REVISTA EMA
2001, VOL. 6, Nº 3, 207-249

EQUILIBRAR ALGO DESEQUILIBRADO: LOS *ESTÁNDARES DEL NCTM* A LA LUZ DE LAS TEORÍAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ANNA SFARD

Esta es la segunda parte del artículo[1] cuya presentación se inició en el número anterior de esta revista (pp. 95-140). Se incluye aquí lo referente a otras cinco necesidades de los alumnos, que según las teorías disponibles, son una fuerza conductora que subyace al aprendizaje humano y debe ser lograda si se quiere que éste tenga éxito. Para cada una de tales necesidades se consideran cuatro preguntas: ¿qué sabemos acerca de esta necesidad?, ¿cómo enfrentan esta necesidad los Estándares del NCTM?, ¿qué puede resultar mal al implementar las recomendaciones de los Estándares?, ¿qué se puede hacer para prevenir esto?

6. LA NECESIDAD DE INTERACCIÓN SOCIAL

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

Si bien todos los teóricos parecen estar de acuerdo en que la necesidad humana de conocimiento y comprensión tiene una importancia central, fue Vygotsky quien nos alertó sobre la naturaleza esencialmente social del aprendizaje y del significado. Al respecto, Bruner (1985) expresa:

> un asunto (…) que usualmente se ha pasado por alto, o al que se le ha dado menor importancia en nuestra cultura occidental orientada hacia los logros. Es inherente a su convicción [la de Vygotsky] que el paso por el conocimiento es como el paso por el lenguaje —su creencia básica de que la transacción social es el vehículo fundamental de la educación y no, por así decirlo, un desempeño individual. (p. 25)

1. Traducción del original “Balancing the unbalanceable: the NCTM *Standards* in the light of theories of learning mathematics”, que aparecerá en el libro *A research companion to principles and standards for school mathematics* del NCTM. Traducción realizada por Patricia Inés Perry, investigadora de “una empresa docente”, y Hernando Alfonso, con la autorización del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

Actualmente, ya no se le da “menor importancia” al papel de la interacción social en el aprendizaje. Investigadores en Educación Matemática han escrito extensamente acerca de ello (véase, e.g., Cobb, 1995, en prensa; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1996; O’Connor, 1996; Forman, Minick y Stone, 1993; Cole, 1996). En esta sección, me limitaré por tanto a una breve presentación de algunos puntos centrales.

La historia del debate sobre la importancia relativa de lo individual y lo social es probablemente tan extensa como la historia de la investigación acerca del aprendizaje humano. Es principalmente a causa de su posición relativa en este debate que Piaget y Vygotsky son considerados actualmente como líderes de dos campos opuestos. En la literatura, el modelo piagetiano se describe como uno en el que quien aprende es “un organismo solitario opuesto a la naturaleza” (Bruner, 1985, p. 25), mientras que Vygotsky tiene el crédito de revolucionar tal descripción al establecer que el camino que va de la naturaleza al niño pasa a través de la sociedad. Este fuerte contraste, en ocasiones, ha sido interpretado erróneamente como indicio de una falta de referencia a lo social en los escritos de Piaget, y como negación, por parte de Vygotsky, del papel de la interacción del niño con el ambiente natural. De hecho, nada de lo anterior es verdad. Piaget declaró repetidamente que la interacción social es uno de los factores más importantes en el aprendizaje (ver, e.g., Piaget e Inhelder, 1969) mientras que Vygotsky estuvo de acuerdo en que incluso aspectos no sociales del mundo en que vivimos influyen de manera importante nuestro pensamiento (esto es lo que en realidad él tenía en mente cuando hablaba, por ejemplo, acerca de la generalización empírica y de la construcción de los conceptos cotidianos a través de la creación de “imágenes familiares” de objetos similares).

De hecho, los dos pensadores estuvieron divididos en su visión acerca de la naturaleza del aprendizaje humano; sin embargo, el punto central de la controversia no reside tanto en la visión que ellos tenían del *mecanismo* de aprendizaje, como en su comprensión de la *naturaleza y orígenes del conocimiento humano*, en general. Mientras que Piaget consideró el desarrollo del intelecto humano como un fenómeno determinado biológicamente que podía ser influido sólo de manera marginal por la cultura, Vygotsky dio primacía a los factores socioculturales. Más aun, mientras Piaget sugirió que el conocimiento que construimos es principalmente una función del mundo que nos rodea,[2] y que literalmente es creado de nuevo por cada estudiante, Vygotsky vio el conocimiento y el significado, como creaciones colectivas que se preservan dentro de la cultura, y de las que los estudiantes se apropian

2. Esto no significa que él estuviera tratando de decir que el conocimiento es una descripción objetiva de este mundo, sino sólo que el mundo es el factor crucial para crear este conocimiento.

de forma individual una y otra vez en el proceso de aprendizaje. Se puede concluir que Piaget y Vygotsky difieren en su comprensión de la palabra *social*. Mientras Piaget usó esta noción casi de manera exclusiva en el contexto de la *ontogénesis*, en relación con las posibles técnicas de aprendizaje, Vygotsky otorgó el adjetivo *social* a conceptos como tales, y lo hizo no sólo por razón del mecanismo de la interacción social que es esencial para su adquisición individual, sino también, y quizás principalmente, por razón de su *filogénesis* social.[3] Los conceptos que aprendemos simplemente no provienen de manera directa de la naturaleza y no están determinados de forma única por ella. El pensamiento conceptual es un subproducto de la comunicación humana y sólo es posible dentro del lenguaje. El lenguaje, a su vez, es una creación social,[4] y los conceptos mismos son por tanto esencialmente sociales.

Volvamos a la implicación práctica de este debate. La insistencia de Vygotsky en la naturaleza social del conocimiento trae a primer plano la importancia de la interacción social en el aprendizaje humano. A diferencia de Piaget, Vygotsky sugiere que sin tal interacción ningún aprendizaje conceptual sería posible. La naturaleza transaccional del aprendizaje puede expresarse a sí misma de muchas formas. La forma más obvia de la interacción en el aprendizaje es el intercambio estudiante-profesor y estudiante-estudiante. Además de la enseñanza directa, hay una variedad de interacciones diarias en las que el aprendizaje ocurre incluso sin que haya una intención expresa. A través de una negociación del significado, con frecuencia imperceptible, que hace parte de cualquier comunicación, los niños aprenden a comprender nuevas palabras, es decir, nuevos conceptos. Aun el estudio de un libro de texto debería considerarse como una forma de interacción social. Después de todo, el texto que se lee es resultado de un intento de transmitir significados socialmente construidos, y por tanto, leer tal texto es una forma de conversación con otros.

La insistencia de Vygotsky en el papel esencial de la interacción social parece verdaderamente convincente, en especial desde el punto de vista de sus afirmaciones acerca de la posibilidad de influir el desarrollo del niño a través de la intervención instruccional. Con respecto a la última aseveración,

3. La controversia entre Piaget y Vygotsky sobre el significado exacto de *social* se tipifica en sus interpretaciones diferentes del fenómeno del "habla egocéntrica" (la tendencia, bien documentada, de los niños pequeños a "hablar consigo mismos") y en el hecho de que Vygotsky (1962, 1987) objeta la decisión de Piaget de llamar *social* al habla no egocéntrica, diciendo que *cualquier* habla, incluida la egocéntrica, es esencialmente social. Por tanto, él prefiere llamar *comunicativa* al habla no egocéntrica.

4. Wittgenstein (1953) señaló que no hay algo que pueda llamarse "lenguaje privado". El lenguaje es un vehículo de comunicación con otros, y por tanto la idea de lenguaje privado es, en cierto sentido, una contradicción.

la importancia central de una instrucción bien planeada es su consecuencia inmediata. El modo, ahora popular, de trabajo en equipo, llamado *aprendizaje cooperativo* es un exponente del reconocimiento general de la necesidad de múltiples formas de interacciones de aprendizaje, incluidas aquellas que no le asignan al profesor un papel central (Davidson, 1990; Sutton, 1992). En breve ampliaré lo dicho. Por ahora, permítaseme resumir esta sección diciendo que la interacción social parece necesaria para que haya aprendizaje.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Si los *Estándares* se implementaran cuidadosamente, se acercarían de manera sustancial a los principios de Vygotsky. En el documento se enfatiza de varias maneras la gran importancia de exponer al estudiante a diferentes formas de interacción. Tres de los cinco modos de aprendizaje sugeridos aluden explícitamente a diferentes tipos de intercambio:

1) asignaciones individuales y para el grupo;

2) discusión entre el profesor y los estudiantes y entre estudiantes;

3) exposición del profesor. (NCTM, 1989, p. 10)

Al comparar los diferentes modos, es importante enfatizar en la diversidad de la composición de los grupos dentro de los cuales debe tener lugar la interacción y en los alcances variables de la contribución del profesor y de los estudiantes al intercambio. Esta recomendación con respecto al pluralismo de forma puede parecer algo débil dado que en el último de los tres volúmenes de los *Estándares*, los autores hacen un llamado al ‘cambio en la enseñanza: hacia preguntar y escuchar en lugar de dar información’ (NCTM, 1991, p. 2).

c. ¿Qué puede resultar mal?

Como una reacción a que Piaget subestimó el papel de la interacción social, y siguiendo el llamado de Vygotsky acerca de los efectos benéficos de la interacción de los niños con compañeros, el trabajo en equipo pasó a primer plano como el modo preferido de aprendizaje. Esta tendencia ha sido también alimentada por el acopio creciente de hallazgos de investigación que parecen indicar el efecto benéfico del esfuerzo colectivo sobre los logros de los estudiantes (Webb, 1991; Webb y Farivar, 1994; O’Connor, 1998; Siegler, en prensa). A pesar de la recomendación de los *Estándares* con respecto a una pluralidad de modos, la preferencia por el aprendizaje colaborativo marginó las formas más tradicionales de aprendizaje. En algunos lugares el trabajo individual y la exposición del profesor desaparecieron completamente. Resulta, sin embargo, que el asunto de la interactividad en el aprendizaje de las matemáticas puede ser mucho más complejo de lo que cualquier seguidor radical de Vygotsky pudiera admitir fácilmente. Para un aprendizaje realmente efectivo, el trabajo individual y las intervenciones sustanciales del profesor pueden ser tan vitales como el trabajo en equipo. Negar esto es una tergiversación de la teoría. Permítaseme sustentar esta afirmación.

En primer lugar, voy a abordar lo que se refiere al lugar que ocupa en el aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual del estudiante. Por razones explicadas en secciones anteriores, el proceso de aprendizaje y de construcción de significado no se puede ver sólo como un asunto del hacer colectivo. Más bien, debe entenderse como una mezcla intrincada de interacción social y de reflexión individual. Quizás por el papel central de este último ingrediente, con frecuencia se reporta que los matemáticos prefieren el trabajo individual a la resolución colaborativa de problemas (cf. Sfard, Nesher, Streefland, Cobb y Mason, 1998). La relativa soledad de los matemáticos para realizar su trabajo parece tener una buena razón que también sirve cuando se trata de los estudiantes de matemáticas. La resolución de problemas matemáticos, que es extremadamente exigente en términos de concentración y de esfuerzo intelectual, muchas veces se puede practicar mejor en silencio en donde se pueda enfocar todo el esfuerzo en el problema que se tiene entre manos y sólo en él. La comunicación con otros, por ser otra actividad que demanda un esfuerzo especial, puede distraer la atención y hacer menos efectivos los esfuerzos que se hagan para resolver un problema. Esta puede ser la razón por la que un crítico de los *Estándares* observó:

> Aunque un poco de aprendizaje en grupo (…) es bueno en la clase, en las clases sujetas a reforma está ocurriendo *demasiado* de ello, en detrimento de una buena educación. (Wu, 1997, p. 958)

Una vez más, estamos ante un exceso que puede matar una buena idea. Además, como se explicó antes, quienes abogan por el aprendizaje colaborativo —apoyándose en Vygotsky para exigir la exclusividad del modo colaborativo— quizás están llevando involuntariamente sus intenciones a un extremo: el aprendizaje es social sin importar la manera en que ocurra.

En verdad, el aprendizaje no tiene que ser interactivo para ser social. La interacción, a su vez, no tiene que ser entre pares. La intervención del profesor es también una forma de interacción. Siguiendo a Vygotsky, sustenté en las secciones anteriores que el verdadero aprendizaje sólo puede ocurrir en una situación en la que los problemas que enfrentan los estudiantes están algo por encima de su competencia actual. Si es así, difícilmente se puede esperar que el aprendizaje tenga lugar sin ayuda de una persona más conocedora del asunto. Esto no necesariamente significa que el estudiante requiera que se le diga explícitamente qué hacer o qué pensar. Según Bruner (1985, p. 28), podemos comparar la actividad de un ayudante diestro con la actividad de "construir andamios" en la que "se le permite al niño hacer tanto como pueda espontáneamente, [y] lo que él no pueda hacer, lo suple" la otra persona. Vygotsky reconoció la necesidad de tal ayuda, al afirmar que mientras el papel del "constructor de andamios" en ocasiones puede ser asumido por un par más avanzado, en muchos casos es el profesor quien debe hacer tal trabajo.

Quienes insisten en que no se puede esperar que los niños reinventen un cuerpo de conocimiento cuya construcción histórica duró cientos de años, aportan un argumento indirecto a favor de la necesidad de una actividad similar a la de construir andamios (ver, e.g., Bartolini-Bussi y Pergola, en prensa, citado en Sierpinska y Lerman, 1996). Esta afirmación es verdadera ya sea que uno se esté refiriendo a quien aprende solo, desde la perspectiva de Piaget, o a un equipo no apoyado por el profesor desde la perspectiva de Vygotsky. Tal argumento se puede hacer más directo si se mira más de cerca el mecanismo de construcción de conocimiento.

La mayor necesidad de intervención directa del profesor debe provenir del sentir de los estudiantes en aquellas situaciones coyunturales del aprendizaje en las que su conocimiento previo resulta ser no tanto un fundamento sobre el cual construir como un obstáculo para progresar. Piaget y Vygotsky se refirieron extensamente a esos momentos especiales en que para proceder es necesario reconceptualizar lo que ya se sabe. Piaget llamó "una acomodación de un esquema" a esta reconceptualización, mientras que Vygotsky elaboró sobre lo intrincado de las transiciones entre los conceptos cotidianos y los conceptos científicos —transiciones que requieren una reconstrucción de generalizaciones de bajo nivel (confrontar también el trabajo sobre modelos tácitos de Fischbein, 1989). Todo esto sucede cuando las expectativas consistentes con el antiguo conocimiento demuestran entrar en conflicto con lo que se ha de aprender. Este es usualmente el caso, incluso cuando se introducen ideas matemáticas aparentemente directas como las de número racional, irracional, o negativo (ver también la noción de obstáculo epistemológico en Bachelard, 1938 citado en Cornu, 1991; Sierpinska, 1994; cf. Sfard, 1994a).

En momentos como esos —momentos de la mayor confusión, pero también del aprendizaje más significativo— la dificultad principal surge de la necesidad de desarraigar antiguas creencias metamatemáticas que obstruyen el progreso.[5] Dado que tales creencias son tácitas, es poco probable que se puedan convertir de manera espontánea en objeto de la reflexión de quien aprende. Es ahí donde la ayuda de una persona “más conocedora” llega a ser verdaderamente indispensable. Sólo una persona así, puede hacer visible para los estudiantes sus creencias escondidas. Después de todo, no se puede esperar que un niño que conoce un solo mundo emprenda una incursión a un “espacio exterior” antes de que un viajero con más experiencia le haga consciente de la existencia de ese otro espacio. A la luz de esto, no es de extrañar haber encontrado que los profesores que se abstienen de “proporcionar información” tengan una sensación menor de autoeficacia (Smith, 1996).

d. ¿Qué se puede hacer?

Una vez más, parece ser que la principal fuente del problema está en la exageración y falta de equilibrio. Para esto hay una solución simple: hay muchos modos posibles de interacción y todos ellos deben tener oportunidades de usarse. No hay una única respuesta a la pregunta acerca del tiempo que debe darse a cada una de las posibles formas de aprendizaje. Las proporciones reales pueden depender de necesidades y preferencias específicas de cada clase y cada profesor. Sin embargo, es claro que a duras penas hay un lugar en el que el profesor pueda estar siempre satisfecho con el papel de un guía complaciente y discreto; y difícilmente uno se puede imaginar a un estudiante exitoso que nunca gaste tiempo luchando solo con ideas matemáticas difíciles. Siempre que haya poca posibilidad de que los estudiantes encuentren por cuenta propia su camino hacia una nueva idea o la resolución de un problema, el profesor no debe dudar acerca de entrar en escena con propuestas concretas; y siempre que se esté trabajando con un nuevo asunto complejo se debe dar al estudiante la oportunidad de enfrentarlo solo sin el estrés adicional de la comunicación simultánea con otros. En verdad, no se deben dar al niño respuestas a preguntas que nunca ha formulado y que no ha tenido oportunidad de comprender; pero, si a través de un trabajo de exploración, colaborativo e individual, se ha preparado una base para una nueva idea, entonces será bienvenida y, más efectiva que dañina, alguna información proporcionada por el profesor. Para que todo esto ocurra, debe relajarse considerablemente la “prohibición de proporcionar información” y el imperativo de comunicarse con otros.

5. Históricamente la ciencia y las matemáticas se desarrollaron a través de tales victorias sucesivas sobre la intuición.

7. LA NECESIDAD DE INTERACCIÓN VERBAL/SIMBÓLICA

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

La interacción en el aprendizaje significa comunicación y la comunicación significa el uso de símbolos con los que uno puede tratar de transmitir sus propias experiencias y pensamientos a otras personas. El lenguaje es nuestro sistema simbólico más desarrollado, y el habla, por tanto, es nuestro principal modo de comunicación. Las matemáticas, con sus propios símbolos especiales, se pueden ver como una extensión del discurso natural.

Así que si el aprendizaje de las matemáticas va a tener lugar en un ambiente interactivo, se debe nutrir la habilidad de los estudiantes para "hablar matemáticas". O, si el conocimiento se adquiere principalmente a través del discurso, entonces el estudiante tiene que hablar. Para el seguidor de las ideas de Vygotsky acerca de la relación entre el pensamiento y el habla, las razones para desarrollar la habilidad de "hablar matemáticas" en quien aprende, son aun más profundas. Decir que el habla es una "herramienta del pensamiento" y un vehículo para transportar los pensamientos de uno a los otros, implica que hablar es algo secundario, de hecho, subordinado al pensamiento. Sin embargo, si se toma seriamente el llamado de Vygotsky para tratar de comprender aquellos fenómenos que se pueden denominar "exclusivamente humanos", uno se siente inclinado a concluir que la distinción entre el habla y el pensamiento se hace muy tenue. Esto es lo que necesariamente ocurre al advertir que nuestros sistemas conceptuales —y por tanto nosotros mismos y el mundo en que cada uno de nosotros vive— se crean a través de y dentro de la actividad de hablar (por supuesto, "hablar" puede hacer referencia a un "diálogo interno" y no sólo a una conversación con otros). El mismo Vygotsky puso en duda lo sostenible de los enfoques que tratan de centrarse, de manera separada, ya sea en el habla o en el pensamiento. El comparó tal intento con el de tratar de comprender las propiedades del agua investigando sus componentes, oxígeno e hidrógeno.[6]

La inseparabilidad del habla y el pensamiento se demuestra a sí misma en el uso y en el significado (comprensión) dialéctico y relativo al desarrollo de palabras/símbolos. Simplemente no se puede construir el significado de un concepto antes de introducir una palabra o un símbolo con el que se pueda pensar acerca de tal concepto. El sentido de la comprensión se debería desarrollar entonces a través del uso de la palabra o del símbolo. En matemáticas, en ausencia de la mediación perceptual característica de las actividades diarias, la interdependencia —en términos de desarrollo— entre el discurso y sus objetos, lo mismo que la naturaleza dialéctica de la relación entre los signos (símbolos y palabras) y su comprensión, encuentran su expresión más clara. Como ya se advirtió, reflexionar sobre nuestras acciones es lo que hace emerger nuevos conceptos matemáticos. Sujetar las acciones a la reflexión significa volverlas objeto de expresiones lingüísticas. La necesidad de enfocarse y hablar acerca de las acciones simplemente no ocurriría sin *nombrar* y *simbolizar*, o sin por lo menos describir en muchas palabras y símbolos tales acciones. El acto de nombrar y de simbolizar es, en cierto sentido, el acto inicial; usar las palabras y los símbolos es la actividad de construir significado.[7] Si esto es así, mientras más conscientes seamos de los procesos discursivos que constituyen nuestra actividad matemática, mejores posibilidades tendremos de alcanzar un buen control de estos procesos; y mientras mejor sea nuestro control, más efectivo será el aprendizaje de nuestros estudiantes. En pocas palabras, el asunto no es *si se debe* enseñar a través de la conversación, sino más bien, *cómo*: puesto que aprender matemáticas se puede equiparar con el proceso de ingresar en un cierto tipo de discurso bien definido, deberíamos pensar más en las formas de enriquecer la participación de los estudiantes en este tipo especial de conversación.[8]

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Los autores de los *Estándares* se refieren extensamente a la necesidad de dar al estudiante oportunidades de “hablar matemáticas”:

> El desarrollo de una capacidad del estudiante para usar las matemáticas involucra aprender los signos, los símbolos y los términos de las matemáticas. Esto se logra mejor en situaciones problema en las que los estudiantes tienen oportunidad de leer, escribir y discutir

6. Actualmente una comunidad de investigadores, que crece rápidamente, y que se llama a sí misma “psicólogos discursivos” está llevando incluso más lejos estas ideas (Edwards y Potter, 1992; Harre y Gillet, 1995; Edwards, 1993). A sus ojos, la fe en el poder de la conversación no es una opinión aislada sino más bien un asunto de visión del mundo, de acuerdo a lo cual todo nuestro pensamiento, sin exceptuar al pensamiento matemático, es esencialmente discursivo. Los psicólogos discursivos consideran nuestros sistemas conceptuales y, por tanto, al ser humano y al mundo en el que cada quien vive, como creados a través de y dentro de la actividad de hablar, bien sea social o privada. Al ser criaturas discursivas, sencillamente no podemos salirnos del discurso. Es en el discurso donde comienzan, existen y terminan todas nuestras actividades cognitivas. Como tales, todas estas actividades son esencialmente sociales e incluso su aparición ocasional, que conduce a resultados universales e independientes de la mente, no es más que un subproducto discursivo.
7. Para un tratamiento más extenso ver Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain y Whitenack (1997); Sfard (en prensa).
8. Todos estos asuntos se desarrollan extensamente en Hicks (1996); Forman, Minick y Stone (1993). Ver también Lampert y Cobb (en prensa); Ball (1991a).

> ideas en las que el uso del lenguaje de las matemáticas llega a ser natural. (NCTM, 1989, p. 6)

Los autores de los *Estándares* explican que a medida que los estudiantes comunican sus ideas, “aprenden a clarificar, refinar y consolidar su pensamiento” (p. 6). Esto implica claramente que la habilidad de participar en una conversación matemática se promueve no sólo por su valor intrínseco, sino también por los efectos que de ella se esperan en el proceso de aprendizaje y en la calidad del conocimiento resultante.[9] Por tanto es apenas natural que se promuevan varias formas de conversación matemática. Se pide que haya instrucción entre compañeros, exploración en pequeños grupos y discusión en todo el grupo, en donde el intercambio verbal sea el principal modo de comunicación. Además de las interacciones orales también se espera que los estudiantes expresen sus ideas por escrito.

c. ¿Qué puede resultar mal?

La importancia de promover la conversación matemática parece incuestionable. Lo que puede ser menos obvio, sin embargo, es que la implementación de este principio, aparentemente directo, está lejos de ser simple. La experiencia de los últimos años ha mostrado que hay muchas maneras de convertir la discusión de clase o el trabajo en grupo en una gran fuente de oportunidades de aprendizaje (Lampert, 1990; Ball, 1991a; Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993; Schoenfeld, 1996), pero también ha mostrado que hay más maneras aun de convertirlas en una pérdida de tiempo o peor que eso en un obstáculo para el aprendizaje.

Casualmente en la actualidad se pueden observar en muchas clases de matemáticas tipos de actividades discursivas fútiles, inútiles e incluso potencialmente dañinas. Uno de tales casos, descrito por Carolyn Kieran y por mí (Sfard y Kieran, en preparación), proviene de nuestro propio experimento de enseñanza que llevamos a cabo hace pocos años en Montreal. Quizás hay varias razones que explican este estado de cosas.

En primer lugar, asignar a los profesores la responsabilidad de la efectividad de la conversación es fácil, pero apoyarlos en el logro de esta meta con una asesoría útil es difícil. Orquestar una discusión matemática productiva o iniciar un intercambio genuino entre niños que están trabajando en grupos resulta ser una tarea extremadamente exigente e intrincada. El papel del

9. Las revistas de Educación Matemática abundan en títulos con un mensaje similar: “On the learning of mathematics through conversation” (Haroutunian-Gordon y Tartakoff, 1996), “Reflection, communication, and learning mathematics” (Wistedt, 1994), “Journal Writing and Learning Mathematics” (Waywood, 1992), “Reading, writing and mathematics” (Borasi y Siegel, 1994), etc.

coordinador de la discusión es particularmente difícil. Aunque conducir un debate casi nunca es simple, hacerlo cuando tal debate tiene contenido matemático puede estar prácticamente más allá de la habilidad de manejo que pueda uno tener. En efecto, arreglárselas con un problema matemático puede ser una tarea suficientemente exigente incluso cuando la persona presta toda su atención al problema. Tratar de entender el razonamiento de otras personas acerca del problema con frecuencia es una actividad más bien agotadora (Arcavi y Schoenfeld, 1992). Combinar el propio pensamiento matemático con un intento de escuchar a muchos otros resolutores parece por tanto una de las más arduas tareas de un profesor (ver, e.g., Ball, 1997). No se puede esperar que muchos profesores —ni siquiera los matemáticos— puedan desempeñarse realmente bien en ello.

En segundo lugar, el caso desarrollado en la sección anterior de dejar espacio para el aprendizaje "no interactivo", se puede repetir ahora con una nueva clase de argumento. Ciertamente hay mucho valor en el intento de externalizar el diálogo interno que conduce el estudiante mientras aprende y resuelve problemas. Sin embargo, insistir demasiado en el modo del "pensamiento en voz alta" puede interferir con tal diálogo interno, dañando el pensamiento mismo.

En tercer lugar, la experiencia de enseñanza de Carolyn Kieran y mía, mencionada antes, ha mostrado con particular claridad lo que los psicólogos saben hace tiempo: que las habilidades comunicativas se pueden y deben promover deliberadamente. Como lo sustentaré en la siguiente sección, no se puede esperar que las reglas de la comunicación matemática —un producto de esfuerzos de cientos de años atrás hechos por los matemáticos para hacer perfecta su comunicación— se desarrollen simplemente como un mero subproducto de interacciones espontáneas. Estas reglas deben enseñarse.

Finalmente, para muchos investigadores la idea de aprender a través de la conversación es un subproducto natural de la concepción del aprendizaje como una iniciación al *discurso matemático*, que generalmente se considera un tipo de discurso aceptablemente bien definido (Lampert, 1990; Lave y Wenger, 1991; Schoenfeld, 1996). En la siguiente sección se dará una descripción completa de este enfoque y de sus implicaciones. Aquí, permítaseme sólo anotar que los niños no pueden reinventar las reglas y las normas que hacen que un discurso sea matemático. Para esto es indispensable la ayuda de un profesor. Este punto puede haber sido pasado por alto por los implementadores de los *Estándares*, algunos de los cuales pueden creer que decir a los niños que discutan problemas matemáticos es suficiente para comprometerlos en el tipo correcto de actividad. Sin embargo, ¿cómo pueden los niños participar en un juego cuyas reglas no conocen?

d. ¿Qué se puede hacer?

Lo que se ha dicho antes implica que quizás no se ha hecho suficiente trabajo preparatorio para asegurar el éxito de ideas tales como el intercambio en grupos pequeños y la discusión en clase. En primer lugar, si se quiere que la conversación entre los niños sea efectiva y conduzca al aprendizaje, *se debe enseñar* el arte de comunicar. Cómo hacer esto y exactamente qué debe ser aprendido por los niños, son asuntos en los que la comunidad de Educación Matemática todavía tiene mucho qué pensar. Además, como depende principalmente del profesor que una conversación matemática diseñada para el propósito de aprender sea un éxito o un fracaso,[10] los profesores deben estar cuidadosamente preparados. Sin un entrenamiento apropiado, no se puede esperar que ellos ejerzan su papel de iniciadores, moderadores y coordinadores de una discusión de una manera realmente efectiva. Sin embargo, continúa no siendo bien claro cómo ha de hacerse tal preparación. No sólo el asunto de enseñar a los niños el arte de la comunicación está seriamente subdesarrollado; también lo está el problema del entrenamiento de líderes de la discusión. Por último, pero no por eso menos importante, está la necesidad de pensar profundamente acerca de actividades alrededor de las cuales deben tener lugar las conversaciones matemáticas. Aunque recientemente algo se ha pensado acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos de los que se espera impulsen intercambios útiles, se está lejos de haber comprendido bien el tópico y, como todos los demás, se debe estudiar intensivamente[11].

8. LA NECESIDAD DE UN DISCURSO BIEN DEFINIDO

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

El énfasis que se acaba de exponer sobre la conversación, también se puede presentar como derivado de una nueva metáfora para el conocer y el conocimiento, la misma que dio origen al enfoque discursivo, cada vez más popular, para la investigación sobre el pensamiento y la mente (Edwards y Potter, 1992; Harre y Gillet, 1995). En lugar de tratar la conversación simplemente como una ruta segura hacia el conocer, más y más pensadores equiparan el conocimiento con la conversación (Rorty, 1979; para una muestra relevante de la literatura, véase Ernest, 1993). La esencia de la idea ha sido condensada por Rorty en la siguiente afirmación:

10. Compárese Sfard, Nesher, Streefland, Cobb y Mason (1998).
11. Para más ideas acerca de la comunicación en la clase de matemáticas, véase Steinbring, Bartolini Bussi, Sierpinska (1998).

> Si vemos el conocer no como algo que tiene una esencia para ser descrita por científicos o filósofos, sino más bien como un derecho a buscar certeza, —según los estándares actuales— entonces estamos bien encaminados para ver la *conversación* como el contexto último dentro del cual el conocimiento va a ser comprendido. (p. 390)

Naturalmente, al hablar del conocimiento como una “conversación de la humanidad”, Rorty no necesariamente se refiere al significado literal más inmediato de los términos componentes. Para él, lo mismo que para sus muchos colegas de ambos lados del Atlántico, la conversación es una amplia idea metafórica que incluye todas las clases de comunicación humana —desde una interactiva, intercambio oral en tiempo real, hasta la producción de textos escritos (correo ordinario, correspondencia electrónica, escritura de artículos y libros, etc.). *Discurso* es otro término usado ampliamente en estos días en un sentido similar (Foucault, 1972). En el presente contexto, la palabra tiene un significado muy amplio y se refiere a la totalidad de las actividades comunicativas tal como las practica una comunidad dada (para evitar confusión con el sentido estricto del término en el lenguaje cotidiano, algunos autores, e.g., Gee (1997) proponen escribirlo con inicial mayúscula: Discurso). Dentro del marco teórico de la investigación discursiva se entiende que diferentes comunidades, una de las cuales es la comunidad matemática, se pueden caracterizar por los discursos distintivos que ellas crean. Claro está que también debe entenderse que los discursos son entidades dinámicas y siempre cambiantes, y por tanto, determinar sus identidades exactas y poner en correspondencia sus fronteras, ciertamente no es una tarea directa como cualquier investigador quisiera. Más aun, los discursos de diferentes comunidades se solapan constantemente y esto tiene como resultado un incesante cruce de sus naturalezas. A pesar de todas estas dificultades, la noción de discurso se muestra suficientemente clara para impulsar un flujo constante de investigación altamente informativa que tiene el poder de descubrir aspectos hasta ahora no advertidos del aprendizaje.

Al sustituir la palabra *conocimiento* por discurso, los filósofos destacan el papel central del habla en el esfuerzo intelectual humano. Para muchos investigadores, el estudio de la comunicación matemática se convirtió en una tarea casi equivalente a estudiar el desarrollo del pensamiento matemático mismo (ver e.g., Pimm, 1987, 1995; Bauersfeld, 1995; Morgan, 1996; Lampert y Cobb, en prensa; Forman, en prensa). Sin embargo, el cambio de foco que es evidente al renombrar, va más lejos que eso. En primer lugar, puede aceptarse como un acto de “retornar el cuerpo al lugar que le corresponde”[12] dentro del proceso de construcción del conocimiento. El conocimiento visto como un aspecto de una actividad discursiva ya no es un conjunto impersonal e incorpóreo de proposiciones, cuya naturaleza exacta es cuestión de “la verdadera forma” del mundo real; más bien es ahora una construcción humana. Además, la palabra *discurso* parece más global que *conocimiento*. Los investigadores que hablan acerca del discurso están preocupados no sólo con aquellas proposiciones y reglas que constituyen el propio cuerpo de conocimiento, sino también con reglas mucho menos explícitas de las acciones comunicativas humanas que se consideran como las formas adecuadas de construir y transmitir este conocimiento. Por tanto, se puede hablar acerca de las reglas del nivel-objeto del discurso matemático y acerca de las metarreglas que son superiores al tipo anterior de reglas, aunque sólo implícitamente.[13]

Para dar un ejemplo, pertenecen a la primera categoría las formas concretas de probar a partir de axiomas, practicadas por los matemáticos de hoy, mientras que al segundo grupo pertenece la creencia en la prueba como una deducción formal a partir de axiomas y el derecho de los matemáticos a establecer sistemas axiomáticos en cualquier forma que quieran, previsto que los sistemas estén libres de contradicción (esta regla es relativamente nueva; hasta el siglo XVIII, por lo menos, sólo contaban como axiomas aquellas proposiciones de las que se creía eran verdaderas universal y objetivamente). Las metarreglas regulan las formas en las que sustentamos nuestras afirmaciones matemáticas (Krummheuer, 1995) y nos permiten juzgar lo que es o no es “matemático” o “matemáticamente aceptable”. Con estas reglas también decidimos, usualmente de manera instintiva, qué clase de acción de nuestra parte cuenta como apropiada en el contexto dado, y qué comportamiento puede parecer fuera de lugar. Es la forma como hablamos e interactuamos con otros lo que transmite estas reglas del juego no escritas. En otras palabras, los estudiantes usualmente aprenden las ‘reglas del juego matemático’ sin un esfuerzo consciente, simplemente participando en el discurso matemático. Tal como lo señala Magdalena Lampert (1990), los estudiantes no aprenderían las reglas “con sólo decirles lo que deben hacer, lo mismo que no aprenderían a bailar con sólo decirles qué hacer.” (p. 58)

Por supuesto, las metarreglas características del discurso matemático se solapan con las que regulan cualquier comunicación en una clase (Cazden,

12. Esta expresión hace referencia a que no debemos considerar nuestro conocimiento como algo independiente de nosotros mismos. Somos nosotros quienes creamos conocimiento y este conocimiento es un reflejo de nuestras propias experiencias entre las cuales las experiencias más básicas del cuerpo juegan un papel fundamental; ver Johnson (1987).
13. El interés en estos y otros asuntos relacionados se puede localizar en muchas partes de la literatura reciente, aunque no mencionen explícitamente las metarreglas; ver e.g., Voigt (1985, 1994, 1995, 1996); Bauersfeld (1995); Krummheuer (1995); Bromme y Steinbring (1994); Lampert (1990); Putnam, Lampert y Peterson (1990); Cobb, Wood y Yackel (993); Cobb, Boufi, McClain y Whitenack (1997). El término ‘metarreglas’ parece cercano en su significado a lo que estos últimos autores denominan normas sociomatemáticas.

1988) y fuera de ella. Puesto que las metarreglas son tácitas, su control sobre nuestro pensamiento es particularmente fuerte,[14] mientras que nuestra sensibilidad a su violación no es menor que la correspondiente a la violación de leyes explícitas. Cuando los estudiantes sienten —de nuevo instintivamente— que se han cambiado las reglas, de verdad se exasperan. Su frustración se origina en su incapacidad para dar cuenta de la incomodidad que sienten. Al no ser totalmente conscientes de la forma exacta de las reglas que se violaron, o de las razones por las cuales las reglas son lo que son, todo lo que pueden hacer es decir 'No es justo'. Si se les presiona, en algunas ocasiones añadirán que lo que se les pide hacer no es, de alguna manera inexplicable, lo que se les enseñó a hacer. Decir que el juego no es 'justo' es su forma de describir una situación que desde su punto de vista es demasiado deficiente en términos de pistas para posibilitar decisiones discursivas posteriores.

Demasiado rigor es paralizante, pero también lo es la falta completa del mismo. Las metarreglas discursivas pueden ser limitantes pero son indispensables. De hecho, estas reglas constituyen el discurso y deben ser un objeto de aprendizaje en grado no menor de lo que lo son los hechos y procedimientos matemáticos del nivel-objeto. Sin ellas, el aprendizaje del contenido matemático del nivel-objeto se podría deteriorar seriamente o hacerse totalmente imposible. Aunque usualmente estas reglas se adquieren sin una enseñanza directa, ellas son las que dan al estudiante la sensación de que comprende el juego que se está jugando, y la habilidad para tomar parte en él. En lo que sigue elaboraré esta idea. Aquí, concluiré solamente que para ser capaz de aprender, el estudiante debe sentir que el discurso en el que se espera que intervenga está bien definido, tiene una lógica interna y sus fronteras están claramente delimitadas.[15]

La pregunta que ahora debe ser respondida es de dónde deben provenir las reglas del discurso de la clase de matemáticas. Con respecto a ello, la respuesta puede ser simple: al tener que ver con las matemáticas, este particular discurso escolar debería ser tan cercano como fuera posible al discurso que conducen los matemáticos[16]. En la experiencia con el proyecto de las matemáticas modernas que, en las décadas de 1950 y 1960, trató de transportar el discurso de los matemáticos directamente de las universidades a las clases

14. Esta es probablemente una de las razones por las que tenemos tal dificultad con los problemas que requieren un discernimiento especial, que no se pueden resolver dentro de los confines de las reglas ordinarias del discurso matemático; de hecho, las reglas del discurso pueden crear restricciones para la mente.

15. En cierto sentido, por tanto, la necesidad de conocer las reglas del discurso que se va a manejar diestramente, es una contraparte participacionista de la necesidad adquisicionista de estructura, tratada antes.

16. Para ensayos lúcidos sobre diferentes aspectos del discurso matemático profesional, véase e.g., Davis y Hersh (1981).

de las escuelas, hay evidencia de que el asunto no es tan simple como eso (cf. Brown, 1997). Este intento no pudo ser totalmente exitoso simplemente porque quienes lo concibieron no tuvieron en cuenta la inevitabilidad y los efectos adversos de la tensión entre el discurso matemático profesional y los otros discursos en los que los profesores y los niños habían participado. Desde entonces, todas las partes involucradas reconocieron la inevitabilidad de la *transposición didáctica*; es decir, la de ajustar el discurso de la escuela a las necesidades y posibilidades del niño que aprende.[17]

De todas formas, es incuestionable la necesidad de preservar ciertas características básicas del discurso profesional en la escuela. La decisión de enseñar matemáticas a cualquier persona resulta, después de todo, de reconocer la importancia de este discurso. Actualmente, el aprendizaje de las matemáticas se conceptualiza con frecuencia como una iniciación en la "comunidad de práctica" (Lave y Wenger, 1991). De acuerdo con esta visión, los estudiantes de matemáticas son profesionales principiantes o como los llama Streefland (en prensa) "investigadores jóvenes." Si se quiere que ellos actúen en consecuencia, es nuestra misión como profesores convertir la clase en una "comunidad de indagación" (Schoenfeld, 1996) que debe ser muy cercana en sus normas y prácticas a la de los profesionales expertos. Al respecto, Lampert (1990) afirma que la meta adecuada de la enseñanza debe ser "hacer que la práctica de saber matemáticas en la escuela se acerque a lo que significa saber matemáticas dentro de la disciplina." La expresión "la práctica de saber matemáticas" señala una diferencia esencial entre el enfoque de las matemáticas modernas y el actual. En esta ocasión el foco está en el *proceso* discursivo en vez de estar en el *producto*, es decir, en aprender a *matematizar* (Wheeler, 1982) y no en 'adquirir' su producto. En otras palabras, el énfasis está en los estratos metadiscursivos que a pesar de su relativa invisibilidad, son lo que le da al discurso matemático su identidad única.[18] Si se alcanza esta nueva meta, quedará satisfecha la necesidad de los estudiantes en relación con un discurso bien definido.

17. El término *transposición didáctica* fue acuñado por Yves Chevallard (1985, 1990); véase también Sierpinska y Lerman (1996). En su versión original, Chevallard se refirió al hecho de que el conocimiento profesional debe cambiar de acuerdo con las necesidades de la institución en la que este conocimiento se practica; en el lenguaje del discurso, podemos decir que aquí nos ocupamos de la transformación del discurso de acuerdo con las necesidades y requerimientos de diferentes comunidades.

18. Este enfoque corresponde a lo que Deborah Hicks llama "'instrucción por género' deliberada" (en Lampert y Cobb, en prensa) y lo que Cobb, Wood y Yackel (1993) llaman "hablar acerca de hablar acerca de matemáticas".

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

El lenguaje del discurso está presente en los *Estándares*, especialmente en el volumen dedicado a la enseñanza. Los autores de los *Estándares* explican:

> El discurso se refiere a las formas de representar, pensar, hablar, estar de acuerdo y disentir que los profesores y los estudiantes usan para involucrarse. (…) El discurso conlleva valores fundamentales acerca del conocimiento y la autoridad. Su naturaleza se refleja en lo que hace que una respuesta sea correcta y lo que cuenta como actividad matemática, argumento y pensamiento legítimos. A través de las formas en que orquestan el discurso, los profesores transmiten mensajes acerca de quién posee conocimiento, de cuáles son las formas de pensar y conocer que valoran, de a quién consideran capaz de contribuir, y de quién tiene *status* en el grupo. (NCTM, 1991, p. 20)

Esta definición es un intento de alertar a los implementadores acerca de la existencia de reglas y normas implícitas, lo mismo que con respecto a las formas discursivas indirectas en las que se comunican estos contenidos especiales. Los *Estándares*, en su totalidad, se pueden ver como un intento global para explicar y definir los componentes de un discurso de clase apropiado, en el concepto de los autores. En este contexto es importante advertir que, muy al contrario de los documentos más tradicionales, los *Estándares* abren espacio para ciertas reglas concretas de metanivel, tales como la que prescribe que la propia experiencia y el propio razonamiento del estudiante sean la fuente principal de conocimiento y de certeza matemáticos, en lugar de que lo sean el profesor y el libro de texto (véase, e.g., NCTM, 1989, p. 129).

c. ¿Qué puede resultar mal?

"Las matemáticas presentadas con rigor constituyen una ciencia deductiva sistemática; pero las matemáticas en el hacer constituyen una ciencia inductiva experimental," afirma Polya (1945, p. 11). Esto significa, entre otras cosas, que el "discurso matemático del hacer" es mucho más natural y menos restrictivo que el discurso para informar. Sin embargo, aun el discurso del hacer es bastante disciplinado en comparación con otros discursos, sean cotidianos o científicos. Aquí, los participantes esperan incluso llegar a un acuerdo incuestionable mediante la autoimposición deliberada y explícita de algunas reglas inequívocas. Restringiendo en gran medida las formas admisibles de expresión, los matemáticos tratan de asegurar que la forma exacta y el contenido de este discurso resulte independiente de los gustos, juicios y preferencias de los interlocutores. Sobra decir que uno podría esperar perfectamente que el discurso matemático de la clase fuera una versión bastante relajada, mucho menos rigurosa y más “popular” de este discurso. A veces, sin embargo, las reglas de relajación pueden ser tan radicales que podrían comenzar a considerarse como “redefinición de lo que constituyen las matemáticas” (Wu, 1997, p. 954). Un cuidadoso análisis de los requerimientos de los *Estándares* muestra que, contrario a las recomendaciones de los investigadores citadas antes, las nuevas matemáticas escolares pueden en efecto resultar muy diferentes de “lo que significa saber matemáticas dentro de la disciplina.” Aunque cada quien parece ser consciente de que la transposición didáctica es inevitable, lo que pasa ahora puede ir más allá de lo que los padres de familia y los matemáticos están preparados para tolerar.

Permítaseme hacer un breve e incompleto recuento de las formas en que el discurso de la clase, inspirado en la reforma, puede ser diferente del discurso profesional.[19] Como trataré de mostrar, ciertos valores y normas profesados por los *Estándares* pueden estar algo en contra de las normas que regulan el discurso matemático tradicional. Esta incompatibilidad normativa se puede ver principalmente en el metanivel discursivo, el nivel de creencias acerca de los derechos y obligaciones que uno tiene como participante en el discurso matemático.

En primer lugar, los educadores y los matemáticos con frecuencia están divididos con respecto a lo que debe ser una verdadera actividad matemática. La tendencia ya mencionada a buscar siempre situaciones de la vida real y a prescindir del contenido matemático “destilado” contradice lo que con frecuencia se cree es la verdadera esencia de la matematización. Después de todo, matematizar es casi sinónimo de abstraer. Se puede decir que, de la manera más fundamental, las matemáticas tienen que ver con “volar alto” sobre lo concreto y con clasificar cosas de acuerdo con características que permiten tomar atajos a través de contextos. Los matemáticos afirmarían (véase, e.g., Wu, 1997) que la habilidad para despojar de la carne —el cuerpo concreto— al esqueleto de las estructuras abstractas, constituye la fuente principal de la belleza y fuerza únicas de las matemáticas. Cuando nos restringimos a “las matemáticas contextualizadas” estamos ligando las matemáticas a lo concreto y particular —y perdiendo la esencia de la creación matemática. Además, el gran énfasis en cuanto a poner las matemáticas en un contexto de la vida real crea una atmósfera utilitaria, extraña al verdadero discurso matemático. Wu (1997) deplora la desaparición del “espíritu de indagación intelectual por lo que él vale” (p. 956).

De manera similar, los educadores y los matemáticos discutirían acerca de la admisibilidad de argumentos no analíticos que emplean medios visua-

19. Véase también Love y Pimm (1996); Brown (1997).

les. Mientras que este tipo de argumento, con frecuencia, se reconoce como suficiente en las escuelas, los matemáticos todavía consideran que es útil pero está lejos de ser decisivo o final (Davis, 1993; Rotman, 1994; Sfard, 1998b). De manera más general, los *Estándares* privilegian la heurística y con mucha frecuencia la sola instrucción dada a los estudiantes para comprometerlos en una actividad de demostración es "convenza a su compañero". Debido a la libertad prácticamente ilimitada en cuanto a la elección de las maneras de "convencer" se puede perder lo que es único con respecto al discurso matemático de demostrar. Probablemente por esto, Wu (1997) alude a una "manera arrogante en la que la reforma trata el argumento lógico" (p. 955), mientras a la vez deplora la "supresión de la precisión" (p. 957).

Por otra parte, el discurso matemático escolar engendrado por los *Estándares* resulta ser muy personal. Se invita a los estudiantes a hablar y a escribir acerca de su experiencia matemática de cualquier manera que escojan, usando un lenguaje de primera persona. (La "subjetivización" del discurso se puede llevar a un extremo absurdo —y desde luego no comprendido— si el llamado de los *Estándares* en relación con problemas abiertos "sin respuesta única" (NCTM, 1989, p. 6) se interpreta incorrectamente con el significado de "cualquier solución vale.") Todo esto está en manifiesto contraste con el discurso matemático clásico, del cual una característica distintiva es la impersonalidad que no compromete. Este último estilo es el que impregna el discurso con el aire de objetividad e independencia mental. Un matemático para quien el platonismo es "un estado mental de trabajo" si no un artículo de fe indiscutible (Sfard, 1994b), puede encontrar que la nota personal va en detrimento de todo su proyecto).

Para resumir, el discurso matemático que se desarrolla en las clases en las que se siguen los *Estándares*, es bien diferente al discurso profesional correspondiente al trabajo de un matemático. Esto entra en contradicción con la meta declarada de hacer al estudiante "un participante periférico legítimo" en el verdadero discurso matemático. No obstante, este estado de cosas se puede considerar totalmente justificado. Después de todo, las disparidades mencionadas antes son resultado inevitable de un intento de imbuir el aprendizaje de las matemáticas con valores más progresivos y, sobre todo, con respeto por las formas de pensar de los estudiantes. La relajación de las reglas se justifica además en vista de la gran diversidad de necesidades y capacidades de los estudiantes. Muchos podrían afirmar que tal cambio no tiene que ser aceptable a los ojos de los matemáticos profesionales para que sea aprobado como aceptable y necesario desde el punto de vista pedagógico. Incluso los "profesionales expertos" deben estar de acuerdo en que un compromiso razonable es la mejor solución posible. En efecto, ¿qué sentido tiene tratar de enseñar reglas estrictas del discurso matemático profesional si casi nadie puede aprenderlas? Sin embargo, un compromiso puede contar como razonable sólo en la medida en que el discurso que se dé esté bien definido, sea intrínsecamente coherente y convincente, en general. Si, por otro lado, simplemente rechazamos algunas de las convenciones básicas sin reemplazarlas por reglas alternativas, o si los cambios que hacemos son accidentales e inconsistentes, podemos terminar con un discurso más bien amorfo y deficientemente definido, y como tal imposible de ser aprendido. Una vez más, una aplicación descuidadamente exagerada de ideas promisorias podría ir en detrimento de una buena pedagogía.

d. ¿Qué se puede hacer?

Voy a comenzar por mostrar que el problema que estamos encarando es intrínsecamente complejo y que su solución probablemente no es sólo cuestión de buena voluntad de los legisladores e implementadores de los *Estándares.* En realidad, el malestar de matemáticos y padres de familia con respecto a la reencarnación, algo paradójica, del más disciplinado de los discursos en una materia escolar "nebulosa" (Wall Street Journal, 5 de noviembre de 1997) no es un simple resultado de proporciones incorrectas. Tiene una razón más elusiva y profunda que no se puede desconocer ni resolver fácilmente. Al examinar más de cerca, resulta que debido a nuestro deseo intenso de respetar la necesidad de comprender de los estudiantes, nos sentimos obligados a comprometer la característica misma del discurso matemático que es la condición básica de su comprensibilidad: estamos sacrificando su coherencia interna.

Para entender esta afirmación y sus implicaciones didácticas es importante ser más explícitos acerca de las razones por las que el discurso matemático profesional es como es. Lo primero que hay que notar es que este discurso está ligado al logro de un consenso universal, incuestionable. Por tanto, las matemáticas de los matemáticos se pueden describir como "la ciencia de la comunicación perfecta". Es necesaria la consciencia de esta meta para entender y justificar las rigurosas, limitantes, y para mucha gente, simplemente artificiales, metarreglas mencionadas antes. Sin embargo, lo que es motivante para el matemático no tiene que serlo para el estudiante. Es altamente improbable que cada estudiante entienda y respalde el sueño de comunicarse más allá de cualquier duda. Aun más, incluso si el estudiante pudiera identificarse con los matemáticos y sus necesidades especiales, es improbable que sus criterios para juzgar la certeza (o la ausencia de duda) sean los mismos de los profesionales. A esto, agreguemos los argumentos en contra "de la ideología de la certeza" supuestamente inherente en el discurso matemático profesional (Borba y Skovsmose, 1997)[20]; además, la motivación de las matemáticas escolares mediante la idea de la 'comunicación impecable' se convierte en un proyecto dudoso y poco factible. Por otro lado, dar esta clase de motivación significa privar al discurso matemático de su característica definitoria.

Como en muchas ocasiones anteriores, estamos ante un dilema didáctico que parece insoluble. Como si esto no fuera suficiente, la dificultad va más lejos aun. La preocupación de siempre acerca de la comunicación conduce a un discurso inflexible, altamente estructurado. Como resultado, las matemáticas se convierten en un sistema altamente organizado y bien diseñado, que no puede ser modificado de manera arbitraria en un lugar sin crear problemas en otro. De la misma manera como el juego de ajedrez se convertiría en algo poco estimulante e imposible de aprender si arbitrariamente se sustituyeran o suprimieran algunas de sus reglas, también las matemáticas podrían llegar a perder significado si se siguiera una "relajación" demasiado descuidada. Así, por ejemplo, la idea de número negativo no se puede entender completamente dentro de un discurso en el que se trata de describir el mundo físico real. En efecto, no hay nada en este mundo que dicte la regla "menos por menos es más". La única forma racional en que los matemáticos dan cuenta de esta propiedad es considerándola como una sentencia de los axiomas de campo de los números. El discurso de la escuela, sin embargo, no es —y probablemente no puede ser— el que reconoce la autoridad suprema de los axiomas y de la consistencia lógica.[21] De modo similar, la solicitud de definiciones rigurosas que deben contar como "verdaderamente matemáticas" no puede sonar convincente sin que se le relacione con la idea de la prueba matemática; y las reglas matemáticas de la prueba, a su vez, no pueden ser entendidas sin el acuerdo de que el criterio último de una argumentación apropiada es el ligamen lógico entre proposiciones y no, relaciones entre tales proposiciones y la realidad física. Sensibles de manera evidente a esta interdependencia de reglas, algunos educadores prefieren ver la "relajación" como una alternativa aceptable y sugieren abandonar cualquier clase de rigor matemático[22].

Hay otra regla de metanivel de las matemáticas actuales que simplemente no se puede preservar en las matemáticas escolares, pero sin la cual todo

20. El significado exacto de esta afirmación y las razones por las que se hace, se desarrollarán en la siguiente sección.
21. Esta es probablemente la razón que hay detrás del ya famoso principio "didáctico" expresado como "menos por menos es más; no discutimos las razones de esto". Esta también puede ser la explicación para la amarga queja del escritor francés Stendhal con respecto a sus dificultades con los números negativos "simplemente, no entraban en la cabeza [de su profesor]" (citado en Hefendehl-Hebeker, 1991): sin advertirlo, él y su profesor estaban participando en discursos diferentes.
22. Para una revisión de enfoques educativos relacionados con el asunto de la prueba y el probar, véase Hanna y Jahnke (1996).

el discurso se torna algo problemático. Para los matemáticos, la coherencia general de las matemáticas es la fuente última de su justificación y significatividad. En este discurso, la significatividad de un concepto proviene de ser un elemento de un sistema consistente. Para los estudiantes, que no tienen medios para apreciar esta coherencia general, las pequeñas piezas aisladas, encontradas sucesivamente en el curso del aprendizaje siempre parecerán un tanto arbitrarias.

Debido a estos dilemas insolubles, es en extremo difícil decidir acerca de medidas apropiadas de disciplina y rigor en el discurso matemático de la escuela. Se han sugerido muchas soluciones, y vale la pena pensar un poco sobre cada una de ellas. Conscientes de la insolubilidad básica del problema, algunas personas sugieren un cambio radical en el enfoque general de las matemáticas escolares, o por lo menos, de las matemáticas escolares superiores. Partiendo de una analogía con la poesía o la música, tales personas proponen que al comenzar en un cierto nivel, enseñamos a los estudiantes *acerca* de las matemáticas en vez de comprometerlos en hacer matemáticas. Después de todo, exactamente como la poesía y la música, no es necesario manejar totalmente de manera diestra las técnicas matemáticas para que puedan ser apreciadas como parte de nuestra cultura (véase, e.g., Devlin, 1997). Está lejos de ser obvio, sin embargo, que este sea un propósito viable: mientras que uno puede ciertamente apreciar y disfrutar la poesía y la música incluso sin ser capaz de producir nada en esos campos, probablemente no sucede algo similar en el caso de las matemáticas. Otra solución, no menos radical, podría ser convertir las matemáticas de la escuela secundaria en una materia electiva.[23] Quizás la sugerencia más realista es que tratemos de ser más cuidadosos en la elección de las reglas que vamos a modificar. Mientras tratamos de decidir, debemos ser conscientes de los posibles escollos de tal empresa —debemos observar que no haya conflicto entre las normas propuestas y ser cuidadosos de no suprimir ingredientes sin los cuales la construcción entera pudiera colapsar. Además, puede ser de gran ayuda ser más explícitos con los estudiantes acerca de las reglas de metanivel. Lampert (1990), Ball (1997), lo mismo que Cobb y sus colegas (Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993) han mostrado que esto se puede hacer incluso en los niveles más elementales. Todos ellos han estudiado las formas en que profesores y alumnos pueden negociar las diversas normas del discurso de su clase.

23. Algunas personas podrían afirmar que el valor agregado de tal movimiento sería un mejoramiento general en la enseñanza: todos hemos tenido que hacer intentos arduos para hacer atractiva la materia a los ojos de los estudiantes. Sin embargo, la relación entre la popularidad y la calidad de la instrucción está lejos de ser obvia.

9. LA NECESIDAD DE PERTENENCIA

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

En la sección anterior me he referido extensamente a los retos cognitivos que parecen requerirse para motivar a los estudiantes. Ahora, aludiré a un tipo diferente de fuerza conductora para el aprendizaje —me centraré en la motivación, a la que la metáfora del aprendizaje como participación pone en primer plano.

El término *participación* es casi sinónimo de "tomar parte" y "ser parte" y ambas expresiones señalan que el aprendizaje debe ser visto como un proceso de integración de cada quien a una unidad social más grande. Lo mismo que órganos diferentes se combinan para formar un cuerpo viviente, así los estudiantes contribuyen a la existencia y funcionamiento de la comunidad de quienes hablan y hacen matemáticas. Cuando una clase dada aprende matemáticas, actúa como este tipo de comunidad; los matemáticos investigadores, constituyen otra.[24] La metáfora del aprendizaje como participación desplaza el foco desde lo que "ocurre en la cabeza de los estudiantes" hacia los vínculos cambiantes entre un individuo y otros miembros de esta comunidad. Así que esto da prominencia al aspecto de mutualidad, característico de la relación parte-todo. En efecto, esta metáfora destaca la naturaleza dialéctica de la interacción del aprendizaje: una comunidad y un individuo se afectan e informan mutuamente. Por una parte, la existencia misma de la comunidad es totalmente dependiente de sus miembros. Por la otra, la identidad de un individuo, como la identidad de un órgano viviente, es una función de ser (o de llegar a ser) parte de una unidad más grande. Esto es, de hecho, lo que se quiere expresar cuando se afirma que los seres humanos son esencialmente criaturas sociales. No sorprende entonces que el deseo de contar como un miembro de un grupo social particular sea una poderosa fuerza conductora que está detrás de la mayoría de nuestras acciones (cf. Bruner, 1990).

Si se piensa en estos términos acerca del aprendizaje de las matemáticas, entonces probablemente la condición más básica para el aprendizaje es que el estudiante tenga deseo de pertenecer a la comunidad matematizante. La pregunta que debe formularse ahora es: ¿qué puede hacer que la comunidad matematizante sea atractiva a los ojos del estudiante? La respuesta más na-

24. Para efectos de la presente discusión, la "comunidad matematizante" se debe entender de manera amplia como una comunidad de gente que tiene éxito al hacer matemáticas y no necesariamente como la comunidad de matemáticos profesionales. También es importante entender que lo que aquí se denomina comunidad no es mucho más que un grupo de personas que aunque actúan de formas similares, no tienen que funcionar conjuntamente como un equipo.

tural es decir que si se va a atraer a los niños, entonces ellos deben saber que hacer parte de tal comunidad los puede capacitar para sentirse bien con ellos mismos. Ciertamente, este no era el caso para la mayoría de los niños en la mayoría de las clases tradicionales de matemáticas y ahora eso puede estar cambiando.

Otros factores para considerar en el contexto presente son los valores culturales. El que uno desee ser “un miembro” depende, en gran medida, de qué tanto se valore dicha afiliación dentro de la propia cultura. Cuando digo *cultura*, me refiero tanto al nivel local como al nivel global: el entorno social inmediato del estudiante —su familia, amigos, y escuela, de una parte, y la sociedad en la que vive, de otra.[25] Puesto que el contexto cultural cambia considerablemente a través del tiempo y del espacio, las fuerzas que moldean el deseo de los estudiantes de aprender matemáticas varían de un lugar a otro y de un momento histórico a otro. Hay poca duda de que ser competente en matemáticas fue alguna vez de gran estima en la cultura occidental y probablemente se sigue considerando de la misma manera en muchos países del lejano oriente. Esta puede ser una explicación parcial de los consistentemente altos resultados obtenidos por estudiantes de Singapur, Corea, el Japón y Hong Kong en las pruebas comparativas internacionales como la que recientemente se aplicó en el *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS). En contraste con esto, los resultados decepcionantes de los estudiantes de muchos países occidentales —incluidos los norteamericanos— nos alertan en relación con la posibilidad de que en esas partes del mundo, el deseo de participar en el discurso matemático está en descenso[26]. En breve haré referencia al por qué esto puede ser así y de qué manera los valores culturales generales de la sociedad occidental pueden ser, en parte, responsables de este fenómeno. Demos antes una mirada a la forma en que los *Estándares del NCTM* tratan de aprovechar la necesidad de pertenencia de los estudiantes para mejorar su aprendizaje de las matemáticas.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Los *Estándares* constituyen un paso importante hacia la transformación de la clase, en la que se matematiza, en un lugar apropiado para los niños. Si la

25. Sobra decir que hay una fuerte interdependencia entre estos dos ambientes culturales y que la intrincada dialéctica entre ellos es un tópico para la investigación antropológica.

26. Ha sido ampliamente documentado que los estudiantes del lejano oriente están sobrepasando, de manera persistente, el desempeño de sus contrapartes en el mundo occidental; véase, e.g., Stigler, Lee y Stevenson (1990); Stevenson y Stigler (1992). La diferencia entre las culturas de la clase de matemáticas en el Japón y en los Estados Unidos, que puede ser en parte responsable de la disparidad en los logros, ha sido descrita en Stigler, Fernández y Yoshida (1996).

reforma se hace de acuerdo con las intenciones de quienes la concibieron, una comunidad matematizante debería convertirse en un ambiente en el que el niño es respetado, se siente libre para expresarse, puede tener éxito en sus propios términos, y tiene la misma posibilidad de cualquier otro para ser creativo y contribuir de manera sustancial. Más aun, gracias a la naturaleza del nuevo tipo de actividades matemáticas sugeridas por los *Estándares*, la afiliación a esta comunidad puede ser una fuente de mucha emoción y satisfacción personal.

Los *Estándares* abordan de manera explícita el asunto de la importancia cultural de las matemáticas. Entre las principales metas del currículo de matemáticas se incluye “aprender a valorar las matemáticas” (NCTM, 1989, p. 5). Posteriormente esta meta se explica como sigue:

> Los estudiantes deberían tener numerosas y variadas experiencias relacionadas con la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas, de manera que puedan apreciar el papel de las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad contemporánea y explorar relaciones entre las matemáticas y las disciplinas a las que sirven: las ciencias físicas y biológicas, y las humanidades. (…) Incluso hoy, a medida que las matemáticas teóricas han florecido en su diversidad y han profundizado en su complejidad y abstracción, han llegado a ser más concretas y vitales para nuestra sociedad orientada tecnológicamente. (pp. 5-6)

Obviamente, no es suficiente requerir una apreciación de las matemáticas para que esto ocurra. Los valores y opiniones de los estudiantes también están moldeados, quizás principalmente, a través de mensajes implícitos acerca de la importancia de las matemáticas, que son transmitidos mediante las actividades que se supone deben realizar, y que son inherentes a las reglas del discurso que se espera que desarrollen en la clase. De acuerdo con metas mencionadas antes, los *Estándares* recomiendan enfatizar en las aplicaciones de las matemáticas. La tendencia a tratar las matemáticas en un contexto externo —cotidiano y científico— se discutió antes en detalle. Permítaseme anotar una vez más, que esto significa obviamente que se cree que la utilidad de las matemáticas es potencialmente la razón principal para la posible atracción de los estudiantes hacia la “comunidad matematizante.” Otros aspectos de la comunidad misma, potencialmente llamativos, como la naturaleza inherentemente satisfactoria de su actividad o ciertas características admirables de quienes logran ser sus miembros, no se mencionan de manera explícita.

c. ¿Qué puede resultar mal?

Sólo en contadas ocasiones los valores y deseos se eligen deliberadamente; en consecuencia, no pueden ser fácilmente influidos por argumentos racionales como el de la aplicabilidad a la vida real, de la materia que queremos enseñar. Las creencias, intenciones y emociones humanas son fenómenos complejos, dependientes de una gran cantidad de factores interrelacionados, y no un resultado de decisiones tomadas conscientemente.[27] Por tanto, imbuir valores y moldear actitudes no es directo ni fácil, y hay muchas maneras de fracasar en tales intentos. A continuación expongo un ejemplo notable de tal fracaso. Aunque proviene de Israel y no de los Estados Unidos, su mensaje e implicaciones trascienden las fronteras de un país particular.

Hace unos pocos años, una profesora israelí encontró una carta entre los papeles que le entregó una de sus alumnas al final del examen para matricularse (Figura Nº 1). El mensaje de la carta era inequívoco: la estudiante no tenía éxito en matemáticas no porque ella *no pudiera hacer lo que se le pedía*, sino más bien porque no tenía un *interés genuino* en hacerlo. Para ella, las matemáticas como tales no tenían relevancia alguna y si alguna vez decidiera aprenderlas, no sería por razón del conocimiento que pudiera adquirir sino más bien para jugar de la mejor manera el juego social en el que este tipo de logro es condición para el éxito.

Esta carta se puede interpretar como un resultado de la mala enseñanza, una enseñanza que fracasó en transmitir el mensaje acerca de la importancia práctica y cultural de las matemáticas. Sin embargo, esta conclusión puede ser demasiado fácil y también bastante injusta desde el punto de vista de los profesores. La estudiante citada antes y toda su clase no estudiaron en un desierto, y la forma como miraron las matemáticas fue resultado de influencias culturales tanto internas como externas. Hoy, los valores que deseamos promover a través del discurso matemático, lo mismo que los que tenemos que promover para hacer posible y exitoso este discurso, pueden estar en conflicto con los valores de la sociedad en la que tiene lugar el aprendizaje.

La afiliación a una comunidad matematizante, como a cualquiera otra, se puede desear ya sea por sí misma o sólo como un medio para otra afiliación de mayor importancia. Que la primera posibilidad es una opción real está bien documentado en testimonios de matemáticos (e.g., Hardy, 1940/1967; Hadamard, 1945; Ulam, 1976) quienes presentan la elección de su carrera como un resultado de su admiración por la clase de actividad en la que la comunidad matematizante se involucra. En una cultura que valora las habilidades intelectuales y aprecia el conocimiento por sí mismo, tal afiliación

27. Véase McLeod (1992).

Estimada examinadora:

Posiblemente no puedo pasar esta prueba porque no tengo idea de cómo resolver todos estos problemas. Tengo otros problemas más sustanciales en mi vida, y resolverlos me parece mucho más importante. En cambio, se me dan todos estos números y fórmulas que sólo hacen más complicada mi vida y no me pueden ayudar en nada. He sido obligada a dedicar cinco horas de mi vida, cada semana, a memorizar estas cosas. ¿Para qué? ¿Seré mejor persona si sé cómo investigar funciones? ¿Me haré más moral si pruebo algo por inducción? No lo creo.

Cinco horas de todo esto cada semana, pero ni una hora durante todo el año dedicada a las últimas noticias. Tampoco una sola conversación acerca de los problemas que plagan a nuestra sociedad moderna. Tengo mucho que decir, pero esto no encuentra su expresión en fórmulas trigonométricas.

Para mí es absolutamente claro que completaré mis exámenes de matrícula algún día, aunque lo haga en cierto sentido, en contra de mi mejor juicio. Para mí esto será una rendición a las convenciones sociales distorsionadas, convenciones de una sociedad en la que uno sólo puede tener éxito si flota en dirección de la corriente, obteniendo las mejores calificaciones y coleccionando grados.

Figura Nº 1. Una carta dirigida a la examinadora, escrita por una estudiante en su formulario de examen para matricularse

es altamente prestigiosa y da a la persona un sentido de valor personal y satisfacción.[28]

El hecho de que una afiliación bien establecida en la comunidad escolar matematizante sea codiciada, por su propio valor, por parte de los niños, depende en gran medida de qué tan “amigable hacia los niños” resulte ser esa comunidad. No se establece de manera explícita pero se puede adivinar que para la autora de la carta citada en la Figura Nº 1, estar en una clase de matemáticas significaba tener una autoestima disminuida y una inadecuada posición social. También, de manera evidente, hacer matemáticas para ella no era ni agradable ni gratificante. En la sociedad occidental, muchos consideran este último asunto como crucial y afirman que se debe hacer algo para que el aprendizaje de las matemáticas sea más placentero. Sin embargo, esta idea básicamente convincente se puede llevar con facilidad a un extremo pe-

28. Cuando se valoran las habilidades intelectuales por sí mismas, la gente está preparada para admirar a los matemáticos sin tener acceso alguno a lo que ellos están diciendo o sin que se les muestre alguna evidencia inmediata de que lo que hacen los matemáticos es útil. En una tal sociedad, entre más esotérico sea el trabajo de los matemáticos, más respetable puede parecer a los ojos de los neófitos. Ser incomprensible se toma como evidencia de superioridad intelectual (cf. Davis y Hersh, 1981).

ligroso. En una sociedad que permite a la necesidad de placer hablar en voz más alta que a cualquiera otra, se espera que la gratificación venga inmediatamente y sin esfuerzo. Como lo he sustentado de manera extensa a través de las páginas de este artículo, esta clase de satisfacción es imposible en matemáticas y quienes tratan de convertir el aprendizaje en una diversión exenta de esfuerzo, de hecho, lo obstruyen en vez de promoverlo (véase Thomas, 1996).[29]

Además, debe considerarse el hecho de que en una sociedad pragmática, con mentalidad práctica, la visión de perseguir desinteresadamente el conocimiento puede tener menos atractivo que en el pasado.[30] En una tal sociedad, la gente tiende a considerar el aprendizaje como un medio y no como un fin en sí mismo. Se valora el conocimiento principalmente por su aplicabilidad; es decir, por lo que puede dar en otros dominios de la vida. En consecuencia, la gente joven puede desear aprender matemáticas por razón de las puertas que eso puede abrirle en el futuro. En efecto, cuando a muchos de mis estudiantes universitarios se les pregunta por las razones para haber tomado la decisión de hacer un área mayor en matemáticas, el argumento que dan es su creencia en que “ser capaz de aprender matemáticas significa ser listo en términos generales” y en que “quienes tienen éxito en matemáticas tendrán éxito en la vida”. Estos estudiantes, por tanto, consideran la fluidez en el discurso matemático sólo como una entrada hacia otras “afiliaciones” más prestigiosas.

Esta concepción se refuerza de manera artificial por el hecho de que hoy, las matemáticas se usan ampliamente como una herramienta de selección. Las pruebas de matemáticas sirven en el ingreso a las universidades como un tamiz al que se le teme mucho y constituyen por tanto un pasaporte bastante arbitrario para muchas carreras diferentes. En una sociedad en la que paralelamente se valora el pensamiento crítico, la incapacidad de ver otra razón para aprender matemáticas puede ser fatal para el crecimiento matemático de cada quien. La carta a una examinadora, que se presenta en la Figura Nº 1, ciertamente lleva este mensaje. Más aun, la clase de competencia matemática requerida por las pruebas no necesariamente es la clase de conocimiento que se cultiva en las clases seguidoras de los *Estándares.* Una prueba se puede construir solamente sobre habilidades que se pueden medir con fa-

29. Vale la pena mencionar también que de acuerdo con estudios transculturales, los estudiantes japoneses conocidos por sus desempeños superiores en matemáticas, muestran actitudes más bien negativas hacia la materia (McLeod y Ortega, 1993). Esto implica que no es necesario disfrutar el estudio de las matemáticas para tener éxito.

30. Que este es el caso en la sociedad occidental contemporánea, es la tesis principal del número especial publicado el 4 de octubre de 1997 por *The Economist*, número que se dedicó a una encuesta a universidades y que llevó por título “Knowledge Factory”.

cilidad, mientras que los *Estándares* enfatizan la comprensión y la creatividad. Por tanto, el deseo de los estudiantes de ser miembros de una comunidad matematizante de hoy día, puede disminuirse seriamente por su convicción de que no les va a ser útil en el logro de sus metas futuras. Este deseo puede disminuirse aun más debido a antiguos métodos de evaluar que persisten en nuestra sociedad a pesar del llamado explícito de los *Estándares* hacia un cambio. Se ha hecho mucho daño con pruebas que parecen tener todavía como objetivo el tipo de competencia matemática que ya no se considera genuinamente importante.

Más en general, en una sociedad que valora la autonomía personal y el pensamiento crítico, la pregunta “¿Por qué debo aprender esto?” usualmente debe ser respondida si se pretende que el aprendizaje sea efectivo.[31] Convencidos acerca del derecho que cada quien tiene de decidir sobre su propia vida, las personas no están dispuestas a seguir aceptando decisiones educativas que no correspondan con sus normas y creencias. Las normas y creencias, a su vez, son casi inertes y están cambiando a un paso mucho más lento que nuestro pensamiento educativo. Esto da como resultado una tensión constante que puede interferir con los deseos de los estudiantes de aprender el tipo de matemáticas que queremos que aprendan. Aunque los padres de familia de hoy quieren que sus hijos sepan matemáticas, desde el punto de vista de los reformadores, puede que lo deseen por razones equivocadas. Como consecuencia, las matemáticas que quieren que sus hijos aprendan pueden ser el tipo equivocado de matemáticas.

Resumiendo todo esto en el lenguaje de la sección anterior, se puede decir que los mensajes ocultos de los muchos discursos en que el estudiante está participando pueden estar en conflicto unos con otros. Esta clase de conflicto puede bloquear cualquier intento de mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los países occidentales[32]. La dificultad para asegurar la consistencia interdiscursiva también puede contar para el bien conocido fenómeno de irreproductibilidad del éxito educativo. Al transplantar ideas educativas de una situación discursiva a otra, involuntariamente se puede

31. Un estudiante universitario me hizo ver recientemente que no siempre eso ocurre así; el escribió en su ensayo: “Como estudiante de matemáticas, en la escuela me esforcé por tener éxito sin preguntarme si es importante saber matemáticas y por qué. Sé que los estudiantes suelen hacer esta clase de preguntas hoy, pero nosotros no las hicimos en nuestro momento.” El impacto que tiene la necesidad de racionalización sobre la efectividad del aprendizaje, no es un asunto tan simple como parece y requiere una investigación detallada. Más en general, vale la pena considerar la pregunta de si el deseo de “pertenecer” tiene algunas raíces racionales.

32. Algunos escritores llegan a decir que el discurso matemático, tal como se practica en nuestra sociedad, contradice los valores básicos de la democracia (Walkerdine, 1994; Borba y Skovsmose, 1997).

cambiar el contexto hasta el punto de que las ideas pierdan su significado original. Después de todo, y como fue enfatizado a través de todas estas páginas, el significado es inherentemente dependiente del contexto. En la mayor parte de casos extremos, lo que estaba en perfecta sintonía con la cultura general de una situación puede estar en oposición con la cultura de otra. El efecto de dilema resultante (Bateson, 1972; Harries-Jones, 1995) o el conflicto entre los mensajes normativos implícitos y explícitos, convertirían en inefectivo, si no en completamente dañino, el enfoque educativo inicialmente exitoso. Así por ejemplo, un currículo construido de acuerdo con el principio del aprendizaje por indagación puede lograr maravillas en un ambiente experimental relajado y luego perder todo su poder en una clase en la que la única preocupación es pasar los exámenes externos con calificaciones tan altas como sea posible. Quienes desean hacer un cambio, con frecuencia, desconocen el hecho de que el éxito reside en la relación entre las ideas educativas y su contexto y no en las ideas como tales.

d. ¿Qué se puede hacer?

A la luz de todo esto, es bien obvio que la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas puede deteriorarse por influencias externas, y que enseñar la materia puede ser difícil en una sociedad que no valora lo que debe ser valorado si se quiere que ser miembro de una comunidad matematizante tenga algún atractivo. Hasta qué punto la cultura general puede ser influida desde dentro del salón de clase de matemáticas es una pregunta abierta.[33] También es difícil decir qué tanto se puede hacer dentro de una clase que no está inmersa en un entorno cultural favorable.

Aun así, se pueden sugerir algunas direcciones promisorias para hacer mejoras. Por ejemplo, podemos tratar de traer de regreso a la clase la idea de ganar conocimiento como una actividad que puede ser valorada por sí misma. Después de todo, esta actividad es parte integrante de la construcción de cualquier significado, y la necesidad de significado es la causa primaria de nuestras acciones. Además, podemos tratar de celebrar las matemáticas como quizás la mejor manifestación de nuestras habilidades exclusivamente humanas. Las podemos cultivar como parte de nuestra cultura, no menos importante que la poesía o la música. Hablar de la historia de la "comunidad matematizante" y contar las historias de la vida de sus más prominentes miembros (y posibles modelos de rol) pueden hacer mucho más atractiva esta comunidad a los ojos de los estudiantes. Sin embargo, por

33. De acuerdo con Comiti y Loewenberg-Ball (1996), esto puede ser particularmente difícil de hacer en una situación en la que "las matemáticas no son parte de una cultura más amplia, o no son valoradas como parte de la cultura general".

encima de todo, deberíamos considerar que las matemáticas se aprenden por una razón más importante que la de servir como una herramienta arbitraria de selección.[34]

10. LA NECESIDAD DE BALANCE

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

Para atender las diversas necesidades de quien aprende, la pedagogía misma debe ser variada y rica en posibilidades. El individuo que aprende es una criatura compleja con muchas necesidades que deben ser satisfechas si se quiere que el aprendizaje sea exitoso. En consecuencia, el principio de una "dieta balanceada" es una exigencia indispensable para nuestras mentes como lo es para nuestros cuerpos. La necesidad de balance y su frecuente ausencia han sido el lema conductor de las secciones precedentes, en todas las cuales traté de mostrar cómo la hegemonía de un enfoque único está ligada a un resultado que es dañino en vez de ser útil.[35]

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

En las páginas de los *Estándares del NCTM* se enfatiza repetidamente la diversidad de las necesidades de los estudiantes y de sus formas de pensamiento. Por razón de las numerosas y con frecuencia conflictivas necesidades del estudiante individual, el asunto de enseñar es algo suficientemente complejo aun si hubiera sólo una persona a quien enseñar (Arcavi y Schoenfeld, 1992). Sin embargo, se supone que los *Estándares* deben enfrentar las necesidades de toda la población norteamericana, conocida por su gran diversidad individual y cultural. De hecho, el asunto de la igualdad de oportunidades descansa en el corazón de los esfuerzos de la reforma y no sólo por razón de su importancia moral:

> No podemos permitir que la mayoría de nuestra población sea incompetente en matemáticas: la igualdad ha llegado a ser una necesidad económica. (NCTM, 1989, p. 4)

Así que, aunque los autores de los *Estándares* reconocen ciertamente la necesidad de balance, deben admitir que tienen que dejar en manos de los implementadores del currículo la tarea de encontrar este balance. De manera

34. En la sociedad actual esto puede parecer como una meta utópica. Aun así, vale la pena intentarlo.
35. Cf. Tieze (1994).

repetida, ellos enfatizan que no se puede garantizar la buena enseñanza por medio de recetas universales:

> Puesto que la enseñanza de las matemáticas es un esfuerzo complejo, no se puede reducir a recetas para ayudar a los estudiantes a aprender. (NCTM, 1991, p. 22)

Para que cada quien pueda encontrar su propio balance, los *Estándares* tratan de ser inclusivos en vez de exclusivos. A través de estas páginas, se puede percibir el intento de dejar muchas opciones abiertas.

c. ¿Qué puede resultar mal?

Sin embargo, no todo lector de los *Estándares* puede ser suficientemente sensible para advertir esta apertura. Que las cosas pueden funcionar mal a pesar de las buenas intenciones de sus autores, fue el tema de todas las secciones precedentes. Impacientes por poner en funcionamiento las buenas ideas, los intérpretes pueden olvidar que siempre hay más de una manera de traducir los principios curriculares generales en estrategias concretas de clase. Entusiasmados con la idea de producir un cambio real, con frecuencia, comienzan pensando que lo antiguo y lo nuevo se excluyen mutuamente. Así es como la profunda idea constructivista de un estudiante como constructor de su propio conocimiento se puede trivializar en un destierro total de la enseñanza expositiva y es así como el llamado a promover la comunicación matemática se puede convertir en un imperativo para hacer del aprendizaje cooperativo una obligación para todos. Este es también el mecanismo a través del cual la exhortación a enseñar matemáticas por medio de resolución de problemas podría quitar legitimidad a la instrucción que no esté basada en problemas, y es la razón por la que la solicitud de hacer relevantes las matemáticas para el estudiante podría resultar en un rechazo de las matemáticas que no tengan relación con la vida real. A pesar de la alta calidad de los ingredientes, la comida que se cocina de esta manera no balanceada, tarde o temprano, se mostrará más dañina que saludable. Además, tal extremismo no tiene en cuenta la diversidad de las necesidades de los estudiantes, lo que los *Estándares* nos piden recordar a lo largo del camino.

No obstante, tal extremismo es un fenómeno bastante natural en aquellas situaciones coyunturales de la historia en las que se trata de hacer algo *realmente* diferente. Además encontrar caminos balanceados de enseñanza que probablemente satisfagan las numerosas —y en gran medida variables— necesidades de quien aprende es una tarea desalentadoramente intrincada. En particular, es en extremo difícil asegurar “el ajuste entre las recomendaciones basadas en estándares y las realidades de estudiantes provenientes de diversidades culturales, lingüísticas y económicas" (Tate y D'Ambrosio, 1997). Después de todo, sin embargo, como estuve tratando de mostrarlo a través de todas estas páginas, quienes abogan por un profundo cambio en las matemáticas están encarando un sinnúmero de dilemas inherentes a la misión en sí misma. El proceso educativo es un delicado toma y daca entre muchas necesidades que no se pueden satisfacer simultáneamente. Nuestro proyecto no es la excepción: está "plagado de propósitos conflictivos"[36] (Comiti y Loewenberg-Ball, 1996) y numerosos "círculos viciosos." Permítaseme recapitular brevemente al menos algunos de los dilemas con los que estamos enfrentados al tratar de diseñar una instrucción balanceada.

Nuestros problemas comienzan con la naturaleza circular del proceso de construcción de significado y continúan con 'el círculo vicioso de la reificación' y las dialécticas complejas entre hacer y comprender. Se amplifican por el hecho de que las matemáticas son una estructura tejida apretadamente que no se puede simplificar o fragmentar con facilidad. Todas estas son dificultades inmanentes en el proceso de aprendizaje. En verdad, es justamente por los "círculos" por lo que nos podemos mover hacia adelante. También es verdad, sin embargo, que a causa de ellos el proceso de aprendizaje es algunas veces un intrincado esfuerzo individual que no se puede apoyar fácilmente "desde afuera". Además de todo esto, tenemos que habérnoslas con muchos obstáculos que resultan de factores culturales y sociales, externos a las matemáticas mismas. Algunos de estos obstáculos se pueden ver, muy paradójicamente, como un producto del espíritu democrático de la cultura actual que claramente está muy presente en los *Estándares* mismos.

De acuerdo con los *Estándares*, la instrucción balanceada es la tarea del profesor. El papel del profesor nunca antes había sido tan difícil como ahora.

---

36. En el nivel más general, nuestro deseo de honrar la necesidad de autonomía de los estudiantes choca con la inevitable coerción que es parte esencial de cualquier empresa educativa. Más específicamente, es en nombre de la democracia que los *Estándares* exigen enseñar matemáticas para todos:

> Si no todos los estudiantes tienen la oportunidad de aprender (…) matemáticas, enfrentamos el peligro de crear una élite intelectual y una sociedad polarizada. La imagen de una sociedad en la que unos pocos tienen el conocimiento matemático que se necesita para el control del desarrollo económico y científico no es consistente ni con los valores de un sistema democrático justo ni con sus necesidades económicas. (NCTM, 1989, p. 9)

Sin embargo, por exactamente la misma razón, se puede sostener que la única forma democrática de trabajar con las matemáticas, al menos en la escuela secundaria, es haciendo de ella una materia electiva. En efecto, la democracia significa libertad de elección, y la libertad de elección se constriñe seriamente al decirle a otro qué aprender.

Las responsabilidades y obligaciones con las que los *Estándares* cargan a sus implementadores son tremendas. Se espera que el profesor planee la instrucción de tal manera que se ajuste a las necesidades y habilidades de cada quien; que busque "buenos problemas" tendientes a estimular el pensamiento de los estudiantes y a producir ideas matemáticas potentes; que escuche a todos los estudiantes y trate de entender y evaluar a diario a cada uno de ellos; que orqueste el trabajo en equipo y conduzca discusiones productivas en la clase; que se las arregle con la tecnología; que se mantenga a tono con la investigación y el desarrollo en educación —y todo esto es quizás sólo el comienzo de la lista. Como si eso no fuera suficiente, interpretaciones extremas de los *Estándares* y la restricción resultante sobre los tipos admisibles de instrucción atan las manos del profesor y hacen su tarea aun más difícil. En verdad, a partir de la literatura se conocen sólo unos pocos ejemplos bonitos de implementaciones diestras de los principios promovidos en los *Estándares* (Lampert, 1990; Ball, 1991b; Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993; Schoenfeld, 1996). Pero todos ellos son casos de profesores excepcionalmente dotados, o de profesores apoyados masivamente por investigadores. Para muchos otros profesores, con menos capacidad o voluntad, la tarea por la que tienen que responder puede ser demasiado compleja.

d. ¿Qué se puede hacer?

El balance que estamos buscando es cuestión de un equilibrio, extremadamente delicado, entre necesidades que pueden entrar en conflicto. Se puede dañar no sólo por extremismo sino también por proporciones inapropiadas. A la luz de esto, y si las nuevas propuestas deben ser apropiadas para todos, los *Estándares* probablemente deben ser abiertos en vez de limitantes, inclusivos en vez de exclusivos. Sus recomendaciones deben ser diversas y suficientemente ricas para asegurar que todo estudiante pueda encontrar en ellas su mejor ruta hacia el conocer, y suficientemente permisivas para dar a cada profesor una posibilidad de hacer lo que mejor sabe hacer. Es tarea del educador proporcionar a los estudiantes oportunidades para satisfacer todas sus necesidades. Es el deber de los *Estándares* proporcionar al profesor tantas opciones como sean posibles para crear dichas oportunidades. Debe haber un poco de cada cosa en la clase: la resolución de problemas no excluye la práctica de habilidades, y el trabajo en equipo no se debe recomendar a expensas del aprendizaje individual y de la exposición del profesor; se debe dar igual oportunidad a los problemas de la vida real como a los problemas matemáticos abstractos; y el aprendizaje en el que hay la oportunidad de hablar no debe suplantar al aprendizaje silencioso.

Si se quiere que los *Estándares* se protejan a sí mismos contra las interpretaciones no pretendidas, deben probablemente ser más explícitos acerca de cada cosa y, en particular, acerca de la necesidad de balance y de la dificultad para encontrarlo. Deben decir de muchas maneras que no hay una sola forma de lograr éxito, y que se esperaría —y debería estar permitido— que cada estudiante y cada profesor llegue a sus victorias personales en sus formas personales. La pluralidad de métodos debería no sólo permitirse sino recomendarse.

Todo esto es muy importante si se quiere que los profesores —que se supone deben traducir los principios generales en acciones— lo hagan de manera balanceada. Los profesores deben estar sintonizados con las necesidades y capacidades de los estudiantes lo mismo que con las propias. Requieren un amplio surtido de posibles métodos y enfoques. Conocer los métodos, sin embargo, no es suficiente. Sólo profesores que tengan una buena comprensión de las matemáticas que se supone deben enseñar, pueden construir las conexiones intramatemáticas que son la condición básica del aprendizaje significativo. Sólo tales profesores pueden ser exitosos al orquestar una discusión matemática constructiva. Un conocimiento de las matemáticas les debe dar la autoseguridad necesaria para admitir, cuando sea apropiado, que no saben una respuesta a una pregunta formulada por sus estudiantes en la resolución de problemas. Para el profesor de matemáticas de hoy, cargado con responsabilidades más difíciles que nunca, esta clase de conocimiento puede ser indispensable incluso en niveles elementales.

CONCLUSIÓN: NO HAY RESPUESTAS CORRECTAS; TAMPOCO CAMINO DE REGRESO

En este artículo he tratado de mostrar lo insoluble de los dilemas a los que estamos enfrentados como educadores matemáticos. En nuestros intentos por mejorar el aprendizaje de las matemáticas siempre permaneceremos atormentados por dos preocupaciones: la preocupación por el estudiante y la preocupación por la calidad de las matemáticas que está aprendiendo. Es a causa de esta tensión, siempre presente, que estamos repetidamente impelidos a movernos de una solución extrema a otra. Enfrentados a esto no existe posibilidad de detener el péndulo vacilante. Si, de una parte, nos mantenemos inflexibles en nuestros requerimientos acerca de las matemáticas, los logros de los estudiantes mostrarán que estamos simplemente fuera de la realidad. Si, de otra parte, hacemos una concesión considerable con respecto a las matemáticas, pronto encontraremos que estamos perjudicando el proceso de aprendizaje en vez de enriquecerlo. Se puede ilustrar este punto con la historia de un hombre pobre quien, después de oler un plato muy sabroso en la casa un hombre rico, le pidió a su esposa que preparara este plato aunque hubiera que suprimir o reemplazar algunos de los ingredientes. El pobre hombre no podía entender por qué ‘el mismo’ plato preparado con los sustitutos que pudo conseguir su esposa, resultó ser incomible. De modo similar si removemos demasiados ingredientes del sistema exquisitamente estructurado llamado matemáticas podemos quedarnos con una materia más bien insípida que no conduce al aprendizaje efectivo.

Parece por tanto, que no hay respuesta correcta para la pregunta que todos nos estamos haciendo. Por otra parte, hay muchas respuestas que son obviamente incorrectas. Una de ellas es que si las nuevas ideas no funcionan tan bien como se esperaba, deberíamos pensar en regresar a las formas antiguas de hacer las cosas. Incluso si no todo funciona a nuestra satisfacción debemos aplaudir a los *Estándares* por los valores que promueven. El abandono de las posiciones mencionadas antes resulta incuestionable aunque sólo sea por el hecho de que actualmente las normas de la clase de matemáticas parecen más sintonizadas con las normas de una sociedad democrática de lo que nunca antes hayan estado. Las críticas justificadas que se puedan oír algunas veces no significan que las ideas promovidas por el movimiento de reforma actual no puedan eventualmente dar lo que han prometido: oportunidades de aprendizaje que desde todo punto de vista posible nunca antes han sido mejores. Aunque la naturaleza de la tarea es tal que nunca se pueda esperar un éxito total, la situación ciertamente puede haberse mejorado en gran medida. Lo que está básicamente desequilibrado puede ser traído a una posición cercana al equilibrio. Si se quiere que esto suceda, entonces en lugar de tratar de convertir todo en oro, podemos emplear muchos métodos diversos para encontrar un camino seguro entre numerosas necesidades conflictivas.

REFERENCIAS

Arcavi, A. y Schoenfeld, A.H. (1992). Mathematics tutoring through a constructivist lens: The challenges of sense-making. *Journal of Mathematical Behavior, 11* (4), 321-335.

Ball, D.L. (1991a). What’s all this talk about “discourse”? *Arithmetic Teacher, 39* (3), 44-48.

Ball, D.L. (1991b). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching, vol. 2: Teacher’s subject-matter knowledge* (pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.

Ball, D. (1997). From the general to particular: Knowing our own students as learners of mathematics. *Mathematics Teacher, 90* (9), 732-737.

Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind: Collected essays in anthropology, psychiatry, evolution and epistemology.* San Francisco: Chandler Publishing Company.

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in mathematics classroom: Their function and their effects. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271-292). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Borasi, R. y Siegel, M. (1994). Reading, writing and mathematics: Rethinking the basis and their relationship. En D.F. Robitaille, D.H. Wheeler, y C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress of Mathematics Education* (pp. 35-48), Quebec, 17-23 de agosto de 1992, Sainte-Foy, Les Presses de L'Universite Laval.

Borba, M.C. y Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty in mathematics. *For the learning of mathematics, 17* (3), 17-23.

Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 217-248.

Brown, S.I. (1997). Thinking like a mathematician: A problematic perspective. *For the learning of mathematics, 17* (2), 35-38.

Bruner, J. (1985). Vygotsky: A historical and conceptual perspective. En J. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition. Vygotskian perspective* (pp. 21-34). Cambridge, MAS: Cambridge University Press.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning.* Cambridge, MAS: Harvard University Press.

Cazden, C. (1988). *Classroom Discourse.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P. (1995). Mathematics learning and small group interactions: Four case studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25-129). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (en prensa). Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and discursive reflection. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (3), 258-277.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. En D. Kirshner y J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 157-176). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. En N. Minick y C.A. Stone (Eds.), *Context for learning: Sociocultural dynamics in children's development*. Oxford: Oxford University Press.

Cole, M. (1996). *Cultural psychology.* Cambridge, MAS: The Belknap Press of Harvard University Press.

Comiti, C. y Loewenberg-Ball, D. (1996). Preparing teachers to teach mathematics: A comparative perspective. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1123-1154). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne*. Grenoble: La pensee Sauvage Editions.

Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: Critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics, 21*(1), 3-28.

Davidson, N. (1990). Small group cooperative learning in mathematics. En T.J. Cooney y C.R. Hirsh (Eds.), *Teaching and learning mathematics in 1990*, NCTM Yearbook (pp. 52-61). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics 24*, 333-344.

Davis, P.J. y Hersh, R. (1981). *The mathematical experience.* London: Penguin Books.

Devlin, K. (1997). Editorial: Reduce skills teaching in math class. *Focus, 1*7 (6), 2-3.

Edwards, D. (1993). But what do children really think? Discourse analysis and conceptual content in children's talk. *Cognition and Instruction, 11* (3 y 4), 207-225.

Edwards, D. y Potter, J. (1992). *Discursive Psychology.* Newbury Park, CA: Sage.

Ernest, P. (1993). Conversation as a metaphor for mathematics and learning. En *Proceedings of the Day Conference* (pp. 58-63). Manchester Metropolitan University.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics, 9* (2), 9-14.

Forman, E.A. (en prensa). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion for NCTM Standards.* Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.

Forman, E.A., Minick, N, y Stone, C.A. (Eds.) (1993). *Context for learning: Sociocultural dynamics in children's development.* Oxford: Oxford University Press.

Foucault, M. (1972). *The archaeology of knowledge.* New York: Harper Colophon.

Gee, J.P. (1997). Thinking, learning, and reading: The situated sociocultural mind. En D. Kirshner y J.A. Whitson (Eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 235-260). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton: Princeton University Press.

Hanna, G. y Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hardy, G.H. (1940/1967). *A Mathematician's apology.* Cambridge University Press.

Haroutunian-Gordon, S. y Tartakoff, D.S. (1996). On the learning of mathematics through conversation. *For the learning of mathematics, 16* (2), 2-10.

Harre, R. y Gillett, G. (1995). *The discursive mind.* Thousand Oaks: SAGE Publications.

Harries-Jones, P. (1995). *Recursive vision: Ecological understanding and Gregory Bateson*. Toronto: University of Toronto Press.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the learning of mathematics, 11* (1), 26-32.

Hicks, D. (Ed.) (1996). *Discourse, learning, and schooling.* Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson, M. (1987), *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason.* Chicago: The University of Chicago Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning. Interactions in classroom culture* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27* (1), 29-64.

Lampert, M. y Cobb, P. (en prensa). White paper on communication and language for Standards 2000 Writing Group. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter

(Eds.), *A research companion for NCTM Standards*. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, MAS: Cambridge University Press.

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on text. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grouws (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

McLeod, D.B. y Ortega, M. (1993). Affective issues in mathematics education. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom - High school mathematics* (pp. 21-38). New York: Macmillan Publishing Company.

Morgan, C. (1996). "The language of mathematics": Towards a critical analysis of mathematical text. *For the learning if mathematics, 16* (3), 2-10.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, DC: National Academy Press.

O'Connor, M.C. (1996). Managing the intermental: Classroom group discussion and the social context of learning. En D. Slobin, J. Gerhardt, A. Kyratzis y J. Guo (Eds.), *Social interaction, social context, and language* (pp. 495-509). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Associates.

O'Connor, M.C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. En M. Lampert y M. Blunk (Eds.), *Talking mathematics: Studies of teaching and learning in school* (pp. 17-55). Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child.* New York: Basic Books.

Pimm, D. (1987), *Speaking mathematically.* New York: Routledge and Kegan.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Putnam, R.T., Lampert, M., y Peterson, P.L. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary school. En C.B. Cazden (Ed.), *Review of research in education* (vol. 16, pp. 57-150). Washington, DC: American Educational Research Society.

Rorty, R. (1979). *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rotman, B. (1994). Mathematical writing, thinking, and virtual reality. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education, and philosophy: An international perspective* (pp. 76-86). London: The Falmer Press.

Schoenfeld, A. (1996). In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows the 'answer'? *For the learning of mathematics, 16* (3), 11-16.

Sfard, A. (1994a). Mathematical practices, anomalies, and classroom communication problems. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge* (pp. 248-273). London: The Falmer Press.

Sfard, A. (1994b). Reification as a birth of a metaphor. *For the learning of mathematics, 14* (1), 44-55.

Sfard, A. (1998).The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics eduction speak about the same thing? En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 491-512). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (en prensa). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K.E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. Associates.

Sfard, A. y Kieran, C. (en preparación). The "two-body problem" in learning mathematics: What does it mean that students really communicate with each other?

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P. y Mason, J. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? A debate. *For the learning of mathematics, 18* (1), 41-51.

Siegler, R. (en prensa). Implications of cognitive science research for mathematics education. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), A research companion for NCTM Standards. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C.

Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Smith, J.P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 387-402.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M.G., y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and communication in the mathematics classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stevenson, H.W. y Stigler, J.W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education.* New York: Summit Books.

Stigler, J., Fernández, C. y Yoshida, M. (1996). Traditions of school mathematics in Japan and American elementary classrooms. En L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 149-175). Mahwah, NJ: Kluwer Academic Publishers.

Stigler, J., Lee, S.Y. y Stevenson, H.W. (1990). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (en prensa). Learning and learning to teach in a community of inquiry. En T. Cooney (Ed.), *Mathematics teacher education: Issues and perspectives.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sutton, G.O. (1992). Cooperative learning works in mathematics. *Mathematics Teacher, 80* (1), 63-66.

Tate, W.F. y D'Ambrosio, B.S. (1997). Guest editorial. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (6), 650-651.

Tietze, U.P. (1994). Mathematical curricula and underlying goals. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strasser y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of mathematics as scientific discipline* (pp. 41-53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, R. (1996). Proto-mathematics and/or real mathematics. *For the learning of mathematics, 16* (2), 11-18.

Ulam, S. (1976). *Adventures of a mathematician.* New York: Scribners.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 6* (1), 69-118.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 21-50), Mahwah, NJ: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Vygotsky, L.S. (1987). Thinking and speech. En R.W. Rieber y A.C. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (vol. 1, pp. 39-285). New York: Plenum Press.

Walkerdine, V. (1994). Reasoning in a post-modern age. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: An international perspective* (pp. 61-75). London: The Falmer Press.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the learning of mathematics, 12* (2), 34-43.

Webb, N.M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (5), 366-389.

Webb, N.M. y Farivar, S. (1994). Promoting helping behavior in cooperative small groups in middle school mathematics. *American Educational Research Journal, 31*, 369-395.

Wheeler, D. (1982). Mathematization matters. *For the learning of mathematics, 3* (1), 45-47.

Wistedt, I. (1994). Reflection, communication, and learning mathematics. *Learning and Instruction, 4,* 123-138.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. Oxford: Blackwell.

Wu, H. (1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what you can do. *American mathematical Monthly.* 103, 954-962.

Anna Sfard
University of Haifa
Israel
E-mail: sfard@netvision.net.il