

El error en el uso de los números racionales e irracionales, como evidencia de obstáculo epistemológico, en estudiantes del grado noveno

Astrid Marcela Escobar Lujan

Boris Fernando Escobar Lujan

Trabajo para optar al grado de magíster en Educación Matemática.

Asesora:

Ana Celi Tamayo Acevedo

Universidad de Medellín

Departamento de Ciencias Básicas

Medellín 2015

Resumen

En este trabajo se hace una reflexión crítica acerca de los errores en el uso y manejo de los números racionales e irracionales, en estudiantes del grado noveno de dos instituciones educativas de Antioquia, y las consecuentes dificultades que estos generan en la construcción de los números reales, se hace necesaria para detectarlos, identificarlos y categorizarlos de manera sistemática con la taxonomía realizada por Radatz, esto con el propósito de generar reflexiones en vía de la comprensión del aprendizaje y de la enseñanza de los mismos, en la etapa escolar y de futuras propuestas didácticas.

La reflexión se fundamenta en la noción de obstáculo epistemológico dada por Gastón Bachelard y extrapolada a la Didáctica de la matemática por Guy Brousseau y Luis Rico entre otros, dando cuenta de lo problemático que resulta el aprendizaje de los números racionales e irracionales, no como resultado de la incapacidad o ignorancia manifiesta en los estudiantes; sino más bien, como evidencia de posibles obstáculos epistemológicos, propios de la construcción conceptual de dichos números, que pueden ser rastreados a lo largo de la historia y que fueron detectados en el presente trabajo por errores repetitivos y persistentes en el uso que hacen los estudiantes de ellos cuando realizan actividades específicas con ellos en el aula de clase, sin descartar que en muchas ocasiones se encuentran entremezclados con obstáculos de tipo didáctico.

Palabras clave: Racionales, irracionales, obstáculo epistemológico, error.

Contenido

Resumen	II
Lista de tablas	V
Lista de anexos.....	V
Introducción.....	1
1. Planteamiento del problema	2
2. Objetivos	6
2.1 General.....	6
2.2 Específicos.....	6
3. Antecedentes y Marco conceptual	7
3.1 Fundamentos Epistemológicos del error	7
3.2 El error y su relación con los obstáculos epistemológicos.....	8
3.3. El error, perspectivas desde la Educación Matemática	9
3.4 Consideraciones acerca de la construcción histórica del número.....	11
3.5 Investigaciones del error con relación a los números	17
3.6 Categorización de los errores	18
4. Metodología.....	22
4.1 Herramientas para la recolección del dato.....	22
4.2 Recolección de los datos.....	22
4.2.1 Test Diagnóstico.....	22
4.2.2 Entrevista.	23
4.2.3 Diario de campo.....	26
5. Análisis de resultados.....	26
5.1 Test diagnóstico	26
5.2 Entrevista	29
5.3 Diario de Campo.....	34
5.3.1 Causa de error por dificultades del lenguaje	47
5.3.2 Causas de error que se vinculan con información espacial	48
5.3.3 Causas de error por aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	49

5.3.4 Causa de error por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	50
5.3.5 Causa de error por aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	51
6. Reflexiones y recomendaciones	53
6.1 Reflexiones.....	53
6.1.1 Posibles obstáculos epistemológicos encontrados.....	53
6.1.2 Relación ente las categorías de Radatz y posibles obstáculos epistemológicos	56
6.2 Recomendaciones	56
7. Conclusiones	58
Bibliografía	59
Anexos.....	61

Lista de tablas

Tabla 1. Caracterización de las Instituciones	3
Tabla 2. Clasificación de errores propuesta por Radatz	20
Tabla 3. Características de la entrevista Socrática vs entrevista adaptada a partir de esta.....	24
Tabla 4. Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en representaciones de 3/4.....	27
Tabla 5. Resultados problema sobre teorema de Pitágoras.....	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 6. Resultados de la observación en aula de la Institución Educativa Ignacio Botero Vallejo de acuerdo a la taxonomía de Radatz.....	35
Tabla 7. Resultados de la observación en aula de la Institución Educativa Villa del Socorro de acuerdo a la taxonomía de Radatz.....	40

Lista de figuras

Figura 1. Sistema de numeración babilónico.....	13
Figura 2. Sistema de numeración griego.....	13
Figura 3. Sistema de numeración egipcio.	13
Figura 4. Sistema de numeración árabe.	14

Lista de anexos

Anexo 1. Test diagnóstico	61
Anexo 2. Formato de entrevista personal	62
Anexo 3. Formulario diario de campo	63
Anexo 4. Tabla de resultados generales prueba diagnóstica	64
Anexo 5. Sistematización de entrevistas y encuestas respectivas.....	69

Introducción

Un seguimiento a los errores cometidos por estudiantes del grado noveno de las Instituciones Villa del Socorro (V.S) del municipio de Medellín e Ignacio Botero Vallejo (I.B.V) del municipio de El Retiro, en el uso de los números racionales e irracionales, en el aula de clases y por un período de seis meses queda plasmado en el presente trabajo de investigación, para lo cual se han planteado siete secciones: Planteamiento del problema, Objetivos, Antecedentes y Marco Conceptual, Metodología, Análisis de resultados, Reflexiones y Recomendaciones, Conclusiones; en las cuales se abordan diferentes ítems que nos conducen al desarrollo de la temática en estudio.

Inicialmente se plantea el problema que da origen al trabajo de investigación, en donde los docentes investigadores nos preguntamos ¿Cómo analizar el error en el uso de los números racionales e irracionales como evidencia de obstáculo epistemológico en el grado noveno?, dadas las evidentes dificultades numéricas que encontramos en el aula de clases, para los estudiantes de grado noveno que presentan un escaso dominio de los conjuntos numéricos en mención y sus constantes dificultades en el uso y manejo de los mismos cuando se vinculan con las temáticas propias del área y del nivel de escolaridad planteado.

Con el fin de encontrar respuestas a tal interrogante, se plantean los objetivos encaminados a analizar el error en el uso de los números racionales e irracionales, de los estudiantes de grado noveno; para tal fin se presenta el marco referencial bajo el cual se aborda el trabajo de investigación y que nos permite tener una visión particular del error, bajo las perspectivas de Bachelard (1884-1962) y Guy Brousseau (1933), como fundamento para el análisis y la reflexión para dar respuesta a la pregunta de investigación del presente trabajo.

El trabajo de campo desarrollado directamente con la observación en el aula de clase por parte de los docentes investigadores, es un insumo básico para llevar a cabo las observaciones y reflexiones en la investigación, estas se describen en los apartes correspondientes a la metodología empleada y el análisis de los resultados.

En la metodología se explican las herramientas empleadas como son el test diagnóstico, la entrevista de carácter socrático y el diario de campo, mientras que en el análisis de resultados se hace referencia a los hallazgos más relevantes que dichas herramientas permiten encontrar, para cumplimiento de los objetivos propuestos.

El análisis de los resultados encontrados permiten una categorización de los errores empleando una adaptación propia de la taxonomía de Radatz (1980), que permite a los investigadores reflexiones pedagógicas en donde confluyen factores de tipo conceptual, epistemológico, didáctico y del contexto del estudiante, que sin duda brindan luces para la detección y tratamiento de errores y posibles obstáculos epistemológicos.

1. Planteamiento del problema

En los grados de secundaria los docentes del área de matemáticas encontramos día a día diversas dificultades en el aula de clase, algunas de ellas de orden cognitivo, didáctico, conceptual, motivacional, entre otras. Ellas impiden potenciar en los estudiantes el buen desarrollo y logro del pensamiento matemático, donde se involucra lo numérico, aritmético, algebraico, geométrico y variacional. En cuanto a las dificultades numéricas y aritméticas, algunas de ellas se generan a partir de vacíos que los estudiantes encuentran en el conocimiento y manejo de los diversos conjuntos numéricos. Dificultades que son progresivas, y se acentúan cada vez más al momento de operar y representar los diferentes conjuntos, según lo planteado desde los estándares curriculares del área, por el Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas, E. B. D. C. E. (2007).

En el grado noveno de educación básica, en el cual se realiza el trabajo de investigación, es crucial para el fortalecimiento de las competencias numéricas de los estudiantes, y para afianzar el uso y apropiación de los diferentes conjuntos numéricos en diversos ámbitos por lo cual, un inapropiado aprendizaje de este, afecta no solo el pensamiento numérico, sino que el desconocimiento o mal manejo de racionales e irracionales, que es el campo conceptual de interés, y sus representaciones, afectan directamente los demás pensamientos: variacional, geométrico, espacial y métrico.

Como lo afirman Rico & Castro (1994) se observa en los estudiantes problemas serios en la comprensión del sistema de numeración decimal; en ideas como cantidad, orden, magnitud, aproximación y estimación, dificultándoseles así desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas.

Otro aspecto fundamental es la poca comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos.

A pesar de que el tema se viene trabajando desde grados inferiores, solo ahora algunos estudiantes intentan relacionar y comprender de una forma óptima los sistemas numéricos.

De acuerdo a la serie de Lineamientos curriculares del MEN (1998):

El entendimiento de todos estos conjuntos requiere de tiempo y de estrategias que permitan que el estudiante retome fundamentos sobre lo numérico; El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos. (MEN, 1998)

De lo cual podemos concluir la necesidad de retomar conceptos claves de este pensamiento, como los son diversos conjuntos numéricos.

La problemática del dominio numérico y los múltiples errores que encontramos como evidencia de los obstáculos epistemológicos, han sido abordados por diferentes investigadores de la Educación Matemática, entre quienes destacamos al profesor Luis Rico Romero, con quien coincidimos en gran parte de sus planteamientos en torno a los enfoques y posturas en cuanto a la didáctica del pensamiento numérico; las cuales se ven plasmadas en muchas de sus múltiples investigaciones, entre

las que destacamos: *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico* (1994), *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática* (1995), *Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria* (1999), entre otras, las cuales nos llevan a indagarnos:

¿Cómo analizar el error en el uso de los números racionales e irracionales como evidencia de obstáculo epistemológico en el grado noveno?

Un reflexión en tal sentido nos debe llevar a identificar y tratar los errores en el aula, con miras de mejorar la comprensión y con ello buscar, no sólo la motivación por el aprendizaje, si no también mejores resultados en el rendimiento académico en el área y por ende mejores resultados en pruebas externas, de los estudiantes que hacen parte de las instituciones objeto de esta investigación.

Veamos brevemente algunas características de las instituciones en las cuales se realizó el trabajo de investigación.

Tabla 1.

Caracterización de las instituciones

	Ignacio Botero Vallejo (I.B.V)	Villa del Socorro (V.S)
Contexto	Municipio de El Retiro	Medellín.
	Jornada mañana	Jornada mañana, tarde y noche.
	Zona urbana	Zona urbana
Población	Preescolar a grado 11º.	Preescolar a grado 11º.
	Bachillerato académico.	Bachillerato académico.
	Establecimiento mixto.	Establecimiento mixto.

	Ignacio Botero Vallejo (I.B.V)	Villa del Socorro (V.S)
Modelo Pedagógico	<p>Social: enfoque humanista</p> <p>Con el cual se pretende una mediación pedagógica que permita la innovación, así como la utilización de los medios, estrategias y recursos de enseñanza en los procesos educativos.</p> <p>Formación para el desarrollo de las personas desde una perspectiva universal, así como las necesidades y expectativas del contexto social en el que se enmarca la institución.</p>	<p>Social- desarrollista</p> <p>Tomando elementos de ambos enfoques</p> <p>desarrollista, que busca potenciar el pensamiento de los estudiantes en su individualidad, a través de las relaciones lógicas entre el sujeto que aprende y el objeto de aprendizaje, donde el docente es guía y orientador, pero es el estudiante quien construye su propio proceso de conocimiento.</p> <p>Igualmente la institución ha adoptado principios del modelo pedagógico social, que plantea el mundo de la escuela en el mundo de la vida, para comprenderla, tener una posición política frente a ella y contribuir a transformarla con criterios de justicia social y equidad.</p>
Sistema de evaluación institucional	<p>Escala</p> <p>cualitativa-cuantitativa</p> <p>desempeño superior 4.6 - 5.0</p> <p>desempeño alto 4.0 - 4.5</p> <p>desempeño básico 3.0 – 3.9</p> <p>desempeño bajo 1.0 - 2.9</p>	<p>Escala</p> <p>cualitativa-cuantitativa</p> <p>desempeño superior 4.6 - 5.0</p> <p>desempeño alto 4.0 - 4.5</p> <p>desempeño básico 3.0 – 3.9</p> <p>desempeño bajo 1.0 - 2.9</p>

La Tabla 1, muestra una breve descripción de las dos instituciones educativas en las cuales se llevó a cabo el trabajo de investigación, aunque se encuentran separadas geográficamente en los municipios de El Retiro, Oriente antioqueño y Medellín ciudad capital del departamento; presentan similitudes en las edades y géneros de la población, así como en la escala valorativa con la que se evalúa; sin embargo a pesar de ser poblaciones urbanas ambas, también tienen evidentes diferencias en el contexto social que rodea ambas instituciones.

De un lado encontramos la institución Ignacio Botero Vallejo con estudiantes de un estrato socioeconómico dos y tres, con familias con padres cuya principal fuente de ingresos económicos se encuentra en actividades de mayordomía, con necesidades básicas cubiertas y nivel de escolaridad bachilleres; por otra parte la institución educativa Villa del Socorro se conforma principalmente por jóvenes integrantes de familias de estrato socioeconómico uno y dos; hacen parte de su población estudiantes víctimas de desplazamiento forzoso, lo que implica que su proceso educativo ha sido interrumpido en algún momento y este hecho sumado al bajo nivel de escolaridad de sus padres, donde muchos de ellos no alcanzan nivel de bachiller, puedan ser razones que explican su bajo rendimiento académico y regular desempeño en pruebas externas como son las pruebas saber.

A pesar de las diferencias anteriormente planteadas, se tienen similitudes, pues en ambas instituciones se siguen los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, es decir las temáticas que se abordan son iguales, ajustándose a las planeaciones curriculares particulares de cada institución, abarcando los pensamientos que allí se proponen.

Cada institución subdivide el área de Matemáticas en asignaturas independientes, así: en la I.E Ignacio Botero Vallejo: matemáticas con intensidad horaria de tres horas semanales y geometría con una hora semanal, cabe anotar que en esta institución el pensamiento aleatorio correspondiente a estadística, es dado desde la asignatura de matemática y no de manera independiente; mientras en la I.E Villa del Socorro las asignaturas correspondientes al área son: matemáticas con tres horas semanales, geometría y estadística con una hora semanal.

2. Objetivos

2.1 General

Analizar el error en el uso de los números racionales e irracionales, en estudiantes del grado noveno de las Instituciones Educativas Ignacio Botero Vallejo y Villa del Socorro, como punto de partida para una propuesta de mejoramiento para su enseñanza.

2.2 Específicos

- Categorizar los errores observados de manera sistemática en estudiantes de grado noveno en el manejo de números racionales e irracionales bajo la taxonomía de Radatz.
- Determinar los errores que posiblemente son evidencia de obstáculo de tipo epistemológico, en el uso de los números racionales e irracionales
- Elaborar recomendaciones que permitan mejorar el aprendizaje de los números racionales e irracionales

3. Antecedentes y Marco conceptual

3.1 Fundamentos Epistemológicos del error

En la enseñanza de la matemática básica, se da relevancia al aspecto numérico y en particular al pensamiento que este genera. Debido a ello, se dimensiona como componente fundamental en el cual se sustentan los aprendizajes de diversos conceptos matemáticos. En sí, se vuelve una herramienta primordial para una adecuada comprensión de los objetos básicos de dicha disciplina. El número como objeto matemático puede abordarse desde diversas perspectivas en donde su comprensión puede llevar una adecuada estructuración de los diferentes pensamientos matemáticos.

Sin embargo un inadecuado acercamiento al campo numérico puede convertirse en un gran “obstáculo” no sólo para el aprendizaje de las matemáticas, sino que además puede ser factor desmotivador para quienes están en proceso de su comprensión.

Históricamente se evidencia que la construcción del número ha sido, un proceso lento, complejo, conflictivo y no lineal. En sí, nada natural para el pensamiento humano, proceso que de una u otra manera se replica de manera similar en nuestras aulas de clases, con el agravante que la información que deben procesar nuestros estudiantes es extensa y abstracta, lo que la hace lento y difícil el aprendizaje, agravado por el poco tiempo que se da para su asimilación; lo que irremediamente es abrumador para muchos de ellos.

Todo esto, hace que sea “normal” para los docentes del área, encontrarnos con los “errores”, como elemento inherente, no sólo al proceso del aprendizaje matemático, si no como consecuencia de múltiples factores antes mencionados, y que pueden constituirse un síntoma de “obstáculos” con los cuales se tropiezan nuestros estudiantes; por lo tanto debe ser fundamental tener claridad cuál será el significado de error en la educación matemática, puesto que esto vislumbrará el enfoque con que se asumirá la enseñanza y el aprendizaje matemático.

Si nos remitimos a la definición de error de la Real Academia de la Lengua Española, se asume como: “Concepto equivocado o juicio falso, dicho o acción desacertada o equivocada”; para el caso “el concepto equivocado” sería con respecto a lo que dice la matemática hegemónica. A nuestro juicio, tal definición del error, en realidad, no resulta ser muy pertinente si de aprendizaje matemático se trata, ya que nos llevaría a pensarlo más como algo no deseable que debe evitarse y hasta censurarse.

En su lugar la serie de errores repetitivos y persistentes, que encontramos debemos asumirlos como parte normal del proceso de aprendizaje matemático y como síntoma de diversos tipos de obstáculos para la comprensión de nuevos conocimientos matemáticos. Entre los obstáculos que podemos hallar, es de especial interés para este trabajo de investigación aquel conocido como “obstáculo epistemológico”, definido por el filósofo francés Gastón Bachelard (1884-1962), quien se interesó por la historia de la ciencia, y retomado por el investigador en didáctica de las matemáticas Guy Brousseau (1933) en la especificidad de la educación matemática.

3.2 El error y su relación con los obstáculos epistemológicos

Un obstáculo se define como una situación o hecho que impide el desarrollo de una acción, pero cuando hablamos de obstáculo epistemológico, vamos más allá de esta simple definición, nos referimos a situaciones ya aprendidas que entorpecen la adquisición de un nuevo conocimiento. “En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización” (Bachelard, 2000, p. 15).

Bachelard fue el primero en referirse a la noción de obstáculo epistemológico, al respecto afirma:

Los entorpecimientos o confusiones que comete un alumno en sus procedimientos hacia la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan simplemente lo “incompleto” del conocimiento del alumno, pero no necesariamente ausencia de conocimiento. (Bachelard, 2000, p.15)

De por sí, todo hombre siempre tiene un conocimiento que ha adquirido a lo largo de su vida y un conocimiento que ha pasado de generación en generación, el cual se establece como verdadero para casi cualquier situación similar a la cual se enfrenta la persona día a día. Esto puede ser benéfico en muchas ocasiones en las cuales la agilidad mental es indispensable para resolver problemas cotidianos, pero también puede ser contraproducente para aquel individuo que desee desarrollar un espíritu científico creativo y libre de ataduras.

Es imposible hacer de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debería saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir un pasado. (Bachelard, 2000, p. 16).

Muchos de los conocimientos nuevos parten de los que ya se han adquirido, pero en algunas ocasiones estos últimos podrían obstaculizar un nuevo aprendizaje. Es por esto que en algunos momentos para adquirir un nuevo conocimiento necesitamos replantear o re-significar lo ya aprendido, y escudriñar nuevas ideas y formas de resolver interrogantes. Pero esto no significa olvidar por completo nuestros conocimientos, que seguirán siendo importantes en las verdades que lo han sido, más bien no desecharlos y dejarlos como referentes, adaptándolos para el desarrollo de nuevos aprendizajes.

Desde la perspectiva de la educación matemática ya no habría forma de pensar en el error como una simple equivocación, sino más bien como el uso no adecuado de un conocimiento previo; teniendo en cuenta que hoy en día existe toda una psicología del error, donde se trata como algo inherente a la condición humana, y necesario para el desarrollo de nuevos conceptos y actividades; el error no es entonces visto, como una manifestación de ignorancia, de bajo nivel intelectual, o como la falta de reflexión.

Respecto a la educación científica Bachelard afirma:

En la educación, la noción de obstáculo pedagógico es igualmente desconocida. Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias, aún más

que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda. Son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión. El libro de Gérard-Varet no ha tenido resonancia. Los profesores de ciencias imaginan que el espíritu comienza como una lección, que siempre puede rehacerse una cultura perezosa repitiendo una clase, que puede hacerse comprender una demostración repitiéndola punto por punto. No han reflexionado sobre el hecho de que el adolescente llega al curso de Física con conocimientos empíricos ya constituidos; no se trata, pues, de adquirir una cultura experimental, de derribar los obstáculos amontonados por la vida cotidiana. (Bachelard, 2000, p. 20-21).

En la enseñanza tradicional el error es considerado algo perverso, que debe suprimirse del pensamiento del alumno lo antes posible, y cuando este aparece, es necesario por parte del maestro, ilustrar a sus alumnos que carecen de esa luz del conocimiento. Bajo esta perspectiva los procesos de aprendizaje y enseñanza que no involucren errores se consideran como perfectos.

De acuerdo a la concepción de error planteada por Bachelard, podemos considerarlo como fundamental para un proceso de aprendizaje significativo, y que muchos de los errores vienen antecedidos de obstáculos que se han presentado desde la historia en todas las sociedades y son de tipo persistente, por lo tanto se tipifican como obstáculos de tipo epistemológico, que llegan arraigadas a la estructura de pensar y actuar de una cultura.

3.3 El error, perspectivas desde la Educación Matemática

Desde la generalidad de las ciencias planteada por Bachelard hasta la especificidad de la didáctica de las matemáticas asumida por Guy Brousseau (investigador francés, especialista en Didáctica de la Matemática, nacido en 1933), se plantea una concepción clara para el error y los obstáculos de los cuales estos se generan.

Brousseau asume el aprendizaje como una adaptación al medio, lo que involucra: rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos o concepciones implícitas y cambio de lenguajes o sistemas cognitivos, realizando la transposición a la didáctica de las matemáticas de la noción de obstáculo epistemológico, y desarrollando las ideas de Bachelard específicamente en el aprendizaje matemático;

El concepto de obstáculo epistemológico se debe a Bachelard, que no cree que se puede observar en las matemáticas. La modelación de situaciones me llevó a pensar de otra manera y para desarrollar una definición adecuada: Un obstáculo es un "conocimiento" en el sentido que le dimos una "forma regular para tratar una variedad de situaciones". Este conocimiento le da resultados correctos y ventajas significativas en un área determinada pero falsa o inadecuada en un área totalmente nueva o más grande. El conocimiento nuevo, verdadero, o válido sobre un dominio más vasto, no se establece "a partir" del antiguo conocimiento sino contra él. Utiliza otros puntos de vista, otros métodos, etc. No tienen entre ellas relaciones "lógicas" evidentes que permitirían desacreditar fácilmente el error antiguo con nuevo conocimiento. En cambio son competidoras sobre el dominio antiguo. Estas estructuras de conocimiento no son variables personales. Estas respuestas son "universales" en áreas específicas. De este modo, parece casi inevitable en la génesis del conocimiento. Ya sea génesis histórica o didáctica. (Brousseau, 1991, p.18 citado por Vélez, 2012, pág. 58).

Así para Brousseau el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, o del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fugaces, erráticos e imprevisibles, son reproducibles y persistentes y se han constituido en obstáculos, siendo manifestaciones del mismo obstáculo. (Brousseau, 1983).

Brousseau (1983), menciona tres tipos de obstáculos de acuerdo a su origen. Basándose en los extremos del sistema didáctico “alumno, profesor y saber”.

1. Obstáculos de origen ontogenético: vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz; sobrevienen del hecho de las limitaciones
2. Obstáculos de origen didáctico: vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje.
3. Obstáculos de origen epistemológico: relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos, por lo tanto de la circunstancia social económica de la época en que emergieron y en la que tomaron conciencia de él y de la necesidad de superarlo.

En esta investigación nos centraremos exclusivamente en los obstáculos de tipo epistemológico, que tienen mayor relación con el saber como tal. Es así que cuando hablemos de obstáculo, se estará haciendo referencia específicamente al obstáculo epistemológico.

En referencia con el obstáculo epistemológico, Brousseau se acoge a la idea de Bachelard, definiéndolo como un conocimiento que ha sido en determinado momento eficiente para resolver algún tipo de problema, pero que falla cuando se aplica a otro problema. Debido a su éxito previo en cierto tipo de problemas se resiste a ser modificado o a ser rechazado y se convierte en una barrera para un aprendizaje posterior. (Brousseau, 1986)

Puede entonces, considerarse al obstáculo como una concepción que ha servido para resolver algún tipo de problema pero que falla cuando se aplica a otro (Brousseau, 1989). Establece una serie de condiciones para poder calificar a una concepción que produce errores en los alumnos bajo el concepto de *obstáculo epistemológico*:

- a) Ser un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
- b) Producir respuestas ciertas en determinado contexto pero falsas fuera de dicho contexto.
- c) Resistir a las contradicciones con las que se confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor.
- d) Aún después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose.

Desde esta perspectiva el obstáculo se manifiesta por errores resistentes, que no son debidos al azar, y que no son necesariamente explicitables, resurgiendo mucho tiempo después que el sujeto lo haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente, Pero que pueden modificarse en el mismo sistema siguiendo un proceso de acomodación.

Brousseau hace referencia a tres aspectos importantes hacia donde deben de dirigirse las investigaciones en matemáticas:

1. Encontrar los errores recurrentes y mostrar que ellos se agrupan alrededor de concepciones.
2. Encontrar los obstáculos en la historia de las matemáticas.
3. Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico.

Aspectos que sin duda alguna se convierten en un referente importante para el direccionamiento de nuestro trabajo de investigación.

Veamos una situación que supondría un obstáculo:

El uso de los números con signo se generalizó, al atribuir arbitrariamente el estatuto de “positivo” o “negativo” a las medidas de las cantidades de magnitud, según la situación que representan en un determinado momento. Por lo tanto la denominación de un número como positivo o negativo, pudo jugar un papel importante en su aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número (Brousseau, 1983, P.191).

Pero Brousseau también menciona la existencia de un obstáculo más antiguo: “la concepción de número como medida” llevando la representación de un objeto matemático a solo un simple número. Finalmente, Brousseau considera que los obstáculos deben integrarse al nuevo conocimiento, aun con la situación que provoca resistencia, dado que es un conocimiento útil en otro dominio y puede presentarse como un caso particular.

3.4 Consideraciones acerca de la construcción histórica del número

En el aula de clases encontramos marcadas dificultades en el aprendizaje y por consiguiente, en la comprensión del concepto de número, lo que nos invita a hacer un rastreo histórico que nos ayude a analizar los posibles orígenes de los problemas que se manifiestan en nuestros estudiantes y que posiblemente estén relacionados con aspectos de índole epistemológico.

En la historia de la humanidad y particularmente, en la historia del conocimiento matemático podemos rastrear un largo proceso de construcción del concepto de número tal y como lo conocemos hoy en día, pero para llegar a la concepción actual del número, se ha tenido que recorrer un largo camino a través de una construcción colectiva, que en el caso particular de la teoría de números está directamente ligada a la historia de los hombres que han trabajado en ella, de sus civilizaciones y del contexto histórico, político y económico que los rodeó.

El desarrollo del pensamiento numérico data de muchos años atrás, cuando el hombre históricamente comenzó a utilizar la idea de la cuantificación, que induce de alguna forma al número como objeto abstracto mediado por la representación. Idea que requería ser pulida para comprender muchos fenómenos, físicos, naturales, comerciales y de simple supervivencia.

Durante el desarrollo del número como concepto abstracto, y como representación semiótica se presentaron innumerables dificultades y aciertos, que favorecieron la construcción del conocimiento matemático, y que en algunas ocasiones se planteaban equívocamente como errores de procedimiento por miedo a lo desconocido o por obstáculos epistemológicos de la época.

Haciendo un breve recorrido histórico podemos evidenciar como aquellos conceptos de no fácil comprensión para nuestros estudiantes, coinciden generalmente con temáticas de carácter polémico históricamente, que se han convertido en puntos de divergencias y factores constitutivos de crisis en el desarrollo histórico matemático.

Es así, como el proceso histórico del número puede conducirnos a un rastreo epistemológico que permite reconocer las dificultades y rupturas que se presentaron en la creación y consolidación de dicho concepto, que al extrapolarlo a los procesos de enseñanza, permiten ver las dificultades de aprendizaje que posiblemente tendrán los estudiantes, de tal manera que los docentes fundamentados en ellas, tengan mejores posibilidades de generar estrategias que mejoren la comprensión y acercamiento de los estudiantes al concepto de número y, en particular, al de números racionales e irracionales.

Debido a lo anterior haremos un breve recorrido de la construcción del número destacando los aspectos que son más relevantes a nuestro juicio. Veamos:

Según evidencias históricas marcas en los huesos como formas rudimentarias de conteo, dan luces acerca de símbolos como la forma más primitiva del número; en algunas regiones de África en el periodo paleolítico, época en la cual por obvias razones no existen registros escritos, salvo las marcas a las que hacemos referencia; el llamado hueso de Ishango; se convierte en uno de los más antiguos artefactos matemáticos, que entre otras, se emplea como un sistema de numeración. (Gutiérrez, 2009).

En este prehistórico hueso cada marca representaba una unidad, lo que han catalogado algunos estudiosos como la génesis del número uno y de las primeras operaciones aritméticas.

Evidentemente es una manera muy primitiva de contar, ya que aún no se vislumbra un sistema de numeración posicional, que permita ahorro de símbolos para grandes cantidades u operaciones de mayor complejidad.

En algunas de las antiguas civilizaciones con registros escritos, como son las egipcias y babilónicas, se evidencia el desarrollo de grandes conocimientos matemáticos que aunque no son de mucha complejidad, si son particularmente útiles para resolver problemas de la cotidianidad, en especial relacionados con la agricultura, con grandes aportes en cuanto a: las unidades, las reglas de medición, los números reales y racionales, la aproximación del número π , el trabajo con áreas empleando ecuaciones cuadráticas y raíces cuadradas, todo ello, se convierten en referencia para otras culturas como la griega.

Después de que los pueblos primitivos se establecen como sedentarios; se encuentra evidencias en el periodo llamado imperio acadio de los babilonios, sobre sus adelantos en lengua y aritmética que quedan grabados en tablillas de arcilla, en donde se evidencian sus adelantos numéricos en la notación posicional y base 60, además se su sorprendente trabajo con fracciones (Sánchez, 2012).

1	𐎀	11	𐎀𐎁	21	𐎀𐎁𐎁	31	𐎀𐎁𐎁𐎁	41	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁	51	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
2	𐎁	12	𐎀𐎁𐎁	22	𐎀𐎁𐎁𐎁	32	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁	42	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	52	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
3	𐎁𐎁	13	𐎀𐎁𐎁𐎁	23	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁	33	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	43	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	53	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
4	𐎁𐎁𐎁	14	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁	24	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	34	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	44	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	54	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
5	𐎁𐎁𐎁𐎁	15	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	25	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	35	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	45	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	55	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
6	𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	16	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	26	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	36	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	46	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	56	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
7	𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	17	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	27	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	37	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	47	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	57	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
8	𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	18	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	28	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	38	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	48	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	58	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
9	𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	19	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	29	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	39	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	49	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	59	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁
10	𐎁𐎁	20	𐎀𐎁𐎁𐎁	30	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁	40	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁	50	𐎀𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁𐎁		

Figura 1. Sistema de numeración babilónico.

Nota. Fuente: Sistemas de numeración.(sf). Recuperado el 2 de Enero de 2016 de <http://es.slideshare.net/guestd0eb0d08/sistemas-de-numeracion-clase>

Por su parte en la antigua Grecia, se empleaba un sistema de numeración decimal, la unidad y para los números hasta el cuatro emplean trazados verticales parecidos a los de la numeración romana, además del principio multiplicativo.

	∏	Δ	∏ ^Δ	H	∏ ^H	X	∏ ^X	M
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
$XXX \ ∏^H \ HH \ \Delta\Delta\Delta \ \Pi\ $ $3000 + 500 + 200 + 30 + 5 + 2 = 3737$								

Figura 2. Sistema de numeración griego.

Nota. Fuente: Sistemas de numeración.(sf). Recuperado el 2 de Enero de 2016 de <http://es.slideshare.net/guestd0eb0d08/sistemas-de-numeracion-clase>

Los egipcios emplean el que se cree es el primer sistema numérico posicional de base 10, con escritura de jeroglíficos y de carácter pictórico.

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
---	----	-----	------	--------	---------	-----------

Figura 3. Sistema de numeración egipcio.

Nota. Fuente: Sistemas de numeración. (sf). Recuperado el 2 de Enero de 2016 de <http://es.slideshare.net/guestd0eb0d08/sistemas-de-numeracion-clase>

De otro lado la cultura china tiene un desarrollo matemático, carente de sustentación axiomática; una matemática muy concreta y de gran interés por el desarrollo de los calendarios, con evidencias de utilización de fracciones, y al parecer con un sistema posicional; a juzgar por el uso que hacen del ábaco. (Aguilón ,2013)

Aún con los grandes avances que pueden observarse en las diversas culturas parece no existir aún conciencia del número cero en ellas, algo impensable para muchos de nosotros, que hoy en día lo

empleamos rutinariamente. Es de resaltar que el cero es fundamental en nuestro sistema de numeración decimal y aun así es un número de complejidad histórica.

El cero está asociado con la nada. Parece ser que los primeros en dar nombre y símbolo al “vacío” fueron los hindúes, fue en el año 650 cuando en India nació el cero que conocemos. No está claro quien fue su inventor pero grandes matemáticos hindúes, como Aryabhata, Brahmagupta o Mahavira pusieron los cimientos de la aritmética moderna entre los siglos VI y IX. En el siglo VI, el astrónomo hindú Aryabhata ideó un sistema numérico decimal de nueve cifras, incluyendo la denominada kha (posición). (Arenas, 2007)

Los hindúes además de reconocer al cero como un nuevo número, emplearon los números enteros en donde incluyen los números negativos y las operaciones aritméticas entre estos, además incluyen las fracciones y hacen un uso libre de los irracionales. De hecho introdujeron nuevas reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir números irracionales. Al aplicar despreocupadamente a los irracionales, contribuyen al progreso de la matemática, además toda su aritmética se desarrolló completamente independiente de la geometría. Sin embargo se acrecentaron infortunios lógicos de las matemáticas al introducir los números negativos para representar las deudas y los positivos para los activos (Kline, 1985).

La cultura hindú domina por completo el arte de contar emplean un sistema de numeración posicional de las cifras para realizar las operaciones, lo que los lleva a escribir cualquier número empleando sólo diez dígitos, en lo cual se fundamentan los árabes y con aportes culturales de los griegos del Imperio Bizantino y los egipcios, implementa un nuevo sistema de numeración lentamente asumido por occidente y que da origen al sistema de numeración usado hoy en día, en el cual tiene gran importancia el cero, al que llamaron céfer, que en el idioma árabe significa vacío (Origen de los números (sf). <http://www.hiru.eus/matematicas/origen-de-los-números>)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Siglo XII	1	٢ 3	٣ 3	٤	٥ 5	٦ 6	٧ 7	٨	٩	٠
Siglo XIII	1	٧	٣	٤	٥	٦	٨	٨	٩	٠
Hacia 1524	1	2	3	٤	5	6	٨	8	9	0

Figura 4. Sistema de numeración árabe.

Fuente: Origen de los números (sf). Recuperado el 2 Enero de 2016 de: <http://www.hiru.eus/matematicas/origen-de-los-números> <http://www.hiru.eus/matematicas/origen-de-los-números>

Hasta ahora se ha hablado de intentos aislados de cada cultura para entender la realidad empleando herramientas matemáticas, sin una estructura que las unifique y es quizás por eso que la visión griega fue tan determinante e influyente históricamente, puesto que fueron los griegos quienes dan estructura teórica a las matemáticas que permiten empezar a pensar en esta como una ciencia.

La cultura griega, nos brinda una visión particular de número muy influenciada por **Euclides** y en gran medida vigente aún. Es así como por ejemplo encontramos como en los elementos de Euclides ya se

relacionan los números con la recta y se hace referencia al continuo con clara relación a atributos de dicha recta como la existencia del cuarto proporcional y de segmentos inconmensurables, lo cual puede ser considerado como un acercamiento a lo que hoy conocemos como la irracionalidad.

Los griegos clásicos creen que con la teoría donde sólo tienen estatus de número los enteros positivos han conseguido una base lógica satisfactoria, ya que aunque reconocen las razones no las catalogan como números, para ellos las razones representan relaciones entre longitudes o magnitudes lo que requirió una unidad de medida común. (Bergé & Sessa, 2003). Tal vez esto lleva a Euclides a definir lo que concebía como unidad y como número, las definiciones fueron insuficientes por no reconocer la necesidad de conceptos indeterminados.

La escuela pitagórica, explica su visión del mundo en la existencia de los racionales, que no es otra cosa que la razón entre dos números enteros y al parecer crean teorías de proporciones en torno a dichas razones. (Bergé & Sessa, 2003). La fundamentación pitagórica de sus reflexiones en torno a la "perfección" de los números, hace que sean considerados por muchos precursores de la teoría de números.

Según Castillo (2002): Pitágoras desarrolló la idea de la lógica numérica y fue el responsable de la primera edad de oro de las matemáticas. Estudió las propiedades de cada número, las relaciones entre ellos y las figuras que forman; sin embargo, descubren que algunas magnitudes no pueden ser expresadas mediante razones de números enteros, y con ayuda del famoso llamado "Teorema de Pitágoras", llegan de manera paradójica a encontrar la existencia de otros números no racionales.

La búsqueda de la diagonal de un cuadrado de lado uno, los conduce a $\sqrt{2}$, es decir directamente a la evidencia de la existencia de los irracionales y de los inconmensurables, lo cual pone a temblar los cimientos de los pitagóricos. Han encontrado segmentos de recta que no corresponden a la razón entre dos números enteros, descubrimiento que incluso, en su momento intenta ser ocultado. Este hecho genera una de las grandes crisis de la epistemología matemática de la época; y que trasciende no sólo geográficamente sino también cronológicamente; la irracionalidad de $\sqrt{2}$, es posteriormente demostrada por Euclides en el libro X de "Los Elementos" (Castillo 2002).

Aunque sólo ahora se pone en discusión la existencia de los irracionales, la misma cultura griega hace mucho tiempo atrás se acercaron de manera intuitiva a otros dos famosos números irracionales, como son e y π (π).

Es entonces Arquímedes quien con sus estudios de geometría relacionados con la longitud de la circunferencia, hace notables reflexiones acerca del número π , en la búsqueda de la razón de dos números enteros, que según creía él, eran los precursores de π ; este hecho particular es uno de los que mayor analogía puede presentar con las primeras aproximaciones que nuestros estudiantes tienen con los números irracionales y que de alguna manera puede vislumbrar el proceso que lleva consigo la comprensión de tales números irracionales. .

Continuando con nuestro recorrido bajo la visión de los griegos clásicos, encontramos que consideran el razonamiento exacto como de suprema importancia y desprecian las aplicaciones al comercio, la navegación, la construcción y el calendario; con la solución geométrica que habían hallado a las dificultades de los números irracionales les es suficiente, a diferencia de los griegos alejandrinos quienes utilizaron libremente los números irracionales en el desarrollo de calendario, la medición del

tiempo, las matemáticas, la hidrodinámica y demás ciencias aplicadas, sin embargo, pese a ello, los números enteros, fracciones e irracionales, ciertamente no fueron definidos, además tampoco había una base axiomática sobre la cual se pudiera erigir una estructura deductiva (Kline, 1985)

Sin embargo, la discusión por los irracionales generada con los pitagóricos, es apenas el inicio de un gran debate como lo mostro posteriormente Zenón con sus paradojas, esto va más allá trascendiendo lo discreto y lo continuo; son posteriormente los platónicos bajo la teoría de Eudoxo que retoman la tradición pitagórica en su trabajo con los conmensurables y los inconmensurables que es recogida en *Los elementos* de Euclides.

La formalización y reconocimiento de los irracionales, sólo se logra en la edad media. Euler en el siglo XVII, llamó trascendentes a los números que no son algebraicos, y la demostración de que π es trascendente permitió resolver el clásico problema antiguo, evidenciando la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Aún en el renacimiento, la polémica por la existencia de los números irracionales era intensa, pese a que fueron utilizados en los cálculos, la cuestión de si eran realmente números preocupaba a algunos de los mismos que trabajaban con ellos.

Descartes incorpora un cambio epistemológico al presentar el segmento unidad como elemento neutro de la multiplicación y no sólo como unidad de medida o como unidad indivisible, gran aporte para que los irracionales empiecen a ser reconocidos como números.

Sólo en el siglo XIX alcanzan a ser reconocidos como tales, por la gran mayoría de los matemáticos y por el intento de algunos como Dedekind, Cantor y Weierstrass en la aritmetización del Análisis, y la completitud del conjunto de los números reales (Bergé & Sessa, 2003).

Es evidente que la existencia de la inconmensurabilidad se convierte en una ruptura epistemológica, como reflejo de su complejidad y relación directa con el infinito; no sólo históricamente sino también en el proceso de comprensión en el aula de clases.

Un problema, numérico, incluso históricamente peor que los irracionales, en los siglos XVI y XVII, para los matemáticos europeos, fue el uso de los números negativos, retomados de los árabes, tales números generan gran resistencia a su uso, tal vez por la dificultad de una representación geométrica y lo problemático al presentarse como raíces de ecuaciones.

Aparecen entonces los números complejos generando debates sobre su significado y uso. Pero finalmente, estos números se generalizaron a lo largo del siglo XVIII, aplicando las mismas reglas que se aplicaban a los números reales, con lo que los matemáticos fueron adquiriendo confianza en ellos (Kline, 1985).

Al igual que los irracionales, los negativos, suelen convertirse en un obstáculo, con origen epistemológico, en el aprendizaje de las matemáticas, generador de múltiples errores que pueden evidenciar la presencia del mismo.

Aunque fueron muchas las discusiones acerca de la concepción de las clases de números (irracionales, negativos y complejos) desde el primer intento de Euclides hasta la concepción más moderna, la

construcción del significado y sentido del número, puede evidenciarse como un proceso que en su desarrollo conlleva pasos erróneos e inconsistencias, que son necesarios para reestructurar, desaprendiendo lo aprendido con el fin de afianzar nuevos y sólidos conocimientos que permitan su apropiación.

Bell, 1989 citado por Rico y Albaladejo, 1999, Menciona que el número real es un concepto matemático complejo, cuya evolución ha requerido un largo período histórico que se remonta, según los datos disponibles, a más de siete mil años

Su actual estado de elaboración es el resultado de las numerosas interpretaciones intentos de resolver problemas y superar obstáculos, desarrollos conceptuales y formalizaciones, que han tenido lugar a lo largo de todo este tiempo. Como ocurre con cualquier concepto matemático avanzado, hay una distancia considerable entre la manera en que estos conceptos han evolucionado en la comunidad matemática durante un largo período histórico, la manera en que son formalizados y presentados en los procesos habituales de enseñanza, y la manera en que se organizan y estructuran cognitivamente. Si pretendemos que el concepto de número real se asimile de forma significativa, hemos de contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los alumnos han de integrar diferentes conjuntos numéricos –naturales, enteros, racionales e irracionales–, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en profundidad de los procesos infinitos y de paso al límite. (Rico y Albaladejo, 1999, p.261)

Existe una enorme complejidad en el concepto de número real, de acuerdo a lo manifestado por Romero y Rico en 1999, que reflexionaron además sobre algunas dificultades que tienen los alumnos al ser enfrentados con este tema en las etapas iniciales. No obstante, a través del trabajo con situaciones que pretendían estimular las actividades cognitivas asociadas a los sistemas de representación de los números reales y el establecimiento de relaciones entre sus constituyentes, también se registraron avances significativos a juicio de ellos, en la comprensión de los alumnos en torno al tema.

3.5 Investigaciones del error con relación a los números

El matemático y didacta Luis Rico Romero se convierte en un referente importante para este trabajo de grado, debido a su experiencia investigativa con el error en los números reales y a una propuesta de fundamentación y aproximación metodológica para este tipo de estudios (Rico y Castro 1994), en donde trata de manera especial el error en matemáticas con fundamentos teóricos de Bachelard y Brousseau.

Rico y Castro (1994) retoman conceptos del racionalismo crítico (base principal de la filosofía de Karl Popper): no hay fuentes últimas del conocimiento; admite el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento; destacan la necesidad de un ejercicio constante de la crítica: la búsqueda crítica del error para superar nuestros conocimientos deficientes es una necesidad epistemológica ineludible. Es así como Rico menciona que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, los cuales no deben ser condenados, sino que más bien deben prevenirse, aunque estos finalmente pueden contribuir positivamente al proceso de aprendizaje.

Rico y Castro (1994), mencionan la variedad de métodos para el estudio de los errores en matemáticas en cuatro categorías:

1. Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas. Este método tiene un valor diagnóstico limitado y es cercano al método psicométrico.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos. Usualmente, esta técnica implica clasificar diferentes tipos de error, examinar cómo se desvían de la solución correcta y hacer inferencias sobre qué factores pueden haber conducido al error.
3. Análisis de patrones de error. Estos análisis pueden revelar errores sistemáticos, que sean síntoma de una comprensión inadecuada; al variar las tareas resultan patrones de error que pueden proporcionar claves de las estrategias utilizadas.
4. Diseño de secuencias didácticas de tareas que pongan de manifiesto los errores de los individuos. Aquí el investigador observa los patrones de error que aparecen en las producciones de los individuos; genera hipótesis sobre causas posibles de estos errores; y, sistemáticamente, construye nuevos problemas de los que puede predecirse que inducirán a errores similares.

Así mismo Rico también nos da luces sobre la importancia de analizar el error, más allá de un simple estudio cuantitativo:

“La mayor parte de los estudios informan sobre clasificación de errores y sus frecuencias, pero olvidan explicar su origen y no proponen un tratamiento sistemático para su superación. Esta carencia de generalidad en los análisis podría evitarse observando las producciones de los alumnos en niveles más profundos de representación, donde evoluciona el sistema de significados que controla las realizaciones superficiales. Cuando se detecta una deficiencia de comprensión, en este nivel más profundo, es posible explicar toda una clase de errores” (Rico, 1992).

3.6 Categorización de los errores

Existen varias clasificaciones para los errores en el área de las matemáticas que se han venido desarrollando desde los años 1920 en Alemania, y en años posteriores en Estados Unidos e Inglaterra principalmente. Algunas de ellas fueron propuestas por: Weiner (1922), Glück (1971), Seseman (1931), Rose (1928), Brueckner (1935), Davis (1984), Booth (1984), Radatz (1980), Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Villarreal (1990, 1992, 1996), Astolfi (1999).

Gran parte de estas categorizaciones se basan más en los conocimientos propios de las matemáticas, que en la interpretación como tal del error. Por tal motivo nos referiremos inicialmente a la teoría del procesamiento de la información. “La cual surge en los años 70, siendo sus representantes Gagné, Newell, Simón, Mayer, Pascal, Leonel” (Rico, 1995). “Esta teoría tiene como concepto antropológico que el hombre es un procesador de información, cuya actividad fundamental es recibir información, elaborarla y actuar de acuerdo a ella”. (Gimeno y Pérez, 1993 citado por Gagné, 1970, p.7). Además, “algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos mediante el procesamiento humano de la información se han encontrado estudiando los errores; la utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores” (Rico, 1995, p.11).

Es así como Rico (1995) se apoya en la teoría del procesamiento de la información, haciendo hincapié en que los investigadores deben recurrir a una variedad de métodos indirectos de observación, que

permitan hacer inferencias sobre los procesos mentales considerados. Expresando que este método está basado en la suposición de que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento. Sin embargo, estos subcomponentes son internos por su naturaleza, por tanto, hay que utilizar métodos indirectos de observación. Entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas.

El investigador en Educación Matemáticas Benjamín Robert Davis (1984), citado por Rico (1995) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que se presentan de forma similar en distintos individuos que comparten las mismas experiencias, y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permiten tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas son algunas de las características que deben tener los esquemas postulados por Davis:

- Deben considerarse como esquemas para asimilar información.
- Cada estructura de representación tiene un origen legítimo, en un aprendizaje inicialmente correcto y necesita siempre de un tipo de información inicial.
- Los esquemas son persistentes. Es precisamente esta propiedad la que los hace reconocibles como entidades internas de procesamiento de la información. Funcionan de modo idéntico en una variedad de situaciones; producen alteraciones en los datos de entrada cuando no parecen encajar con el esquema; cuando se pretende enseñar contra un esquema interiorizado el aprendizaje apenas se produce.
- La creación y el modo de operación de los esquemas sigue ciertas reglas ordenadas. Una de estas reglas es la denominada de sobre-generalización inicial; una segunda expresa que no se discrimina cuando no es necesario; una tercera dice que el procesamiento tiende a producirse según el esquema asumido y cuando encuentra algún inconveniente se producen modificaciones o adaptaciones que permiten continuar.
- La recuperación en memoria de un esquema puede realizarse mediante términos claves, breves y explícitos.
- Un alumno que realiza una tarea matemática con éxito encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas que utiliza, que no suelen estar presentes en los enunciados de los problemas o tareas propuestas.

Estas importantes características de Davis, muestran la relación entre el procesamiento humano de la información y los obstáculos de tipo epistemológico. Siendo de vital importancia para el presente trabajo, ya que existen muchos tipos de clasificaciones para los errores, pero pocas de estas categorías utilizan la teoría del procesamiento de la información, que permite un análisis más profundo de los errores.

Rico (1995) plantea que la categorización de algunos autores está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Y que cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas, hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos, parece claro que la interpretación en base al procesamiento de la información ofrece una base teórica más completa para la clasificación de errores.

Debido a lo anterior decidimos utilizar para esta investigación la categorización de los errores propuesta por Hendrik Radatz (1980), quien realiza una clasificación de errores a partir del

procesamiento de la información. Igualmente encontramos que gran parte de los trabajos sobre el error, realizados por Luis Rico, con fundamentación en conceptos epistemológicos, tienen como referencia la clasificación de este autor.

Radatz (1980) plantea cinco categorías generales para su categorización:

Tabla 2.

Clasificación de errores propuesta por Radatz

Posible causa de error	Descripción
• Dificultades del lenguaje	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.
• Dificultades para obtener información espacial	Errores proveniente de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.
• Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	Errores originados por deficiencia de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Incluyendo ignorancia de algoritmos, conocimientos inadecuados de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.
• Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Errores causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexibles, es decir para adaptarse a situaciones nuevas.
clasificadas como:	
4.1 Por perseveración	Predominan elementos singulares de una tarea o problema.
4.2 De asociación	Incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
4.3 De interferencia	Cuando las operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
4.4 De asimilación	Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
4.5 De transferencia negativa	A partir de tareas previas
5. Aplicación de reglas o estrategias	Producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares, en contenidos diferentes.
Irrelevantes	

Nota. Fuente: adaptado de la categorización de Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics. Vol 1 (1).

Aunque esta categorización no se realiza con base a una predicción de errores en términos de obstáculos, es una herramienta de gran ayuda para acercarnos a una posible clasificación desde dicha perspectiva. En este sentido Rico afirma:

Aunque se han hecho serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores en base a una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, el hecho real es que, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas (Rico, 1995, p.16).

4. Metodología

La investigación se realiza bajo el enfoque cualitativo descriptivo, por lo tanto, la observación que permita la detección y el seguimiento de los errores en el uso de números racionales e irracionales; al grupo de estudiantes es fundamento del trabajo, que busca una comprensión del origen, prevalencia y persistencia de tales errores, en la apropiación de los racionales e irracionales.

La población objeto de estudio está conformada por estudiantes de grado noveno con edad promedio de 15 años; 110 de la institución educativa Ignacio Botero Vallejo del municipio de El Retiro y 175 de la institución educativa Villa del Socorro del municipio de Medellín; quienes fueron observados, mediante el instrumento del diario de campo, no se realizó ningún tipo de intervención durante los 6 meses de la observación, la cual se llevó a cabo en el contexto normal de las clases del área de Matemáticas y que fue realizada de manera directa por los investigadores, quienes somos los docentes del área para estos estudiantes.

4.1 Herramientas para la recolección del dato

Como se mencionó anteriormente la investigación es de tipo cualitativa descriptiva, por lo cual se hace uso de diversas herramientas como lo son: Test de carácter diagnóstico, entrevista semi-estructurada con elementos del tipo Socrático y diario de campo. Dichos instrumentos aparecen en los anexos 1, 2 y 3 de este documento.

4.2 Recolección de los datos

Los datos se recolectan con fuentes primarias, con observación directa, siendo los docentes encargados de esta investigación quienes realizaron observación y el posterior análisis de esta; para tal fin, se emplean las herramientas anteriormente mencionadas.

4.2.1 Test diagnóstico

Esta herramienta se aplicó de manera directa a toda la población objeto de estudio, estudiantes que cursaron grado 9º en el año 2015; adicionalmente se aplicó a los estudiantes que cursaron grado 9º en el año 2014; con el fin de obtener datos de contraste, que permita un análisis comparativo preliminar.

El objetivo primordial del test, fue una primera visión, que permitiera un acercamiento inicial a los errores que se encuentran de manera sistemática en el uso de los números racionales e irracionales en estudiantes de este grado.

Para tal fin, el test fue dividido en cinco puntos principales ver Anexo 1; indaga acerca de la apropiación o no de ciertos aspectos numéricos, de manera particular a los números racionales e irracionales así:

PRIMER PUNTO: Se da un listado de números racionales e irracionales, con el fin de que el estudiante los organice de forma ascendente: Lo que se pretende con este ejercicio es el establecimiento en la capacidad de ordenación. Además con la ayuda de la entrevista personal, determinar los criterios que considera el estudiante a la hora de ordenar números.

SEGUNDO PUNTO: Se le solicita al estudiante escribir cinco números comprendidos entre -2 y 2 , de forma ascendente también; además de la ordenación, con este punto en particular se pretende establecer la conciencia que el estudiante puede tener de completez y la aproximación intuitiva de un intervalo numérico, teniendo en cuenta que se habla de números comprendidos entre dos dados.

TERCER PUNTO: Se le solicita al estudiante escribir tres números racionales y tres irracionales; evidentemente se busca indagar acerca del reconocimiento de estos conjuntos numéricos.

CUARTO PUNTO: Con el fin de acercarnos a la manera de como el estudiante representa un número de la forma a/b , con a y b números enteros, se le pide que para el número $3/4$, dé una representación en la recta numérica, en una figura (cuadrilátero), como porcentaje y en forma decimal.

QUINTO PUNTO: Se pretende en este punto un nuevo acercamiento a la concepción del uso de los números racionales e irracionales y en específico desde una perspectiva de solución de un problema geométrico, de manera análoga como ocurrió históricamente, cuando los pitagóricos se plantean el interrogante de como hallar el valor de la diagonal de un cuadrado de lado de una unidad.

Para ello se le proponen dos ejercicios diferentes, en el primer literal se solicita hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de medidas 3 y 4 unidades; mientras que en el literal b de ese punto se solicita hallar la diagonal de un cuadrado de lado 1 unidad.

Finalmente para terminar el test, hay un aparte denominado "OBSERVACIONES" en el cual, se le dan al estudiante una serie de cinco opciones para que seleccione una o varias de ellas, con respecto a las posibles dificultades que se le presentaron para llevar a cabo el test; adicionalmente se brinda un espacio en donde libremente el estudiante puede realizar cualquier comentario que considere pertinente y no se tuvo en cuenta en las observaciones.

4.2.2 Entrevista.

Con el fin de indagar acerca de las respuestas dadas por los estudiantes, en especial aquellas que reportaron una mayor frecuencia de ocurrencia de errores, se realizó la entrevista de manera personal a veinte (20) de los estudiantes a quienes anteriormente se les había aplicado el test diagnóstico, y la selección se fundamentó en la consideración de que las respuestas que dieron a las preguntas se destacan como frecuentes.

La entrevista realizada es de carácter semi-estructurado, con algunos elementos de la entrevista socrática (ver Anexo 2). En tal sentido nos permitimos precisar, que si bien se toman algunos elementos de una entrevista socrática, que permitan detectar niveles de razonamiento y comprensión del test aplicado con anterioridad, no se ajusta en su totalidad a dicho modelo.

4.2.2.1 Diseño de la entrevista.

La entrevista no se cataloga como estrictamente socrática, ya que no cumple con la totalidad de condiciones que se pueden inferir en el dialogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón y que retomamos de Jaramillo y Campillo (citados por Jurado Hurtado, F. M., & Londoño Cano, R. A. 2005) con el decálogo de características de este tipo de entrevista, como son: la intencionalidad de la entrevista, el lenguaje, los conceptos básicos, experiencia previas del entrevistado, diálogo inquisitivo, movilización del pensamiento, aporte de la información, la problematización de las ideas, el paso por los tres momentos y la red de relaciones.

De las características de la entrevista socrática, que se exponen a continuación en la tabla 3, sólo algunas de ellas fueron tenidas en cuenta a la hora de diseñar la entrevista, siendo el criterio para su elaboración, el propósito final de la investigación, que como se mencionó anteriormente no pretendió intervención.

Tabla 3.

Características de la entrevista Socrática vs entrevista adaptada a partir de esta.

Característica	En la entrevista socrática	En la entrevista adaptada a partir de la socrática
La intencionalidad	Da razón del conocimiento de los objetivos que debe alcanzar el entrevistado, así como cuales conceptos deben manejarse de manera implícita, con el fin de conservar la espontaneidad de quien responde y evitar influenciar sus repuestas	Da razón de los contenidos se supone que el estudiante debe manejar en el aspecto numérico de racionales e irracionales; orientados al logro de los objetivos de la investigación en cuestión.
El lenguaje	Debe ser un lenguaje acorde al nivel del entrevistado de tal manera que motive respuestas espontáneas.	Tal y como se pretende en las entrevista de tipo socrático, fue un lenguaje amigable y acorde al nivel de los estudiantes entrevistados, con el fin de generar confianza.
Los conceptos básicos	Pretende indagar acerca del manejo de los conceptos básicos del tema a tratar, es considerada una etapa preliminar en el desarrollo de la entrevista Socrática.	Los conceptos básicos sobre los que se indaga son el reconocimiento, uso y comprensión de los números racionales e irracionales. No es un paso preliminar, sino el punto central de la entrevista.
Experiencias previas del entrevistado	Esta etapa de la entrevista socrática indaga acerca del bagaje del entrevistado acerca del concepto de interés. Es una etapa inicial en este tipo de entrevistas.	Al igual que en la entrevista Socrática, se busca indagar por las experiencias previas, pero el carácter es exploratorio y de no intervención; es el fin último de la entrevista.
Diálogo inquisitivo	Dialogo que pretende confrontar los conocimientos del estudiante; aunque el docente no enseña nada si lo conduce al razonamiento.	Dialogo sólo exploratorio que se limita a indagar sobre los conocimientos ya adquiridos, evitando interferir en ellos.

Característica	En la entrevista socrática	En la entrevista adaptada a partir de la socrática
Movilización del pensamiento	Busca generar conjeturas y modificar el pensamiento al respecto del concepto en cuestión por parte del entrevistado.	No está en los alcances de la investigación por ser una investigación de no intervención.
Aporte de la información	Nuevos aportes e información que se brinda al entrevistado a lo largo de la entrevista.	No se busca brindar nueva información por tanto este aspecto no hace parte de la entrevista en este trabajo de investigación.
Problematización con las ideas	Confrontación del entrevistado con sus conocimientos previos y la información que va adquiriendo en el transcurso de la entrevista.	No se llega a este punto de confrontación del pensamiento, sólo se indaga por los saberes previos.
Paso por las tres ideas	Crear saber, darse cuenta que no es así y confrontar sus conocimientos.	Fase fuera de las pretensiones del trabajo de investigación, aunque algunos estudiantes pueden llegar a hacerlo.
Red de relaciones	Construcción de relaciones por medio de las preguntas elaboradas buscando tal fin.	No se alcanza, puesto que el trabajo no pretende intervención alguna.

Nota. Fuente: Adaptado de Jaramillo y Campillo citados Jurado Hurtado, F. M., & Londoño Cano, R. A. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie via áreas de figuras planas.

En la Tabla 3, se evidencia como nuestra investigación emplea solo los primeros aspectos de la entrevista Socrática: **La intencionalidad, el lenguaje, los conceptos básicos, las experiencias previas del entrevistado y el dialogo inquisitivo** (para nuestro caso exploratorio).

Las otras características como son la movilización del pensamiento, el aporte de la información, la problematización con las ideas, el paso por las tres ideas y la red de relaciones; son aspectos que se focalizan en la construcción de un nuevo conocimiento y generación de nuevas redes a partir de las existentes, en búsqueda de la ampliación de las estructuras del pensamiento; lo cual implica una intervención que se aleja del propósito de la actual investigación.

4.2.2.2 Aplicación de la entrevista.

La entrevista se aplicó directamente por los autores de este trabajo, recurriendo al diálogo personal, para tal fin se elabora un formato de entrevista que sirve como guía para el desarrollo de la misma (ver Anexo 2), sin embargo por el carácter Socrático de esta, el desarrollo de la entrevista que es oral y que es grabada, puede tomar diversos matices de acuerdo a las respuestas y aportes del estudiante entrevistado.

La entrevista se estructuró y desarrollo en tres bloques, así:

PRIMER BLOQUE: *Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este*

Objetivo: Generar un ambiente de distinción en donde se dialogue acerca del test anteriormente presentado y las impresiones de cada estudiante entrevistado.

SEGUNDO BLOQUE: *Sobre el uso de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico*

Objetivo: Indagar sobre las dificultades evidenciadas por los estudiantes en el manejo de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico.

TERCER BLOQUE: Preguntas control

Objetivo: Generar un mecanismo de control para identificar las preguntas que representaron una mayor dificultad para los estudiantes.

4.2.3 Diario de campo.

Se elaboró un formato (ver Anexo 3) con el fin de consignar la información que se recolectó durante el periodo de observación comprendido entre los meses de Abril de 2015 y Septiembre del mismo año, incluyendo ambos meses.

En el formato se registra la fecha, el grupo en el cual se realiza la observación, el tema tratado durante la clase, el error observado, su frecuencia y observaciones al respecto.

Este instrumento se convierte en fundamento para el trabajo de campo, pues nos permite tomar la información de manera directa, para posteriormente ser sistematizada y organizada de tal manera que se categoricen los errores según lo propuesto por Radatz (1980); con el fin de determinar la existencia o no de obstáculos epistemológicos.

5. Análisis de los resultados

5.1 Test diagnóstico

PUNTO 1

Todos los estudiantes de ambas instituciones que presentaron el test, tanto en el 2014 como en el 2015 tuvieron alguna dificultad para ordenar números reales de menor a mayor

A continuación se listan los errores más comunes encontrados:

- Los números con cifras decimales entre cero y uno, son menores a cualquier otro, incluyendo los números negativos.
- Orden incorrecto de los números negativos; los ordenan según su valor absoluto.
- El número $3,4 \times 10^{-1}$ expresado en notación científica fue considerado el mayor de todos los números que se dan para ordenar, estos son:
a) -3 b) $\frac{3}{2}$ c) 0,310 d) 0,4 e) 4,05 f) 30,1 g) 0,0450
h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $\frac{2}{3}$ j) -12 k) 0,33 l) $3,1\bar{5}$ m) π
- Dificultad para ubicar el número π , también expresado como uno de los más grandes

PUNTO 2

Cuando se les pide escribir cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2, los estudiantes aciertan en el orden pero la gran mayoría ignora los números decimales, escribiendo solo los números enteros incluyendo los extremos.

PUNTO 3

Todos los estudiantes presentaron dificultad para diferenciar los números racionales e irracionales. A la propuesta de escribir tres números racionales y tres irracionales, el 50,33% de los estudiantes lo

dejaron en blanco, y el resto de ellos contestaron incorrectamente. Entre estos últimos se notó una diferencia entre quienes inician el grado y quienes lo terminan, así: los primeros se inclinaron por los números enteros positivos para ambos conjuntos numéricos, mientras el segundo grupo de estudiantes se inclinó por los enteros positivos, para los racionales y por los enteros negativos y los decimales, como irracionales.

En algunos casos se utilizaron raíces para expresar los números irracionales, con una posible confusión de estos y de los números imaginarios.

Posiblemente existe dificultad con las palabras racional e irracional; a pesar de que había realizado un trabajo previo con estos conjuntos numéricos, consideramos que los estudiantes no reconocen o no recuerdan el nombre que se les asigna durante el momento que se les enseña, debido a esto consideramos que el nombre de los objetos o conceptos matemáticos no determina el conocimiento de los mismos, sólo cuando se hace el buen uso de estos se evidencia que el estudiante logra un aprendizaje significativo de estos.

PUNTO 4

El mayor número de aciertos para los cuatro tipos de representaciones que se pedían, corresponde a la representación de $\frac{3}{4}$ en la figura (Rombo), siendo más notorio en quienes inician el grado. Ver Tabla 4.

Es de anotar que muchos estudiantes no interpretan adecuadamente las instrucciones y señalan una de las representaciones pedidas como si se tratara de selección múltiple.

Tabla 4.

Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en representaciones de $\frac{3}{4}$

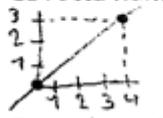
Representación $\frac{3}{4}$	% de preguntas sin respuesta	% de repuestas Incorrectas	% de respuestas correctas
Recta numérica	53,00	42,00	5,00
Figura (rombo)	44,67	23,67	31,33
Porcentaje	61,67	31,00	7,33
En forma decimal	66,33	28,33	5,33

A continuación se presenta un listado de respuestas comunes dadas por los estudiantes, para las representaciones solicitadas de $\frac{3}{4}$

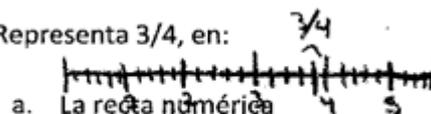
- En la recta numérica:

4. Representa $\frac{3}{4}$, en:

a. La recta numérica

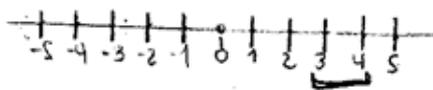


4. Representa $\frac{3}{4}$, en:



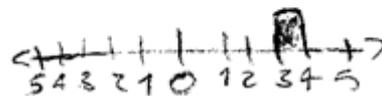
4. Representa $3/4$, en:

a. La recta numérica



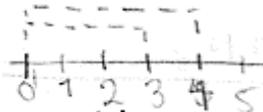
4. Representa $3/4$, en:

a. La recta numérica

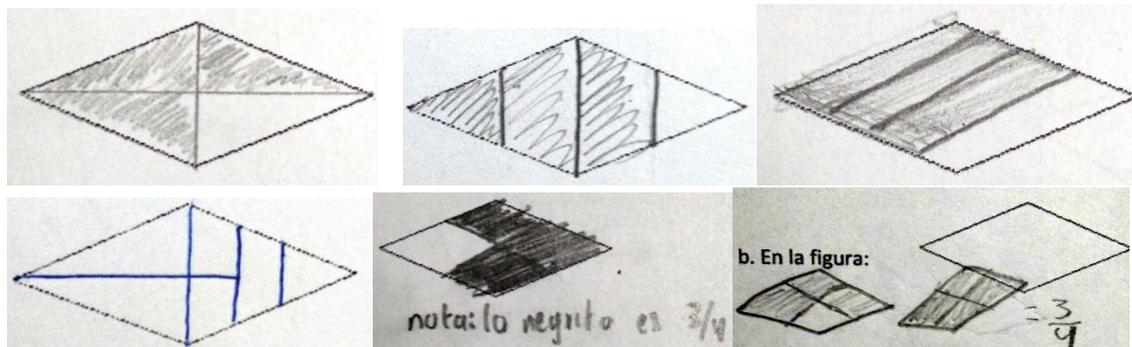


4. Representa $3/4$, en:

a. La recta numérica



• En la figura (Rombo)



- En porcentaje: 3,4 % , $\frac{3}{4}$ %
- En forma decimal: 3,4 $\frac{3}{4}$

Observando las respuestas dadas por los estudiantes en las representaciones de $3/4$ en la recta numérica y en el rombo, podemos apreciar como estos tienen un desconocimiento de la fracción, y la interpretan de manera errónea como si el numerador y el denominador fueran 2 números enteros completamente diferentes y sin relación alguna.

PUNTO 5

En el último punto del test se propuso la utilización del teorema de Pitágoras en dos sentidos: en el primer enunciado se indaga por la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos sus lados, y en el segundo enunciado se indaga por la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad.

Tabla 5.
Resultados problema sobre teorema de Pitágoras

Año Item	% de preguntas sin respuestas		% de respuestas incorrectas		% de respuestas correctas	
	2014	2015	2014	2015	2014	2015
Item a (triángulo rectángulo)	75,18	88,96	9,49	11,04	15,33	0,00
Item b (diagonal del cuadrado)	90,51	95,09	8,03	4,91	1,46	0,00

En ambas instituciones encontramos que ninguno de los estudiantes que inician el grado noveno, responden correctamente a estas preguntas, tal vez porque el tema involucra la utilización del teorema de Pitágoras y este aún no es comprendido por los estudiantes.

De los estudiantes que finalizan el grado noveno, hay un 15,33 % que resuelven correctamente el ítem a, y solo un 1,46% de ellos halla la diagonal del cuadrado en el ítem b.

Observaciones:

En las dos pruebas realizadas; 2014 y 2015, aquellos estudiantes que marcan alguna observación lo hacen principalmente por las opciones dos y tres, que se refieren respectivamente: no entendí lo que solicitaba el punto y no sabía que aplicar para hallar la solución.

La observación menos marcada durante las dos pruebas realizadas es la 5, con el siguiente enunciado: “el tiempo no fue suficiente para resolver el problema”. Es oportuno aclarar que se dedicó una hora clase correspondiente a 60 min en la I.E Ignacio Botero y 55 min en la I.E Villa del Socorro; pero en ambas instituciones el tiempo empleado por los estudiantes fue en promedio de 30 minutos. Ver tablas de resultados generales en Anexo 4.

Para las pruebas aplicadas finalizando el año 2014, de manera particular en la I.E Villa del Socorro, 25 de 69 estudiantes entregaron la prueba totalmente en blanco con escritura de no entiendo; lo cual podría explicarse por dos razones básicas:

- El año escolar terminaba y los estudiantes no le prestaron mucha atención a la prueba.
- La prueba no la realizó la profesora encargada de la investigación por tanto no se hizo el suficiente énfasis en las instrucciones, lo cual puede ser un indicador de la importancia del investigador en los procesos investigativos.

Los estudiantes manifiestan no recordar que el tema de números racionales e irracionales se los haya enseñado en el aula de clase.

5.2 Entrevista

Se realizaron 20 entrevistas, de las cuales se tomaron para su digitalización y análisis cuatro de ellas (ver Anexo 5), dos por cada institución. El criterio con el cual se seleccionaron éstas, es por lo representativas que son, ya que resumen las respuestas más repetitivas y permiten realizar un análisis generalizado para la obtención de conclusiones.

Con base en el análisis posterior a la sistematización de las entrevistas, establecimos 7 categorías, en las cuales clasificamos la información obtenida a partir de las respuestas dadas por los estudiantes; las que a su vez separamos en dos grandes categorías: pedagógica y disciplinar.

Es así que las categorías **pedagógicas**, las definimos como aquellas en las cuales el estudiante hace reflexión respecto a su proceso de aprendizaje partiendo de sus propias respuestas, o bien, estas dan pie para reflexión por parte del investigador, respecto al proceso de aprendizaje del estudiante; quedando ubicadas allí: reconocimiento de falencias, conocimiento adquirido, errores no reconocidos como tal y modificación de saberes.

Mientras que las categorías **disciplinares**, se focalizan en aspectos relacionados directamente con el saber específico del área y que en nuestro caso se refiere a la temática objeto de la investigación, que son los números racionales e irracionales. Es decir estas categorías nos permiten a los investigadores indagar acerca del nivel de apropiación y adecuado uso de estos dos conjuntos numéricos, de manera preliminar, con base en las respuestas que dan los entrevistados; encontramos acá: Estrategia de ordenamiento de números, conversión de registros y asociaciones incorrectas.

CATEGORÍAS PEDAGÓGICAS:

Reconocimiento de falencias: Referida a la capacidad del estudiante de reconocer por sí mismo, las debilidades o falencias en el aspecto cognitivo; llega a una autorreflexión sobre su proceso de aprendizaje y específicamente acerca de los conocimientos en cuestión; puede incluso manifestar posibles causas que según su criterio son desencadenantes de tales dificultades.

En las entrevistas realizadas encontramos en esta categoría expresiones por parte de los estudiantes, tales como: “eso no lo sé, eso no me lo enseñaron”, “yo vi eso pero se me olvidó”, “uno va pasando de año en año y se van quedando por ahí huequitos”, “yo cambiaría mi respuesta”, “está malo”...; entre otras.

Según lo observado y con base en los diálogos llevados a cabo con los estudiantes, nos es posible establecer, que cuando el estudiante reconoce sus falencias, no es necesariamente un indicador de que se han superado las dificultades; varias de las expresiones de los estudiantes denotan que aunque son conscientes de sus falencias en determinada temática o conocimiento, de igual manera manifiestan no haberla superado y no saber aún, como resolver de manera correcta la situación planteada.

Conocimiento adquirido: Da cuenta de los conocimientos que el estudiante maneja y hace explícito en expresiones del tipo: “sabía cómo hacerlo”, “fue difícil pero fui capaz”, “eso ya me lo habían enseñado”, “ese es el más fácil”, etc.

En esta categoría encontramos que tanto el estudiante como el profesor pueden llegar a un análisis de la apropiación o no de las temáticas relacionadas con los números racionales e irracionales, se supone deben manejar los estudiantes en el nivel académico del noveno grado de educación media.

Errores no reconocidos como tal: Cuando el estudiante comete un error y a pesar de revisar nuevamente y dar razón de sus respuestas, persiste en este; evidentemente este análisis lo hace el profesor investigador, ya que el estudiante no es aún consciente del equívoco en que está.

En las entrevista detectamos esta categoría por expresiones en donde el estudiante ratifica la respuesta que tenía y su convencimiento de estar en lo cierto lo lleva incluso a justificar el error. Ésta categoría fue recurrente en las entrevistas realizadas y es de esperarse puesto que como el trabajo de investigación no pretendió intervención alguna, se da la oportunidad al estudiante que hable sobre sus respuestas, pero en ningún momento se confronta la veracidad o no de ellas, ni se induce a que las replantee.

Modificación de saberes: se evidencia cuando el estudiante da muestras de que su proceso de aprendizaje desde la realización del test diagnóstico hasta el momento de la realización de la entrevista, le ha brindado nuevos elementos que le permiten cambiar su opinión acerca de una respuesta dada anteriormente, y/o una justificación de la misma, con la certeza de estar en lo cierto.

Tanto el profesor como el estudiante pueden llegar a la conclusión de que hay modificación de saberes, porque este último lo hace explícito con afirmaciones como: “Antes no sabía cómo hacerlo pero ya sí”, “eso ya lo aprendí en clase de Estadística”, “ya caí en la cuenta que lo hice mal”,... etc.

CATEGORÍAS DISCIPLINARES:

Estrategia de ordenamiento de números: El estudiante muestra cuales son las alternativas que emplea cuando se le solicita ordenar una lista de números; para tal fin establece un sistema de referencia, para un gran número de estudiantes fue el cero, pero como se analizará más adelante, no lo fue así para todos los estudiantes.

Conversión de registros: En esta categoría encontramos aquellos fragmentos de la entrevista en donde el estudiante plasma la interpretación de las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Esta categoría se hace muy visible en el punto cuatro del test, en el cual se le solicita al estudiante representar de diversas maneras el número $3/4$.

Asociaciones incorrectas: Para dar una respuesta y/o justificarla, el estudiante recurre a procedimientos inadecuados, irrelevantes o equívocos asociados a conocimientos previos. Lo cual se presentó en los diferentes puntos del test como pudimos evidenciarlos al realizar la entrevista personal, lo que nos dio indicios de posibilidad de encontrar obstáculos de tipo epistemológico, en la observación de campo posterior.

Al inicio del trabajo de investigación proyectamos analizar la entrevista sólo desde el enfoque disciplinar, pero el carácter socrático de estas, nos llevan a tener en cuenta otra perspectiva, que emerge en el desarrollo de las mismas y nos es imposible ignorar, a lo cual llamamos “grupo de categorías pedagógicas”, y que afectan directamente el aprendizaje de los números racionales e irracionales, puesto que lleva implícito el proceso de autorreflexión del estudiante en torno a su aprendizaje y por ende del factor motivacional hacia él.

Analizando las categorías, encontramos que las clasificadas como pedagógicas, fueron las más frecuentes a lo largo de las entrevistas, sin importar por la pregunta que se indagase, el estudiante hacía reflexiones sobre lo que él considera saber, lo que está seguro de saber, lo que debería saber y no sabe y sobre las dudas que le surgen; reflexiones que a su vez nos permitieron reconocer, a quienes participamos como profesores investigadores, la importancia de la concientización del estudiante, de sus fortalezas y falencias como factores determinantes en el aprendizaje.

Este hecho no ha de sorprender, puesto que es claro que independientemente de la temática que se quiera tratar, el proceso de aprendizaje esta mediado por factores que lo afectan y determinan, es así que para todo individuo, la autorreflexión y retroalimentación acerca de su aprendizaje es fundamental y necesario, como lo debe ser también para aquel que orienta tal proceso y como en nuestro caso, quiere obtener información para optimizarlo. Podemos así convertir el error, en punto de partida para la superación de falencias, una vez sea reconocido como tal y como elemento que permita reestructurar el aprendizaje desde el individuo mismo además como una estrategia pedagógica para quien orienta el aprendizaje.

Analicemos ahora los errores encontrados en las categorías disciplinares, encontramos insumos suficientes que nos permiten detectar puntos críticos para las posteriores observaciones en el aula, bajo el instrumento denominado por nosotros diario de campo; aunque las principales falencias de los estudiantes ya han sido visualizadas por medio del análisis preliminar que se hizo del test diagnóstico, la entrevista personal se convirtió en una herramienta que nos permitió tener una mejor visión de las causas que lleva a los estudiantes a incurrir en los errores más usuales que se presentaron a la hora de responder el test.

Veamos el análisis de estas categorías:

Ordenación de los números: se relaciona directamente con los puntos uno y dos del test, que fueron considerados por la mayor parte de los estudiantes como unos de los puntos más fáciles para resolver, sin embargo ningún estudiante los hizo correctamente en su totalidad. Al indagar al respecto, encontramos que manifiestan dificultad para establecer un criterio que permita determinar cómo ordenar números, en este caso en orden ascendente.

Entre las estrategias que emplearon los estudiantes para ordenar números destacamos ubicar primero todos los números negativos y luego todos los números positivos, procedimiento tal que implícitamente parece establecer al cero como un punto de referencia para ellos, aunque los estudiantes no mencionan de manera explícita el cero, dado que no está incluido en el listado de números a organizar, este parece ser un referente válido para ellos, sin embargo esto no asegura claridad a la hora de la ordenación los números enteros negativos, ya que lo hacen basándose en su valor absoluto, es decir -3 es primero en orden ascendente que -12.

La idea del cero como referente para los estudiantes, puede ser corroborada cuando en el cuarto punto del test para ubicar $\frac{3}{4}$ en la recta numérica, los estudiantes lo refieren como punto inicial o como punto medio de la recta; esto se evidencia aún si el ejercicio propuesto no se resuelve de manera correcta por parte de los estudiantes (Anexo5).

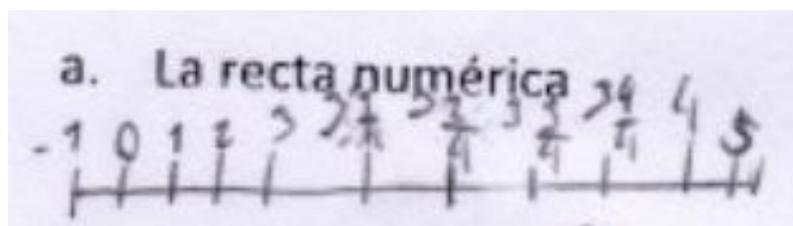
Sin embargo para otros estudiantes no parece tener ninguna relevancia el cero como referente, pues el criterio de ser negativo o positivo no pesa a la hora de ordenar los números, e incluso se presenta el caso de un estudiante para el cual parece ser que el uno es considerado su punto de referencia, recurriendo a sumas y restas para, según él, saber cuánto le falta a un número para llegar al uno.

También fue usual, encontrar estudiantes que consideran el mejor criterio para ordenar números, ubicar de primero, es decir como menores, aquellos números decimales con parte entera correspondiente a cero, por ejemplo 0,33; ya que según ellos son los menores de todos, incluso menores que cualquier negativo. Anexo 5; en tal sentido encontramos, que si la parte entera de un

decimal es diferente de cero, estos son considerados por algunos estudiantes como menores que cualquier número entero, es decir el hecho de que los números en cuestión, sean o no enteros, parece tener un gran peso para la ordenación de ellos, según algunos de los estudiantes encuestados.

La ubicación de los fraccionarios, no fue tarea fácil para ellos y quienes realizaron de manera correcta el ejercicio, recurrieron a la estrategia de dividir el numerador entre el denominador y trabajar con ellos como números decimales.

En el caso del punto cuatro en donde se solicitaba representar $3/4$ en la recta numérica explican su ubicación, no a partir del cero, sino a partir del valor del numerador de la fracción, en este caso a partir del 3 y la unidad siguiente la divide en el valor del denominador es decir en 4. Anexo 5



Solución dada por Kevin (estudiante de la I.V.S) al punto 4a del test

Los estudiantes durante la entrevista, manifiestan que fue realmente un reto para ellos ubicar el número π , así como el número $3,4 \times 10^{-1}$; si bien dar una cifra aproximada de π no es ningún problema para ellos, si lo es el hecho de tener en cuenta que tal número tiene infinitas cifras decimales, por lo cual no saben en dónde ubicarlo en la recta. Además, debido a la infinitud de cifras de π , muchos de ellos lo consideran como el mayor de todos los números de la lista, lo cual muestra evidencias de un obstáculo epistemológico referido al concepto de infinito.

Es tan poca la claridad acerca de cómo ordenar números, que encontramos notorias contradicciones en lo que el estudiante argumenta en la entrevista y la manera como lo realiza en el test, es el caso de la estudiante Smith Paola Mejía. Anexo 5

En cuanto al $3,4 \times 10^{-1}$, considerado por los estudiantes como el mayor de todos, los argumentos que justifican esta decisión recaen en el hecho de que al estar multiplicado por diez debe ser un número de gran magnitud, por lo tanto, no le dan sentido al exponente negativo.

Conversión de Registros: Como es de esperarse esta categoría la encontramos en el punto en donde el estudiante debe realizar diferentes representaciones de número tres cuartos ($3/4$).

Al revisar las respuestas, se evidencia que tanto en la recta numérica como la representación en la figura, los estudiantes realizan el ejercicio y lo argumentan dando razón de dos números el 3 y el 4, es decir no establecen la relación propia de la razón que forman, por lo tanto, no como un número racional; al parecer el conjunto numérico al cual se limita el estudiante es el de los números enteros.

No es muy claro para ellos establecer representaciones de porcentaje y decimales de la fracción dada. Se encontró poca regularidad a la hora de justificar sus respuestas, fueron tan variadas sus respuestas, que hallamos quienes realizaron y justificaron correctamente el ejercicio, así como quienes representan porcentajes y decimales de manera equivalente y solo cambiaron su simbología así: 3,4% para el porcentaje y 3,4 para la representación decimal, y algunos otros realizan la operación correcta teniendo en cuenta una sola cifra decimal; pero en cualquiera de estos casos no hay mucha sustentación para explicar el porqué de su respuesta.

Asociaciones incorrectas: Encontramos esta categoría al referirnos a los conjuntos numéricos, cuando se indaga por los números racionales e irracionales, hallamos que es frecuente que los estudiantes los asocien con números pares e impares, números positivos y negativos, números enteros y decimales, números con raíces entera y con raíces no enteras, e incluso con raíces cuadradas de enteros positivas y raíces de enteros negativos.

Como se mencionó anteriormente se encontró que no entienden la fracción como un número racional, si no que asocian su numerador y su denominador como si fuesen dos enteros diferentes.

Adicionalmente, los estudiantes consideran que números irracionales como π son muy grandes, por el solo hecho de tener infinitas cifras decimales, sin considerar valores posicionales de sus cifras.

5.3 Diario de Campo

Para el análisis de este instrumento de gran relevancia en el este trabajo de investigación, los datos obtenidos durante el tiempo de observación, fueron organizados según la taxonomía de Radatz, ya referida anteriormente en el marco conceptual, sin emplear la subdivisión que propone el autor en la cuarta categoría correspondiente a asociaciones incorrectas, ya que la presente investigación se limita a una categorización numérica de racionales e irracionales y no de errores generalizados en matemáticas, por lo cual la subdivisión obviada no resulta pertinente para las condiciones y tiempos de la presente investigación.

A continuación en las tablas 6 y 7, se podrán observar los errores ya categorizados para las instituciones I.B.V y V.S respectivamente.

Tabla 6.

Resultados de la observación en aula de la Institución Educativa Ignacio Botero Vallejo de acuerdo a la taxonomía de Radatz

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
1. DIFICULTADES DEL LENGUAJE	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.	No se encuentra significado en la ubicación del punto y/o la coma para representar números decimales o enteros.	Determinar la frecuencia relativa de un conjunto de datos. Por lo cual realizan la división de dos enteros en calculadora.	1.203 = 1203 = 1,203 ó 1.234,23 = 1,234.23 = 123423.	15/106
				12,3499888 muy diferente a 12,35	30/106
			Hallar la probabilidad de un evento aleatorio. Utilizan la razón 1/1000	0,001 ≠ 0,0010 Algunos estudiantes dejan el cero después del 1 y manifiestan que sin el cero sería otro valor	23/105
		Dificultad para reconocer diferentes formas de expresar fracciones.	Regla de tres con fracciones (en general esta dificultad se presenta donde hay presente fracciones)	No reconocen $\frac{2}{3}$ como la fracción $\frac{2}{3}$	15/106
	Dificultad para reconocer otra forma de expresar un producto en forma algebraica y numérica. Se ignoran los paréntesis	Resolver el sistema de ecuaciones 2x2 por reducción $3x + 5y = 7$ $2x - y = -4$	Los estudiantes llegan correctamente al resultado $x = -1$, pero al reemplazarlo en la ecuación $3x + 5y = 7$ Cometen el siguiente error $3(-1) + 5y = 7$ $2 + 5y = 7$	4/106	

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
2. DIFICULTADES PARA OBTENER INFORMACION ESPACIAL	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (En particular de la recta y el plano cartesiano) inadecuadas de situaciones matemáticas.	Dificultad para tomar el cero como punto de partida en la medición de longitudes.	Medición de polígonos por medio de una regla para hallar su perímetro y área. Dificultad que se presenta en otras áreas donde deben medir objetos o figuras, como en artística.	No toman el cero como inicio en la medición. Toman el uno y en algunos casos el borde de la regla así no coincide con el cero	30/106
		Dificultad para ubicar una fracción en la recta numérica ò en el plano cartesiano.	Ubicar en el plano cartesiano el punto de coordenadas (3/5, 7/2)	Los estudiantes toman la fracción como dos números enteros diferentes ubicando el numerador en un eje y denominador en otro. En la mayoría de los casos manifiestan no saber hacer el ejercicio.	60/106
		No comprende la escala en el plano cartesiano.	Dibujar en el plano cartesiano una función racional	Elabora un plano cartesiano empleando la misma distancia de 35 a 70000 que de 70000 a 700000, y así para cualquier intervalo entre dos números.	20/105
3. APRENDIZAJE DEFICIENTE DE HECHOS, DESTREZAS Y CONCEPTOS PREVIOS.	Errores originados por deficiencia de conceptos, contenidos y procedimientos para realización de una tarea matemática.	Solo piensan en valores enteros y no en todos los reales	Determinar el dominio de la función $y = \sqrt{x + 12}$	Realizan correctamente el ejercicio hasta el paso $X \geq -12$. Pero en la solución que plantean; $X: \{-12, -11, -10, \dots\}$. Solo expresan los números enteros	25/105

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
	Incluyendo ignorancia de algoritmos, conocimientos inadecuados de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.	No aceptan un número decimal como la raíz de un número real	<p>Graficar en el plano cartesiano la función $Y = \sqrt{2-x}$</p> <p>Los estudiantes escogen valores de 1, -2, -4, -6 en el dominio para encontrar su respectivo rango y graficar dichos puntos en el plano.</p>	<p>Se encuentran con las siguientes raíces: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{8} = 8$, $\sqrt{6} = 6$.</p> <p>Ignorando para $\sqrt{8}$ y para $\sqrt{6}$, la raíz, al encontrar que el resultado no es un número entero.</p> <p>Ignoran además los resultados negativos.</p> <p>Al momento de escoger valores para el dominio, evitan aquellos que puedan dar cero dentro de la raíz</p> <p>Evitan $x=2$, ya que $Y = \sqrt{2-2} = \sqrt{0}$</p>	58/106
		Se ignora la fracción como tal, al invisibilizar el numerador.	Graficar la función $Y = \frac{4}{3x}$	<p>Al darle valores a la X para graficar la función y tomando uno de los puntos como $X = -6$, entonces los estudiantes reemplazan así:</p> $Y = \frac{4}{3 \cdot (-6)} = -18$ <p>Con $X = 9$ entonces $Y = \frac{4}{3 \cdot 9} = 27$</p>	3/106

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
		Dificultad para operar con el cero	Graficar la función $f(x) = 5/x$	$Y = 5/0$, entonces $y=5$	40/106
		No comprenden la fracción como división		$Y = 5/5 = 0$	34/106
		Dificultad en la resta de un número negativo	Determinar el valor del rango correspondiente para $x=-6$ en la función $y = 4-x$	$4 - (-6) = -2$	43/106
		Usan la regla de multiplicación de signos en otras operaciones como la suma y resta de enteros.	Graficar la línea recta representada por la ecuación $y = -2+x$	Los estudiantes tabulan algunos valores del dominio y obtienen los correspondientes del rango. Cuando le dan a la X el valor de -3 llegan al siguiente procedimiento: $Y = -2 - 3 = +5$ Multiplican los signos en restas y sumas.	52/106
4. ASOCIACIONES INCORRECTAS O	Errores causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexibles, es decir	Dificulta para comprender existencia de los números	Explicación del dominio y rango de una relación dada en el conjunto de los reales.	Aseguran que -2.1 es exactamente el siguiente número menor de -2.	43/106

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
RIGIDEZ DEL PENSAMIENTO	para adaptarse a situaciones nuevas.	irracionalidad y la completitud de la recta real	Se les pide un número menor de $\frac{1}{2}$		
		Dificultad para comprender la fracción	Graficar la función $y = 1/x$	Escogen el 7 como un punto del dominio a tabular para luego graficar Si $y = 1/x$; $x=7$, entonces $y = 1/7 = 1$	3/107
		Asociación incorrecta del concepto de simplificación en fracciones.	Ejercicio de proporcionalidad donde expresaban que por cada 15 camisas, 4 eran azules	$4/15 = 2/3$ Simplifican denominador sacando mitad, mientras en el denominador sacan quinta.	20/106
		Interpretan el cuadrado de un número como su doble.	Para hallar el área de un rombo, se debe hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados 4 y 5 unidades.	$c = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{8 + 10}$	67/106
		Interpretan la raíz cuadrada de un número como su mitad e ignoran el valor negativo de una raíz par	Al resolver una ecuación cuadrática obtienen $x^2 = 8$	$\sqrt{8} = 4$	72/106
5. APLICACIÓN DE REGLAS O ESTRATEGIAS IRRELEVANTES	Producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares, en contenidos diferentes.	Creencia que la multiplicación con números decimales siempre debe dar otro decimal	Regla de tres	$5,5 \times 70 = 38,5$ debe ser necesariamente otro número decimal	16/106

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCIÓN	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
		Como 10x10 es 100, entonces 100x 100 debería ser 1000	Al explicar el concepto de hectárea, se le indaga a los estudiantes por el resultado de 100 m x 100 m	100x100= 1000	70/106

Nota. Fuente: Adaptado de Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Tabla 7.

Resultados de la observación en aula de la Institución Educativa Villa del Socorro de acuerdo a la taxonomía de Radatz

POSIBLE CAUSA DE ERROR	DESCRIPCION	ERRORES ENCONTRADOS	EJERCICIO O ACTIVIDAD PROPUESTA	EJEMPLO DE ERRORES COMETIDOS O DIFICULTADES ENCONTRADAS	REPETICIONES O FRECUENCIA
1. DIFICULTADES DEL LENGUAJE	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.	No reconoce ningún significado para el punto o la coma para los números decimales.	Halla el área de un rectángulo con base 1.7cm y altura de 2cm	3,4 = 34; dan como resultado 34, en lugar de 3,4. 0,4 = 04 (por que el cero no vale nada)	58/175
		No comprender el valor posicional de las cifras decimales, concretamente el cero.	Pregunta que surge de una socialización en el tablero, de un ejercicio de área sombreada en donde unos estudiantes manifiestan que el resultado es 2,4 y no 2,40 como les dio a unos de sus compañeros.	Es mayor 2,40 que 2,4; porque 40 es mayor que 4.	37/175

		Confusión con el punto o la coma, para representar los números decimales.	Hallar el lado de un cuadrado, cuyo perímetro es de 15 cm	Los estudiantes preguntan ¿se pone 3,75 ó 3.75?	8/175
		Al realizar multiplicaciones entre números decimales dar la respuesta sin tener en cuenta las cifras decimales ignorando la coma.	Encontrar el perímetro de un rectángulo en donde uno de sus lados mide 4,5 cm y el otro 2,3 cm	$4,5 \times 2 = 90$	40/175
		Resolver polinomios incorrectamente por errar la jerarquía de las operaciones, primero multiplicar y luego restar.	Hallar la región sombreada de una figura geométrica, que requiere emplear fórmulas de áreas de diferentes figuras y realizar diversas operaciones como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.	$2 \times 16 - 8 = 16$	38/ 175
2. DIFICULTADES PARA OBTENER INFORMACION ESPACIAL	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (En particular de la recta y el plano cartesiano) inadecuadas de situaciones matemáticas.	Dificultad para tomar el cero como punto de partida en la medición de longitudes.	Graficar un triángulo equilátero, con lado de medida 8cm.	Al medir en una regla comienzan la medición desde el uno y no desde cero.	35/175
		Dificultad para ubicar en la recta numérica un fraccionario a un número con más de una cifra decimal.	Ubicar en la recta numérica $-7/3$	Ubican como si fuesen dos números enteros diferentes uniendo con una línea desde el -7 y otra desde cero hasta -3.	40/175
			Ubicar en la recta numérica 0,7	Comienzan a medir desde el uno y lo ubican aproximadamente en 1,78	34/175

			Ubicar en la recta numérica 1,47	Manifiestan no saber hacerlo porque entre el 1 y 2, sólo puede ser dividirlo en diez partes	42/175
		Indicar que un segmento no tiene mitad.	Dibujar en hojas milimetradas el triángulo de Sierpinski, sacando triángulos semejantes con sucesivas mitades de los lados.	Al medir con regla un segmento con mitad no entera manifestar que no tiene mitad. 7,5cm , no tiene mitad	12/175
3. APRENDIZAJE DEFICIENTE DE HECHOS, DESTREZAS Y CONCEPTOS PREVIOS.	Errores originados por deficiencia de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Incluyendo ignorancia de algoritmos, conocimientos inadecuados de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.	Dificultad para realizar correctamente el algoritmo de la división.	Hallar la región sombreada de una figura geométrica, que requiere emplear fórmulas de áreas de diferentes figuras y realizar diversas operaciones como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.	52,6 ÷ 16 = 301 59,5 ÷ 16= 37 (resultado entero)	50/175 38/175
		Ignorar las comas del dividendo o del divisor al realizar la división.			
		Tablas de multiplicar erradas.	Hallar la región sombreada de comprendida en un triángulo de base 7mm y altura 8mm.	7x 8= 63	18/175
		Ignorar una raíz cuadrada y suponer que es igual que esté o no.	Hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo en donde uno de sus catetos mide 3 cm y el otro 6cm.	$\sqrt{45} = 45$ $100 = \sqrt{100}$	43/175
		Dificultad para operar con el cero	Hallar la región sombreada de una figura geométrica, que requiere emplear fórmulas de áreas de diferentes figuras y realizar diversas operaciones	$6 \times 0 = 6$ $3 \times 0 = 1$ $6 + 0 = 0$	52/175

			como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, en las cuales está involucrado el cero.	$0 - 4 = - 0$	
		Al simplificar raíces sacar un factor de la raíz con el mismo exponente	Hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo en donde uno de sus catetos mide 3 cm y el otro 6cm.	$\sqrt{(3^2 \times 5)} = 3^2 \sqrt{5}$	14/175
		Multiplican los signos en la resta y/o sumas de dos enteros.	Realiza las siguientes operaciones con los números enteros (Ejercicios de repaso de operaciones con números enteros).	$-2+2= -0$ $-4-2= 6$	43/175
		Incorrecta ubicación del punto al resultado de una multiplicación de decimales.	Hallar el área de una circunferencia cuyo radio mide 4.5 m	20,25 <u>X 3,14</u> 8100 2025 <u>6075 .</u> 6358,50	37/175
		Multiplicar decimales como si fuesen enteros ignorando la coma en el resultado.	Encontrar el perímetro de un rectángulo en donde uno de sus lados mide 4,5 cm y el otro 2,3cm.	$4,5 \times 2 = 90$	45/175
		Factorizar erróneamente números, para	Hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo en donde uno de sus catetos mide 3 cm y el otro 6cm. (A la hora de	Desconocen criterios de divisibilidad Al descomponer el 45 manifiestan que los primos por los que se puede	75/175

		descomponerlos en factores primos	descomponer un número en factores primos, para simplificar el resultado de una raíz cuadrada no exacta)	dividir son 2,4,3,5,7,9,10....., al indagar por qué no tienen ningún argumento para justificarlo	
		Un número dividido por sí mismo da cero, fracción con igual numerador y denominador equivale a cero.	Halla el área de un triángulo rectángulo con catetos de medidas 1cm y 2cm de longitud.	$2/2 = 0$	35/175
4. ASOCIACIONES INCORRECTAS O RIGIDEZ DEL PENSAMIENTO	Errores causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexibles, es decir para adaptarse a situaciones nuevas.	Cuando al medir no da exacto en centímetros, ubican el número entero posterior, ó anterior porque consideran que son las mismas medidas, solo consideran los enteros.	Dibujar en hojas milimetradas el triángulo de Sierpinski, sacando triángulos semejantes con sucesivas mitades de los lados.	6,7 cm = 6cm ò 7 cm 5,2cm = 5 cm ò 6 cm 30,1 cm = 31 cm Solo admiten magnitudes de medida entera.	9/175
		Incapacidad para reconocer números pares, impares y primos.	Hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo en donde uno de sus catetos mide 3 cm y el otro 6cm. (A la hora de descomponer un número en factores primos, para simplificar el resultado de una raíz cuadrada no exacta)	Confundir los pares con primos y no tener criterio para identificarlos. Al descomponer el 45 manifiestan que los primos por los que se puede descomponer son: 2, 4, 6, 8... Confunden los primos con los impares Al descomponer el 45 manifiestan que los primos por los que se puede descomponer son:1,3,5,7,9..	52/175 74/175

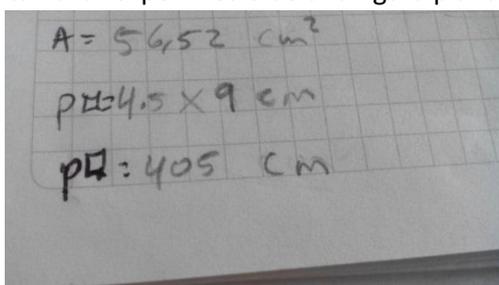
Nota. Fuente: Adaptado de Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

		Confundir multiplicación con potenciación.	Hallar el área sombreada de una figura, para ello era necesario multiplicar por dos, porque había dos figuras sombreadas exactamente iguales.	$3 \times 2 = 9$ $7 \times 2 = 49$	32/175
		Confundir raíz cuadrada con la mitad	Halla el lado de un cuadrado con área de 8 cm	$\sqrt{8} = 4$	27/175
		Dejar la variable al cuadrado, aunque ya se halla sacado raíz.	Hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo en donde uno de sus catetos mide 8 cm y el otro 6cm.	$C^2 = 100$ $C^2 = 10$	18/175
		Al sumar una magnitud con otra de igual magnitud, se pone elevado al cuadrado en lugar de multiplicar por dos.	Hallar el perímetro de un trapecio isósceles en donde sus dos lados iguales miden 5 m.	$5 + 5 = 25$	8/175
		Al multiplicar por uno el resultado da uno.	Halla el área de un triángulo con base 3cm y altura 3cm.	$3 \times 1 = 1$	15/105
		Al realizar una división que no da exacta, ignorar las cifras decimales y dar el resultado siempre entero, sin ni siquiera hacer aproximaciones.	Hallar el área de uno de los cinco triángulos equiláteros que conforman un pentágono regular de área 28mm ² .	$28 / 5 = 5$	32/175

5.3.1 Causa de error por dificultades del lenguaje

En la causa de tipo de error 1, ilustrados en las Tablas 6 y 7, se presentan aquellos ejercicios, en los que se involucran números con cifras decimales diferentes de cero, es decir números no enteros. Fue repetitivo encontrar que el punto o la coma, parecen no tener ningún sentido para el estudiante, independiente del valor posicional que estos ocupen; este error lo trasladan de igual manera a las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Este error puede ser una muestra de que no comprenden en su totalidad el conjunto numérico de los racionales, y se limitan a los números enteros e incluso muchos de ellos sólo piensan en los naturales, tal como se observó al aplicar los instrumentos anteriores. A continuación un error observado en el aula de clase, cuando se solicita hallar el perímetro de una figura plana.



A = 56,52 cm²
 p = 4,5 x 9 cm
 p = 405 cm

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución V.S

En las Tablas 6 y 7 se observa otro ejemplo de esta causa de dificultades del lenguaje, relacionada con el aprendizaje de los números racionales, evidenciando problemas en la comprensión de las representaciones simbólicas de los mismos, por ejemplo el desconocimiento de una de las notaciones de la fracción dos tercios : $\frac{2}{3}$, considerando que son dos números diferentes, es decir una vez más el conjunto de los racionales es desconocido en su totalidad por los estudiantes, pues consideran numerador y denominador como dos números que no tienen relación entre sí, por lo tanto, piensan sobre este tipo de representación como dos enteros separados por una línea, sin embargo al presentarles el mismo número dos tercios de la forma: $\frac{2}{3}$, ya si es reconocido como una fracción y no como dos números diferentes separados por un símbolo, debido a lo anterior no establecen una igualdad entre la representación $\frac{2}{3}$ y la representación $\frac{2}{3}$, pero esta última si la ven como fracción. Este error puede explicarse desde una perspectiva epistemológica por la evolución del simbolismo matemático, que puede inducir a permanecer en el conjunto de los enteros.

Encontramos también, que el cero es un gran generador de errores en esta categoría, a pesar de su uso cotidiano, el estudiante no asimila los diferentes roles del cero (como cifra y como cardinal) en el sistema de numeración decimal, para ellos este número indica la ausencia, es visto primordialmente como un único objeto matemático, predominantemente como cardinal.

En la Tabla 7 se puede ver como algunos estudiantes incurren en el error del uso del cero, al afirmar que: " $0,4 = 04$ ", pues según el argumento de ellos "*el cero no vale nada*", lo cual nos induce a pensar que ellos también ignoran la coma y esta no tiene un significado en las representaciones numéricas. En sí, los problemas con el cero y su interpretación como cifra van mucho más allá y se les dificulta comprender su relación con la coma, el punto y el valor posicional de este, ver tabla 6.

Por otro lado, destacamos que el inadecuado uso de signos de agrupación como paréntesis, corchetes y llaves; o su no uso, es una barrera en el lenguaje matemático, que conlleva a cometer errores

numéricos, como por ejemplo, un inadecuado orden para el desarrollo de las operaciones algebraicas o confusiones en el tipo de operación a realizar.

5.3.2 Causas de error que se vinculan con información espacial

Las causas de los errores de tipo espacial están estrechamente relacionados con el pensamiento geométrico, en esta investigación los encontramos en particular en los sistemas de referencia numéricos como son la recta numérica y el plano cartesiano; así se observa en las Tablas 6 y 7, en ejercicios en donde el estudiante debe ubicar números en alguno de estos dos sistemas de referencia o bien donde el estudiante debe realizar mediciones con regla.

En las observaciones fue recurrente encontrar que los estudiantes no toman el cero como referente a la hora de realizar una medición directa con instrumentos como la regla, y por lo general iniciaban su medición desde el número uno.

Al graficar un número decimal con parte entera cero, como el 0,7 en la recta numérica, encontramos la misma dificultad, ya que de manera similar al error anteriormente documentado inician a partir del uno y no del cero.

Este tipo de errores, nos dan indicios de que utilizan el cero desde la perspectiva cardinal, según lo dan a entender las socializaciones de las actividades realizadas, cuando manifiestan que lo hacen así porque el cero no vale nada.

En cuanto a la fracción representada bien sea en la recta numérica o en el plano cartesiano, conllevan a otro tipo de retos en los estudiantes, puesto que el conjunto de los números racionales parece no ser aún comprendido por ellos, según las observaciones en el aula y que ratifican el análisis previo realizado con los otros dos instrumentos, en el sentido de que el estudiante percibe no un número racional, sino dos números enteros.

A la hora de trabajar los racionales en la recta numérica y en el plano, los estudiantes no fueron capaces de ubicar números con varias cifras decimales, para muchos de ellos estos es inimaginable siquiera, no existe para ellos correspondencia alguna entre un racional y su expresión decimal o viceversa.

Comprenden la recta como un modelo en donde se ubican los números naturales y enteros, con alguna intuición de los racionales; pero les es inimaginable considerar los irracionales en una recta donde no hay huecos; muchos de ellos alcanzan sólo a considerar que entre un entero y otro hay una subdivisión en diez partes iguales, pero no más que estas, y en pocos casos se establece relación con el sistema numérico decimal, así mismo desconocen las reglas para representar acertadamente números, mediante el uso de escala.

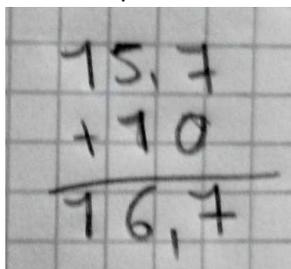
Lo anterior nos lleva a concluir que los estudiantes no aceptan la completez de la recta real, pues les es complejo pensar que entre dos números reales hay otro número real, por lo tanto, se les dificulta asimilar el concepto de infinitud de los números reales.

5.3.3 Causas de error por aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos

Varios de los errores encontrados en esta causa de error se resumen en deficiencias para resolver algoritmos, destacándose los de operaciones entre números decimales, la división y radicación.

Es así como encontramos de nuevo la tendencia que tienen los estudiantes a limitar su pensamiento en términos de los números enteros, por ejemplo en uno de los errores documentados de la tabla 6, en donde a partir de un ejercicio propuesto de radicación, encontramos el error: $\sqrt{8}=8$, los estudiantes dan como su resultado el radicando, ignorando el radical, en aquellos casos donde el resultado no es un número entero; de manera análoga al realizar una división como $59,5 \div 16 = 17$, el resultado lo expresan como si lo fuese entero aunque no lo es. Tabla 7.

En el caso de operaciones con números decimales, las realizan empleando las propiedades de los enteros, como podemos observar en el siguiente error encontrado en el aula, cuando se presenta una suma resultante cuando se solicita hallar el perímetro de una figura plana.



$$\begin{array}{r} 15,7 \\ + 10 \\ \hline 16,7 \end{array}$$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución V.S

A pesar de que muchos de los hallazgos conducen a que los estudiantes se limitan al conjunto de los enteros, en este conjunto numérico tampoco parecen reconocer sus propiedades, en especial si se habla de los números negativos; es decir nos surge la duda: ¿será que su comprensión numérica está restringida sólo a los números naturales?

El signo menos quizás sólo representa para ellos un operador, pues les resulta contradictorio obtener resultados negativos e incomprensible operar signos, en su mente sólo es posible una resta dada la condición de que el minuendo sea mayor que el sustraendo; pero aún menos comprensible es para ellos si el minuendo es el cero, es así que nos encontramos errores como: $-4-2=6$, $4-(-6)=-2$.

Es así como en este ítem también continúan evidenciándose las dificultades con el cero, que quedaron registradas en varias de las operaciones resultantes de ejercicios planteados a los estudiantes y que se detallan en las tablas 5 y 7: $6 \times 0 = 6$, $3 \times 0 = 1$, $6 + 0 = 0$, $0 - 4 = -0$, $5/5 = 0$, $2/2 = 0$, $-2+2 = -0$.

Veamos un ejemplo de este tipo de errores, que se presenta en el aula, cuando queda planteada una multiplicación al buscar el perímetro de una circunferencia.

$$\begin{array}{r} 3.14 \\ \times 90 \\ \hline 2826 \\ \hline 28260 \end{array}$$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución V.S

Situaciones como la anteriormente planteada lleva a que los estudiantes eviten al máximo el encuentro con el número cero. Esto también se observó en el ejercicio planteado en la Tabla 6; donde se solicita graficar la función real $y = \sqrt{(2-x)}$ en el plano cartesiano, y los estudiantes con el fin de evitar realizar operaciones con el cero (en este caso encontrarse con $\sqrt{0}$), eluden darle a la "x" el valor de 2 como la abscisa de un punto de la gráfica que hace parte del dominio de la función.

En esta categoría también se observaron varios problemas en los estudiantes con el uso de las fracciones, en cuanto su comprensión como número racional, sus diferentes representaciones y las operaciones en donde están involucrados estos.

Uno de los muchos errores presentados en el aula, se muestra a continuación y se presenta cuando se le solicita al estudiante determinar el rango real de la función: $y = \frac{4}{3x}$

Rango: $y = \frac{4}{3x} =$ Rango

$$y \cdot (3x) = 4$$

$$3x = \frac{4}{y}$$

$$x = \frac{4}{\frac{y}{3}}$$

x	y	
-6	-8	$\frac{4}{3 \cdot -6} = -\frac{8}{3}$
9	27	$\frac{4}{3 \cdot 9} = \frac{27}{3}$
-3	-9	$\frac{4}{3 \cdot -3} = -9$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución I.B.V

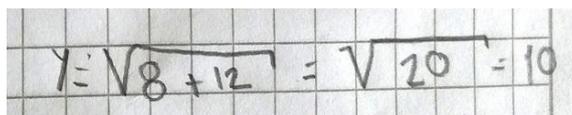
Allí se puede observar que el estudiante despeja correctamente, pero ignora el numerador y solo está procesando la operación planteada en el denominador.

5.3.4 Causa de error por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento

Encontramos que a causa de asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento los estudiantes de manera errónea creen saber con certeza cuál es el número inmediatamente mayor a otro, sin considerar la completez y el orden de los números reales, conjunto numérico en cual se deben desenvolver y que es en el cual se le plantean las situaciones a los jóvenes, encontramos por ejemplo que al trabajar con el dominio de una relación aseguran que el número inmediatamente menor que -2 es -2.1, tal parece no hay conciencia de los irracionales que completan el intervalo entre estos dos números.

Las asociaciones incorrectas fueron causantes de errores como los que observamos en la Tabla 6, en donde encontramos, que la operación de elevar un número al cuadrado es asociado con la operación doble de un número, y viceversa; sacar la raíz cuadrada es erróneamente asociado con sacar la mitad de dicho número. Lo cual podemos relacionar con otros de los errores detectados y es la incapacidad para diferenciar cuando un número es par, impar y cuando es primo.

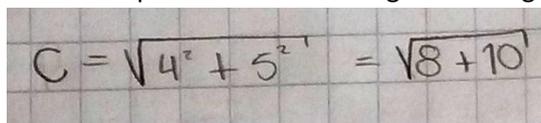
Observemos el error cometido por un estudiante cuando se le solicita buscar el rango en los números reales para la función $y = \sqrt{x - 12}$. Como vemos en la siguiente imagen el error no es solo conceptual sobre la forma de hallar el rango de una función, sino que también es de orden operacional para encontrar la raíz cuadrada de un número.



$$y = \sqrt{8 + 12} = \sqrt{20} = 10$$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución I.B.V

En la siguiente ilustración queda en evidencia el error que surge cuando se solicita hallar el área de un rombo, para lo cual se debe hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados 4 y 5 unidades



$$C = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{8 + 10}$$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución .I.B.V

El trabajo con las fracciones, ha mostrado a lo largo de la investigación ser una temática en la cual los estudiantes presentan grandes dificultades, ya se ha hecho anteriormente evidente como pueden asociar una fracción con dos números enteros, lo cual nos puede explicar por qué al simplificar dicha fracción, lo hacen independientemente, por ejemplo sacando mitad al numerador y quinta al denominador.

Por otra parte y de manera reiterada encontramos como los estudiantes sólo se mueven en el conjunto numérico de los enteros, desconociendo o ignorando los que no lo son, bien sea midiendo con la regla o realizando una división, en el caso en donde se les solicita medir un segmento de 6,7cm los jóvenes miden 6 o 7 cm , sin que se observe un criterio claro que determine como se deciden por uno u otro entero y de manera similar cuando se les da una fracción cuyo cociente no da entero como $28/7$, no tienen ningún problema en afirmar que es equivalente a 5.

5.3.5 Causa de error por aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

En muchas ocasiones los estudiantes aplican estrategias que han sido útiles bajo otros contextos o contenidos, es el caso de la operación $5,5 \times 70$ (Tabla 6) donde suponen, que como en experiencias previas, el resultado de multiplicar un número decimal por cualquier otro es también un número decimal, lo que conlleva al error de dar el resultado como 38,5 en vez de 385, esto puede ser interpretado como una ruptura en su concepción de los conjuntos numéricos no reconociendo los enteros como racionales.

El siguiente es otro de los errores que se manifiestan en esta categoría: al explicar el concepto de hectárea, se le indaga a los estudiantes por el resultado de 100×100 , en todos los grupos donde se

realizó la pregunta, casi que al unísono, hubo una respuesta espontánea e inmediata de 1000. Esto debido posiblemente a la experiencia que han tenido con la operación $10 \times 10 = 100$, en esta caso el producto es resuelto agregando un cero más a la cifra de los factores, de manera análoga en otras multiplicaciones de base diez, como la planteada 100×100 , se replica este razonamiento llegando erróneamente al resultado de 1000; incluso después socializarlo en el tablero, para que se visualice más fácilmente la cantidad de ceros del producto, persiste la idea errónea en algunos estudiantes.

Encontramos además, como los estudiantes a la hora de operar se restringen al conjunto de los naturales, veamos un procedimiento que realiza un estudiante, al pedirle hallar el área de una figura plana

$$A \square - A \circ = A \text{ región}$$

$$36 \text{ cm}^2 - 2826 \text{ cm}^2 = A \text{ región}$$

$$\begin{array}{r} 28,26 \\ - 36 \\ \hline 28,62 \end{array}$$

Ejercicio realizado por un estudiante del grado noveno de la Institución V.S

Inicialmente el estudiante plantea adecuadamente una resta del área mayor con el área menor, pero al organizar los números para restarlos, parece que el estudiante se confunde con las cifras decimales de 28,26 y lo ve como si fuera mayor que 36, lo cual coincide con el análisis realizado en la prueba diagnóstica donde veían a π , como el mayor de todos los números dados, a pesar de que no lo es, por la infinidad de sus cifras decimales.

En el error anteriormente ilustrado, nos llama la atención que el estudiante haya invertido el orden de la operación, cambiando el minuendo y el sustraendo, lo cual interpretamos de dos maneras: la primera es que tal vez quiera trasladar la situación al dominio de los naturales donde no es posible la resta de una cantidad mayor de una menor; la segunda interpretación es que quizás dado el contexto del problema en donde se plantea hallar una área, una respuesta negativa no tendría sentido. Finalmente termina realizando una suma, tal vez, para no complicarse y continúa operando los números como si fueran naturales, añadiendo una coma al resultado.

Esta misma situación parece repetirse en otros errores encontrados, por ejemplo cuando el estudiante debe operar con números irracionales, como π , ignora estos y se limita a las operaciones entre enteros, por tanto lo que hace es replicar procedimientos similares ya conocidos en los nuevos conocimientos. (Tabla 7).

6. Reflexiones y recomendaciones

6.1 Reflexiones

Una vez analizados los tres instrumentos, encontramos que las observaciones dan razón de errores recurrentes que dan muestra del inadecuado uso de los conjuntos numéricos racionales e irracionales.

La categorización de los errores de acuerdo a Radatz, se realiza teniendo en cuenta la dificultad más predominante en cada caso, ya que fue usual encontrar presentes de manera simultánea dos o más dificultades en los errores hallados.

Un hallazgo importante es el hecho de que en todas las categorías en las que se ubicaron los errores de acuerdo a lo propuesto por Radatz evidenciamos la dificultad manifiesta en los estudiantes para trabajar en un conjunto numérico más allá de los números naturales, dados los errores encontrados en el manejo de los enteros negativos y el número cero; en cuanto a los números positivos, la dificultad en el manejo de aquellos con cifras decimales diferentes de cero fue una constante, desconociendo la completez de los reales que se constituye en un indicio de la no comprensión de una de las connotaciones del infinito que se presenta en un intervalo numérico.

Como se ha descrito en el marco conceptual, los errores identificados y categorizados en el presente trabajo pueden provenir de obstáculos de tipo didáctico, epistemológico u ontogenético; aunque el interés en el presente trabajo está centrado en aquellos de tipo epistemológico, no podemos desconocer que los errores hallados pueden ser de carácter didáctico u ontogénico, o bien sea una combinación entre estos tres tipos de obstáculos.

No encontramos registro bibliográfico o investigación alguna que clasifique los errores por obstáculos, aunque si están ampliamente documentados los obstáculos epistemológicos más reconocidos y posibles errores que los evidencian.

En el análisis realizado encontramos posibles obstáculos de tipo didáctico, por lo general se combinan con aquellos de tipo epistemológico, lo cual dificulta su análisis, adicionalmente los obstáculos de tipo didáctico pueden ser generados por obstáculos de tipo epistemológico.

6.1.1 Posibles obstáculos epistemológicos encontrados

Conjuntos numéricos: La comprensión que los estudiantes tienen de los diferentes conjuntos numéricos casi que se limita a los naturales, generalizando sus propiedades a los racionales e irracionales; con una mínima comprensión de los enteros, quedándose en una intuición inicial del número como cantidad sin trascenderlo como objeto matemático abstracto y sin llegar a su formalización.

Es así que consideramos como un obstáculo epistemológico, no los conjuntos numéricos como tal, sino el paso de un conjunto a otro, ya que como se planteó en el marco conceptual, para Bachelard y Brousseau estos obstáculos se definen por conocimientos que han sido eficientes anteriormente para resolver algún tipo de problema, pero que fallan ante situaciones nuevas, en este caso los estudiantes

afrontan los números racionales e irracionales como situaciones nuevas, sumado al hecho de que es condición para que una dificultad sea considerada como un obstáculo epistemológico su persistencia, lo cual efectivamente se dio y quedó registrado en las repeticiones mostradas en las tablas 6 y 7.

Aunque las condiciones expuestas nos llevan a plantear gran parte de la ruptura en el aprendizaje entre los conjuntos numéricos como obstáculo epistemológico, es innegable que hay un componente didáctico que es también causante de dichos errores, y específicamente en el conjunto de los irracionales, los métodos de enseñanza inadecuados pueden conducir al error, ya que en el afán de hacer los números irracionales de más fácil comprensión para el estudiante, se puede llevar a una transposición didáctica inadecuada desde los demás conjuntos numéricos; esto en el mejor de los casos por que en otras ocasiones se evade por completo el uso de estos números.

Por otra parte, encontramos dificultades en los números negativos destacando lo confuso que resulta para los estudiantes identificar y manejar estructuras aditivas y multiplicativas, se les dificulta diferenciar el menos como operador o como el signo de un número, problemática que pueden ser rastreada históricamente y que en algún momento ha merecido un análisis especial para su superación.

En cuanto a los racionales se refieren, cabe anotar que los estudiantes los asumen de manera análoga a como lo hacían los pitagóricos, es decir, no como un número, si no como la razón de dos números enteros, si bien en la literatura no se habla explícitamente de los números racionales como un obstáculo epistemológico, su rastreo histórico y las condiciones ya anteriormente definidas para determinar un obstáculo como epistemológico, no lleva considerarlo así; ya que los estudiantes parten de un conocimiento previo, en el caso que nos atañe el paso de enteros a racionales, como parte de construcción del nuevo conjunto numérico, que requiere no sólo nuevas notaciones, escritura numérica, sino además redefinir las principales operaciones aritméticas. Además los racionales llevan intuitivamente a la noción de infinito actual, el cual si se encuentra ampliamente documentado epistemológicamente como un obstáculo.

Obviamente no todas las dificultades que encontramos en la transición que hacen los estudiantes desde los enteros hasta los racionales nos conducen a obstáculos de tipo epistemológicos, encontramos también obstáculos de tipo didáctico, donde en muchas ocasiones se entrelazan ambos tipos de obstáculos, dificultando su identificación, clasificación y por ende su tratamiento.

La asimilación de los decimales como números enteros en los estudiantes, fue uno de los errores más recurrentes, observado desde la notación que emplean como el uso de la coma o el punto, hasta la manera de realizar operaciones algebraicas con los decimales como si se tratase de enteros; estas dificultades llevan a detectar un obstáculo de tipo didáctico, considerado como tal ya que la manera como está establecida socialmente su enseñanza conlleva a cometer este tipo de errores y concepciones equivocadas, un ejemplo de ellos es asociarlos a unidades de medidas, ligándolos a números concretos, llevando al estudiante a cometer errores como el suponer que el número inmediatamente menor de -2 es -2,1, sin considerar ningún número entre ellos.

Otro posible obstáculo de carácter epistemológico que detectamos mediante los errores analizados, se encuentran en el inadecuado manejo que los estudiantes tienen de los irracionales, es más nos atrevemos a afirmar que no tienen una mínima idea de ellos a pesar de lo planteado por los estándares de matemáticas para los grados 8º y 9º, y que a diferencia de los racionales, este conjunto numérico cuenta con explícita documentación sobre su condición generadora de dificultades, que lo lleva a ser

considerado como un obstáculo epistemológico, ya que es fácilmente rastreable históricamente como los matemáticos han tomado conciencia de ello.

Como fue visible durante el análisis de los errores categorizados, los irracionales son objetos matemáticos carentes de significado para los estudiantes, ya que no encuentran como asociarlos con objetos reales o cotidianos, específicamente como cantidades o magnitudes, e incluso muchas veces son desconocidos por ellos.

Tales dificultades están relacionadas con las infinitas cifras decimales de estos números que asocian con el infinito potencial aristotélico y no con el infinito actual, ocasionando entre otras dificultades su ubicación en la recta numérica, lo cual es resuelto por el estudiante aproximándolo a un racional tal y como se hizo en el renacimiento.

Es tan poca la comprensión de los irracionales que los estudiantes evitan su uso, cuando se encuentran expresiones tales como $\sqrt{2}$ o π , queriendo expresarlo como racionales e incluso no lo asumen como un número sino como una operación que hay que resolver. Hecho que nos remite históricamente a antes de la edad moderna, época en la cual aún no es reconocido el irracional como número por la comunidad matemática, es sólo hasta los trabajos realizados por Dedekind entre otros, que esta concepción epistemológica del irracional cambia, aunque desde antes se tenía una intuición correcta.

Una visión parcial de la noción de infinito e irracionalidad, así como las diversas interpretaciones a que dan lugar, pueden ser caóticas para su comprensión y hacen parte de la complejidad epistémica del conjunto numérico los irracionales como pudo ser evidenciado en las observaciones en el aula.

El infinito: En las actividades que se propusieron en clase no se hace referencia directa al infinito, sin embargo fueron detectados errores que dan cuenta de las dificultades con la noción de dicho concepto, ligados a los conjuntos numéricos de racionales e irracionales.

En ejercicios en donde el estudiante debe pensar en intervalos numéricos dentro de los reales, sólo se limitan a los enteros desconociendo el infinito actual, por tanto desconocen la densidad en los reales y por el contrario lo confunden con el infinito potencial, es por ejemplo como al pedirles ordenar de manera ascendente una lista de números, ubican a π en el último lugar, justificándolo en sus infinitas cifras decimales, aunque hay en la lista números mayor que este.

Una dificultad implícita en el infinito fue visualizada en la categoría dos de la tabla adaptada de Radatz, correspondiente a la información espacial, cuando se le solicita al estudiante ubicar una fracción en la recta numérica o cuando se pide hallar la mitad de una longitud de medida no entera, para lo cual argumentan la imposibilidad de solucionarlo, desconociendo incluso la biyectividad entre los racionales con algunos puntos en la recta numérica y la continuidad en los números reales.

Desde Aristóteles ha existido controversia en torno al infinito y se ha manifestado ambigüedad en este concepto, presentándose la disyuntiva entre un único infinito o varios, lo que se ha repensado desde entonces convirtiéndose en uno de los más relevantes obstáculos epistemológicos.

El cero: En el análisis de las categorías planteadas para los errores se pudo notar la gran dificultad que plantea el cero para los estudiantes, y parece que solo lo asimilan como un único objeto matemático, el de cardinal, ya que ignoran o no comprenden el uso de este como cifra y ordinal. El sentido de este

número en ellos se ha perdido y no lo aceptan como la solución de un ejercicio o problema matemático.

Parece ser que lo excluyen del conjunto numérico de los racionales y siendo más precisos de los enteros también, esto se evidencia fácilmente en el desarrollo del pensamiento espacial, donde los estudiantes no se atreven a comenzar una medición desde cero.

Esto no debería parecernos tan extraño, si nos remitimos a la historia de los números, donde antiguas civilizaciones dejaban espacios vacíos para separar cifras, o utilizaban signos para indicar posiciones vacías que no eran vistas como números: Realmente no fue fácil la aceptación del cero como cifra en la cultura matemática, y mucho menos como número.

Por ejemplo los griegos, le daban una connotación de multiplicidad a los números, similar al concepto de cardinalidad que predomina en los estudiantes que hicieron parte de este estudio. Vemos pues un obstáculo de tipo epistemológico que posiblemente no solo ha incidido en los estudiantes, si no en los educadores que han tenido a lo largo de su vida escolar, y que acentúan otros obstáculos que también son de tipo didáctico y que fueron causantes de varios de los errores registrados desde la prueba diagnóstica hasta el instrumento final, como no entender que 0,33 es menor que 30,1 o pensar que 2,40 es mayor que 2,4.

Ahora bien, se concibe una interpretación que ya se había hecho antes, en la cual los estudiantes se quedaron relegados aritméticamente al número solo como natural, y en este contexto el cero supone no aparecer, de acuerdo al recorrido académico del estudiante.

Todas estas situaciones dificultan la comprensión del cero como objeto matemático llamado número por parte de los estudiantes, al igual que ha sucedido durante tantas discusiones que se dieron al respecto en la historia antigua y reciente de las matemáticas.

6.1.2 Relación ente las categorías de Radatz y posibles obstáculos epistemológicos

En el análisis realizado no se encontró relación predominante entre las categorías de dificultades propuestas por Radatz con los obstáculos de tipo epistemológico, por el contrario las diferentes categorías albergan errores provenientes de obstáculos de este tipo, y la prevalencia de una u otra dificultad se ve más bien influenciada por las temáticas abordadas durante las clases, es así como por ejemplo encontramos mayor frecuencia de ocurrencia de dificultades en la categoría 2, dificultades para obtener información espacial, cuando se abordan temáticas relacionadas con el aspecto geométrico.

6.2 Recomendaciones

Tomando como base de partida la clasificación y análisis de errores de la presente trabajo investigativo se propone dar continuidad a este e iniciarlo desde etapas escolares más tempranas, que permitan rastrear la evolución de las dificultades presentes en el aspecto numérico, ya que podría ser más evidente la persistencia de los errores y su evolución en los diferentes niveles académicos, a medida que se abordan los diversos conjuntos numéricos.

Se propone que el docente observe y registre permanente los errores en el aula como insumo para su análisis, que permita formular propuestas didácticas para su tratamiento y superación. A partir del

error como estrategia didáctica se sugiere planear actividades de clase encaminadas a que el estudiante identifique sus propios errores, empoderándose de su proceso de aprendizaje y tome los errores cometidos como parte normal de este y no como síntoma de fracaso.

La entrevista socrática puede convertirse en instrumento fundamental para uso del error en la estrategia didáctica ya propuesta, empleándola en todas sus fases, en donde el estudiante alcance a construir nuevo conocimiento a partir de los conocimientos previos, mediante los cuestionamientos y desafíos que proponga el docente.

Fundamentar la planeación y desarrollo de las estrategias didácticas llevadas al aula, en el proceso histórico de la construcción matemática, específicamente de los números, de tal manera que permita transmitir el conocimiento mitigando los obstáculos de tipo epistemológico y evitando en lo posible aquellos de tipo didáctico, visibilizando ante los estudiantes el proceso histórico que se ha llevado a cabo para la construcción de los conjuntos de racionales e irracionales, y como las dificultades y errores son parte normal del proceso de construcción del conocimiento.

7. Conclusiones

- La categorización hecha de los errores de acuerdo a la taxonomía de Radatz, nos muestra que los errores observados en el aula se pueden ubicar simultáneamente en varias de las categorías, lo que nos conduce a concluir que un mismo error puede ser causado por diferentes tipos de dificultades en el estudiante, de igual manera una dificultad específica puede ocasionar diferentes errores.
- El marco conceptual en el cual se basa el trabajo de investigación y los resultados obtenidos permiten determinar que los errores detectados provienen no sólo de obstáculos de tipo epistemológico, sino que además se encuentran inmersos en obstáculos de tipo didáctico, inherentes al proceso de la construcción histórica del número y a su transposición didáctica.
- Las dificultades manifiestas de los estudiantes en el aula y evidenciadas en los errores observados, dan cuenta de lo problemático que resulta el aprendizaje de los números racionales e irracionales, no como resultado de su incapacidad e ignorancia de los estudiantes, sino más bien como evidencia de posibles obstáculos rastreados de manera persistente a lo largo de la historia y por tal motivo considerados como de tipo epistemológico.
- El análisis realizado deja vislumbrar que para ambas instituciones educativas en las cuales se realiza el estudio, los obstáculos epistemológicos encontrados coinciden con la literatura rastreada, los cuales son: el cero, el infinito, los enteros negativos y los irracionales. En este estudio se concluye que los obstáculos referidos a los enteros negativos y los irracionales, trascienden a la ruptura que se da en el aprendizaje entre el paso de un conjunto numérico cualquiera a otro, y no exclusivamente a los obstáculos de tipo epistemológico en cada uno de estos conjuntos numéricos y que se encuentran ampliamente referidos en la literatura.
- A pesar de que los números irracionales son considerados como obstáculos de tipo epistemológico, las dificultades que se presentan con estos tienen además un componente de tipo didáctico puesto que no son de uso práctico para los estudiantes en su cotidianidad, por lo tanto, obvian este conjunto numérico.

Bibliografía

Abbate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Aguilón Valencino, D. (2013) *Acercamiento al concepto de completez de los números reales*. Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia.

Arenas Solá, C. (2007). *Los números: un poco de historia*. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona. Recuperado el 06 de Noviembre de 2015 de <http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/1323>.

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: aportes a una investigación didáctica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(3), 163-198.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Mexico, D.f: Siglo XXI.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Brousseau, G. (1986). *Theorisation des Phenomenes d'Enseignement des Mathematiques*. Bordeaux: Theses'Etat.

Brousseau, G. (1983), 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs* (pp. 41-63). Ottawa: CIRADE.

Brousseau, G. (1983), 'Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques', *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4(2), 165-198.

Kline, M. (1985). *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Madrid : Siglo XXI de España.

Castillo, M. J. C. (2002). Pitágoras y los números perfectos. *Ingeniería*, 6(2), 47-49.

Jurado Hurtado, F. M., & Londoño Cano, R. A. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Gagné, R. M., de la Orden Hoz, A., & Soler, A. G. (1987). *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid: Interamericana.

Gutiérrez, T. D. P. (2009). *Las Matemáticas a Lo Largo de la Historia: de la Prehistoria a la Antigua Grecia*. Madrid: Visión Libros.

Martín, M. D. C. C.(2009). *Los distintos sistemas de numeración*. Recuperado el 15 Julio de 2015 de: http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Número__24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (MEN). (2007). *Matemáticas, E. B. D. C. E.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Origen de los números (sf). Recuperado el 2 Enero de 2016 de <http://www.hiru.eus/matematicas/origen-de-los-numeros>

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics.* Vol 1 (1), 16-20.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 9, 163-172.

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas.* En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L., & Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico.* Universidad de Granada. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/518/>

Rico, L. (1992) *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática* Granada: Universidad de Granada.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista Ema, 4(2), 117-151.*

Romero, L. R., & Albaladejo, I. R. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 17(2), 259-272.*

Sánchez González, M. (2012). *Re-construyendo los números racionales.* Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia.

Sistemas de numeración. (sf). Recuperado el 2 de Enero de 2016 de [http://es.slideshare.net/guestd0eb0d08/sistemas-de-numeracion-clase.](http://es.slideshare.net/guestd0eb0d08/sistemas-de-numeracion-clase)

Anexos

Anexo 1

Test diagnóstico

INSTITUCIÓN EDUCATIVA IGNACIO BOTERO VALLEJO DEL RETIRO

TESTS DIAGNÓSTICO: CONOCIMIENTO INTUITIVO DE LOS NÚMEROS REALES

Nombre: _____ Grado _____ Fecha: _____

LEE CON ATENCIÓN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y ESCRIBE LA RESPUESTA PARA CADA UNA DE ELLAS. PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS NO DEBES EMPLEAR LA CALCULADORA. TAMPOCO DEBES SOLICITARLE AYUDA AL PROFESOR QUE TE ESTE ACOMPAÑANDO.

1. A continuación tenemos una lista de varios números

a) -3 b) $\frac{3}{2}$ c) 0,310 d) 0,4 e) 4,05 f) 30,1 g) 0,0450 h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $\frac{2}{3}$
j) -12 k) 0,33 l) $3,15^{-}$ m) π

El orden correcto de los números anteriores de menor a mayor es:

2. Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2

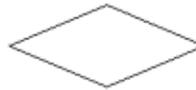
3. Escribe tres números racionales y tres irracionales

RACIONALES			
IRRACIONALES			

4. Representa $\frac{3}{4}$, en:

a. La recta numérica

b. En la figura:



c. En porcentaje

d. En forma decimal

5. a) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catetos mide 3 unidades y el otro 4 unidades.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.

OBSERVACIONES: Si tuvo dificultad para resolver alguno de los puntos, señale con una x el tipo o los tipos de dificultades que se le presentaron:

- 1) El enunciado del problema no era claro
- 2) No entendí lo que solicitaba el punto
- 3) No sabía que aplicar para hallar la solución
- 4) El tema no me lo habían explicado en el salón de clase
- 5) El tiempo no fue suficiente para resolver el problema

Si en el listado anterior, no aparece enunciado el tipo de dificultad que se le presentó, escríbala a continuación.

NOTA: LOS RESULTADOS DE ESTE CUESTIONARIO SE ANALIZARAN EN EL PROYECTO DE GRADO QUE VIENEN REALIZANDO LOS PROFESORES: BORIS ESCOBAR LUJAN Y ASTRID ESCOBAR LUJAN, EN EL MARCO DE LA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELÚN.

Anexo 2

Formato de entrevista personal

Nombre del entrevistado _____
Nivel: _____
Fecha: _____
Institución Educativa: _____

Bloque 1: Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este

- A. ¿Qué opinión te merece el test diagnóstico? (¿Cómo te pareció el test?, ¿Cómo te sentiste al responderlo?)
- B. Cuáles de las preguntas te parecieron de más fácil solución?, ¿por qué?
- C. ¿Dónde percibiste mayores dificultades?, ¿por qué?
- D. ¿Todos los temas del test, eran conocidos por ti?
- E. ¿Recordabas en su totalidad los temas allí abordados?

Bloque 2: Sobre el uso de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico

- A. Al mirar la lista de números que se dieron en el punto uno, ¿cuál fue tu estrategia para organizarlos de menor a mayor? ¿Por qué? ¿Harías algún cambio a tu respuesta?
- B. En el punto 3, en donde se pedían números racionales e irracionales, tenías algún criterio para determinar qué número escribir en cada clasificación. En caso de ser así ¿cuál fue?, ¿harías algún cambio a tu respuesta?
- C. ¿Podrías decirme porque representaste la fracción $\frac{3}{4}$ de esa manera en el punto 4? (sea como sea el que se haya respondido). ¿Harías algún cambio a tu respuesta?
- D. Para el punto 5. ¿Podrías explicarme, como solucionaste o intentaste solucionar este punto? , ¿Te sería necesario algún otro elemento para solucionarlo? ¿Harías algún cambio a tu respuesta?

Bloque 3: Preguntas control

- A. Si te pidieran resolver sólo una de las preguntas, ¿cuál seleccionarías?, ¿por qué?
- B. Si se te pide eliminar una de las preguntas del test ¿cuál eliminarías? ¿por qué?
- C. ¿Qué temas de los test d no recuerdas?

Anexo 4

Tablas de resultados generales prueba diagnostica

Pruebas 2014. I.E.Ignacio Botero Vallejo de El Retiro. Total test: 68

Pregunta	Sin respuesta	Incorrectas	Correctas
1	4	64	0
2	10	48	10
3	20	48	0
4 ^a	18	44	6
4b	26	17	25
4c	34	24	10
4d	36	25	7
5 ^a	43	6	19
5b	60	6	2
Observaciones marcadas en los cuestionarios			
Observación	Total		
1	5		
2	19		
3	31		
4	3		
5	0		

Pruebas 2015. I.E.Ignacio Botero Vallejo de El Retiro. Total test: 92

Pregunta	Sin respuesta	Incorrectas	Correctas
1	13	79	0
2	24	66	2
3	44	48	0
4 ^a	47	39	6
4b	40	15	37
4c	61	25	6
4d	69	21	2
5 ^a	83	9	0
5b	91	1	0
Observaciones marcadas en los cuestionarios			
Observación	Total		
1	4		
2	19		
3	46		
4	7		
5	2		

Pruebas 2014 I.E Villa del Socorro. Total test: 69 (25 en blanco)

Pregunta	Sin respuesta	Incorrectas	Correctas
1	29	40	0
2	26	14	29
3	54	15	0
4a	49	17	3
4b	43	17	9
4c	50	17	2
4d	53	12	4
5a	60	7	2
5b	64	5	0
Observaciones marcadas en los cuestionarios			
Observación	Total		
1	7		
2	19		
3	22		
4	2		
5	1		

Pruebas 2015. I.E. Villa del Socorro total test: 71(8 en blanco)

Pregunta	Sin respuesta	Incorrectas	Correctas
1	16	55	0
2	35	23	13
3	33	38	0
4a	45	26	0
4b	25	22	23
4c	40	27	4
4d	41	27	3
5a	62	9	0
5b	64	7	0
Observaciones marcadas en los cuestionarios			
Observación	Total		
1	7		
2	16		
3	27		
4	20		
5	0		

Total ambas instituciones-ambos años

(300 pruebas)

Pregunta	Sin Respuesta	Incorrectas	Correctas	%		
				Sin respuesta	Incorrectas	Correctas
1	62	238	0	20,67	79,33	0,00
2	95	151	54	31,67	50,33	18,00
3	151	149	0	50,33	49,67	0,00
4a	159	126	15	53,00	42,00	5,00
4b	134	71	94	44,67	23,67	31,33
4c	185	93	22	61,67	31,00	7,33
4d	199	85	16	66,33	28,33	5,33
5a	248	31	21	82,67	10,33	7,00
5b	279	19	2	93,00	6,33	0,67
Observaciones marcadas en los cuestionarios				0,00		
Observación	Total					
1	23			7,67		
2	73			24,33		
3	126			42,00		
4	32			10,67		
5	3			1,00		

Anexo 5

Sistematización de entrevistas y encuestas respectivas

Entrevista de Kevin (I.E Villa del Socorro)

CATEGORIZACION		TEXTO
		BLOQUE UNO- AMBIENTACION
		Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este test.
	1	I: buenos días Kevin, cómo estás?
	2	E: Bien, gracias
	3	I: Me dices tu nombre completo
	4	E: Kevin Andrey Serna Urna
	5	I: Y en qué grado estás?
	6	E: diez uno
	7	I: en tus manos tienes un test. ¿Cuándo hicimos ese test?
Reconocimiento de falencias 17-19	8	E: El 19 de Enero
	9	I: Aja, de este año cierto?
	10	E: si
	11	I: Tú fuiste promovido. Cuando hiciste ese test estabas en
	12	noveno, cierto?
	13	E: Correcto
Conocimientos adquiridos 23 -24 y 26	14	I: Listo. Yo quiero que me cuentes, mirando el test, qué
	15	opinión te merece?, qué comentario?, no se el grado de
	16	dificultad, todo lo que tengas que decirme acerca de él.
	17	E: Lo que pasó con el test es de conocimientos previos, pero
	18	cuando lo vi, el test me di cuenta de que uno pasa y uno pasa,
	19	y a uno muchas veces se le quedan muchos huecos por ahí.
	20	I: aja. Bueno. En ese test hay diferentes tipos de preguntas.
	21	Todo lo que usted está viendo ahí en el test, usted lo vió
	22	alguna vez, ò hay cosas que usted nunca se las han enseñado?
	23	E: La verdad, es que a mí nunca me enseñaron sobre los
	24	números racionales y los números irracionales.
	25	I: si
	26	E: pero de resto todo si lo vi.
Reconocimiento de falencias 27- 34	27	I: aja, entonces que pasó con ese punto en donde te pedían
	28	números racionales y números irracionales
	29	E: No lo respondí.
	30	I: lo dejaste en blanco?
	31	E: ajam
	32	I: aja, y en este momento estás igual, ò ya la podrías
	33	responder?
	34	E: eeehh.... No, estoy igual

		BLOQUE DOS- ACERCA DE LAS RESPUESTAS
		Sobre el uso de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico
		PRIMER PUNTO
Estrategia para ordenar números 40-43	35	I: a Bueno. Listo, vamos a mirar las estrategias que tu tuviste
	36	para resolver las preguntas. En el primer punto te decían
	37	organízalos de mayor a menor, tu hiciste una lista ahí de
	38	números, cuál fue tu estrategia para escoger cuál era el menor
	39	y como seguir con el número siguiente
	40	E: Mirando haber cuanto le falta a los números para igualarlos
	41	a uno, en los que estaban en cero coma y algo, y los otros
	42	según el orden de uno, dos tres cuatro.

Estrategia para ordenar números 43-48 52 54-56 60	43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56	I: entonces por ejemplo, cuál fue el primer número que pusiste?...en esa lista E: menos doce I: por qué? E: por que.... Menos doce..es un número negativo y está muy allá del uno en la recta numérica I: ahh, listo, todos los números que no fueron enteros, si no que fueron decimales, quedaron antes del uno, ò no?..... E: no, no quedaron antes del uno. I: Cuáles son los que quedan antes del uno? E: El menos dos, el menos tres, el cero coma treientos diez, el cero coma treinta y tres, el cero coma cuatrocientos cincuenta, el cero coma cuatro.
Reconocimiento de falencias 63-65	57 58 59 60 61 62	I: Venga, hablemos de estos dos números.... Usted tiene el cero coma cero cuatrocientos cincuenta y después tiene el cero coma cuatro, usted cómo sabe cuál es menor que otro? E: porque a cuatro sólo le faltan seis para llegar a uno, mientras que a cuatrocientos cincuenta le faltaaan..... quinientos cincuenta.
Estrategia para ordenar números 70- 71	63 64 65 66 67	I: y por qué cero treinta y tres, está antes que cero coma cero cuatrocientos cincuenta? E: porque me equivoque. I: a, te equivocaste ahí? E: si
Reconocimiento de falencias 76-78	68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79	I: y en ese momento no lo habías visto? E: No I: bueno, y en dónde ubicaste pi? E: después del tres coma quince. I: aja, y el último número que colocaste cuál fue?..... léemelo E: Fueee tres coma cuatro por diez a la menos uno. I: Por qué lo ubicaste allí? Al final? E: Porque diez coma cuatro por diez daaa treinta comaa algo, pero a la menos uno..... no sé porque a la menos uno, I: no sabes que significa ese diez a la menos uno ahí? E: noo I: bueno.
Error no reconocido como tal 83-85	80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90	----- PUNTO DOS I: pasemos al punto donde también nos dicen que nos dicen que ubiquemos de mayor a menor, pero ya me dicen que tiene que ser entre menos dos y dos, léeme como los ubicaste. E: menos dos, menos uno, cero, uno y dos. I: esos números están todos entre menos dos y dos? E: si I: si. Y hay algún otro número que se pueda escribir ahí ò no? E: los decimales.....infinitos I: si y por qué no escribiste ninguno? E: porque estaba escribiendo sólo números enteros. I: ahhh ya, eso está bien. -----

		PUNTO TRES
	91	I: Bueno, el tercero lo dejaste en blanco y ya me explicaste
	92	porque.

Conversión de registros 96-97 105 110 114	93	PUNTO CUATRO
	94	I: En el cuarto punto nos piden representar tres cuartos de
	95	diferentes manera, explícame la estrategia para representarlos
	96	en la recta numérica
	97	E: Me están pidiendo tres cuartos algún número, entonces yo
	98	ese número lo divido en cuatro y tomo tres.
	99	I: aja, pero cuál número?, cuál número lo divides en cuatro?
	100	E: puede ser del cero al uno, del uno al dos.....
	101	I: en cualquier número?
	102	E: si
	103	I: cómo lo ubicaste en la figura?
Conocimientos parcelados 118	104	E: aquí está.. a en la figura?
	105	I; si
	106	E: la dividí en cuatro y pinté tres
	107	I: listo. En porcentaje?
Modificación de saberes 108-118	108	E: seríaaaa.. setenta y cinco porciento
	109	I: y cómo hiciste eso?
	110	E: porque si cien se divide en cuatro da veinticinco y
	111	veinticinco por tres es setenta y cinco.
	112	I: pero en la hojita no tienes así
	113	E: no, pero ya sí
	114	I: Listo. Y en donde dice en forma decimal
	115	E: sería cero coma setenta y cinco
	116	I: y en la hojita tampoco lo tienes así
	117	E: no
	118	I: y ya por qué sabes?
	119	E: por la clase de estadística
		I: ah listo, eso está muy bien

		PUNTO CINCO
Reconocimiento de las falencias 133 133-138	120	I: y en los dos últimos puntos En el quinto punto hay a y b,
	121	hablan del teorema de Pitágoras, qué hiciste ahí para
	122	resolverlos?
	123	E: me dice: un triángulo rectángulo donde uno de los catetos
	124	mide 3 unidades y el otro 4, entonces si la hipotenusa al
	125	cuadrado es la suma de los catetos al cuadrado, tengo que
	126	elegir este tres al cuadrado más este cuatro al cuadrado y
	127	sumar...
	128	I: entonces el resultado ahí cuanto te dio?
	129	E: veinticinco
	130	I: aja. Y en el punto b', que te piden utilizar el teorema de
	131	Pitágoras para hallar la diagonal de un cuadrado de lado de
	132	una unidad
	133	E: no, no sé
	134	I: ni idea?
	135	E: no
	136	I: por qué te dio ese más dificultad que el anterior?
	137	E: Porque no sé qué es unaaaa, una diagonal

	138	I: ahhh, por eso da dificultad. Listo
		BLOQUE TRES- PREGUNTAS CONTROL
Conocimientos parcelados 137	139	I: si yo te dijera, te voy a calificar ese test, dígame qué punto
	140	de esos no lo califico y lo saco
	141	E: bueno.....eel tres , el de los número irracionales y el cinco
	142	I: era uno, conchudo..... y si te digo yo te voy a calificar de
	143	ese test uno de los puntos, cuál escogerías?
	144	E: el dos
	145	I: qué dice el dos?
Reconocimiento de falencias	146	E: Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos
141	147	entre menos dos y dos.
	148	I: ya, y si tu pudieras cambiar alguna respuesta de ahí, lo
	149	harías?
	150	E: no
	151	I: no cambiarías ninguna respuesta?, todo lo dejarías como
	152	está?
Error no reconocido como tal	153	E: si
146-147	154	I: cuando tu resolviste esto, estabas completamente seguro de
150-153	155	que lo hiciste bien? ò tenías dudas?
	156	E: si tenía dudas
	157	I: en cuál?
	158	E: en los números irracionales, aquí en el cuarto de representa
Reconocimiento de falencias	159	tres cuartos en la recta, en la figura, en el porcentaje, en el
154-160	160	decimal.
168	161	I: las preguntas como están ahí escritas, redactadas son
	162	entendible?
	163	E: si
	164	I: listo, entonces lo que no hiciste, no lo hiciste por qué?
	165	E: (silencio)
	166	I: Lo que no llenaste, lo que no contestaste está entendible lo
	167	que hay que hacer. Por qué no lo llenaste?
	168	E: a púes por que no sabía
	169	I: a listo
	170	E: o no había caído en cuenta ò no me acordaba
	171	I: listo, bueno Kevin yo te agradezco mucho, Feliz día
	172	E: Chao

OK

INSTITUCION EDUCATIVA VILLA DEL SOCORRO
TESTS DIAGNÓSTICO: CONOCIMIENTO INTUITIVO DE LOS NÚMEROS REALES

Nombre: Kevin Andrey Jorja Jorja Grado 9-2 Fecha: Enero 19

LEE CON ATENCIÓN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y ESCRIBE LA RESPUESTA PARA CADA UNA DE ELLAS. PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS NO DEBES EMPLEAR LA CALCULADORA. TAMPOCO DEBES SOLICITARLE AYUDA AL PROFESOR QUE TE ESTE ACOMPAÑANDO.

1. A continuación tenemos una lista de varios números

- a) -3 b) $3/2$ c) 0,310 d) 0,4 e) $4,05 \times 10^2$ f) 30,1 g) 0,0450 h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $2/3$
j) -12 k) 0,33 l) 3,15 m) π

El orden correcto de los números anteriores de menor a mayor es:

-12 -3 0,310 0,33 0,0450 0,4 2/3 3,15 π 3/2 4,05 30,1 $3,4 \times 10^{-1}$

2. Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2

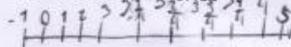
-2, -1, 0, 1, 2

3. Escribe tres números racionales y tres irracionales

RACIONALES			
IRRACIONALES			

4. Representa $3/4$, en:

a. La recta numérica



b. En la figura:



c. En porcentaje



d. En forma decimal

$3/4$

5. a) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catetos mide 3 unidades y el otro 4 unidades.

$$H = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.

OBSERVACIONES: Si tuvo dificultad para resolver alguno de los puntos, señale con una x el tipo o los tipos de dificultades que se le presentaron:

- 1) El enunciado del problema no era claro
- 2) No entendí lo que solicitaba el punto
- 3) No sabía que aplicar para hallar la solución
- 4) El tema no me lo habían explicado en el salón de clase (números racionales e irracionales)
- 5) El tiempo no fue suficiente para resolver el problema

Si en el listado anterior, no aparece enunciado el tipo de dificultad que se le presentó, escríbala a continuación.

NOTA: LOS RESULTADOS DE ESTE CUESTIONARIO SE ANALIZARAN EN EL PROYECTO DE GRADO QUE VIENEN REALIZANDO LOS PROFESORES...

Entrevista Willinton (I.E Villa del Socorro)

CATEGORIZACION		TEXTO
		BLOQUE UNO- AMBIENTACION
		Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este test.
	1	I: Hola Willinton, cómo estás?
	2	E: Muy bien, y usted?
	3	I: Muy bien. Dime tu nombre completo
Reconocimiento de falencias	4	E: Mi nombre es Willinton Opina López
14-18	5	I: y... de que grado eres?
18-19	6	E: Yo soy de 10º5
	7	I: En qué grado estabas cuando te hicimos ese test?
	8	E: Yo estaba en 9º3
	9	I: Estabas en 9º3, y la fecha de hoy es?
	10	E: 16 de Abril
	11	I: Bueno, Tu tienes en tus manos el test que hiciste el año pasado, cierto?
	12	E: Si señora
	13	I: Bueno, cuénteme cómo le pareció ese test, que opina, qué tiene que decir de él?
	14	E: Púes el test es un poquito duro, pero lo pone a uno a pensar y a recordar los conceptos que nos enseñaron.
Conocimientos adquiridos	15	I: Si. Te pareció que tenía un grado de dificultad altico?
20-22	16	E: si, si algunos puntos.
24-29	17	I: ahh, bueno. Cuál de esos puntos tu dices este es el más fácil de todos?
	18	E: El punto es: representa tres cuartos en una figura, el más fácil de todos.
Reconocimiento de falencias	19	I: Si, por qué le pareció más fácil que todos?
30-35	20	E: Porque eso a uno se lo vienen enseñando desde primaria y lo recuerda en cada grado, entonces es fácil por eso.
	21	I: Es un tema que ya se ha trabajado mucho en diferentes grados?
Conocimientos adquiridos	22	E: si
37-39	23	I: ahh, bueno y, cuál es el que mayor dificultad te causo?
	24	E: el del teorema de Pitágoras, el de ubicar dizque un lado en el cuadrado de cada unidad, me pareció duro, porque ese tema apenas nos lo están explicando bien en este año, púes el año pasado nos lo explicaron, pero este año con más Profundidad, entonces por eso.
	25	I: ya, entonces por eso la dificultad. Todos los temas que usted vio en ese test los había visto, ò hay cosas que usted nunca había visto?
	26	E: No, si. Todos los habíamos visto.
	27	
	28	
	29	
	30	
	31	
	32	
	33	
	34	
	35	
	36	
	37	
	38	
	39	
		BLOQUE DOS- ACERCA DE LAS RESPUESTAS
		Sobre el uso de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico
		PUNTO UNO
	40	I: Bueno vamos a mirar los puntos que desarrollaste. En el primer punto se te pedía que organizaras los números de menor a mayor y se te daba una lista de números; Tu hiciste
	41	
	42	

Estrategia para ordenar números 46-48 69-72	43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86	<p>ese punto?</p> <p>E: si</p> <p>I: Cómo hiciste para organizarlos?</p> <p>E: púes primero los números negativos</p> <p>I: si</p> <p>E: después los decimales y después los enteros</p> <p>I: si, y cómo haces para saber cuál número negativo pones como menor que otro?, cómo haces para saber eso?</p> <p>E: mmm..... Eeehhhh</p> <p>I: Hay varios número negativos si ò no, y usted los debe organizar de menor a mayor, entonces usted como dijo, bueno cuál voy a poner de menor de todos los negativos.</p> <p>E: púes aquí en el punto, sólo hay un número negativo.....púes sólo hay dos número negativos pero..... este número es menor que el otro(señalando en la hoja)</p> <p>I: cuales son los número negativos que hay ahí?</p> <p>E: menos tres y menos doce, entonces el primero es el menos tres, porque el menos tres es más pequeño que el menos doce.</p> <p>I: Bueno, tu dijiste que luego ubicabas todos los números decimales?</p> <p>E: si</p> <p>I: si, y hay varios número decimales?</p> <p>E: si, el cero coma trecientos diez, el cero coma cuatro.. el cuatro cero cinco..., el treinta punto uno.</p> <p>I: entonces como hiciste para saber cuál de esos números...</p> <p>E: pues primero los que empiezan en cero, púes todo los que son así, cero coma cuatro, después los que van de número entero decimal.....púes cuatro coma algo y después los que son enteros ò por ejemplo el número pi</p> <p>I: si</p> <p>E: que de este punto, es el decimal más grande que hay, púes...</p> <p>I: de todos, de todos esos puntos el más grande es el número pi?</p> <p>E: si</p> <p>I: ahh bueno, el mayor de todos. Y cómo hiciste para ubicar ese que dice tres coma cuatro por diez a la menos uno.</p> <p>E: diez a la cuatro por diez a la menos unooo..... Haa, no me acuerdo como hice eso....</p> <p>I: no te acuerdas? Y el dos tercios, como hacía uno para ubicar ese dos tercios?</p> <p>E: uno divide dos entre tres y se multiplica por cien y le da un número decimal</p>
Error no reconocido 72-78 83-86	87 88 89 90 91 92	<p>-----</p> <p>PUNTO DOS</p> <p>I: bueno, listo. Y en el punto dos te dicen escribe cinco números de menor a mayor, comprendidos entre menos y dos, cómo los ubicaste?, qué números cogiste?</p> <p>E: púes yo escogí el menos dos primero, el cero, el uno, el uno punto veinticinco y el dos</p> <p>I: y para ubicarlos hiciste de la misma manera como hiciste</p>

Sistema referencial 94-97	93 94 94 95 97	arriba, ¿cambió en algo? E: No, es casi lo mismo porque uno empieza en un número negativo y termina en un número entero, entonces los números que están entre los negativos y los enteros que son púes los decimales y todo eso, van púes entre ellos dos.
Error no reconocido como tal 101-105	98 99 100 101 102 103 104 105	PUNTO TRES I: ahh, ya bueno. Hay una tablita en el punto tres en donde te hablan de los números racionales e irracionales, tu llenaste esa tablita, cómo hiciste para llenarla? E: púes los números racionales son los que tienen raíz ò los que un número multiplicado por sí mismo da, yo en los números racionales puse el doce, el seis y el ocho y los irracionales son los que no tienen raíz, el menos uno el cero y el uno.
Reconocimiento de falencias 114-118	106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118	I: En los irracionales, tú me dijiste que son los números que multiplicados un número por ese número y tu pusiste el doce, entonces por ejemplo cual es la raíz cuadrada de doce? E: la raíz cuadrada de doce.... I: o la raíz cuadrada de ocho E: de ocho... I: no? E: no I: Bueno, tu como haces para saber si un número tiene ò no tiene raíz? E: (silencio) I: no sabes? E: no sé
Error no reconocido 119-124	119 120 121 122 123 124	PUNTO CUATRO I: No sabes, bueno. Listo, vamos a pasar al de tres cuartos le decían ubique tres cuartos en la recta numérica, en la figura, en el porcentaje y en la forma decimal. Tu todos los hiciste, cierto? Explicame como lo ubicaste en la recta numérica? E: En la recta numérica, hice púes la recta numérica y con una rayita uní el tres y el cuatro y así mismo unidos al cero.
Sistema referencial 123-130	125 126 127 128	I: Y por qué al cero? E: púes porque es el punto medio y púes, del cero al cuatro hay cuatro espacios I: si
Conocimientos parcelados 135	129 130 131 132 133	E: entonces como son tres cuartos, perdón lo marque del cero al tres, tres espacios I: si E: y después esa misma raya lo puse hasta el cuatro, por ser tres cuartos; púes así lo hice yo
Conversión de registros 134-138	134 135 136 137 138 139 140	I: bueno, en la figurita como lo representaste E: Hice un, cómo se llama esa figura?..... es una.....púes hice un.. en la figura lo dividí en dos rayas, y así meda tres espacios en una misma figura, entonces ya.. tres cuartos, púes así. I: Bueno, la figura está dividida en tres partes.. E: si I: Las tres partes son de igual tamaño?

Error no reconocido como tal 135-138 145-151	141	E: no	
	142	I: bueno, por eso salió el tres y el cuarto?, porque son tres cuartos.	
	143		
	144	E: Tres cuartos.....	
	145	I: No sabes?, bueno, cómo hiciste para hacerlo en porcentaje?	
	146	E: Dividí el tres sobre el cuatro, y lo que me dió lo multiplique por cien	
	147		
	148	I: aja y en decimal?	
	149	E: La división de esos dos	
	150	I: Sin multiplicar por el cien por lo que veo en la hojita, cierto?	
	151	E: si	
	<hr/>		
			PUNTO CINCO
		152	I: ah, bueno. En el punto cinco te pedían que aplicaras el teorema de Pitágoras; tu hiciste ese punto?
		153	
	154	E: si	
	155	I: si, y le hallaste la solución	
	156	E: si	
	157	I: entonces, en el primero qué te preguntaban?	
	158	E: Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catemos mide 3 y el otro mide 4. Púes la hipotenusa es ..es	
	159	púes, cateto, cateto más cateto eso creo que es hipotenusa...	
	160	púes yo sume el cuatro y el tres y eso me da el lado de la hipotenusa	
	161		
	162		
Reconocimiento de falencias 164-165 171-174 176-179 187-192	163	I: y el b?, que pasó?	
	164	E: y el b, no sé, púes eso me enredó.	
	165	I: te enredaste en ese punto?	
	166	E: si, aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.	
	167	I: qué te enredó en ese punto?	
	168	E: me enredó eso que dizque diagonal de un cuadrado de lado de una unidad, púes eso...	
	169		
	170	I: no entendiste, no entendiste que te estaban diciendo?	
	171	E: no, mejor no lo hice	
	172		
	173		
	174		
		BLOQUE TRES- PREGUNTAS CONTROL	
Reconocimiento de falencias 175-183	175	I: ah bueno pues, si te... si yo te dijera bueno cambia alguna de las respuestas usted cambiaría alguna ò las dejaría igual?	
	176	E: no, cambiaría muchas	
	177	I: si?	
Error no reconocido 181-185	178	E: por ejemplo cambiaría la de la figura	
	179	I: si, cambiarías la de la figura. Qué le corregirías?	
	180	E: la de la figura para uno hacer tres cuartos.... púes haría creo que otras dos figuras	
Reconocimiento de falencias 186-192	181	I: si	
	182	E: y en esas las dividiría en cuatro partes y así me quedarían tres cuartos.	
	183	I: Bueno, alguna otra cambiarías?	
	184	E: cambiaría los número racionales también	
	185	I: si, por qué?, por qué decidió cambiarlo?	
	186		
	187		
	188		

	189	E: creo que por ejemplo el seis no tiene raíz.
	190	I: aja, por qué te diste cuenta que los números que escribiste
	191	ahí no tienen raíz?
	192	E: no tienen raíz
		Preguntas control
	193	I: si yo te dijera...., tu sabes que esto no tiene nota, pero si yo
	194	te dijera yo te voy a calificar, escoge un punto, cuál harías?
	195	E: el de la hipotenusa, el del teorema de Pitágoras.
	196	I: ese es el que harías?
	197	E: si
	198	I: y si yo te dijera, bueno te voy a calificar ese test, pero quite
	199	un punto, el que quiera sáquelo de ahí
	200	E: quitaría en el punto b del cinco, el de hallar el lado diagonal
	201	I: el de la diagonal
	202	E: ah, listo. En las observaciones, hay un espacio para
Error no reconocido como tal 193-195	203	observaciones en donde se seleccionó de acuerdo a como
	204	usted se sintió en el test, porque lo hizo, porque no hizo las
	205	preguntas, tu cuáles seleccionaste?
	206	I: seleccione la número dos que dice: "no entendió lo que
	207	solicitaba el punto", y el número tres: "no sabía que aplicar
Reconocimiento de falencias 200-201 218-220	208	para hallar la solución"
	209	I: ajmmm, y sigues pensando lo mismo?
	210	E: si
	211	I: bueno, cuál no entendiste lo que solicitaba el punto?
	212	E: el punto b
	213	I: el punto b del cinco
	214	E: el de hallar una diagonal de un cuadrado de lado de una
	215	unidad
	216	I: ah, ya. Y en donde no sabías que aplicar para hallar la
	217	solución?,
	218	E: en donde no sabía que aplicar?, en ...en el punto b del
	219	cuatro, tres cuartos en la figura, eso se me olvidó en el
	220	momento pero ya
	221	I: Ya, ya te acordaste. A listo púes, yo te agradezco mucho
	222	Willinton. Feliz día
	223	E: Muchas gracias

INSTITUCION EDUCATIVA VILLA DEL SOCORRO
TESTS DIAGNÓSTICO: CONOCIMIENTO INTUITIVO DE LOS NÚMEROS REALES

Nombre: WILLINTON OSPINA LÓPEZ Grado 9º 3 Fecha: 12/11/14

LEE CON ATENCIÓN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y ESCRIBE LA RESPUESTA PARA CADA UNA DE ELLAS. PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS NO DEBES EMPLEAR LA CALCULADORA. TAMPOCO DEBES SOLICITARLE AYUDA AL PROFESOR QUE TE ESTE ACOMPAÑANDO.

1. A continuación tenemos una lista de varios números

a) -3 b) $\frac{3}{2}$ c) 0,310 d) 0,4 e) 4,05 f) 30,1 g) 0,0450 h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $\frac{2}{3}$
j) -12 k) 0,33 l) 3,15 m) π

El orden correcto de los números anteriores de menor a mayor es:

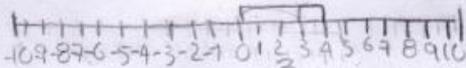
2. Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2

3. Escribe tres números racionales y tres irracionales

RACIONALES	12	6	8
IRRACIONALES	-1	0	1

4. Representa $\frac{3}{4}$, en:

a. La recta numérica



b. En la figura:



c. En porcentaje $\frac{3}{4} = 0,75 \times 100 = 75\%$ d. En forma decimal 0,75

5. a) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catetos mide 3 unidades y el otro 4 unidades.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.

OBSERVACIONES: Si tuvo dificultad para resolver alguno de los puntos, señale con una x el tipo o los tipos de dificultades que se le presentaron:

- 1) El enunciado del problema no era claro
- No entendí lo que solicitaba el punto
- No sabía que aplicar para hallar la solución
- 4) El tema no me lo habían explicado en el salón de clase
- 5) El tiempo no fue suficiente para resolver el problema

Si en el listado anterior, no aparece enunciado el tipo de dificultad que se le presentó, escríbala a continuación.

No entendí algunas de las operaciones ni como aplicarlas

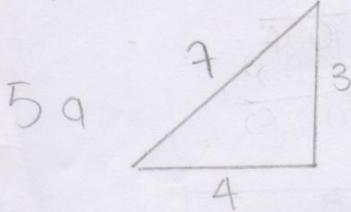
NOTA: LOS RESULTADOS DE ESTE CUESTIONARIO SE ANALIZARAN EN EL PROYECTO DE GRADO QUE VIENEN REALIZANDO LOS PROFESORES: BORIS ESCOBAR LUJAN Y ASTRID ESCOBAR LUJAN. EN

1-

$3, -0,30, 0,5, 0,1, 0,450, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 1,5, 4,15, 30, 1, \pi$
 $-3, -12, -340, 0,33, 0,310, 0,4, 0,0450, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3,15, 4,15, 30, 1, \pi$

2- $-2, 0, 1, 1, 1, 25, 2$

4- $30 \overline{) 4} = 0,133$
 $2 \ 0,7$



b - nose

Entrevista Juan Pablo Muñoz. Grado 9º2. Año 2015

CATEGORIZACION	LINEA	TEXTO
		BLOQUE UNO- AMBIENTACION Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este test.
Reconocimiento de falencias 11-12	1	D: Acá me encuentro con el estudiante Juan Pablo Muñoz, él es del grado 92, muy amablemente nos va a colaborar entonces con esta entrevista, el presento la prueba diagnóstica a inicios de este año, y bueno Juan Pablo, no quiero que te atemorices por que en ningún momento esto va a traer consecuencias en lo académico, simplemente es para ver cómo te sentiste ese día presentando la prueba.
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	¿Tú cómo te sentiste ese día que presentaste la prueba?
	9	E: No, Pues yo relajado, entendiendo el tema
Conocimientos adquiridos 11-12	10	D: ¿Te pareció fácil o difícil? La verdad?
	11	E: en algunos si me pareció difícil, pero al menos lo solucione y fui capaz.
	12	

		BLOQUE DOS- ACERCA DE LAS RESPUESTAS
		PUNTO UNO
Sistema referencial 19-36	13	D: Bueno, bien, quiero que lo mires bien y recuerdes. Por ejemplo en el primer punto nos pedían ordenar estos valores, estos números de menor a mayor. ¿Cierto?. Tú, ¿Qué estrategia utilizaste para ordenarlos?
	14	
	15	
	16	
	17	E: no, yo mire, yo observe todos los números que habían y fui organizando del menor al mayor.
	18	
Error no reconocido como tal 19-22, 23-25, 26-36	19	D: Aja, por ejemplo veo que el primero que pusiste fue el K, o sea 0,33. ¿Consideras que esta correcto o le harías algún cambio? ¿Crees que ese es el menor?
	20	
	21	
	22	E: Si yo digo que ese es el menor.
	23	D: Aja y luego pusiste la D 0,4. Miremos a ver dónde pusiste el número Pi (m), lo pusiste al final, ¿Por qué?
Asociaciones incorrectas 23-25	24	
	25	E: Porque es muy largo, sii... es como más grande que los otros
	26	D: Ya y donde pusiste los negativos, miremos a ver por ejemplo dónde pusiste la J, la pusiste en un lugar intermedio ¿porque?
	27	
	28	
	29	E: Por quee..
	30	D: ¿La dejarías ahí? O ¿Harías algún cambio?
	31	E: No, yo la dejaría ahí
	32	D: Bueno. ¿Por qué la dejarías ahí?
	33	E: Porque yo digo que los, que por ejemplo la C que es 0,310 es menor que -12.
	34	
	35	D: ¿Por qué piensas que es menor?
	36	E: Porque se ve como más pequeño, pues...

		PUNTO DOS
Reconocimiento de falencias 37-45	37	D: Listo, en el segundo punto, te pedían escribir 5 números de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2. Tú pusiste -3, -4, -5, -6, -7. ¿Por qué piensas que esos números están entre -2 y 2?
	38	
	39	
	40	
	41	

	42	E: ahí si no se.
	43	D: ¿lo dejarías así o le harías algún cambio?
	44	E: no esa si no se, esa yo la dejaría así
	45	D: ¿sí? E: si
	46	PUNTO TRES
Asociaciones incorrectas 46-51	47	D: Bueno, Juan Pablo, en los racionales pusiste el número 2, 4
	48	y 6. En los irracionales pusiste el 3, 6, 9. Para ti que sería
	49	entonces.....o sea, ¿Por qué los organizaste de esta manera
	50	más bien?
	51	E: los racionales, pues yo entendí que eran como los números pares y los irracionales los impares.
	52	PUNTO CUATRO
Conversión de registros 52-81	53	D: Ok, en el cuarto punto te pedían representar tres cuartos,
	54	en la A lo representaste ¿entre el tres y el cuatro? ¿Cierto?
	55	E: Aja
	56	D: ¿Por qué?
Asociaciones incorrectas 56-57	57	E: porque nos pidieron que lo dijéramos en recta numérica,
	58	entonces se tendría que coger del cero al tres y del cero al
	59	cuatro.
	60	D: ¿la dejarías así? o ¿le harías algún cambio?
	61	E: No, la dejaría así
Error no reconocido como tal 59-60	62	D: Bueno, y veo que aquí hiciste dos figuras, en la gráfica, ¿Por
	63	qué? En la b
	64	E: hice 2 gráficas en forma de cuadros, en una hice 4 cuadritos,
	65	en la otra también pero se dejaba uno en blanco.
	66	D: ¿O sea que esta representa el tres y este el cuatro? ¿O qué?
	67	E: Aja, si
	68	D: ¿sí?
	69	E: si
	70	D: Ya, listo. Y aquí me pusiste en porcentaje, en porcentaje lo
	71	hiciste y ¿Te dio el 70%?
	72	E: Si
Reconocimiento de falencias 72-83	73	D: ¿Ó 3.4?
	74	D: ¿70% ó 3.4?
	75	E: 3.4, ah no, espere
	76	D: ¿O sea al final te dio 70 o qué?
	77	E: pues no, pero esta malo
	78	D: ¿Esta malo?
	79	E: Sí
	80	D: aja. ¿Por qué? ¿Por qué piensas que esta malo?
	81	E: porque tres coma cuatro por cien es como correrle la
	82	comaaa...
	83	D: ¿Crees que te equivocaste ahí en la multiplicación?
		E: Eso
	84	PUNTO CINCO
Reconocimiento de falencias 84-88	85	D: Aja, bueno....y estos últimos del teorema de Pitágoras, veo
	86	que no los resolviste.
	87	E: ¡Ah..No!

	88	D: ¿Por qué?
	89	E: No lo entendí, no fui capaz

		BLOQUE TRES- PREGUNTAS CONTROL
	90	D: ¿Serías capaz de hacer alguno de esos? ¿Tú que crees?
	90	¿Hoy en día ya serías capaz de hacer alguno de esos puntos del
	91	teorema de Pitágoras?
	92	E: Si, ya si
	93	D: ¿Sí?
	94	E: Si, ya me lo han enseñado más, y ya lo entiendo mejor.
	95	D: Bueno, Juan Pablo muchas gracias, eso es todo
	96	E: Bueno, gracias.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA IGNACIO BOTERO VALLEJO DEL RETIRO

TESTS DIAGNÓSTICO: CONOCIMIENTO INTUITIVO DE LOS NÚMEROS REALES

Nombre: Juan pablo Muñoz Morales Grado 9º 2 Fecha: 21/01/15

LEE CON ATENCIÓN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y ESCRIBE LA RESPUESTA PARA CADA UNA DE ELLAS. PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS NO DEBES EMPLEAR LA CALCULADORA. TAMPOCO DEBES SOLICITARLE AYUDA AL PROFESOR QUE TE ESTE ACOMPAÑANDO.

1. A continuación tenemos una lista de varios números

- a) -3 b) $3/2$ c) 0,310 d) 0,4 e) 4,05 f) 30,1 g) 0,0450 h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $2/3$
 j) -12 k) 0,33 l) 3,15 m) π

El orden correcto de los números anteriores de menor a mayor es: K, d, c, g, A, j, I, b, L, F, e, H, m

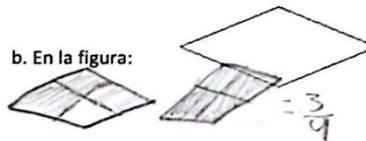
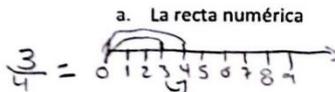
2. Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2

-3, -4, -5, -6, -7.

3. Escribe tres números racionales y tres irracionales

RACIONALES	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>6</u>
IRRACIONALES	<u>3</u>	<u>6</u>	<u>9</u>

4. Representa $3/4$, en:



c. En porcentaje $3,4 \times 100 = 340\%$
 $3/4 = 75\%$

d. En forma decimal

5. a) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catetos mide 3 unidades y el otro 4 unidades.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.

OBSERVACIONES: Si tuvo dificultad para resolver alguno de los puntos, señale con una x el tipo o los tipos de dificultades que se le presentaron:

- 1) El enunciado del problema no era claro
- 2) No entendí lo que solicitaba el punto
- 3) No sabía que aplicar para hallar la solución
- 4) El tema no me lo habían explicado en el salón de clase
- 5) El tiempo no fue suficiente para resolver el problema

Si en el listado anterior, no aparece enunciado el tipo de dificultad que se le presentó, escríbala a continuación.

NOTA: LOS RESULTADOS DE ESTE CUESTIONARIO SE ANALIZARAN EN EL PROYECTO DE GRADO QUE VIENEN REALIZANDO LOS PROFESORES: BORIS ESCOBAR LUJAN Y ASTRID ESCOBAR LUJAN, EN EL MARCO DE LA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN.

Entrevista Smith Paola Mejía. Grado 9º1. Año 2015. I.E.I.B.V

CATEGORIZACION	LINEA	TEXTO
		BLOQUE UNO- AMBIENTACION Sobre el test y la impresión del estudiante acerca de este test.
Reconocimiento de falencias 5-14	1	D: Bueno aquí estamos con la estudiante Smith Paola Mejía,
	2	qué nos va a colaborar con la investigación. Smith la idea es
	3	que te sientas en confianza, esto es una investigación en
	4	ningún momento pues, esto va a afectar tu parte académica, y
	5	primero quisiera saber ¿cómo te sentiste el día que
	6	presentaste el test? Mira el test ahí, ¿lo recuerdas?
	7	E: sí pues la verdad fue algo difícil, porque habían muchos
	8	temas de los que no me acordaba y de los que tal vez vi, pero o
	9	sea no le puse atención a la clase, o algo así.
	10	D: muy bien. ¿o sea que hay algunos puntos que no los
	11	recuerdas muy bien?
	12	E: sí como el primero que no tenía casi conocimiento de cómo
	13	los tenía que organizar o de los números irracionales, tampoco
	14	eran cosas de las que yo me acordaba.
	15	D: y ¿cuáles de esos puntos te parecieron como de más fácil
	16	solución?
Conocimientos adquiridos 23 -24 y 26	17	E: el cuarto, que era representa tres cuartos en la recta
	18	numérica, en la figura o el porcentaje en forma decimal,
	19	porque igual eran temas demasiado básicos, y si eran como
	20	más fácil.
	21	D: ah ya, bueno muy bien. Por ejemplo aquí en esta
	22	representación de la recta, recuerdas ¿por qué lo hiciste así?
	23	E: Si porque era como algo demasiado, pues fueron cosas que
	24	me han enseñado en varios años, y era una cosa que ya había
	25	aprendido hace mucho.
Reconocimiento de falencias 26-31, 36-38	26	D: Ah ya, muy bien Smith. Bueno ¿Dónde sentiste como
	27	mayores dificultades? ¿En qué parte del test?
	28	E: En la primera pregunta, pues la verdad, ya lo había dicho, es
	29	demasiado complicado organizar varios números como
	30	decimales, fraccionarios, era algo demasiado, ¡pues! había uno
	31	con un exponente, entonces era muy duro para ponerlos

		BLOQUE DOS- ACERCA DE LAS RESPUESTAS Sobre el uso de los números racionales e irracionales en el test diagnóstico
		PUNTO UNO
Sistema referencial 28-35	32	D: ¿Y qué estrategia utilizaste ahí para organizarlos?
	33	¿Recuerdas?
	34	E: No, no me acuerdo pero creo que fue, primero como lo
	35	decimal y después los números enteros, no me acuerdo bien.
	36	D: ¿Si yo te diera la oportunidad de hacer algún cambio ahí, lo
	37	harías?
	38	E: No porque tampoco me acuerdo, pues no sé cómo lo haría.

Reconocimiento de falencias 45, 52-47	39 40 41 42 43 44 45 46 47	<p>PUNTO TRES</p> <p>D: ah ya. Bueno y en este tercer punto de los números racionales e irracionales, ¿recuerdas que criterio utilizaste? o ¿cuál fue tu estrategia para poner acá que los irracionales eran -1, -2, -3?</p> <p>E: mm</p> <p>D: ¿en qué te basaste?</p> <p>E: En los, pues no sé, no me acordaba de la teoría de los números irracionales y entonces pues, solamente los puse, por creer que eran así.</p> <hr/>
Conversión de registros 48-60	48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60	<p>PUNTO CUATRO</p> <p>D: ah ya, muy bien. Bueno y en este de porcentaje que pusiste: el porcentaje de tres cuartos es tres cuartos por ciento</p> <p>E: jejeje</p> <p>D: ahí crees que está bien, o de pronto crees que hay un error</p> <p>E: Nooo, hay un error grandísimo.</p> <p>D: ¿sí? ¿Por qué?</p> <p>E: porque ahí está en fraccionario es que se llama ¿cierto?</p> <p>D: si en fraccionario.</p> <p>E: En fraccionario, igual no es porcentaje.</p> <p>D: ah. ¿Cómo sería porcentaje? ¿Si sabes?</p> <p>E: tampoco se</p> <p>D: bueno y aquí en este en forma de decimal</p> <p>E: no sé cómo lo puse, la verdad no sé.</p> <hr/>
Conocimientos adquiridos 61-65	61 62 63 64 65	<p>PUNTO CINCO</p> <p>D: ah bueno, muy bien Smith, y ¿recuerdas estos dos últimos del teorema de Pitágoras?</p> <p>E: no</p> <p>D: esos no los hiciste ¿cierto?</p> <p>E: no señor</p> <hr/>
	66 67 68 69 70 71 72	<p>BLOQUE TRES- PREGUNTAS CONTROL</p> <p>D: ah bueno, si yo te diera esa misma evaluación, ¿qué punto te gustaría volver hacer?</p> <p>E: el cuarto, porque fue el que más entendí y el que, pues me sentí bien haciéndolo</p> <p>D: ah bueno Smith, muchas gracias por tu información, es muy valiosa para nuestra investigación</p> <p>E: con mucho gusto</p>

INSTITUCIÓN EDUCATIVA IGNACIO BOTERO VALLEJO DEL RETIRO

TESTS DIAGNÓSTICO: CONOCIMIENTO INTUITIVO DE LOS NÚMEROS REALES

Nombre: Smithi Paola Mejia S Grado: Novena Fecha: 20/11/14

LEE CON ATENCIÓN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS Y ESCRIBE LA RESPUESTA PARA CADA UNA DE ELLAS. PARA RESPONDER A LAS PREGUNTAS NO DEBES EMPLEAR LA CALCULADORA. TAMPOCO DEBES SOLICITARLE AYUDA AL PROFESOR QUE TE ESTE ACOMPAÑANDO.

1. A continuación tenemos una lista de varios números

~~a) -3~~ b) $3/2$ ~~c) 0,310~~ ~~d) 0,4~~ e) 4,05 f) 30,1 ~~g) 0,0450~~ h) $3,4 \times 10^{-1}$ i) $2/3$
~~j) -2~~ ~~k) 0,33~~ l) 5,15 m) π

El orden correcto de los números anteriores de menor a mayor es:

J, A, D, K, C, G, L, E, F, I, B, M

2. Escribe cinco números, de menor a mayor, comprendidos entre -2 y 2

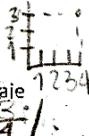
-2, -1, 0, 1, 2

3. Escribe tres números racionales y tres irracionales

RACIONALES	1	2	3
IRRACIONALES	-1	-2	-3

4. Representa $3/4$, en:

a. La recta numérica



c. En porcentaje

75%

b. En la figura:



d. En forma decimal

0,75

5. a) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde uno de los catetos mide 3 unidades y el otro 4 unidades.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. Escribe si la respuesta es un número racional o irracional.

OBSERVACIONES: Si tuvo dificultad para resolver alguno de los puntos, señale con una x el tipo o los tipos de dificultades que se le presentaron:

- 1) El enunciado del problema no era claro
- 2) No entendí lo que solicitaba el punto
- 3) No sabía que aplicar para hallar la solución
- 4) El tema no me lo habían explicado en el salón de clase
- 5) El tiempo no fue suficiente para resolver el problema

Si en el listado anterior, no aparece enunciado el tipo de dificultad que se le presentó, escríbala a continuación.

la verdad, casi no me acuerdo de nada, yo se que la hipotenusa se saca con raíz cuadrada pero no me acuerdo como, y no estoy muy segura de los números racionales e irracionales