separado).

Tabla 1: multiplicando los números de la columna 1 por 5 dan los números de la columna 2

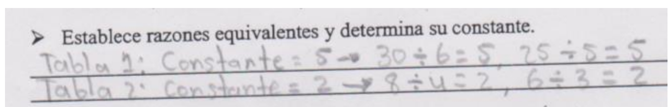
Esta pregunta se relaciona con la comparación de dos tablas y la relación que el estudiante ve entre ellas, por lo que se observa que existe una aproximación al concepto de razón y define el factor de multiplicación en cada una de ellas, alcanzando en su razonamiento descriptores del nivel 2 o de Análisis.

Pregunta 14.b.


➢ Según los cálculos efectuados, ¿cómo consideras la relación entre las tablas?
Que las 2 estan multiplicando por un número constante (5 y 2)

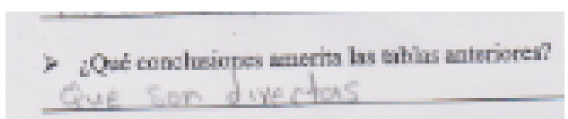
Con su respuesta se puede identificar una constante de proporción que es 5 y 2 por lo que manejan algunos conceptos sobre el tema tratado, llevándolo al nivel 2 en los descriptores objeto de estudio.

Pregunta 14.c.


➢ Establece razones equivalentes y determina su constante.
Tabla 1: Constante = 5 → 30 ÷ 6 = 5, 25 ÷ 5 = 5
Tabla 2: Constante = 2 → 8 ÷ 4 = 2, 6 ÷ 3 = 2

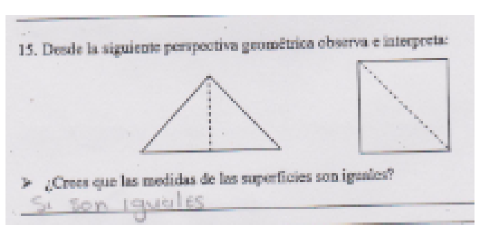
El estudiante posee un nivel 2 cumpliendo con los descriptores para esta pregunta ya que se apropia de estructuras diferentes para reconocer razones equivalentes realizando algunos cálculos.

Pregunta 14.d.


➢ ¿Qué conclusiones amerita las tablas anteriores?
Que son directas

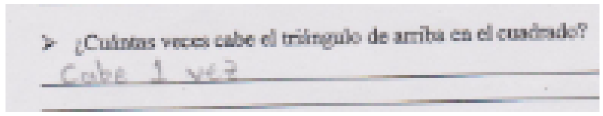
Para establecer las razones equivalentes y determinar la constante, el estudiante identifica la relación de magnitudes directas al identificar su constante y poder realizar las operaciones de preguntas anteriores que cumplen con descriptores del nivel de Análisis.

Pregunta 15.a.


15. Desde la siguiente perspectiva geométrica observa e interpreta:
➢ ¿Crees que las medidas de las superficies son iguales?
Si son iguales

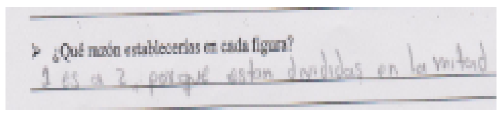
Andrés tiene claro su conocimiento visual al decir que son iguales, por lo tanto, se pueden alcanzar los conceptos y responder bajo descriptores del nivel 2.

Pregunta 15.b.


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo de arriba en el cuadrado?
Cabe 1 vez

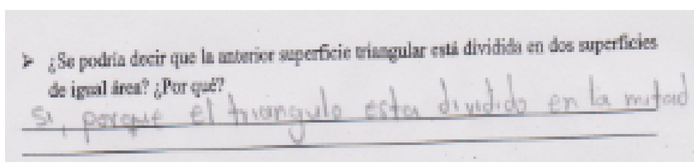
La consideración del estudiante refleja el buen razonamiento para analizar figuras geométricas desde el nivel de reconocimiento visual.

Pregunta 15.c.


➢ ¿Qué razón establecerías en cada figura?
1 es a 2, porque estan divididas en la mitad

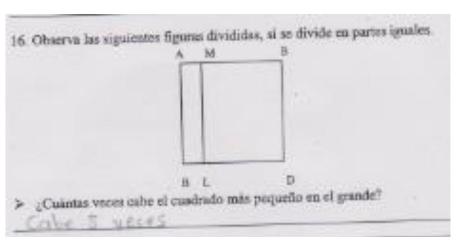
Andrés establece la razón: 1 es a 2, ya que cada una de las figuras está dividida a la mitad, esto quiere decir que su análisis es consecuente con los datos objeto de estudio para los descriptores del nivel 2.

Pregunta 15.d.


➢ ¿Se podría decir que la anterior superficie triangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué?
si, porque el triangulo esta dividido en la mitad

El razonamiento que el estudiante posee en su explicación es que ve la figura dividida en dos partes iguales, lo que se considera que sus áreas también son iguales; con respecto a su respuesta, Andrés se cumple descriptores del nivel 2 de Análisis.

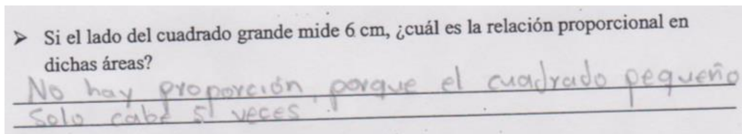
Pregunta 16.a.


16. Observa las siguientes figuras divididas, si se divide en partes iguales.

➢ ¿Cuántas veces cabe el cuadrado más pequeño en el grande?
Cabe 5 veces

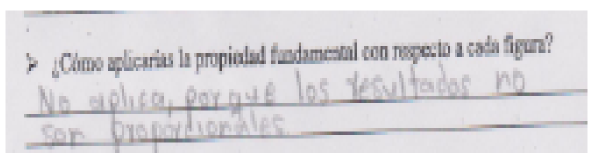
Dando más claridad a la pregunta, el estudiante tentativamente midió el espacio del cuadrado grande para completar la figura con el cuadrado pequeño, dando lugar a señalarlo 5 veces, por lo que realiza una aproximación al descriptor señalado, estableciendo la razón de acuerdo al número de veces que está contenida en la figura, por lo que cumple descriptores del nivel 2 o de Análisis.

Pregunta 16.b


➢ Si el lado del cuadrado grande mide 6 cm, ¿cuál es la relación proporcional en dichas áreas?
No hay proporción, porque el cuadrado pequeño solo cabe 5 veces

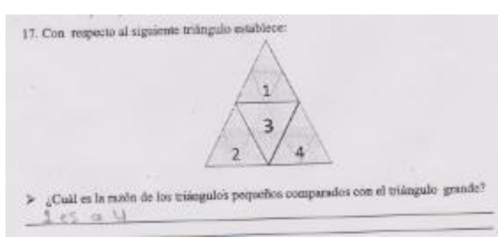
Para hallar la relación proporcional en dichas áreas sabiendo que el cuadrado mide 6 cm de lado, el estudiante no encuentra proporción porque si el cuadrado pequeño cabe 5 veces y la medida es de 6 cm de lado, entonces la figura no se acomoda teniendo en cuenta que la división que se hizo es de 5 cm. Esto quiere decir que si un cuadrado pequeño mide 1 cm de lado cabe 5 veces en el cuadrado grande y estaría sobrando uno; su razonamiento cumple descriptores para el nivel 2 de análisis.

Pregunta 16.c.


➢ ¿Cómo aplicarías la propiedad fundamental con respecto a cada figura?
No aplica, porque los resultados no son proporcionales

Para el análisis de esta pregunta se tienen en cuenta conceptos previos a la proporcionalidad para su aplicación como consecuencia de un razonamiento más apropiado para el descriptor de nivel 3 que identifica que no existe proporcionalidad.

Pregunta 17.a.

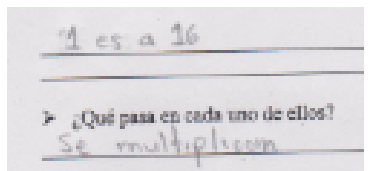

17. Con respecto al siguiente triángulo establece:

➢ ¿Cuál es la razón de los triángulos pequeños comparados con el triángulo grande?
1 es a 4

Al dividir el triángulo en cuatro partes iguales la razón la comparan con la misma medida entre ellos, por lo que Andrés parece tener clara la razón de los triángulos pequeños y relaciona la figura dividida en cuatro partes iguales con su razón: 1 es a 4, permitiendo descriptores del nivel 2.

Pregunta 17.b.


➢ Igualmente divide en diferente cantidad de triángulos y determina la razón entre ellas.(6,8,10, 12, 16, 32, etc)

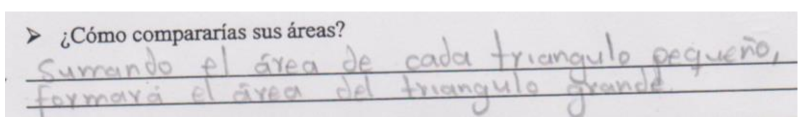

1 es a 16

➢ ¿Qué pasa en cada uno de ellos?

Se multiplican

El análisis de esta pregunta queda inconclusa, ya que el estudiante no realizó los procesos respectivos y se limitó a contestar la razón de uno de ellos, sin realizar comparaciones, solo respondiendo 1es a 16. Además, en la segunda parte el estudiante afirma que se multiplica, sin tener coherencia ni relación dentro del análisis, por lo tanto, lo ubica en el nivel 1 de reconocimiento visual.

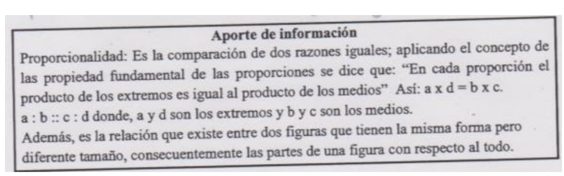
Pregunta 17.c.


➢ ¿Cómo compararías sus áreas?

Sumando el área de cada triangulo pequeño, formará el área del triangulo grande.

El estudiante tiene en cuenta la suma de las áreas de los triángulos pequeños para que quede igual al área del triángulo grande, sin lograr alcanzar un análisis justificado para los descriptores del nivel 1 de reconocimiento visual.

Nota: Aparece un aporte de información sobre el concepto de proporcionalidad y la propiedad fundamental de las proporciones.

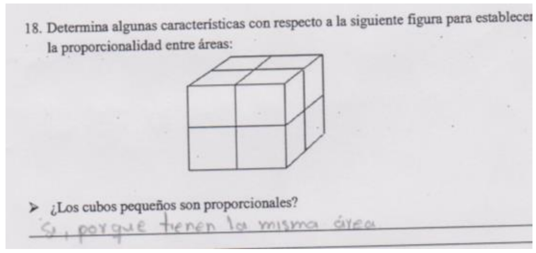

Aporte de información

Proporcionalidad: Es la comparación de dos razones iguales; aplicando el concepto de las propiedad fundamental de las proporciones se dice que: "En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios" Así: a x d = b x c.

a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.

Además, es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño, consecuentemente las partes de una figura con respecto al todo.

Pregunta 18.a.

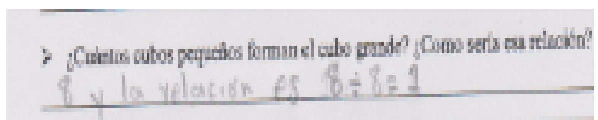

18. Determina algunas características con respecto a la siguiente figura para establecer la proporcionalidad entre áreas:

➢ ¿Los cubos pequeños son proporcionales?

Sí, porque tienen la misma área

Para esta pregunta, después de analizar algunas características de la figura planteada se puede decir que sí, porque tienen la misma área, es un razonamiento que cumple con los descriptores del nivel 3.

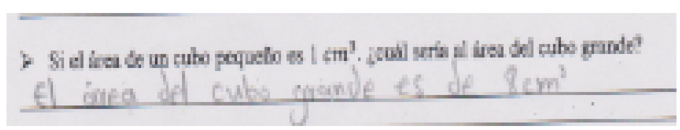
Pregunta 18.b.


➢ ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande? ¿Como sería esa relación?

8 y la relación es 8÷8=1

Andrés si dimensiona la presencia de cubos tridimensionales y acierta al decir que 8 cubos conforman el cubo grande y aporta además el estudiante que la relación es 8/8 =1, llegando así a una respuesta más clara conformada por una red de relaciones que cumple con el nivel 3.

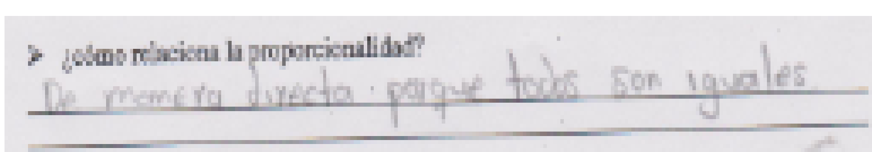
Pregunta 18.c.


➢ Si el área de un cubo pequeño es 1 cm², ¿cuál sería el área del cubo grande?

El área del cubo grande es de 8cm²

Sabiendo que el área del lado del cubo pequeño es 1cm² el estudiante no comprende la pregunta y su respuesta relaciona que como son 8 cubos pequeños confundiendo las áreas de los lados para lograr alcanzar descriptores del nivel 1.

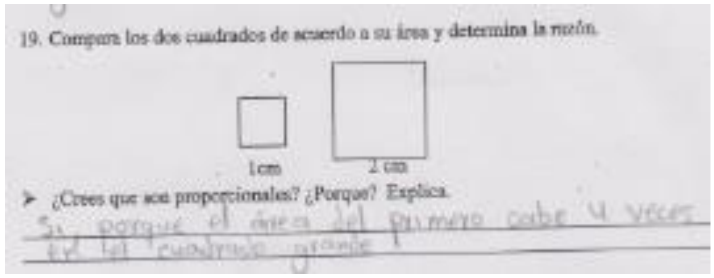
Pregunta 18.d.


➢ ¿cómo relaciona la proporcionalidad?

De manera directa porque todos son iguales

En este caso, el estudiante entiende la proporcionalidad de forma directa porque todos son iguales, su análisis caracteriza descriptores de comparación entre áreas para el nivel 3.

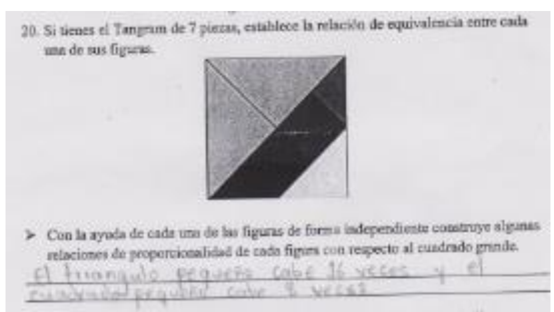
Pregunta 19.



Con respecto a la pregunta de comparación entre áreas de dos cuadrados ¿cree que son proporcionales y por qué? El análisis de Andrés si relaciona proporcionalidad argumentando que el área del cuadrado grande es 4 veces mayor que el área del cuadrado pequeño, lo que se considera como justificación de las proporciones con respecto a áreas entre figuras cumpliendo con descriptores del nivel 3.

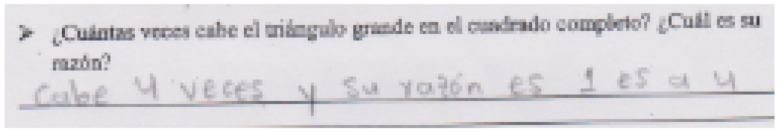
Pregunta 20. Para contestar este bloque de preguntas, se realizó una actividad manual donde cada estudiante tiene la forma de manipulación del material concreto.

Pregunta 20.a.



Construye algunas relaciones de proporcionalidad de cada figura con respecto al cuadrado grande. El estudiante compara los triángulos pequeños y comprueba que cabe 16 veces en el cuadrado grande y el cuadrado pequeño cabe 8 veces; su nivel de comprensión alcanza a adquirir una red de relaciones llegando a la clasificación de los descriptores del nivel 3.

Pregunta 20.b

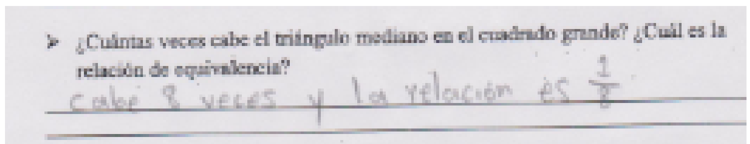


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo? ¿Cuál es su razón?

Cabe 4 veces y su razón es 1 es a 4

Andrés tiene claro sus conceptos y se apropia de ellos indicando que cabe 4 veces y la razón es: 1 es a 4, llegando al análisis para el descriptor de nivel 3.

Pregunta 20.c.

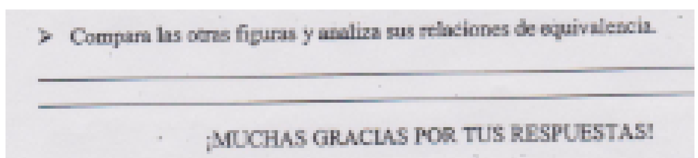


➢ ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿Cuál es la relación de equivalencia?

Cabe 8 veces y la relación es $\frac{1}{8}$

A la pregunta ¿cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿Cuál es su relación de equivalencia? Andrés la relaciona como el triángulo 8 veces y la equivalencia es 1/8, aplicando en este caso razón, relación y proporción muy acordes para el descriptor de nivel 3 al igual que la pregunta anterior.

Pregunta 20.d.



➢ Compara las otras figuras y analiza sus relaciones de equivalencia.

¡MUCHAS GRACIAS POR TUS RESPUESTAS!

En esta última pregunta se sugiere que, los estudiantes analicen la comparación y las relaciones de equivalencia entre figuras, para lo cual Andrés se abstiene de contestar.

.

5. CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se describen las principales conclusiones y recomendaciones que se derivan del presente trabajo de investigación, teniendo en cuenta los análisis realizados y actividades planteadas durante el trabajo de campo. Además, se retoman conclusiones relacionadas con los objetivos que dan respuesta a la pregunta de investigación planteada; así mismo, los obstáculos en el proceso que permiten proponer algunas recomendaciones que sugieren ajustes en el proceso de comparación entre estudiantes y algunos aspectos que puedan tenerse en cuenta para realizar futuros trabajos que sean objeto de investigación en esta misma línea.

5.1. Conclusiones relacionadas con los objetivos

Dados los resultados del análisis, se pueden afirmar que los objetivos propuestos fueron alcanzados. Para efectos de esta investigación, se planteó como objetivo general: *Identificar el nivel de razonamiento con respecto a las relaciones proporcionales entre áreas, que presentan los estudiantes en correspondencia con el modelo educativo de Van Hiele.* De acuerdo con el análisis realizado, las actividades desarrolladas con los estudiantes participantes, permitieron identificar el nivel de razonamiento de cada uno estos, estableciendo una relación entre sus respuestas y los descriptores construidos.

Además, retomando el objetivo específico: *Describir los razonamientos de los estudiantes bajo descriptores previamente establecidos en correspondencia con las características de los niveles del modelo educativo de Van Hiele;* durante el trabajo de campo, el estudio de los niveles de razonamiento en relación con la proporcionalidad, permitió construir unos descriptores que dieran cuenta del proceso evolutivo asociado al razonamiento, lo cual permitió realizar el proceso de descripción y análisis, favoreciendo el cumplimiento de dicho objetivo específico.

Las actividades realizadas durante el trabajo de campo, fueron sometidas a un proceso de análisis realizando comparaciones entre las respuestas de los estudiantes y los descriptores construidos, de tal manera que se estableciera una correspondencia con el nivel de razonamiento que exhiben los estudiantes con el desarrollo de las actividades, lo cual, finalmente, permitió *Establecer las regularidades de los razonamientos a través de descriptores que estén en correspondencia con los niveles del modelo educativo de van Hiele y el concepto de proporcionalidad entre áreas* alcanzando de esta manera este objetivo específico.

Las preguntas fueron diseñadas con un lenguaje apropiado y acompañado de una visualización geométrica que estuviera asociada a los Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas planteadas por el MEN (2006), lo que permitió que las actividades para los estudiantes también pueda emplearse como una estrategia para evaluar su nivel de comprensión. Además, dicho lenguaje permite explicitar la red de relaciones que presenta un estudiante en relación a un conocimiento matemático, en este caso relacionado con la proporcionalidad y al mismo tiempo, identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes del grado séptimo contribuyendo al alcance del objetivo del estudio.

Otro aspecto que permitió el alcance de los objetivos, fue retomar la proporcionalidad desde las raíces epistemológicas e históricas, lo que significa que para comprender el concepto de proporcionalidad entre áreas en este nivel de escolaridad, se entiende que la razón es el concepto clave involucrado para determinar su comprensión y poder realizar el análisis de la identificación del objeto de estudio para el nivel de razonamiento de los estudiantes.

Identificar el razonamiento de un estudiante, exige tener unos criterios que permitan evidenciar un nivel, en relación con un conocimiento matemático específico, en este caso la proporcionalidad. Por lo tanto, para alcanzar dicho propósito, se diseñaron unos descriptores de nivel de acuerdo a las características de los niveles de razonamiento y al mismo tiempo teniendo en cuenta las propiedades de la proporcionalidad, abordada a partir de su componente geométrica con áreas. Los descriptores fueron adaptando un lenguaje específico de acuerdo a sus características que se fueron refinando a medida que se desarrolló el trabajo de investigación.

Para establecer la regularidad de los razonamientos de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad entre áreas a través de los descriptores, se describe una serie de preguntas y actividades que pretenden identificar el nivel en el cual están razonando en relación a conceptos relacionados con la proporcionalidad y apoyados con imágenes elaboradas de acuerdo al tipo de análisis que se pretende interpretar en concordancia con cada descriptor.

Elaborada la consolidación de los descriptores de nivel en el modelo educativo de van Hiele, de cada uno de los participantes de la investigación, permitió que se validara y lograra alcanzar los objetivos de la investigación propuestos.

De manera conjunta, los descriptores, la proporcionalidad entre áreas, el modelo educativo de van Hiele y la secuencia de preguntas y actividades, permitieron identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes y el alcance de los objetivos propuestos.

5.2. Conclusiones relacionadas con la pregunta de investigación

Para efectos de la consecución de esta investigación se planteó la siguiente pregunta: *"¿Cuál es el nivel de razonamiento relacionado con la proporcionalidad en el marco del modelo educativo de van Hiele que poseen los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel?"*

Los análisis realizados por dos de los estudiantes fueron muy similares, aunque no comprendían el concepto. La parte de la visualización geométrica les permitió alcanzar un razonamiento que los ubica en un nivel acorde con su respuesta, lo que genera capacidades de observación, interpretación, síntesis y valoración bajo la perspectiva formativa en correspondencia con los lineamientos curriculares y planteada por el modelo.

Camila, se ubica en un nivel 0 o predescriptivo, ya que se identifica en sus respuestas que en ocasiones confunde la representación simbólica del área de una figura, además, se le dificulta establecer una igualdad entre razones, descriptores que corresponden con el nivel 1 o de reconocimiento visual, sin embargo, durante el desarrollo de las actividades, representa de manera gráfica el área de una figura, además de reconocer dicho concepto en una figura, correspondiente a descriptores del nivel 0.

Dentro del análisis realizado al estudiante Juan, se evidencia una aplicación de sus conocimientos al concepto de área en una figura, reconoce y gráfica cuándo una figura representa diferentes áreas, por lo tanto, su razonamiento le permite avanzar al nivel 1 de reconocimiento visual por medio del análisis planteado y cumpliendo con los descriptores enunciados para tal fin, como: trabajar el concepto de áreas permitiendo la comparación entre diferentes figuras para determinar la razón entre ellas; en la medida de sus respuestas comprende los descriptores del nivel 2 de análisis, razonando sobre conceptos de establecer una razón de acuerdo al número de veces que una figura está contenida en otra aplicando el concepto de área; utiliza definiciones con cualquier estructura que permite realizar comparación entre áreas. Aunque maneja algunos descriptores del nivel 3 de clasificación, el razonamiento es poco contundente ya que no aplica de forma acertada algunos descriptores de ese nivel.

El análisis efectuado por el estudiante Andrés, de acuerdo a su razonamiento y cumpliendo con los descriptores establecidos lo ubica en el nivel 2 de análisis, llegando a desarrollar lo correspondiente a reconocer la razón entre áreas, a través de la comparación entre sus medidas utilizando definiciones con cualquier estructura. En algunos casos se evidencian aportes importantes de los descriptores del nivel 3 a partir de las diferentes representaciones geométricas reconociendo la proporcionalidad entre figuras pero no llega a concluirlas.

En resumen, los razonamientos de los tres estudiantes de grado séptimo fueron caracterizados a través de cada uno de los descriptores, lo que generó posicionarlos en un nivel de razonamiento de acuerdo al análisis realizado en concordancia con el modelo educativo de van Hiele, teniendo como elemento importante la visualización desde una perspectiva geométrica de gran ayuda para determinar la valoración de los estudiantes.

5.3. Futuros trabajos derivados de esta investigación

Este proyecto de investigación se caracterizó por los razonamientos que presentaban los estudiantes de grado séptimo, estableciendo el nivel de razonamiento relacionado con la proporcionalidad de áreas en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele. Por lo tanto, puede pensarse de manera similar la implementación en este estudio basado en proporcionalidad entre volúmenes, empleando actividades basadas en preguntas que indaguen por el nivel de razonamiento de los estudiantes.

También, se deja abierta la posibilidad de ampliar estudios que pretendan indagar sobre la forma de avance de un nivel de razonamiento a otro inmediatamente superior, con respecto a la proporcionalidad entre volúmenes, teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele.

En este estudio se abordó la proporcionalidad entre áreas desde una visualización geométrica lo que permite que se pueda extender a otro estudio utilizando otro tipo de contexto geométrico, como la proporcionalidad entre diferentes polígonos.

Otra propuesta que puede derivarse de este estudio como una extensión, se basa en la utilización de herramientas tecnológicas (TIC) dentro del desarrollo de la proporcionalidad entre áreas, que favorezcan la visualización y el razonamiento de los conceptos en esta materia, en cumplimento con las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, que pueden generar mejor comprensión y niveles de razonamiento superiores dentro del modelo para un objeto de estudio determinado, además de mejorar la enseñanza aprendizaje de las matemática y conceptos que involucran componentes de la geometría.

5.4. Consideraciones finales y recomendaciones

En el desarrollo de esta investigación se utilizaron preguntas abiertas, aportes de información y una actividad final que conlleva al análisis del nivel de razonamiento en que se encuentra cada estudiante con respecto a la proporcionalidad entre áreas en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele, lo que generó en los estudiantes inseguridad al responder algunas preguntas, ya que confundía unas con otras, lo que generó contradicciones al momento de responder.

En el análisis realizado por los tres estudiantes se presentaron algunas controversias en sus respuestas, a pesar de las ayudas en la actividad y presencia de la docente investigadora; los conocimientos previos adoptados por los estudiantes no eran suficientemente claros para comprender las preguntas, lo que genera una preocupación en la forma de dirigir las fases de aprendizaje del modelo.

Se recomienda al momento de abordar estos temas de proporcionalidad, que el docente trasmita con claridad los pasos a seguir para que los estudiante comprendan el seguimiento de los procesos y así no caer en errores de razonamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Algarra, M. y otros. (2004). *Las matemáticas chinas*. Octubre .Recuperado de: http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf.

Brown T. (1996). The phenomenology of the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics. Dordrecht, v. 31, n.1-2, September. p. 115 – 150.

Duval, R. (1995). Sémiosis et penseé humaine. Berna, Peter Lang S.A.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis - En inglés "thefeel and look" (Freudenthal, 2001, p. 81) p.46-47-64 87.

Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las Representaciones en Didáctica de las Matemáticas. Philosophy of Mathematics Education Journal, Exeter, U.K., n. 14, p. 1 - 35.

Fouz, F y de Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la Didáctica de la Geometría, *Un paseo por la geometría*. 67-82. Recuperado de http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* United States of América: Editorial Kluwer Academic / Plenum Publishers.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Málaga. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/625/2/Gallardo2004Diagnostico.pdf

Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. Universidad de Granada. España.

Guacaneme, E.A. (2008). *Interpretaciones de las definiciones de Razón y Proporción*. IX Coloquio Regional de Matemáticas. Universidad de Nariño. p.2,3. Tomado de http://www.academia.edu/5503565/Interpretaciones_de_las_definiciones_de_raz%C3%B3n_y_proporci%C3%B3n

Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización.* (texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación

Matemática, TIEM-98. Centre de Recerca Matemática, Institutd'EstudisCatalans, Barcelona), manuscrito.

Gutiérrez, A. (2004). Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática.* vol. 1 (colección "Investigación en educación matemática" nº1. pp. 83-108. Badajoz, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Gutiérrez, A. Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics. Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics 20*(2-3), 27-46.

Hoffer, A. (1893). *Van Hiele - basedresearch. R. Lesh & M. Landau, eds. Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York.

Holguín, C. (2012). *Razonamiento proporcional*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/8631/1/carlosernestoholguinortega.2012.pdf

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. Proceedings of the 18th PME conference (Lisboa), 3, 41-48.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/ Jai93.pdf

Jaime, A.P. y Gutiérrez, A.R. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele*, Práctica en Educación Matemática: Capítulo 6o, pág. 295-384. Ediciones Alfar, Sevilla, 1990. Recuperado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In: JANVIER, C. (Ed.). "problems of representation in the teaching and learning of mathematics". Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P., p. 27 - 32.

Jaramillo, C. M. y Esteban P. V. (2006). *Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de van Hiele.* Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Vol. XVIII, núm.45, (mayo-agosto), pp.109-118.

Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas.* Medellín, Colombia: Tesis de Maestría no publicada. Proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite" recuperado el 9 de septiembre de 2016.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In: Glasersfeld, E.Von (Ed.). Radical constructivism in mathematics education. Dordrecht: Kluwer A. P. p. 53 - 74.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis doctoral. Colombia: Universidad de Antioquia.

Matsuo, N. (1993). Students, Understanding of geometrical figures in transition from van Hiele level 1 to 2, en I. Hirabayashi et al. (eds.), *Proceedings of the 17th P.M.E. Conference* (Tsukuba, Japón) 2, 113-120.

Méndez, H. *Geometría divertida: Cuaderno de Geometría con Explicaciones Etimológicas y Apuntes Históricos*. Monografías.com. Recuperado el 29 de julio de2016.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia MEN (1998). Serie Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. MEN. (2006) Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Bogotá.

Oller, A. y Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol 16* (3), 318-338.

Puertas, M.L. (1994). *Euclides, Elementos. Libros V-IX*. Madrid: editorial Gredos S.A.

Rusnock, P. y Thagard, P. (1995). Strategies for conceptual change: Ratio and proportion in classical Greek mathematics. Studies In History and Philosophy of Science Part A, 26(1), 107-131.

Salkind, N. (1999). *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Editorial Morata.

Van Hiele, P (1986). *Structure and insight*, Academic Press, New York.

Vargas, G. y Gamboa R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. UNICIENCIA Vol. 27, No. 1, [74-94]. Enero – junio. ISSN 1101 – 0275. Recuperado de www.revistas.una.ac.cr/uniciencia.

Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de van hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria*. Trabajo de investigación. Universidad de Cantabria.

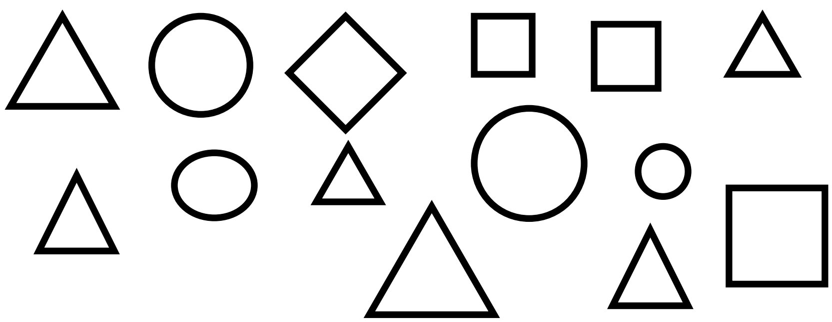
ANEXOS

ACTIVIDADES PARA LOS ESTUDIANTES

A continuación encontrarás una serie de preguntas y actividades, las cuales pretender identificar el nivel en el cual estás razonando en relación a conceptos relacionados con la proporcionalidad. Por favor lee cuidadosamente cada actividad y responde lo que consideras sobre las diferentes situaciones planteadas.

Nota: Las imágenes que se encuentran durante el desarrollo de las actividades fueron construidas por la autora para efectos de la investigación.

1. En la siguiente imagen se observan superficies planas



- ¿Puedes mencionar el nombre de algunas de ellas? ¿Cuáles?

____

____

- ¿Consideras que estas figuras podrían tener la misma área?

____

____

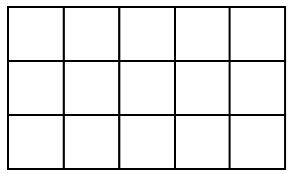
- ¿Crees que dos figuras iguales podrían encerrar la misma cantidad de superficie? ¿por qué?

____

____

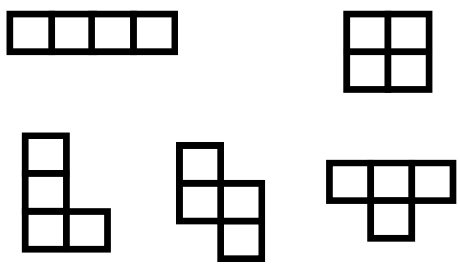
Aporte de información

El área de una figura representa la cantidad de superficie encerrada por dicha figura. Se mide en unidades de longitud cuadradas, por ejemplo m^2, cm^2 etc.



Cada cuadrado mide un $1cm^2$, por lo tanto el área total es de $15cm^2$

2. De acuerdo a las siguientes figuras, determina si sus áreas son iguales. Explica tu respuesta.

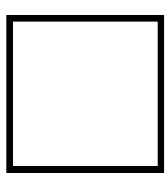


____

____

3. Calcula el área de las siguientes figuras:

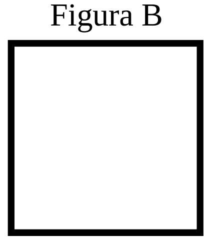
Figura A



2 cm

2 cm

Figura B

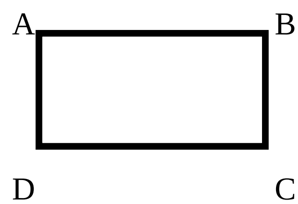


4 cm

4 cm

- Con los resultados anteriores, ¿cómo es el área del cuadrado menor con respecto al mayor?

4. De acuerdo al siguiente rectángulo, divídelo en dos partes:



- El rectángulo anterior, ¿podrías dividirlo en más partes? De ser posible, marca otras divisiones.

- Simboliza los rectángulos que observas.

- Divide el rectángulo ABCD en dos partes iguales; a éstos puntos los llamaremos EF. ¿cómo es el área del rectángulo AEFD con respecto al área del rectángulo EBCF? (mayor, menor o igual).

- ¿Cuántas veces debes utilizar AEFD para formar el rectángulo ABCD?

____

____

- ¿Se puede afirmar que con dos AEFD puedes formar un rectángulo ABCD? Explica.

____

____

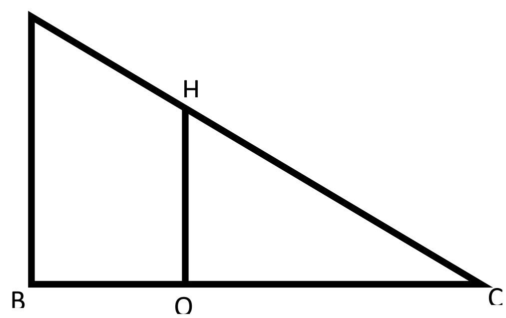
- ¿Qué se podría decir sobre las áreas de cada uno?

____

____

____

5. La siguiente figura es el triángulo rectángulo ABC, si se traza una línea vertical se forma el triángulo HQC.



- ¿Cómo crees que sería el área de cada uno?

____

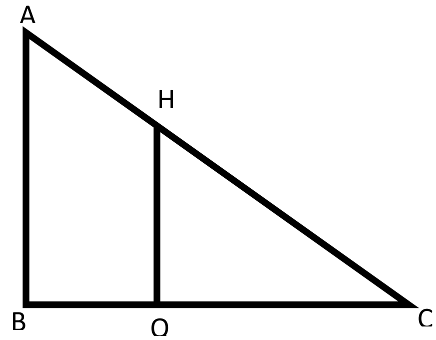
____

- ¿Consideras que el área se modifica? ¿A la mitad? Explica.

____

____

6. Retomando el triángulo de la pregunta anterior:



- ¿Cómo podrías comparar el área del triángulo ABC y el área del triángulo HQC?

____

____

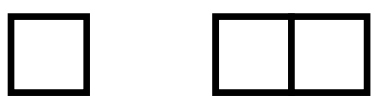
7. Dibuja una superficie rectangular y traza un segmento por la mitad de ésta.

- ¿Crees que se podría decir que la superficie rectangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué? Explica.

____

____

8. Si se consideran los siguientes cuadrados:



- ¿Cómo consideras el área del cuadrado pequeño con respecto al área del cuadrado grande?

____

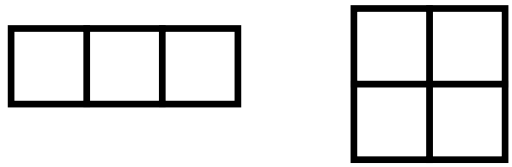
____

- ¿Cuál crees que es la razón del cuadrado pequeño con respecto al cuadrado grande?

____

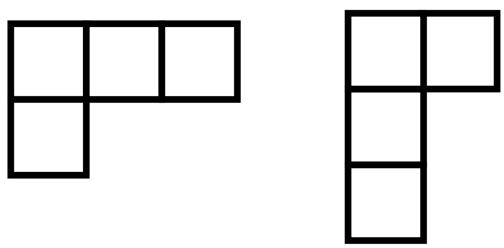
____

9. Si relacionas el cuadrado pequeño con estas figuras, ¿cuál sería la razón de cada una?



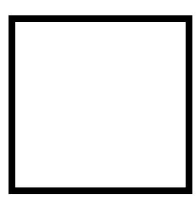
- Si se divide el cuadrado grande en M veces, ¿cuál sería la razón?

10. Si comparamos estas dos figuras:



- ¿Cómo crees que sería el área?

11. Como relacionarías la razón del cuadrado pequeño con respecto al siguiente cuadrado.

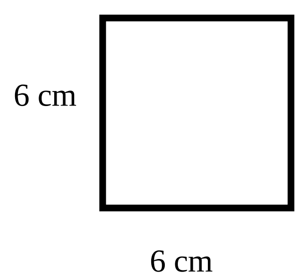


- ¿Cuál es la razón en este caso?

- ¿Qué razón sería el cuadrado pequeño con respecto al grande?

- ¿Cómo crees que sería la razón entre ellas?

12. El siguiente cuadrado tiene un área de 36 cm^2:



- Divídela en dos partes iguales y determina nuevamente sus áreas.

- Compara y explica que pasó con las medidas.

- ¿Consideras que esto puede pasar con otras figuras?

- ¿Cómo explicas la razón de las medidas (largo y ancho) entre las figuras?

____

____

13. Si consideras la siguiente figura, ¿cómo compararías la relación entre el triángulo grande y los pequeños?

- ¿Qué podrías decir sobre el área de cada uno?

____

____

- ¿Se podrían hacer otras comparaciones? Explica.

____

____

- ¿Se podría calcular la razón entre ellas? ¿Cómo?

____

____

- Si el triángulo grande se dividiera en otros más pequeños, ¿que pasaría con cada una de las áreas?

____

- ¿Qué pasaría con respecto a la razón?

____

____

- Si tomas un rectángulo pequeño ¿cómo lo relacionarías con respecto al rectángulo grande?

____

____

- ¿Cómo es el área del triángulo 3 con respecto al triángulo inicial?

____

____

- El área del triángulo 4 es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo inicial, ¿porqué?

____

____

14. Observa la siguiente estructura y compara las tablas.

TABLA 1	
6	30
5	25
8	40
10	50
12	60
9	45

TABLA 2	
4	8
3	6
5	10
9	18
12	24
15	30

- Qué relación tiene la tabla 1 con la tabla 2.

____

____

- Según los cálculos efectuados, ¿cómo consideras la relación entre las tablas?

____

____

- Establece razones equivalentes y determina su constante.

____

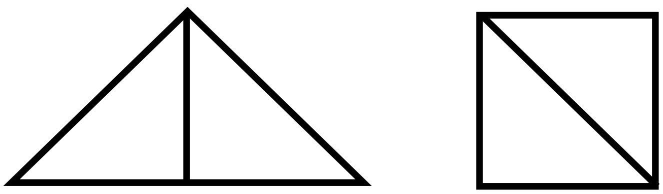
____

- ¿Qué conclusiones amerita las tablas anteriores?

____

____

15. Desde la siguiente perspectiva geométrica observa e interpreta:



- ¿Crees que las medidas de las superficies son iguales?

____

____

- ¿Cuántas veces cabe el triángulo de arriba en el cuadrado?

____

____

- ¿Qué razón establecerías en cada figura?

____

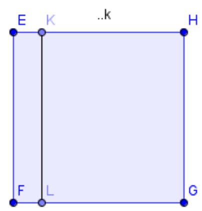
____

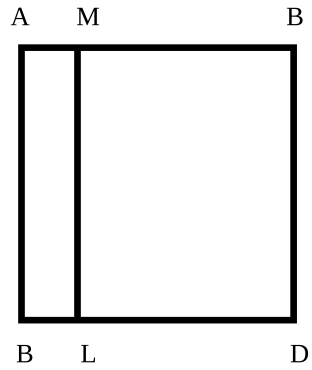
- ¿Se podría decir que la anterior superficie triangular está dividida en dos superficies de igual área? ¿Por qué?

____

____

16. Observa las siguientes figuras divididas en k partes iguales.





- ¿Cuántas veces cabe el cuadrado más pequeño en el grande?

____

____

- Si el lado del cuadrado grande mide 6 cm, ¿cuál es la relación proporcional en dichas áreas?

____

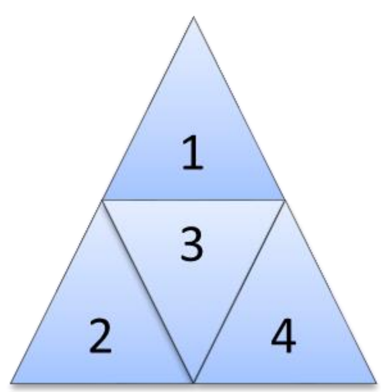
____

- ¿Cómo aplicarías la propiedad fundamental con respecto a cada figura?

____

____

17. Con respecto al siguiente triángulo establece:



- ¿Cuál es la razón de los triángulos pequeños comparados con el triángulo grande?

____

____

- Igualmente, divide la figura en diferente cantidad de triángulos y determina la razón entre ellas.(6,8,10, 12, 16, 32, etc.)

____

____

- ¿Qué pasa en cada uno de ellos?

____

____

- ¿Cómo compararías sus áreas?

____

____

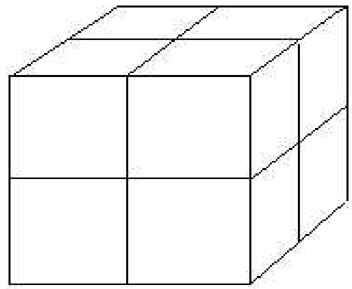
Aporte de información

Proporcionalidad: Es la comparación de dos razones iguales; aplicando el concepto de las propiedad fundamental de las proporciones se dice que: “En cada proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios” Así: a x d = b x c.

a : b :: c : d donde, a y d son los extremos y b y c son los medios.

Además, es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño, consecuentemente las partes de una figura con respecto al todo.

18. Determina algunas características con respecto a la siguiente figura para establecer la proporcionalidad entre áreas:



- ¿Los cubos pequeños son proporcionales?

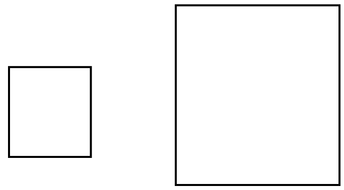
- ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande? ¿Cómo sería esa relación?

- Si el área del lado de un cubo pequeño es $1cm^2$. ¿cuál sería al área del lado del cubo grande?

- ¿cómo relaciona la proporcionalidad?

- Uno de los cubos es $\frac{1}{8}$ del cubo grande. ¿Porque?

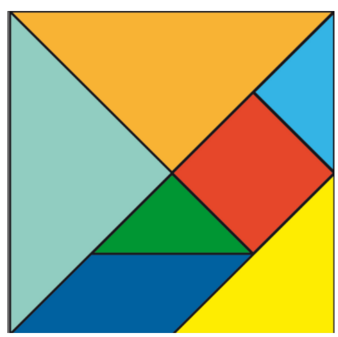
19. Compara los dos cuadrados de acuerdo a su área y determina la razón



1cm 2 cm

- ¿Crees que son proporcionales? ¿Porque? Explica.

20. Si tienes el Tangram de 7 piezas, establece la relación de equivalencia entre cada una de sus figuras.



- Con la ayuda de cada una de las figuras de forma independiente construye algunas relaciones de proporcionalidad de cada figura con respecto al cuadrado grande.

- ¿Cuántas veces cabe el triángulo grande en el cuadrado completo? ¿cuál es su razón?

- ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el cuadrado grande? ¿cuál es la relación de equivalencia?

- Compara las otras figuras y analiza sus otras proporciones.

¡MUCHAS GRACIAS POR TUS RESPUESTAS!