EL ÁBACO JAPONÉS: Una mediación que da sentido al razonamiento matemático

Maria Gladys Gaviria Bedoya
Nuredine Gaviria Bedoya

Proyecto de investigación

EL ÁBACO JAPONÉS: UNA MEDIACIÓN QUE DA SENTIDO AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Trabajo de grado para optar
al título de magíster en Educación Matemática

María Gladys Gaviria Bedoya
Nuredine Gaviria Bedoya

Asesores:
Rubén Darío Henao Ciro
Clara Cecilia Rivera

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
Medellín 2016

Agradecimientos

Al Doctor Arturo Mena Lorca de la Universidad Pontificia Católica de Valparaiso, Chile. Por su deferencia al compartir con nosotros su libro "El estudio de clases japonés en Matemáticas" en vías de publicación.

A nuestros asesores Rubén Darío y Clarita por su apoyo y Confianza, por su capacidad para guiar nuestras ideas y su aporte invaluable en el desarrollo de este trabajo.

Al profesor Javier Santos por sus aportes y su disponibilidad que hizo que este trabajo fuera una realidad.

A nuestra madre por apoyarnos en todo momento y habernos dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de nuestras vidas.

A nuestro padre que desde el cielo siempre guío nuestro camino, a tí te dedicamos este triunfo más en nuestras vidas.

A nuestras hermanas Blanca y Leonor por su apoyo incondicional cuando más lo necesitábamos.

Al señor Gobernador Sergio Fajardo por su programa Becas de Maestría, ya que sin su apoyo económico hubiera sido imposible alcanzar este sueño, eternamente agradecidos.

A nuestros hijos Camilo, José Miguel, Julián y María Isabel por su comprensión y apoyo, son la luz de nuestro ojos y razón de nuestro ser.

A mi amada esposa Silvia, que con su apoyo constante y amor incondicional ha sido mi amiga, compañera inseparable y el pilar principal para alcanzar esta meta.

Resumen

La problemática existente en estos momentos en el campo educativo en Colombia, exige un cambio en todos los campos de la comunidad educativa, este cambio debe ser profundo y eficiente, a fin de garantizar un buen futuro para los niños y jóvenes y aportar mejores expectativas para la nación.

De acuerdo con esto, en este trabajo, se plantea la posibilidad de aplicar el ábaco japonés en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sin demeritar la tecnología actual pero conscientes de que es necesario que los estudiantes mejoren su creatividad y capacidad para tomar decisiones.

El trabajo está desarrollado en dos partes, la primera hace referencia al campo numérico (definiciones, operaciones, propiedades,...), y a la forma como aprenden los niños matemáticas en la escuela ; la segunda es la creación de un manual que sirva de apoyo en la enseñanza-aprendizaje de las operaciones matemáticas en el ábaco japonés, en él se hace una breve recopilación histórica del ábaco, en América prehispánica y los países orientales, se plantean diversas actividades lúdicas como preámbulo a la suma, resta, multiplicación y división para realizar con los alumnos y se explica paso a paso el manejo del ábaco japonés y como utilizarlo en el planteamiento y solución de dichas operaciones.

Con ambas partes del proyecto de investigación se pretende brindar herramientas útiles para realizar un correcto trabajo en el aula, en el que se desarrolle la capacidad de análisis y habilidades de cálculo mental en los niños, como un sistema de aprendizaje dinámico y divertido.

Durante la aplicación de la propuesta de enseñar las operaciones básicas teniendo como herramienta el ábaco japonés, se evidencio la creciente motivación por parte de los alumnos y razonamiento constante durante su manipulación al realizar las operaciones, además según lo expresado por los padres de familia se a notado mejoría en otras asignaturas.

PALABRAS CLAVES: ábaco japonés, operaciones básicas, deconstrucción, reconstrucción, evaluación, manual.

Abstract

The existing problems in these moments in the educational field in Colombia, demands a change in all the fields of the educational community, this change must be deep and efficient, in order to ensure a good future for the children and young people and provide better expectations for the nation.

Accordingly, in this work, raises the possibility of applying the Japanese abacus in the teaching and learning of mathematics, without diminishing the technology present but aware that it is necessary for students to enhance their creativity and capacity to make decisions.

The work is developed in two parts, the first one refers to the numeric field (definitions, operations, properties,...), and the way learning mathematics children in school; the second is the creation of a manual that will serve as support in the teaching and learning of mathematical operations on the Japanese abacus, it makes a brief historical collection in the abacus, in pre-Hispanic America and Eastern countries, there are various recreational activities as preamble to the sum, subtraction, multiplication and division to perform with students and explains step by step the Japanese abacus management and how to use it in the approach and solution of such operations.

Both parts of the research project is intended to provide useful tools to perform a proper job in the classroom, where it develops the capacity for analysis and skills of mental calculation in children, as a dynamic and fun learning system.

During the implementation of the proposal to teach the basic operations taking the Japanese abacus as a tool, it was evident the growing motivation by students and constant reasoning during their handling to perform operations, also as expressed by parents it has been noticed an improvement in other subjects.

KEY WORDS: Japanese abacus, basic operations, deconstruction, reconstruction, manual, evaluation.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Figura **Página**

Lista de Tablas

Introducción

No es ajena, para ningún Colombiano, la coyuntura que se vive en estos momentos en el campo educativo y que exige un cambio en todos los campos de la comunidad educativa. Este cambio debe ser profundo y eficiente de tal manera que garantice un buen futuro para nuestros niños y jóvenes y que aporten mejores expectativas para la nación.

En aras de aportar, para el mejoramiento de la educación, se plantea la posibilidad de aplicar el ábaco japones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sin demeritar la tecnología actual pero conscientes de que es necesario que los estudiantes mejoren su creatividad y capacidad para tomar decisiones valiosas en el futuro y que genere una competitividad sana que lleve a los chicos a ser cada vez mejores.

Este trabajo está desarrollado en dos partes, la primera sigue la linea de investigación acción educativa propuesta por Bernardo Restrepo. La segunda es la creación de un manual que sirva de apoyo en la enseñanza-aprendizaje del ábaco japonés.

El marco teórico está compuesto por un componente disciplinar en el que se encuentra aquello que hace referencia al campo numérico (definiciones, operaciones, propiedades), y un componente didáctico, que hace referencia a la forma como aprenden en la escuela matemáticas los niños, incluyendo el ábaco japonés.

En la primera parte del manual se hace una breve recopilación de la historia del ábaco y de los diversos sistemas de conteo usados en la América prehispánica y en los países orientales, que tuvieron cierta trascendencia en el desarrollo del cálculo numérico. La segunda parte del manual plantea diversas actividades lúdicas a realizar con los alumnos, tendientes a reforzar algunos conceptos como preámbulo al manejo del ábaco en cada una de las operaciones básicas que se plantean (suma, resta, multiplicación y división), luego se explica paso a paso el manejo del ábaco japonés y como utilizarlo en el planteamiento y solución de dichas operaciones. Finalmente en el manual se incluye una sección en la que se encuentran ejercicios de práctica que refuerce el aprendizaje adquirido en cada una de las secciones.

Tanto con el trabajo como con el manual se pretende realizar un correcto trabajo en el aula, en el que se aplique una estrategia que permita desarrollar la capacidad de análisis y habilidades de cálculo mental en el niño, y que sirva de herramienta no sólo a profesores sino a todas aquellas personas que les llame la atención la etno-matemáticas como un sistema de aprendizaje dinámico, divertido y como una forma de conectarnos con nuestras raíces en este campo.

Capítulo 1

Problema de investigación

Con frecuencia, los docentes nos vemos enfrentados a luchar contra el desinterés y falta de motivación, que genera a los educandos el estudio de las matemáticas, esto se ve reflejado durante el transcurso de su vida escolar, convirtiéndose en un dolor de cabeza y un escollo a la hora de superar los logros propuestos en cada grado. Dicha problemática ocasiona un alto grado de deserción ó reinicio del año escolar. El llamado "miedo a las matemáticas" a veces es generado desde la misma casa, transmitiendo prejuicios imaginarios que sin lugar a dudas, propician un sentimiento de rechazo y negación al interior del aula.

Esta apatía se evidenció en los resultados obtenidos en una prueba diagnóstica, realizada en marzo de 2015, a 70 alumnos de tercero de primaria de la institución educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo (MAUJ), de los cuales 35 pertenecen al grupo control y los restantes al grupo que se va a intervenir. Encontramos que los dos grupos están relativamente en las mismas condiciones presentándose leves discrepancias de un grupo a otro.

De acuerdo con los resultados obtenidos en dicha prueba se puede afirmar que en general:

1. El 26.4 % tiene dificultades para escribir el nombre de los números, cuando este tiene un cero intermedio.
2. Al 51.8 % se le dificulta ubicar los números en la tabla posicional.
3. Al 25 % se le dificulta descomponer los números en forma polinómica.

4. El 60.6 % desconoce la multiplicación como suma abreviada de cantidades iguales.
5. Al 63.9 % se le dificulta ordenar los números.
6. El 92.2 % tiene dificultad para realizar una suma escrita en forma horizontal.
7. El 89.7 % tiene dificultad para realizar una multiplicación escrita horizontalmente.

De esta manera, se puede afirmar que los alumnos de dicha institución, muestran deficiencias en el aprendizaje y comprensión de las operaciones matemáticas básicas, en el sistema de numeración indo-arábigo y la utilización adecuada en la solución de problemas, reflejándose en los bajos resultados académicos y en pruebas externas como pruebas saber.

Frente a la necesidad latente de mejorar en este sentido, es válido preguntarse ¿Qué estrategias didácticas se deben utilizar para potenciar las habilidades del cálculo mental en los alumnos del grado tercero, a través del ábaco japonés?

Capítulo 2

Objetivos

2.1 General

Potenciar el aprendizaje de las operaciones básicas, en los niños de tercero de primaria, de la I.E. Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, mediante el ábaco japonés, para desarrollar el razonamiento matemático.

2.2 Específicos

- Indagar las bondades del ábaco japonés, como mediador para desarrollar el pensamiento matemático en los niños de tercero de primaria.
- Diseñar e implementar una estrategia didáctica, con carácter diagnóstico, basada en la manipulación del ábaco japonés, para estimular en los niños el razonamiento matemático.
- Crear un módulo, que sirva como mediación, para la enseñanza de las operaciones básicas matemáticas.

Capítulo 3

Marco teórico

El marco teórico para este trabajo está dividido en tres partes:

- Un marco metodológico en el que se describe el tipo de investigación a seguir y la metodología para realizar el trabajo de campo.
- Un marco disciplinar que muestra cómo se desarrolla el razonamiento y las operaciones matemáticas en el niño.
- Un marco didáctico en el que se estudian estrategias utilizando el ábaco japonés.

3.1 Componente Disciplinar

3.1.1 Construcción del pensamiento matemático

El aprendizaje de las matemáticas como objetivo fundamental, requiere que los estudiantes se apropien de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división); esta apropiación de las operaciones debe pasar por la adquisición de herramientas necesarias, para desarrollar nuevos conceptos matemáticos.

Al respecto, Martínez O y cols. (2012) menciona que "algunas de las dificultades que presentan los estudiantes para realizar cálculos se debe a factores cognitivos como la baja atención, poca retención en la memoria y dificultades en la velocidad de procesamiento de la información".

Los docentes de matemáticas deben implementar modificaciones en el sistema de enseñanza aprendizaje, introduciendo desde los primeros años escolares, la utilización de materiales manipulables por los niños, de manera que interactuando con ellos a través de actividades, vaya adquiriendo y desarrollando el pensamiento lógico matemático, sin recurrir a la memorización.

3.1.2 Periodos de desarrollo del pensamiento

Según Piaget y Inhelder (1975) el conocimiento está organizado en un todo estructurado y coherente en donde ningún concepto puede existir aislado. Considera este autor, que hay cuatro factores que influyen en el desarrollo de la inteligencia.

- La maduración.
- La experiencia con objetos.
- La transmisión social.
- La equilibración.

Distingue tres tipos de conocimiento según Kamii y Devries (1983)

- Físico: Se adquiere actuando sobre los objetos y el descubrimiento del comportamiento de los mismos se produce a través de los sentidos.
- Social: se obtiene por transmisión oral.
- Lógico-matemático: se construye por abstracción reflexiva.

El conocimiento lógico-matemático, tiene las siguientes características.

- No es directamente enseñable, ya que depende de la capacidad de análisis de cada persona.
- Se desarrolla siempre en una misma dirección y hacia una mayor coherencia, pues busca desarrollar la capacidad de razonar, analizar y tomar decisiones en determinadas situaciones.
- Una vez que se construye nunca se olvida.

De importancia fundamental en la teoría de Piaget es la idea de que el niño en su desarrollo pasa por una serie de estadios o etapas, cada una con una característica especial. La capacidad del niño para aprender y entender el mundo está determinada por el estadio particular en que se encuentre. Estos estadios son:

- Período pre-operacional (de 2 a 7 años):

  El niño presenta un razonamiento de carácter intuitivo y parcial, razona a partir de lo que ve. Domina en él la percepción. Su estructura intelectual está dominada por lo concreto, lo lento, y lo estático. Es un período de transición del pensamiento pre conceptual al razonamiento lógico.

- Período de las operaciones concretas (de 7 a 11 años):

  Se caracteriza porque el niño ya es capaz de pensar lógicamente en las operaciones realizadas en el mundo físico. El pensamiento del niño comienza a descentrarse y es capaz de realizar algunas inferencias lógicas.

- Período de las operaciones formales (desde los 11 años en adelante): Se suele manifestar sobre los 11 años y está caracterizado por la posesión de un pensamiento lógico completo. El niño es capaz de pensar lógicamente, no sólo acerca del mundo físico sino también acerca de enunciados hipotéticos. El razonamiento deductivo característico de la ciencia comienza a ser posible.

Mialaret, G. citado por E. C. Martínez y cols. (2002) considera seis etapas en la adquisición del conocimiento matemático, que se exponen a continuación.

1. Comienza admitiendo la necesidad de manipulación, de acciones sobre objetos reales.

2. La descripción de las acciones se hace significativa, cada acción o conjunto de acciones se asocian con un término específico, por lo general un verbo.

3. Conducta del relato, el alumno describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción.

4. Aplicación del relato a situaciones reales, actuando y esquematizando las conductas relatadas mediante objetos simples o material no figurativo, dando los primeros pasos hacia la expresión formal de las operaciones.

5. Expresión gráfica de las acciones ya relatadas y representadas, la traducción gráfica puede consistir en un dibujo más o menos esquematizado o en el empleo de uno de los modelos para expresar una relación cuantitativa, supone un desarrollo del pensamiento matemático infantil.

6. Traducción simbólica del problema estudiado, último escalón para la asimilación matemática de un concepto. En el trabajo con papel y lápiz predominan los gráficos, que son una etapa destacada en el dominio de las operaciones.

Apunta Baroody (1988) que el desarrollo matemático de los niños sigue, en muchos aspectos, un proceso paralelo al desarrollo histórico de las matemáticas. Así el conocimiento impreciso y concreto de los niños se va haciendo gradualmente más preciso y abstracto, tal como ha sucedido con el conocimiento de las matemáticas a través del tiempo. Los niños poco a poco van elaborando una amplia gama de técnicas a partir de su matemática intuitiva. La matemática en los niños se desarrolla teniendo como base las necesidades prácticas y las experiencias concretas. Como ocurriera en el desarrollo histórico, contar desempeña un papel esencial en el desarrollo del conocimiento informal y este a su vez prepara el terreno para la matemática formal.

Para Mújina (1983) el juego es la actividad principal a través de la cual se desarrollan cualidades fundamentales en el niño, como son la atención y la memoria activa, con una intensidad especial. Mientras juega, el niño se concentra mejor y recuerda más cosas. Al manipular objetos, el niño aprende a recapacitar sobre ellos y a manejarlos en un plano mental. Introduce al niño en el mundo de las ideas.

Para los psicólogos cognitivos, el juego constituye una fuente de conocimiento muy importante sobre todo en los períodos sensorio-motriz y pre-operacional, además de cumplir una importante función biológica ya que con él se ejercitan todos los órganos y capacidades evitando así su deterioro. El niño empieza a estudiar jugando. En un principio el estudio es para él como un juego con determinadas reglas, de esta forma asimila los conocimientos elementales.

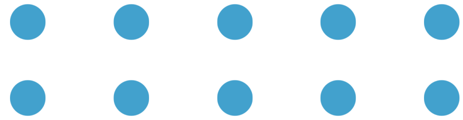
El pensamiento del niño en la infancia es concreto, es preciso partir de la manipulación de objetos para pasar a una fase representativa y de esta a otra más abstracta. Al hablar de manipulación en la enseñanza de las matemáticas, se hace referencia a una serie de actividades específicas con materiales concretos, que facilite la adquisición de determinados conceptos matemáticos. A través de las actividades que el niño realiza, con los materiales didácticos, puede avanzar en su proceso de abstracción de los conocimientos matemáticos.

El material didáctico es necesario en la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades por dos razones básicas: primera, posibilita el aprendizaje real de los conceptos, segunda, ejerce una función motivadora del aprendizaje sobre todo si con el material se crean situaciones interesantes para el niño, en las que se sienta sujeto activo.

3.1.3 El aprendizaje matemático

En el proceso de enseñanza aprendizaje desde los primeros años, el niño va adquiriendo y construyendo ciertos mecanismos y estrategias de representación de los objetos matemáticos, dándole diferentes interpretaciones. Según Duval (2006) existen diversas clases de representaciones. Por ejemplo los números naturales se pueden representar con material como estrellitas *(figura 3.1a)*, con puntos *(figura 3.1b)*, en una linea poligonal *(figura 3.1c)*, o usando el sistema de representación decimal *(figura 3.1d)*.

(a) Representación con estrellas



(b) Representación con puntos

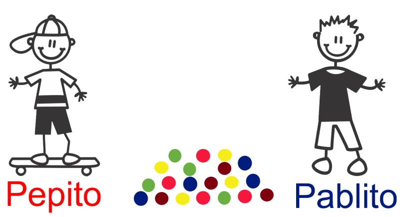
(c) Representación en la linea poligonal

10

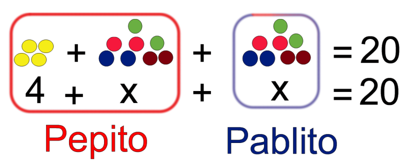
(d) Representación con el sistema de notación decimal

Figura 3.1: Diferentes representaciones de números naturales.

El procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de estas representaciones que en el lenguaje matemático son conocidas como semióticas, existen dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la conversión y el tratamiento, la conversión es transformar el registro de una representación semiótica en otra equivalente y el tratamiento es transformar un registro en otro equivalente mediante una operación. Por ejemplo: Pepito y Pablito tienen entre los dos veinte bolas *(figura 3.2a)*, Pepito tiene cuatro bolas más que Pablito *(figura 3.2b)*. Cuantas bolas tiene cada uno? *(figura 3.2c)*. Este proceso conforma los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento (Representación, conversión y tratamiento *(figura 3.2)*.



(a) Representación



(b) Conversión

20 - 4 = 16
16 ÷ 2 = 8 Pablito
20 - 8 = 12 Pepito

(c) tratamiento

Figura 3.2: Procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.

3.1.4 El aprendizaje del recuento y del significado del número como cardinal y ordinal

Los estados de conocimiento de los niños sobre el significado del número como cardinal y ordinal, según Godino y cols. (2003) son:

- Percepción temprana de cardinales. Los niños pequeños, entre dos y cuatro años, son capaces de reconocer el cardinal de conjuntos de uno a tres o cuatro elementos sin necesidad de contar. El cardinal es percibido globalmente por simple inspección visual del conjunto. En cambio, cuando se trata de cardinales mayores, los niños ya no saben decirlos correctamente porque eso exige contar y en esta etapa no tienen asumidos los principios en los que se basa dicha técnica.

- Percepción prioritaria de ordinales. Esta etapa corresponde a niños con edades entre tres y cinco años. Ahora los niños ya asumen algunos de los principios que permiten efectuar un recuento. En concreto, el principio del orden estable (las palabras numéricas deben decirse siempre en el mismo orden, empezando por el uno y sin omitir ninguna) y el de la correspondencia uno a uno (cada objeto del conjunto contado debe recibir una palabra numérica y sólo una). Se pone de manifiesto el sentido ordinal del número por cuanto la palabra numérica que se adjudica a cada objeto es su ordinal. Sin embargo, en esta fase no se asume el principio de cardinalidad, es decir, los niños no entienden que el último ordinal sea, al mismo tiempo, el cardinal de todo el conjunto.

- Percepción prioritaria de cardinales. En esta etapa, los niños, entre cuatro y siete años, asumen el principio de cardinalidad (la última palabra de un recuento indica, el ordinal del último elemento y el cardinal del conjunto). Tienen dificultades al obtener un ordinal, ya que tienen muy claro el principio de la correspondencia uno a uno y pretenden adjudicar palabras numéricas a todos los elementos del conjunto. También tienen dificultades para re-interpretar un cardinal como ordinal, es decir, una vez que han dicho que diecisiete es el número de elementos de un cierto conjunto, les resulta difícil volver a entenderlo como el ordinal del último elemento señalado. Esto les impide, entre otras cosas, adoptar técnicas de contar a partir de uno de los sumandos para obtener una suma. Una buena concepción del número como cardinal y ordinal supone asumir la doble condición de cada palabra de un recuento como ordinal de un elemento y, a la vez, cardinal de los elementos contados hasta ese momento.

3.1.5 Tipos de sistemas de numeración

En el sistema posicional regular se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. También se define un símbolo, el cero, para indicar la no existencia de unidades. En cambio, no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero.

En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo.

A medida que el niño va adquiriendo destrezas y habilidades para realizar representaciones semióticas, y mejora su habilidad para contar, ve la necesidad de hacer agrupaciones de objetos que faciliten su conteo y reconocimiento, al respecto Mesa y Uribe (2001) afirman que en el aprendizaje matemático, la presencia de los agrupamientos (competencias para seriar y clasificar desde la representación mental a través de un comportamiento aditivo y multiplicativo), posibilita la comprensión simultánea de las operaciones de adición, sustracción y del conteo operatorio. Todos estos agrupamientos definen el llamado pensamiento operatorio concreto o competencias para clasificar y seriar desde la representación mental; primero clasificando y seriando de acuerdo con un solo criterio (comportamiento aditivo), y posteriormente de acuerdo a varios criterios (comportamiento multiplicativo).

El niño ya es capaz de realizar inferencias a partir de lo real, teniendo en cuenta la reversibilidad de las operaciones. La presencia de la reversibilidad como capacidad de anular mentalmente las acciones, es el indicador fundamental para reconocer cuando puede un niño iniciarse en el aprendizaje matemático.

La reversibilidad es la capacidad del pensamiento para anular o compensar una acción realizada con objetos materiales o simbólicos, gracias a ésta podemos considerar, simultáneamente, la relación entre el “todo” y las “partes”.

La adición y sustracción no se pueden comprender la una sin la otra, simbólicamente al modelo $a + b = c$, están asociados los modelos: $a = c - b$ y $b = c - a$. Por lo que, un niño comprende significativamente, la adición: $7 + 3 = 10$, con las sustracciones $3 = 10 - 7$ y $7 = 10 - 3$. En este ejemplo estamos utilizando las relaciones entre clases que permite “anular” o “abstraer” las diferencias cuando se considera la clase total.

La multiplicación y la división también tienen una relación fuertemente estructurada. Simbólicamente al modelo $axb = c$, están asociados los modelos: $a = c \div b$ y $b = c \div a$. Por lo que, un niño comprende significativamente, la multiplicación: $5 \times 4 = 20$, con las divisiones $4 = 20 \div 5$ y $5 = 20 \div 4$.

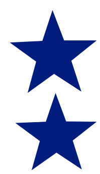
En este caso se indagará inicialmente en la repartición de una colección en subgrupos con el mismo número de elementos o distribuyendo equitativamente los elementos en subgrupos determinados.

Los símbolos numéricos se refieren a cualquier colección de objetos y deben comprenderse en sus relaciones con otros números, menores, mayores o iguales que ellos. Se debe trabajar con los estudiantes la descomposición de un número en otros sumandos, la diferencia entre números y el principio de sustitución (cada diez unidades de orden *"n"* se sustituyen por una unidad de orden superior).

Por ejemplo: En la siguiente ilustración se observa una colección de 12 unidades *(figura 3.3a)* representada como 10 estrellas amarillas *(figura 3.3b)* + 2 estrellas azules *(figura 3.3c)* y se lee una decena con dos unidades.

(a) Doce unidades

(b) Diez unidades



(c) Dos unidades

Figura 3.3: Descomposición del número doce
$12 = 10 + 2$

Una colección de 1402 unidades se puede representar como:

$$1402 = 1000 + 400 + 0 + 2 \tag{3.1}$$

Esta expresión corresponde a la escritura polinómica de un número *(ecuación 3.1)* y se lee una unidad de mil, cuatro centenas, cero decenas y dos unidades. De la misma manera podemos encontrar un número dada la descomposición polinómica *(ecuación 3.2)* cuatro centenas, ocho decenas, nueve unidades, son iguales a 489.

$$400 + 80 + 9 = 489 \tag{3.2}$$

.

Posiblemente la mejor manera de encontrar la descomposición polinómica de un número sea utilizando una tabla posicional decimal, como la utilizada en el siguiente ejemplo. Ver *(tabla 3.1)*.

En esta tabla se encuentra la escritura polinómica del número 4532 *(ecuación 3.3)*

$$4532 = 4000 + 500 + 30 + 2 \tag{3.3}$$

Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
4	0	0	0
	5	0	0
		3	0
			2
4	5	3	2

Tabla 3.1: Posicional decimal.

3.1.6 Operaciones con los números naturales

Si bien, existe una bibliografía amplia en este campo, es común encontrar estrechos enlaces con libros escritos en épocas pasadas, es así como en los libros de Londoño (1966) y Bruño (1950) se encuentra una muy buena colección que apunta al desarrollo del cálculo mental y de los cuales se han extraído algunos apartes que se mencionan a continuación. Se entiende por operaciones con números naturales las diversas combinaciones que se hacen con los números cuando se quiere buscar algún resultado. Las operaciones fundamentales son cuatro: suma, resta, multiplicación y división.

3.1.6.1 Suma:

La suma es una operación que tiene por objeto reunir varios números de una misma especie en uno solo, los términos de la suma reciben el nombre de sumandos y total *(figura 3.4)*.

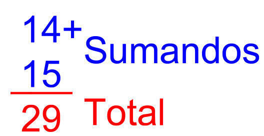


Figura 3.4: Términos de la suma.

Propiedades de la suma:

Clausurativa: La suma de dos números naturales da como resultado otro número natural. Es decir:

$$\forall a, b \in N, \quad a + b \in N$$

***Ejemplo* 3.1**

$$9+2=11 \quad 9 \in N, \quad 2 \in N \quad y \quad 11 \in N$$

Conmutativa: El orden de los sumandos no altera el total. Es decir:

$$\forall a, b \in N, \quad a+b=b+a$$

***Ejemplo* 3.2**

$$9+2=2+9$$

Asociativa: Los sumandos se pueden agrupar de diferentes maneras sin que el total se altere. Es decir:

$$\begin{gathered} \forall a, b, c \in N \\ a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c) \end{gathered}$$

***Ejemplo* 3.3**

$$\begin{aligned} 9+2+5 &= \underbrace{(9+2)}_{}+5 = 9+\underbrace{(2+5)}_{} \\ &= \quad 11 \quad +5 = 9+ \quad 7 \quad = 16 \end{aligned}$$

De esta propiedad se desprende la siguiente ley: El valor de una suma no cambia si se descomponen uno o varios sumandos en otros.

***Ejemplo* 3.4**

$$\begin{array}{ccccc} 25 & + & 42 & = & 67 \\ \overbrace{(20+5)} & + & \overbrace{(40+2)} & = & 67 \\ (20+40) & + & (5\ +2\ ) & = & 67 \\ 60 & + & 7 & = & 67 \end{array}$$

Modulativa: El único número que agregado a otro no lo altera es el cero. Es decir:

$$\forall a \in N, \quad a + 0 = a$$

***Ejemplo* 3.5**

$$9 + 0 = 9$$

Ley uniforme: Si sumamos miembro a miembro una igualdad nos da otra igualdad. Es decir:

$$\begin{gathered} \forall a, b, c, d, e, f \in N \\ \text{Si} \quad a + b = c \quad \text{y} \quad d + e = f \\ \text{Entonces} \quad (a + d) + (b + e) = (c + f) \end{gathered}$$

***Ejemplo* 3.6**

$$\begin{gathered} 5 + 4 = 9 \\ 6 + 2 = 8 \\ \underbrace{(5+6)}_{11} \quad + \quad \underbrace{(4+2)}_{6} \quad = \quad \underbrace{(9+8)}_{17} \end{gathered}$$

Ley de monotonía: Al sumar o restar una misma cantidad a los miembros de una igualdad resulta otra igualdad. Es decir:

$$\begin{gathered} \forall a, b, c, d \in N \\ \text{Si} \quad a + b = c \\ \text{Entonces} \quad a + b + d = c + d \\ \text{ó} \quad a + b - d = c - d \end{gathered}$$

***Ejemplo* 3.7**

$$\begin{array}{lclcl} 25 + 42 & & = & 67 & \\ 25 + 42 & +3 & = & 67 & +3 \\ & 70 & = & 70 & \end{array}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} 25 + 42 \quad -3 &= 67 \quad -3 \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

De esta ley se desprende que si a un miembro de una igualdad sumamos y restamos la misma cantidad la igualdad se conserva.

***Ejemplo* 3.8**

$$\begin{aligned} 25 + 42 \qquad\qquad &= 67 \\ 25 + 42 \quad + 5 - 5 \quad &= 67 \end{aligned}$$

3.1.6.2 Resta:

Es una operación por medio de la cual se retira una cantidad de otra de la misma especie. La resta es la operación inversa a la suma. Los términos de la resta son minuendo, sustraendo y diferencia *(figura 3.5)*.

378 - Minuendo
123 Sustraendo
255 Diferencia

Figura 3.5: Términos de la resta.

Los términos de la resta se pueden combinar de diferentes formas*(tabla 3.2)*.

M	S	D	$M - D = S$	$D + S = M$
378	123	255	$378 - 255 = 123$	$255 + 123 = 378$

Tabla 3.2: Combinación de los términos de la resta

En la tabla M es el minuendo, S es el sustraendo y D es la diferencia.

Ley de monotonía: Si sumamos o restamos un mismo número al minuendo y al sustraendo la diferencia se conserva.

$$\begin{gathered}\forall a, b, c, d \in N \\ \text{Si} \quad a - b = c \\ \text{Entonces} \quad a - b + d = c + d \\ \text{ó} \quad a - b - d = c - d.\end{gathered}$$

***Ejemplo* 3.9**

$$12 \; - 8 \; = \; 4$$

$$\underbrace{(12 - 2)}_{10} - \underbrace{(8 - 2)}_{6} = 4 \qquad \underbrace{(12 + 2)}_{14} - \underbrace{(8 + 2)}_{10} = 4$$

$$10 - 6 = 4 \qquad 14 - 10 = 4$$

Errores en la ejecución de los algoritmos escritos de suma y resta:

Los errores más frecuentes que cometen los niños al realizar los algoritmos son los siguientes:

- De colocación de los números. Justifican los números a derecha en vez de hacerlo a izquierda o no hacen coincidir las columnas de las cifras del primer número con las columnas del segundo.
- De orden de obtención de los hechos numéricos básicos. Empiezan a sumar o restar por la columna de la izquierda y avanzan hacia la derecha. Este error viene favorecido por la tradición de enseñar primero el algoritmo sin llevadas, dejando la introducción de las llevadas para una segunda fase.
- De resta de la cifra menor de la mayor. Restan la cifra menor de la mayor sin fijarse si corresponde al minuendo o al sustraendo.
- De colocación de un cero. Cuando la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo ponen como resultado el número cero.
- De lugar vacío. Ante un lugar vacío, no completan la operación u olvidan la llevada.
- De escritura del resultado completo. Cuando al operar una columna obtienen un número de dos cifras lo escriben completo en el resultado.

3.1.6.3 La multiplicación:

La multiplicación es una operación por la cual se toma un número llamado multiplicando tantas veces como unidades tiene otro llamado multiplicador. Los términos de la multiplicación reciben el nombre de factores y producto *(figura 3.6)*.

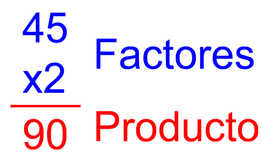


Figura 3.6: Términos de la multiplicación.

Los factores en la multiplicación tienen dos nombres multiplicando y multiplicador.

Propiedades de la multiplicación:

Clausurativa: El producto de dos números naturales es otro número natural.

$$\forall\, a, b\, \in N, \quad a \times b\, \in N.$$

***Ejemplo* 3.10**

$$9 \times 2 = 18$$
$$9 \in N, \quad 2 \in N \quad y \quad 18 \in N$$

Cancelativa: Todo número multiplicado por 0 da cero. Es decir:

$$\forall a \in N, \quad a \times 0 = 0$$

***Ejemplo* 3.11**

$$12 \times 0 = 0$$

Modulativa: Todo número multiplicado por uno da el mismo número.

$$\forall a \in N, \quad a \times 1 = a$$

***Ejemplo* 3.12**

$$12 \times 1 = 12$$

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.

$$\forall a, b \in N, \quad a \times b = b \times a$$

***Ejemplo* 3.13**

$$9 \times 2 = 2 \times 9 = 18$$

Asociativa: Al asociar factores de modo diferente se obtiene el mismo producto. Es decir:

$$\forall a, b, c \in N, \quad a \times b \times c \; = \; (a \times b) \times c \; = \; a \times (b \times c)$$

***Ejemplo* 3.14**

$$\begin{array}{ccccccc} 9 \times 2 \times 5 & = & \underbrace{(9 \times 2)} \times 5 & = & 9 \times \underbrace{(2 \times 5)} & = & 90 \\ & = & 18 \quad \times 5 & = & 9 \times \quad 10 & = & 90 \end{array}$$

Distributiva con respecto a la suma y la resta: Al realizar el producto de un factor por una suma o una resta, se obtiene el mismo resultado que al sumar o restar, según el caso, los productos parciales del factor, por cada uno de los sumandos o por cada uno de los términos de la diferencia. Es decir:

$$\forall a, b, c \in N, \quad a \; (b \; + \; c) \; = \; (a \times b) \; + \; (a \times c)$$

***Ejemplo* 3.15**

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & & \underbrace{(5+2)} & = & \underbrace{(9 \times 5)} & + & \underbrace{(9 \times 2)} \\ 9 & \times & 7 & = & 45 & + & 18 \\ & 63 & & = & & 63 & \end{array}$$

De la misma manera,

***Ejemplo* 3.16**

$$\begin{array}{ccccc} 9 & \underbrace{(5-2)} & = & \underbrace{(9\times 5)} - \underbrace{(9\times 2)} \\ 9 \quad \times & 3 & = & 45 \quad - \quad 18 \\ 27 & & = & 27 \end{array}$$

Esta propiedad es muy útil en el cálculo mental de la multiplicación si se aplica correctamente, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

***Ejemplo* 3.17**

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{(80+4)}^{84}\times 9 & = & \underbrace{(80\times 9)}_{720} + \underbrace{(4\times 9)}_{36} \\ & = & 720 + 36 = 756 \end{array}$$

***Ejemplo* 3.18**

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{(50-3)}^{47}\times 6 & = & \underbrace{(50\times 6)}_{300} - \underbrace{(3\times 6)}_{18} \\ & = & 300 - 18 = 282 \end{array}$$

***Ejemplo* 3.19**

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{(500+80+9)}^{589}\times 4 & = & \underbrace{(500\times 4)}_{2000} + \underbrace{(80\times 4)}_{320} + \underbrace{(9\times 4)}_{36} \\ & = & 2000 + 320 + 36 \\ & = & 2356 \end{array}$$

Para multiplicar una suma por otra basta multiplicar todas las partes de la primera por cada una de las partes de la segunda y sumar los resultados.

***Ejemplo* 3.20**

$$
\begin{aligned}
53 \times 28 &= \\
\overbrace{(50+3)} \times \overbrace{(20+8)} &= 50(20+8) + 3(20+8) \\
&= \underbrace{(50 \times 20)} + \underbrace{(50 \times 8)} + \underbrace{(3 \times 20)} + \underbrace{(3 \times 8)} \\
&= 1000 + 400 + 60 + 24 \\
&= 1400 + 84 \\
&= 1484
\end{aligned}
$$

3.1.6.4 La división:

Es una operación cuyo objeto es partir un número en tantas partes iguales como tiene otro. La división es exacta si el residuo es cero, de lo contrario es inexacta. Los términos de la división son dividendo, divisor, cociente y residuo *(figura 3.7)*.

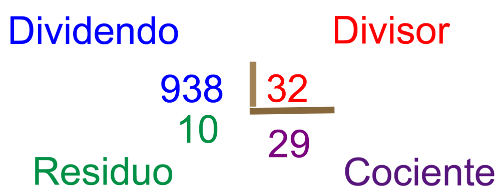


Figura 3.7: Términos de la división.

El dividendo es igual al divisor por el cociente más el residuo, el divisor es igual al dividendo menos el residuo dividido el cociente, el cociente es igual al dividendo menos el residuo dividido el divisor y el residuo es igual al dividendo menos el divisor por el cociente. Estas relaciones están resumidas en la *(tabla 3.3)*:

Propiedades de la división:

- La división exacta es distributiva con respecto a la suma y a la resta. Esta propiedad sólo se cumple cuando la suma o la resta es el dividendo, en el caso de que sea el divisor no se cumple ya que la división no es conmutativa.

  ***Ejemplo* 3.21**

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(27-15)} \div 3 &= \underbrace{(27 \div 3)} - \underbrace{(15 \div 3)} \\
12 \div 3 &= 9 - 5 \\
4 &= 4
\end{aligned}
$$

Relación	Ejemplo
$D = (d \times c) + r$	$456 = \underbrace{(35 \times 13)}_{} + 1$ $456 = 455 + 1$
$d = (D - r) \div c$	$35 = \underbrace{(456 - 1)}_{} \div 13$ $35 = 455 \div 13$
$c = (D - r)/d$	$13 = \underbrace{(456 - 1)}_{} \div 35$ $13 = 455 \div 35$
$r = D - (d \times c)$	$1 = 456 - \underbrace{(35 \times 13)}_{}$ $1 = 456 - 455$

Tabla 3.3: Combinación de los términos de la división.

***Ejemplo* 3.22**

$$\begin{aligned} \underbrace{(27+15)}_{42} \div 3 &= \underbrace{(27 \div 3)}_{9} + \underbrace{(15 \div 3)}_{5} \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

- Si el dividendo y el divisor de una división se multiplica o divide por el mismo número natural el cociente de la división no varía.

***Ejemplo* 3.23**

$$\underbrace{45 \div 15}_{3} = \underbrace{(45 \div 5)}_{9} \div \underbrace{(15 \div 5)}_{3}$$

***Ejemplo* 3.24**

$$\underbrace{45 \div 15}_{3} = \underbrace{(45 \times 5)}_{225} \div \underbrace{(15 \times 5)}_{75}$$

El aprendizaje de la multiplicación y división no está libre de obstáculos y dificultades.

La primera dificultad que suele pasar desapercibida es que una simple multiplicación como 123×12 es, en realidad, un conjunto variado de multiplicaciones que se escalonan y se combinan de acuerdo con unas reglas específicas. Este proceso queda notablemente oscurecido en el algoritmo habitual al suprimir pasos intermedios, lo que sin duda es una fuente de dificultades y errores. Estas dificultades son mayores incluso en el cálculo de la división donde deben realizarse procesos de tanteo, aparte de aplicar de manera coordinada las operaciones de multiplicación, adición y sustracción (Godino y cols., 2003).

Múltiplos y divisores

Divisor: Dados dos números naturales a, b con $a \neq 0$, se dice que "a" es un divisor de "b" si al efectuar la división entera de "b" por "a" se obtiene resto cero.

Múltiplo: Se dice que "a" es múltiplo de "b" si existe un número natural *"n"* que multiplicado por "b" es igual a "a", $a = n.b$.

Propiedades de la divisibilidad

- Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su suma.

Ejemplo **3.25**

$$5 \textit{ es divisor de } 20 \textit{ y de } 15, \textit{ entonces } 5 \textit{ también es divisor de } (20+15) = 35.$$

- Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su diferencia.

Ejemplo **3.26**

$$5 \textit{ es divisor de } 20 \textit{ y de } 15, \textit{ entonces } 5 \textit{ también es divisor de } (20-15) = 5$$

- Si un número es divisor de otro y multiplicamos los dos números por una misma cantidad la relación de divisibilidad se conserva.

Ejemplo **3.27**

$$\tfrac{20}{4} = 5$$

$$\tfrac{20\times 2}{4\times 2} = \tfrac{40}{8} = 5$$

- Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su producto.

Ejemplo **3.28**

$$5 \textit{ es divisor de } 10 \textit{ y de } 5 \textit{ entonces } 5 \textit{ también es divisor de } (10 \times 5) = 50$$

- La unidad es divisor de todos los números naturales.

***Ejemplo* 3.29**

$$(10 \div 1) = 10 \qquad (28 \div 1) = 28$$

- Todo número natural es divisor de sí mismo.

***Ejemplo* 3.30**

$$(10 \div 10) = 1 \qquad (28 \div 28) = 1$$

- Todo número natural es divisor de cero.

***Ejemplo* 3.31**

$$(0 \div 10) = 0 \qquad (0 \div 28) = 0$$

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son métodos que sirven para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división para comprobarlo. Son útiles al descomponer un número en sus factores primos, necesarios en el trabajo con el ábaco japonés, principalmente en la multiplicación y la división. Aunque existen criterios de divisibilidad para muchos números en este proyecto sólo serán necesarios los siguientes:

- Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par.
- Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.
- Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5.
- Divisibilidad por 10: Un número es divisible por 10 si la cifra de las unidades es 0.

3.1.7 Técnicas de cálculo mental

No existen reglas generales y absolutas para el cálculo mental, pero con la práctica y la aplicación de las propiedades se puede llegar a realizar procedimientos rápidos y eficientes en la ejecución de las operaciones.

El cálculo mental se puede poner en práctica para verificar el conocimiento de las tablas y propiedades de las operaciones, como apoyo para la introducción de cálculos escritos más complejos, o para justificar y mostrar los mecanismos del algoritmo escrito.

Las técnicas de cálculo orales se basan en la retención en memoria de los números que se operan, así como de los resultados de dichas operaciones. Las limitaciones de nuestra memoria exigen técnicas basadas en números sencillos, que son más fáciles de recordar y operar. Por tanto, el objetivo de dichas técnicas es redondear, es decir, conseguir números intermedios (enteros) que faciliten las operaciones.

Las técnicas de cálculo mental que se muestran a continuación, están basadas en la aplicación de las propiedades de las operaciones con números naturales.

Cálculo mental de la suma.

- El cálculo mental se basa en aproximar los números al múltiplo de 10 más cercano.

  ***Ejemplo* 3.32**

$$\begin{array}{rcl} 78+25 & = & (78+2)+(25–2) \\ & = & 80 \quad + \quad 23 \quad = \quad 103 \end{array}$$

  En este caso aproximamos el 78 al múltiplo de diez más cercano que es 80 para esto se le suma 2 al 78 y restamos 2 al otro sumando con el fin de conservar la igualdad.

  ***Ejemplo* 3.33**

$$\begin{array}{rcl} 46+57 & = & (46+4))+(57–4) \\ & = & 50 \quad + \quad 53 \quad = \quad 103 \end{array}$$

  Al igual que en el ejemplo anterior aproximamos el 46 al múltiplo de diez más cercano que es 50 para esto se le suma 4 al 46 y restamos 4 al otro sumando con el fin de conservar la igualdad.

- Escribir los sumandos en forma polinómica antes de sumarlos. Este método consiste en descomponer cada número en forma polinómica y sumar por separado las centenas, las decenas y las unidades; finalmente sumar los resultados obtenidos.

  ***Ejemplo* 3.34**

$$\begin{array}{rcrrcr} 463+287 & = & 400+ & 200 & = & 600 \\ & & 60+ & 80 & = & 140 \\ & & 3+ & 7 & = & 10 \\ & & & \textbf{\textit{Total}} & = & 750 \end{array}$$

***Ejemplo* 3.35**

$$\begin{array}{rcrcr} 204+973+161 & = & 200{+}900{+}\ \ 100 & = & 1200 \\ & & 0+\ 70+\ \ \ 60 & = & 130 \\ & & 4+\ \ 3+\ \ \ \ 1 & = & 8 \\ & & \boldsymbol{Total} & = & 1338 \end{array}$$

Cálculo mental de la resta.

Una forma de realizar cálculos mentales con la resta es descomponer en forma polinómica el sustraendo y restarle al minuendo las centenas, al resultado obtenido las decenas, y por ultimo las unidades como se muestra en los ejemplos.

***Ejemplo* 3.36**

$$\begin{array}{rcrcccl} 981\text{–}346 & = & 981-300 & = & 681 & & \\ & & 681-\ 40 & = & 641 & & \\ & & 641-\ \ 6 & = & (641-1)-(6-1) & & \\ & & & = & 640\quad-\quad 5 & = & 635 \end{array}$$

***Ejemplo* 3.37**

$$\begin{array}{rcrcccl} 673\text{–}538 & = & 673-500 & = & 173 & & \\ & & 173-\ 30 & = & 143 & & \\ & & 143-\ \ 8 & = & (143+2)-(8+2) & & \\ & & & = & 145\quad-\quad 10 & = & 135 \end{array}$$

***Ejemplo* 3.38**

$$\begin{array}{rcrcccl} 1385\text{–}978 & = & 1385-900 & = & 485 & & \\ & & 485-\ 70 & = & 415 & & \\ & & 415-\ \ 8 & = & (415+2)-(8+2) & & \\ & & & = & 417\quad-\quad 10 & = & 407 \end{array}$$

Cálculo mental de la multiplicación

Existen procedimientos para abreviar multiplicaciones algunos de los cuales se presentan a continuación:

- Para multiplicar por los números naturales del 12 al 19: La cifra que acompaña el 1 se multiplica por el otro factor y el producto se coloca debajo de éste desplazado un lugar a la derecha.

***Ejemplo* 3.39** *Para multiplicar* 25×18 *multiplicamos* 25×8 *y colocamos el resultado debajo del 25 corrido un lugar a la derecha, finalmente sumamos*

$$\begin{array}{rccc} 25 & \times & 18 & = \\ \underline{200} & & & \\ 450 & & & \end{array}$$

- Multiplicar por los números terminados en 1: La cifra que acompaña el 1 se multiplica por el otro factor y el producto se coloca debajo de éste desplazado un lugar a la izquierda.

***Ejemplo* 3.40** *Para multiplicar* 24×91 *multiplicamos* 24×9 *y colocamos el resultado debajo del 25 corrido un lugar a la izquierda, finalmente sumamos*

$$\begin{array}{rccc} 24 & \times & 91 & = \\ \underline{216} & & & \\ 2184 & & & \end{array}$$

- Para multiplicar por 9, 99, 999, etc., se aumenta al factor diferente de 9, 99,999, etc. tantos 0 como 9 haya y se resta el otro factor.

***Ejemplo* 3.41** *Para multiplicar* 38×999 *aumentamos tres ceros a 38 y restamos 38*

$$\begin{array}{rcrc} 38 \times 999 & = & 38000 & - \\ & & \underline{38} & \\ & & 37962 & \end{array}$$

- Para multiplicar por 11 un número de dos cifras, se suman los dígitos que los componen y se coloca el resultado en medio de ellos.

***Ejemplo* 3.42** *Para multiplicar* 54×11 *sumamos el 5 y el 4 y el resultado lo colocamos en el medio de los dos números*

$$5 + 4 = 9$$
$$54 \times 11 = 5\ 9\ 4$$

- En la multiplicación por 11, si la suma de los dígitos da más de 9 sumamos las decenas a las centenas del multiplicando.

***Ejemplo* 3.43** *Para multiplicar* 94×11 *sumamos el 9 y el 4 como el resultado es 13 sumamos 1 al 9 y el 3 lo colocamos en el medio de los dos números*

$$
\begin{array}{rcr}
 & 9+4=13 & \\
94 \times 11 & = & 9\ \color{red}{3}\ 4 \\
 & & \underline{\color{red}{1}\quad\ \ } \\
 & & 1\ 0\ 3\ 4
\end{array}
$$

Cálculo mental de la división

- Para dividir un producto de varios factores por un número basta dividir uno de ellos por este número y multiplicar los factores sobrantes.

***Ejemplo* 3.44**

$$
\begin{aligned}
(15 \times 24) \div 6 &= 15 \times (24 \div 6) \\
&= 15 \times 4 \\
&= 60
\end{aligned}
$$

- Para dividir un número por el producto de varios factores basta dividirlo por uno de ellos enseguida el cociente encontrado por otro factor y así sucesivamente.

***Ejemplo* 3.45**

$$
\begin{array}{rcrcr}
480 \div \overbrace{(2 \times 2 \times 3)}^{(480 \div 12)} & = & 480 \div 2 & = & 240 \\
 & & 240 \div 2 & = & 120 \\
 & & 120 \div 3 & = & 40
\end{array}
$$

***Ejemplo* 3.46**

$$
\begin{array}{rcrcr}
108 \div \overbrace{(2 \times 3 \times 3)}^{(108 \div 18)} & = & 108 \div 2 & = & 54 \\
 & & 54 \div 3 & = & 18 \\
 & & 18 \div 3 & = & 6
\end{array}
$$

3.1.8 Estándares matemáticos para el grado tercero

Algunos de los estándares básicos que se contemplan para el grado tercero, según el MEN (2009), relacionados con las operaciones en los números naturales son los siguientes:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).
- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.).

Además el MEN (2015) continuando con el trabajo constante de mejorar la calidad educativa en el país, ha venido desarrollando diferentes herramientas para fortalecer las prácticas escolares y así mejorar los aprendizajes de los niños, niñas y jóvenes de Colombia, para esto ha creado los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), como una herramienta dirigida a toda la comunidad educativa para identificar los saberes básicos que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de la educación escolar, de primero a once en las áreas de Lenguaje y Matemáticas.

Algunos de los DBA que el MEN contempla para los estudiantes del grado tercero en el área de matemáticas y que se aplican y estudian durante el desarrollo del presente trabajo son los siguientes:

1. Usa números de 0 a 999 999. Tiene claro el concepto de unidad, decena, centena, etc.

   Por ejemplo:

   Entiende que en 3785 hay 3 unidades de mil, 7 centenas, 8 decenas y 5 unidades; es decir:

$$3785 = 3000 + 700 + 80 + 5$$

También entiende que en 3785 hay 37 centenas y 85 unidades; es decir

$$3785 = 3700 + 85$$

o que en 3785 hay 3785 unidades.

Si le dan dos números sabe cuál es mayor y cuál es menor.

2. Entiende que dividir corresponde a hacer repartos equitativos. Divide números de hasta tres cifras entre un número de una cifra en casos simples en los que se puede hacer un reparto equitativo, sin que sobre nada.

   Por ejemplo:

   Para repartir 56 fichas entre 7 personas de tal forma que cada persona reciba la misma cantidad y no sobre ninguna, divide 56 entre 7, así ($56 \div 7 = 8$) y comprende que a cada persona le corresponden 8 fichas.

3. Multiplica números de hasta tres cifras por un número de una cifra utilizando diversas estrategias. Por ejemplo: Multiplicar 4×550 *(figura 3.8)*.

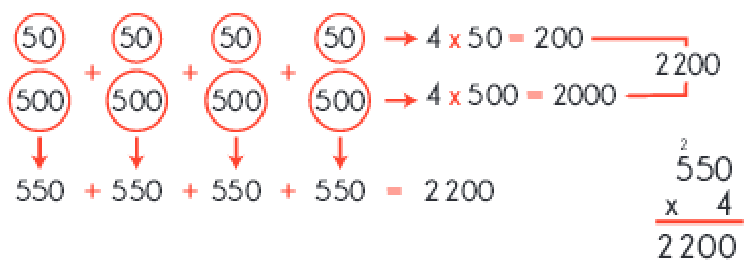


Figura 3.8: Representación de la multiplicación usando la suma.

4. Comprende la relación entre la multiplicación y la división. Por ejemplo: Para encontrar $32 \div 8$, encuentra el número que al ser multiplicado por 8 da 32 *(figura 3.9)*.

Figura 3.9: Relación entre la multiplicación y la división.

5. Comprende el significado de la igualdad y utiliza el símbolo "$=$" de forma correcta. Por ejemplo:

$$5 = 5, \qquad 6 + 7 = 10 + 3, \qquad \frac{4}{4} = 1$$

3.2 Componente Didáctico

3.2.1 Didáctica de la matemática para la escuela primaria

En términos generales la didáctica hace referencia a la forma como se da el proceso de enseñanza-aprendizaje, entendida la enseñanza como el proceso de comunicación de una serie de conocimientos, técnicas, normas, y/o habilidades, basado en diversos métodos y con el apoyo de una serie de materiales y el aprendizaje como el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación (Pastrán Sánchez y cols., 2015).

Según Flores y cols. (2015) el profesor es uno de los agentes claves en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como participante de estos procesos guía al estudiante en la construcción del conocimiento, su propósito es orientar el desarrollo del pensamiento crítico.

Shulman (2005) ha precisado en sus estudios, sobre el conocimiento profesional de los profesores, las diferencias entre el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza. El primero se refiere a la cantidad y organización del contenido en la mente del profesor. El profesor debe ser capaz de manejar las definiciones y poder justificar proposiciones en particular, así como conocer cómo se relaciona el conocimiento con otras disciplinas. El conocimiento del contenido para la enseñanza se refiere a la combinación del contenido y la pedagogía. El profesor debe analizar la forma de presentar la materia al estudiante; tomar en cuenta las habilidades y dificultades que se puedan presentar y adaptarlas a la diversidad de interés de los estudiantes.

Así, el profesor debe poseer un conocimiento específico para la enseñanza que va más allá del conocimiento matemático.

A partir de las propuestas de Shulman sobre el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, Ball, Thames y Phelps (2008) establecen un modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza en el que se destaca una distinción entre el Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido y del cual se hace una adaptación en este trabajo *(figura 3.10)*.

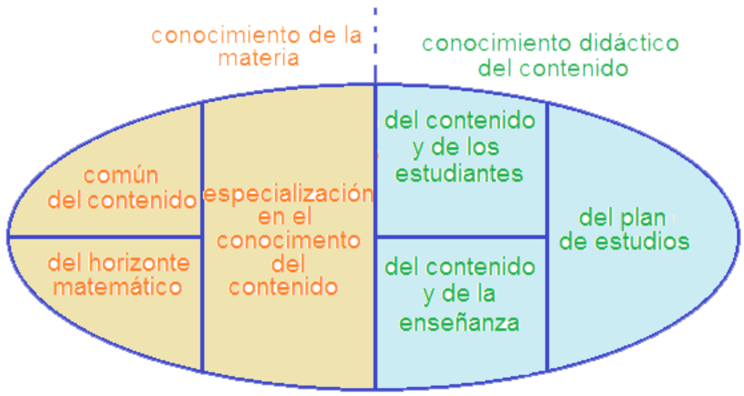


Figura 3.10: Modelo de conocimiento matemático para la enseñanza.

El Análisis Didáctico se define como "el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez y Lupiáñez, 2007, pag.79).

Según Romero y Cano (2013) el Análisis Didáctico esta compuesto por cinco análisis parciales:

a. Análisis conceptual: Indaga la variedad de significados, las posibles relaciones entre los términos, las creencias y concepciones de cada campo conceptual. Su objetivo es fundamentar y clarificar conceptos y términos.

b. Análisis de contenido: Explora el significado de un concepto matemático en tres dimensiones: estructura conceptual, fenomenología y sistema de representación. El docente debe disponer de una organización del contenido para elegir las tareas que realizará en el proceso de enseñanza.

c. Análisis cognitivo: Se estructura en expectativas, limitaciones y oportunidades en el aprendizaje escolar. Las expectativas son los fines, objetivos y capacidades, para establecer caminos de aprendizaje. Las limitaciones se refieren a los errores y dificultades que tienen los estudiantes al aprender un tema. Las oportunidades muestran las tareas planteadas o propuestas para la enseñanza de un contenido.

d. Análisis de instrucción: El profesor diseña, analiza y selecciona una variedad de tareas como elementos de la unidad didáctica de planificación. Analiza también instrumentos de evaluación y recursos didácticos.

e. Análisis de actuación o evaluación: Son acciones encaminadas a describir las habilidades y dificultades que han manifestado los estudiantes durante el proceso escolar.

3.2.2 Didáctica de la matemática origen y evolución

Para Camilloni (2010) la didáctica comienza a ser una disciplina científica, cuando se comienza a apoyar de la psicología e incluso a medida que esta última se hacía científica, se vislumbraba señales para que la didáctica también fuera una disciplina.

A partir del año 1657, se entabla una definición concreta de didáctica, la que es realizada por Juan Comenio en su conocida obra "Didáctica Magna" definiéndola como una disciplina de carácter práctico y normativo, enfoque tradicionalista.

Desde el siglo XX, precisamente en los años 20 y 50 comienza una nueva forma de educación, tratando de cambiar la definición de didáctica que se tenía desde la escuela tradicional. Es así como nace la llamada escuela nueva.

Después del enfoque humanista que mostraba la escuela nueva, se cambia a una dimensión más tecnicista, enfocada en el proceso de enseñanza aprendizaje desde el plano de producción, donde son: los objetivos, los contenidos, las estrategias de enseñanza, la evaluación, los ejes centrales del proceso. Así mismo, esto permitió plantear la didáctica como una ciencia aplicada, dependiendo de las teorías y técnicas que la fundamentan, de acuerdo a los métodos de las ciencias positivistas.

En las décadas del 30 y 40 en Francia, la legislación de la enseñanza se basa en determinados contenidos (currículum), dejando en los docentes las decisiones referidas al cómo enseñar (didáctica).

Es desde los años 60 que el currículum comienza a formar parte del campo de la didáctica. Se estima necesario una integración entre ambas disciplinas, beneficiándose una de la otra.

A partir de los 70 aparecen algunas corrientes nuevas, relacionadas con un pensamiento didáctico crítico. Estas teorías, aportaron el valor de lo subjetivo, de los significados, con tal de comprender las prácticas educativas. Se rescata al docente, a los estudiantes, los espacios, contextos históricos, entre otros elementos. La teoría educativa se construye en base a los problemas prácticos, buscando solucionarlos por medio de la comprensión de estos.

Por otro lado, durante esta década se consolidan algunas dimensiones de análisis de la didáctica, como: objetivos, contenidos, currículum, actividades y evaluaciones.

Durante el siglo XX, aparecen las especializaciones dentro de la didáctica, surgiendo así la didáctica matemática, la cual tiene su origen en una actividad realizada por matemáticos, en el Instituto de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, después de la Reforma Educativa de finales de los años 60. A partir de esto, se impulsó la enseñanza que se denominó: Matemática moderna.

Por otro lado, Camilloni y otros (2010) mencionan que el foco de esta nueva disciplina también se vuelca hacia la denominada transposición didáctica, la cual se entiende como un proceso que modifica el contenido matemático, transformándolo en un conocimiento que se puede enseñar.

Es por ello que, el qué enseñar y cómo hacerlo, depende principalmente de los matemáticos (Investigadores, profesores, y todas aquellas personas que tengan relación con la matemática), que son quienes dominan el objeto de estudio y sus propias reglas.

3.2.3 Modelos didácticos para la enseñanza de las matemáticas

Brousseau (1986) propone un modelo, desde el cual se piensa la enseñanza, como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos, dentro del ámbito escolar, se apoya de las hipótesis central de la epistemología genética de Jean Piaget y sostiene que el conocimiento matemático se va constituyendo a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados por otros problemas. Concibe la matemática como un conjunto ordenado de saberes surgidos por la cultura. Se posiciona desde una mirada constructivista, para afirmar que el sujeto produce conocimiento, siendo el resultado de la adaptación a un medio concreto, con el cual interactúa. El estudiante se encuentra inmerso dentro de un contexto, al cual se adapta, logrando producir su conocimiento y como resultado se tendría el aprendizaje.

Sin embargo, Brousseau (1986) afirma que sin ninguna intención didáctica, es insuficiente para promover en el estudiante todos los conocimientos culturales, que se desea que adquiera.

A partir de estas hipótesis, comienza a desarrollar **la teoría de las situaciones** que más tarde lo convertiría en uno de los investigadores más importante dentro de la didáctica matemática. Brousseau (1986) define la teoría de las situaciones como:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Afirma que dentro el contexto educativo existen relaciones de carácter implícito o explícito, en las que interactúan tres elementos: el estudiante, el docente y el saber matemático. La situación didáctica implica además, una interacción del estudiante de tipo dialéctica con situaciones problemáticas, en la que puede: anticipar, finalizar, comprometer y someter a revisión sus conocimientos anteriores, para modificarlos, complementarlos y formar concepciones nuevas. Por otro lado, las relaciones entre estudiante y docente, se establece a través de una negociación, que finalmente da como resultado **el contrato didáctico**.

El término contrato, se refiere a las interacciones que se generan entre el docente y el estudiante en la clase, las cuales se encuentran marcadas por lo que cada uno espera que realiza el otro en relación a un contenido.

Según Chevallard (1991) un contrato didáctico se hace considerando el saber como objeto del proceso enseñanza-aprendizaje, el cual se caracteriza por tener una doble condición. Por una parte el contenido teórico de la disciplina que se quiere enseñar y, por otra parte el contenido que deben aprender los estudiantes y que está establecido en los instrumentos curriculares existentes. El saber que finalmente recibe el estudiante de parte del profesor y que pasa a formar parte de su aprendizaje, es el saber que se transforma en saber enseñado; a este proceso Chevallard lo ha denominado transposición didáctica.

3.2.4 Pensamiento numérico

Los *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden, author=Schmidt, Q and others, year=2006, publisher=MEN* (s.f.) plantean un diseño curricular para la enseñanza de las matemáticas con base en: sistemas y pensamientos, procesos generales y contexto. El pensamiento fundamental en una investigación de este tipo es el numérico, definido por el MEN como la comprensión que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles en su manejo.

El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático.

Es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos.

Los pasos que se siguen para desarrollar un cálculo reciben el nombre de algoritmo, la invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la re-composición, y la comprensión de propiedades numéricas. Además el desarrollo del pensamiento numérico hace referencia a la comprensión del significado de los números, sus diferentes interpretaciones y representaciones, la utilización de su poder descriptivo, el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los números, la apreciación del efecto de las distintas operaciones, el desarrollo de puntos de referencia para considerar números.

El contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento, por tanto para la adquisición del sentido numérico es necesario proporcionar situaciones ricas y significativas para los alumnos.

La comprensión de conceptos numéricos apropiados se inicia desde el hogar a partir de sus experiencias en la vida cotidiana y se continua en la escuela con la construcción por parte de los alumnos del significado de los números, y la construcción del sistema de numeración teniendo como base actividades de conteo, agrupación y el uso del valor posicional.

La destreza de contar es uno de los indicadores de que los niños comprenden conceptos numéricos, es esencial para la ordenación y comparación de números. Nuestro sistema de numeración se basa en el principio de agrupaciones sucesivas, en el cual las unidades son agrupadas en decenas; colecciones de diez decenas se agrupan en centenas; éstas se agrupan en millares y así sucesivamente. El agrupamiento puede hacerse explícitamente mediante material concreto o implícitamente mediante las palabras que designan los números. La comprensión del valor posicional es otro aspecto esencial en el desarrollo de conceptos numéricos de los niños y la adquisición de la destreza de contar debe ser integrada en significados que se basen en el agrupamiento. Los niños serán entonces capaces de usar y comprender procedimientos de comparación, ordenación, redondeo y manejo de números mayores.

3.2.5 Razonamiento y ejercitación en la escuela primaria

Los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son:

- Resolución de problemas.
- La modelación de procesos y fenómenos de la realidad.
- La comunicación.
- El razonamiento.
- Ejercitación de procedimientos.

Profundizaremos aquí sobre los dos últimos dada su proximidad con el manejo y utilización del ábaco japonés.

El razonamiento: El desarrollo del razonamiento lógico se inicia en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.

Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas.

Ejercitación de procedimientos: El proceso de ejercitación implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos", procurando que la práctica aumente la velocidad y precisión necesaria en su ejecución y comprensión.

En la ejecución de procedimientos rutinarios matemáticos, existen momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el conocimiento procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

La práctica constante para lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos, no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento, pero sí a la adquisición de destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas. Estas destrezas dan seguridad al alumno y pueden afianzar y profundizar el dominio de dichos conocimientos, pero también pueden perder utilidad en la medida en que se disponga de ayudas tecnológicas que ejecuten dichas tareas más rápida y confiablemente. Además se debe reflexionar sobre qué procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización.

Esta reflexión exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuándo basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado. Por ello, así el docente decida practicar y automatizar un solo algoritmo para cada una de las operaciones aritméticas usuales, es conveniente describir y ensayar otros algoritmos para cada una de ellas, compararlos con el que se practica en clase y apreciar sus ventajas y desventajas.

En relación con lo anterior están los diversos procedimientos que se siguen para la realización de actividades matemáticas en la escuela primaria. Estos procedimientos pueden ser:

1. **Motrices**: La psicomotricidad permite el desarrollo integral del niño a través de la interacción del cuerpo con el medio externo, el movimiento y la persona se relacionan y activan para llevar al niño a un desarrollo total y al equilibrio en sus dimensiones: motriz, afectiva, cognitiva y social. Busca desarrollar las capacidades motrices del niño a través de la exploración del cuerpo y la interacción con el medio ambiente. Además plantea que la educación psicomotriz debe ser pensada en función al niño, es decir, a su edad, sus intereses, sus necesidades. Existen áreas psicomotrices que se deben tener en cuenta al momento de plantear determinadas actividades como:

- Esquema Corporal: es el conocimiento y la relación mental que la persona tiene de su propio cuerpo, esta relacionado con el aprendizaje de nociones como adelante-atrás, adentro-afuera, arriba-abajo.
- Lateralidad: es el predominio funcional de un lado del cuerpo, determinado por la supremacía de un hemisferio cerebral. Mediante esta área, el niño estará desarrollando las nociones de derecha e izquierda tomando como referencia su propio cuerpo.
- Equilibrio: es considerado como la capacidad de mantener la estabilidad mientras se realizan diversas actividades motrices. Esta área se desarrolla a través de una ordenada relación entre el esquema corporal y el mundo exterior.
- Espacio: esta área comprende la capacidad que tiene el niño para mantener la constante localización del propio cuerpo, tanto en función de la posición de los objetos en el espacio como para colocar esos objetos en función de su propia posición, comprende también la habilidad para organizar y disponer los elementos en el espacio, en el tiempo o en ambos a la vez.
- Tiempo-ritmo: las nociones de tiempo y de ritmo se elaboran a través de movimientos que implican cierto orden temporal como rápido, lento; orientación temporal como antes-después; estructuración temporal que se relaciona con el espacio.
- Motricidad: se refiere al control que el niño es capaz de ejercer sobre su propio cuerpo. La motricidad gruesa se refiere a la coordinación de movimientos amplios, como rodar, saltar, caminar, correr, bailar y motricidad fina implica movimientos de mayor precisión requeridos en tareas donde se utilizan de manera simultánea los ojos, la mano y los dedos como por ejemplo rasgar, cortar, pintar, colorear, enhebrar, escribir.

2. **Cognitivos creativos**: Son todas aquellas operaciones de pensamiento que subyacen a la capacidad de crear ideas, objetos o estados emocionales originales que son favorables para la solución de un problema o conflicto.

   Los procesos de percepción visual, son los relacionados con la generación de imágenes que en algunos casos encierra un mecanismo paradójico. Se podría pensar que la percepción, la mirada, al depender de los estímulos sensoriales visuales externos es independiente de la voluntad o de la intención del observador, es decir que los procesos perceptivos son determinados por los objetos que constituyen el ambiente.

   Entre muchos mecanismos cognitivos que podrían explicar el pensamiento creativo, tales como las reglas generativas, la analogía, la combinación y expansión conceptual o el pensamiento probabilístico están la metáfora, la analogía

   El juego es una acción cultural que puede promover el desarrollo de los procesos cognitivos creativos. En el juego podemos encontrar propiedades que explican su estructura:

   - La propiedad auto lógica: el juego tiene valor en sí mismo y no obedece a un propósito o plan determinado de antemano.

- La propiedad paradójica: el enunciado "esto es un juego" genera necesariamente una paradoja, las reglas del juego son generativas, es decir no necesariamente están determinadas y abren posibilidades al azar o a la libre elección.

3. **Heurísticos**: son procedimientos utilizados en lógica y filosofía para estudiar los métodos del razonamiento inductivo. Se emplean los métodos heurísticos en vez de los algoritmos cuando no se conoce una solución algorítmica al problema, o cuando esta está excluida por motivos prácticos.

   El juego heurístico es una actividad donde los niños interactúan de manera natural y libre con distintos tipos de material, que posteriormente clasifican (es el caso del ábaco japonés). Con el juego heurístico se potencian aprendizajes individuales, donde el niño hace sus descubrimientos partiendo de los que ya tiene, creando estructuras cognitivas nuevas que le ayudaran a solucionar situaciones sucesivas.

   Algunas de las ventajas del juego heurístico son: el niño es el protagonista de su propio aprendizaje; se parte del interés de los niños ofreciéndole materiales que sean atractivos para ellos, que les motiven e inviten a explorarlos; ayuda a estructurar, relacionar y fijar mejor los contenidos a aprender; es una actividad en la cual los niños combinan libremente objetos, explorando las posibilidades de los mismos y descubriendo sus características. Esta actividad permite desarrollar sus capacidades y favorecer sus habilidades sociales y de comunicación.

   El juego heurístico se aplica en la escuela desde un enfoque constructivista y está íntimamente interrelacionado con su contexto, lo que favorece el aprendizaje por descubrimiento, el conocimiento de la realidad, la autoestima, respetar el ritmo y las necesidades de cada niño. El juego heurístico también desarrolla capacidades cognitivas (comprender, relacionar, conocer), perceptivas (visión, oído, tacto, gusto, olor), corporales (motricidad gruesa, fina), éticas (respetar, colaborar), afectivas (disfrutar, valorar, querer), sociales (colaborar, compartir). Los niños descubren a través de los sentidos las características de los objetos que manipulan, realizando así nuevos aprendizajes.

4. **Algorítmicos**: Los procedimientos algorítmicos son la base del trabajo con el ábaco japonés y se entienden como un conjunto de pasos sistemáticamente realizados para producir un resultado correcto.

   Un algoritmo consiste en aplicar adecuadamente una serie de pasos detallados que aseguran una solución correcta. Los hay tan sencillos y cotidianos como seguir la receta del médico, abrir una puerta, lavarse las manos, etc; hasta los que conducen a la solución de problemas muy complejos. Por lo general, cada algoritmo es específico de un dominio del conocimiento. Un algoritmo garantiza por definición la consecución de aquello que se trata de conseguir.

   Las principales características que debe tener un buen algoritmo son:

   - Debe tener un punto particular de inicio.
   - Debe ser completamente definido y no debe permitir dobles interpretaciones.

- Debe ser general, es decir, soportar la mayoría de las variantes que se puedan presentar en la definición del problema.
- Debe ser finito en tamaño y tiempo de ejecución.
- Debe ser legible, claro y fácil de interpretar y entender.

Teniendo en cuenta la forma como describen el proceso, los algoritmos se pueden clasificar en: cualitativos (son aquellos en los que se describen los pasos utilizando palabras) y cuantitativos (son aquellos en los que se utilizan cálculos numéricos para definir los pasos del proceso).

3.2.6 Experiencias con el ábaco japonés

Una de las razones para utilizar el ábaco japonés tiene que ver con el uso generalizado que se ha venido presentando en los últimos años a nivel mundial y con los resultados obtenidos debido a su implementación. Algunas de estas experiencias se narran a continuación:

De acuerdo con Mateo y Laguna (2014), en el soroban la notación de los números se basa en los principios de la numeración decimal. Por lo que su uso facilita la introducción de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Además contribuye a aclarar los conceptos de unidad, decena, centena, entre otros; ya que el valor de las cuentas no depende de su tamaño, si no de la posición que ocupan, tal como ocurre con la escritura de números. Permite concretizar lo abstracto del procedimiento de enumerar, al manipular sus cuentas. Si su uso es el adecuado y se le concede el suficiente tiempo para su práctica se alcanzan resultados increíbles, ya que posibilitan gran rapidez en la realización de cálculos mentales. Naoki Furuyama, japonés de 19 años, campeón mundial de soroban es capaz de multiplicar dos números de seis cifras en cuatro segundos. Y afirma que la práctica y las destrezas adquiridas con el uso del soroban han potenciado su capacidad de concentración y auto-disciplina.

Herruzo y Membrives (1996) afirman que el soroban, es quizá el instrumento mecánico para realizar cálculos más rápido para ciegos. Se usa mucho en Japón, Estados Unidos y otros países avanzados de Occidente. Incluso, en algunos textos se indica que hay sorobistas que calculan más deprisa que los videntes con lápiz y papel.

ALOHA Mental Arithmetic, es un programa de desarrollo mental dirigido a niños de edades comprendidas entre los 5 y los 13 años de edad, potencia la inteligencia de los niños gracias a un programa educativo basado en tres herramientas clave: Cálculo con ábaco, aritmética mental y juegos didácticos. En este programa conocido a nivel mundial, los niños aprenden mientras se divierten gracias a una metodología didáctica en la que el juego desempeña un papel muy importante. Se imparte en centros escolares de toda España desde el año 2009, en el cual los alumnos aprenden a utilizar el ábaco japonés, como si fuera un juego de fichas. El estudio "El impacto del aprendizaje de aritmética mental con el ábaco en las habilidades cognitivas de los niños" (2005), demuestra científicamente que el trabajo realizado con el ábaco influye de manera directa sobre el desarrollo de las capacidades de los alumnos, aumentando su rendimiento académico y mejorando sus capacidades como la concentración, resolución de problemas, memoria operativa y asociativa, orientación espacial, creatividad o formación de conceptos (Las habilidades, 2005).

Según Fresneda y cols. (s.f.) en las escuelas de Japón se utiliza actualmente el ábaco japonés, con este instrumento se pretende desarrollar el manejo de las operaciones básicas de matemáticas, la habilidad mental sobre el cálculo numérico y mejorar la psicomotricidad fina. Afirman que este recurso se puede utilizar desde una edad temprana, aproximadamente a partir de los seis años de edad, pero que se puede ir introduciendo progresivamente en niños más pequeños a través de distintos juegos.

3.2.7 Importancia, ventajas y desventajas del uso del ábaco japonés

Según Saquicela Coronel y Arias Orellana (2011) el soroban presenta como ventajas las siguientes.

- Es pequeño, manipulable y de costo módico.
- Favorece la agilidad mental, atención, juicio, destreza manual y hábitos de orden.
- El aprendizaje correcto de sus técnicas, permite adquirir tal precisión y velocidad, que se podrá igualar y aún superar con facilidad los tiempos empleados para resolver las mismas operaciones con lápiz y papel.
- Permite un cálculo rápido, sin impedir el razonamiento y funciona como incitante intelectual, ejerciendo un papel similar al del ajedrez.

Con el fin de obtener óptimos resultados, el ábaco requiere de quien lo utiliza:

- Una atención casi constante, porque no es posible realizar correcciones parciales. Si se comete un error, se debe comenzar nuevamente todo el proceso operatorio.
- Para introducirlo en la enseñanza de matemática, es necesario que el maestro posea previamente, un correcto dominio de sus técnicas, una gran convicción de las ventajas de su aplicación y confianza en sus resultados, actitudes que trasmitirá a sus alumnos.
- Se debe introducir el ábaco, con la suficiente motivación para despertar el interés del niño y predisponerlo para que su actitud sea positiva.
- Se debe ir graduando la enseñanza, es decir, respetar los principios básicos de la pedagogía y dedicar el tiempo suficiente para una buena ejercitación. Esta será la base para obtener mejores resultados en los aprendizajes posteriores.

- Se considera que la utilización el ábaco puede iniciarse a partir de segundo grado, cuando el niño tiene bien aprendido el concepto de número y su simbología. Su empleo será útil para fijar los conceptos básicos ya adquiridos.

3.2.8 ¿Por qué el ábaco japonés?

La resolución de problemas es un pilar de la enseñanza matemática que se encuentra cobijada en los estándares de la educación colombiana como una prioridad en todos los grados de primaria y secundaria. El ábaco es una herramienta que permite resolver el cálculo en problemas de carácter matemático, atractiva para los niños, con la que pueden interactuar y explorar facilitando el proceso de aprendizaje, con esto no se pretende calificar el ábaco como el mejor y más eficiente instrumento a utilizar, ni tampoco, como un instrumento que por sí solo le determine la solución de un problema. El ábaco juega un papel motivante, ya que los niños lo aprecian como un juguete que les brinda un posible uso en clase, además el uso del ábaco solo requiere de habilidad para el conteo e impulsa al niño para crear sus propias estrategias a la hora de realizar un cálculo matemático, facilitando el desarrollo mental a partir del cual se transformará en el creador de su propio aprendizaje.

En la utilización del ábaco abierto en los primeros años escolares se puede observar que las fichas de éste van de un lado a otro y que pronto terminan con pocas fichas a su disposición, cosa que no ocurre con un ábaco cerrado; además en muchos casos con el ánimo de que el niño entienda los cálculos se coloca en una barra más de nueve fichas, creando confusión en la comprensión y utilización del sistema posicional decimal ya que en éste el máximo permitido por barra es nueve fichas.

La posibilidad que tiene el niño de insertar más fichas de las permitidas en una varilla impide ó puede ocasionar errores en el aprendizaje que pueden ser obviadas con el ábaco cerrado, ya que el niño tiene a su disposición siempre el mismo número de fichas en cada barra y con un valor especifico, por lo que tiene que recurrir a su ingenio para realizar muchas de las operaciones, generando conocimiento y destreza.

En el ábaco japonés el valor de las fichas son números que los niños recuerdan con facilidad y que se asemejan mucho al sistema decimal, pues cada barra tiene una ficha en la parte superior con un valor de 5 y en la parte inferior cuatro fichas con un valor de 1 lo que en suma seria 9 que es lo máximo permitido de acuerdo a la posición que ocupe en dicho sistema.

De acuerdo a las experiencias de aula y las grandes ventajas ya planteadas se considera que la utilización del ábaco japonés podría ser una buena oportunidad para que los estudiantes adquieran habilidad y agilidad mental.

Capítulo 4

Diseño Metodológico

4.1 Introducción teórica

Nuestra investigación es cualitativa, bajo la línea de investigación acción educativa. La investigación cualitativa es aquella donde se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema. La misma procura por lograr una descripción holística, esto es, que intenta analizar exhaustivamente, con sumo detalle, un asunto o actividad en particular, utilizando entrevistas, observación de casos, grabaciones, entre otros.

> "La investigación cualitativa busca la comprensión e interpretación de la realidad humana y social, con un interés práctico, es decir con el propósito de ubicar y orientar la acción humana y su realidad subjetiva. Por esto en los estudios cualitativos se pretende llegar a comprender la singularidad de las personas y las comunidades, dentro de su propio marco de referencia y en su contexto histórico-cultural. Se busca examinar la realidad tal como otros la experimentan, a partir de la interpretación de sus propios significados, sentimientos, creencias y valores"(F. Martínez y cols., 2011).

Además F. Martínez y cols. (2011) plantean que este tipo de investigación tiene las siguientes características:

- La investigación cualitativa no parte de hipótesis y, por lo tanto, no pretende demostrar teorías existentes, más bien busca generar teoría a partir de los resultados obtenidos.
- Tiene una metodología holística (integral), es decir las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como totalidad y en su totalidad.
- Dado que la naturaleza del objeto de estudio son los seres humanos, la relación que el investigador establece con las personas y con los grupos es cercana y empática y su interacción es de diálogo y comunicación. Los investigadores interactúan con ellos de una manera natural y trabajan con las propias palabras de las personas, y con las observaciones de su conducta.
- Tiende a ser flexible en su metodología, la forma específica de recolección de información se va definiendo y transformando durante el transcurso de la investigación, dadas las condiciones naturales en las que se realiza, además debe estar en capacidad de poder adaptarse al lugar y a las personas objeto de estudio.
- Las técnicas utilizadas en la investigación cualitativa para recolectar la información son principalmente: la observación (directa, participante), la entrevista cualitativa (estructurada o no estructurada), historias de vida, observación etnográfica, testimonio focalizado.

En cuanto a la investigación acción, Elliot (1993) la define como un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de acción dentro de la misma, la entiende como una reflexión sobre las acciones humanas y las situaciones sociales incluyendo las educativas, para mejorar sus prácticas, su comprensión y las situaciones e instituciones en que se realizan.

Desde esta perspectiva, la investigación acción tiene tres focos de indagación primordiales: la práctica educativa, la comprensión que los participantes tienen sobre la misma y la situación social en la que tiene lugar. La investigación acción educativa es la búsqueda continua de la estructura de la práctica y sus raíces teóricas para identificarla y someterla a crítica y mejoramiento continuo.

Al respecto, Restrepo (2000) plantea las tres fases del proceso que debe seguir la investigación acción educativa, la cual parte de una deconstrucción reflexión y auto critica profunda del aspecto especifico relacionado con el problema de la práctica escogido para la investigación; una segunda fase del modelo es la reconstrucción de la práctica o generación de alternativas innovadoras de la misma, y la tercera fase es la puesta en marcha y evaluación de la efectividad de la nueva práctica, a través de indicadores subjetivos y objetivos, que permitan apreciar resultados reales de la práctica reconstruida.

Deconstrucción: Para llevar a cabo esta etapa se debe utilizar la observación directa de acontecimientos en el aula, los textos de diario de campo y entrevistas a los alumnos, teniendo en cuenta que están mediados por múltiples factores como la cultura, las ideologías, los símbolos, las convenciones, los géneros, la comunicación, que no dejan fluir directa y transparente mente las ideas de los autores. Se considera la deconstrucción como la puesta en juego de los elementos del texto a escudriñar que permita hallar los defectos, buscar el motivo que la hace vulnerable, hallar inconsistencias y volverla inestable, de manera que se puedan buscar nuevas alternativas que la vuelvan estable, lo cual no será por mucho tiempo, pues el nuevo sistema también puede tener inconsistencias que habrá que seguir buscando.

La estructura de la práctica educativa está compuesta por ideas (teoría), herramientas (métodos y técnicas) y ritos (costumbres, rutinas, exigencias, hábitos), todos susceptibles de deconstrucción.

Reconstrucción: El éxito de ésta etapa depende en parte, de si previamente se da una deconstrucción detallada y critica de la práctica. No se trata de una innovación total sino de reafirmar lo bueno de la práctica anterior complementada con esfuerzos nuevos y propuestas de transformación de aquellos puntos débiles, inefectivos e ineficientes.

En estos procesos de deconstrucción y reconstrucción, la relación ética educador-educando se revisa y se erige como la relación más destacada de la práctica pedagógica. El reconocimiento de las propias limitaciones, la autocrítica, la comprensión más profunda del proceso pedagógico y la identificación de fuerzas conflictivas que subyacen en la práctica, llevan al docente de la inseguridad y la confusión profesional a la serenidad frente al proceso pedagógico y le permiten dudar de los esquemas organizativos de la clase y de los métodos preferidos o simplemente utilizados.

La investigación acción tiene dos momentos: Al deconstruir la práctica descubre su estructura y los amarres teóricos u operativos de la misma y al reconstruir la práctica se produce saber pedagógico nuevo para el docente. El objetivo de la investigación acción es la transformación de la práctica a través de la construcción del saber pedagógico individual, es un instrumento que permite al maestro comportarse como aprendiz de por vida, ya que le enseña como aprender a aprender, como comprender la estructura de su propia práctica y como transformar permanente y sistemáticamente su práctica pedagógica.

Evaluación de la práctica reconstruida: En la fase de evaluación se monta la nueva práctica y se deja actuar por cierto tiempo, acompañando su accionar con notas sobre indicadores de efectividad. Después de observar sus resultados se analizan las notas del diario de campo y se juzga el éxito de la transformación.

El siguiente cuadro resume las características de la investigación acción educativa *(tabla 4.1)*.

Deconstrucción	Reconstrucción	Evaluación
Observación directa del proceso de aula.	Transformación de las prácticas de aula.	Valoración de la transformación
Des-aprender	Diseño de actividades y planes de clase de acuerdo con los objetivos.	Sistematización de la información obtenida.
Diagnosticar	Diarios de procesos como mecanismo de reflexión docente.	Análisis y retroalimentación
Identificar problemáticas	Generación de procesos de innovación.	Validación de algunos indicadores de efectividad en el proceso de enseñanza aprendizaje.
Inconsistencias	Busqueda y creación de conocimiento.	
Trazar objetivos Caracterizar el contexto educativo.	Producción del saber pedagógico.	
Reconocer limitaciones, expectativas y oportunidades		

Tabla 4.1: Resumen investigación acción

4.2 Contextualización

Esta investigación es realizada en La Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo de carácter oficial, que funciona en el barrio San Cayetano del área urbana del municipio de La Ceja *(figura 4.1)*, distante 46 kilómetros de la capital Antioqueña, Medellín.

Figura 4.1: Institución Educativa MAUJ

La Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo fue creada mediante resolución N° 6233 de julio 7 del 2005. Actualmente cuenta con 1644 alumnos pertenecientes a los estratos 1,2 y 3 distribuidos como se muestra en la *(tabla 4.2)*:

Nivel	Grado	Número de grupos	Número de estudiantes
Preescolar		3	123
	Primero	4	148
Básica	Segundo	4	151
Primaria	Tercero	3	144
	Cuarto	3	141
	Quinto	4	153
Total		18	737
	Sexto	5	182
Básica	Séptimo	3	132
Secundaria	Octavo	4	150
	Noveno	3	120
Total		15	584
Media	Décimo	3	119
	Undécimo	2	81
Total		5	200
Totales		41	1644

Tabla 4.2: Distribución de los alumnos en la institución MAUJ

Según el PEI de la institución la misión, la visión, la filosofía y los valores que pretende desarrollar en sus educandos son:

Misión:

La Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, del municipio de la Ceja, Antioquia, de carácter oficial, que ofrece educación formal a niños, niñas y jóvenes, es líder en la formación de competencias científicas, tecnológicas, artísticas y culturales, mediante un plan administrativo y curricular pertinente, enfocado a la metodología de proyectos, generando en sus educandos la capacidad para enfrentar los retos que la sociedad les presente, con respeto, autonomía, responsabilidad social, excelencia, y creatividad, y perpetuando los valores culturales de la región.

Visión

Para el año 2017, la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, será líder en la formación de niños, niñas y jóvenes competentes para la participación en el devenir renovador de la cultura, la ciencia, el arte, la tecnología y el desarrollo humano, aportando liderazgo, creatividad, convicción en valores, autonomía, y competencia intelectual, a fin de satisfacer la necesidades personales, locales, regionales y nacionales, posicionándose como una de las mejores instituciones del Oriente Antioqueño.

Filosofía

La educación de los estudiantes de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, es integral, forma seres responsables, participativos, autónomos, con capacidad para cuestionar la realidad y los saberes en el transcurso de su vida como agentes dinámicos y transformadores de su entorno.

Valores

La institución busca generar en sus estudiantes valores como: la sana convivencia, solidaridad, participación, responsabilidad, equidad.

4.3 Metodología de la investigación

Esta investigación es cualitativa bajo la linea de investigación acción siguiendo los pasos o fases sugeridos por Bernardo Restrepo, la deconstrucción (creación de relaciones e identificación de problemas), la reconstrucción (intervención y planificación de la investigación) y la evaluación (evaluación y análisis de resultados) *(figura 4.2)*.

Figura 4.2: Pasos de la investigación cualitativa según Bernardo Restrepo

4.3.1 Fase Deconstructiva

Creación de relaciones: En esta etapa se entabla comunicación con las directivas de la institución educativa MAUJ (Rectora y coordinadora), se obtienen los permisos correspondientes para realizar la investigación en dicha institución y se adquieren recursos para la consecución de los ábacos necesarios para el trabajo de campo. De igual forma, se establece contacto con la profesora y se obtiene permiso para trabajar con los alumnos del grado tercero las operaciones básicas matemáticas utilizando el ábaco japonés, con el fin de observar la respuesta de los niños frente a la nueva de metodología y estudiar el cambio en su capacidad de análisis, razonamiento y habilidad para el cálculo mental. Además se obtiene permiso tanto de padres de familia como de estudiantes para utilizar la información registrada con fines investigativos.

Identificación de problemas: En la recolección de la información se utiliza diferentes sistemas de observación como grabaciones en vídeo, observaciones de clase, encuesta a docentes y alumnos, resultados en pruebas externas e internas.

Se inicia aplicando una prueba diagnóstica a los alumnos en la que se evalúa: como realizan las operaciones básicas matemáticas, el orden jerárquico y la descomposición polinómica de los números, además de la capacidad de resolución de problemas. En los resultados arrojados de esta prueba se evidenció dificultades: al realizar operaciones básicas matemáticas, al ubicar números en la tabla posicional sobre todo cuando estos tienen ceros intermedios, al ordenar los números, realizar operaciones escritas horizontalmente y en su gran mayoría carecen de razonamiento lógico para solucionar problemas.

Se realiza una encuesta al profesor con el fin de conocer la metodología en la enseñanza de las operaciones básicas y los recursos que utiliza para impartir sus clases, así como las condiciones tanto afectivas como actitudinales en que los alumnos afrontan el estudio de las matemáticas en este grado y la forma como se afronta el estudio de dicha asignatura a nivel institucional. Como resultado de la encuesta al profesor y las observaciones de las clases se concluye que: hay apatía y desinterés por parte de los estudiantes frente a las matemáticas, se desconoce el ábaco japonés, la clase la prepara el docente, la evaluación del alumno es escrita y a través de tareas, las evaluaciones y tareas no se corrigen, guarda evidencias de clase como cuadernos y diario de campo.

4.3.2 Fase Reconstructiva

Se capacita el docente durante varias secciones en el manejo del ábaco (suma, resta, multiplicación y división), se crea material didáctico (para que el niño adquiera conceptos básicos necesarios en la realización de diferentes operaciones matemáticas), se diseñan diferentes actividades y talleres de práctica (para que el niño se apropie y adquiera habilidad en el manejo del ábaco), se hace acompañamiento en algunas clases para observar el proceso de asimilación y adaptación por parte de los alumnos al nuevo instrumento.

El trabajo con los niños inicialmente es a través de juegos y actividades que crean un ambiente propicio para el manejo del ábaco, para luego realizar un proceso de adaptación, conocimiento y manipulación de éste. Las operaciones de suma y resta se deben realizar con diferentes niveles de complejidad, apoyados en talleres de práctica que permitan adquirir habilidad y desarrollar la capacidad de razonamiento lógico.

Como guía para el trabajo con el ábaco japonés se creó un manual de procedimientos y actividades, en el cual se explica paso a paso el manejo del ábaco y se realizan diferentes operaciones de suma, resta multiplicación y división apoyadas en las propiedades y el algoritmo de cada una de ellas y se plantea varios ejercicios de practica que garanticen una buena asimilación de la actividad.

4.3.3 Fase evaluativa

Figura 4.3: Experiencia con el ábaco en MAUJ-La Ceja

Durante el proceso de enseñanza aprendizaje del ábaco, aplicado durante varias secciones en la institución MAUJ *(figura 4.3)*, se encontró:

- La cantidad de alumnos por grupo que se manejan en los colegios oficiales, hace un poco complicado el trabajo con el ábaco. A pesar de esto se notó motivación y alegría en los estudiantes los cuales mostraban curiosidad y ganas de aprender a manejarlo, aumentando su entusiasmo a medida que se avanzaba en el proceso de su aprendizaje y generando inquietudes que se debían resolver en el instante, evidenciando la dificultad por falta de tutores o un grupo más reducido de estudiantes.

- Otra dificultad al trabajar con todo el grupo fue que los alumnos contaban con un ábaco por parejas y en ocasiones para tres. En el trabajo con el ábaco para obtener buenos resultados se hace necesario que cada estudiante tenga su ábaco, así podrá avanzar a su ritmo en el proceso.

- Frente a las dificultades anteriores se decidió escoger 5 alumnos del grupo para realizar un trabajo más personalizado que evidenció mucho más entusiasmo, motivación, y deseos de aprender en los alumnos. Durante las secciones que se trabajaron con los alumnos, se plantearon diferentes actividades de forma que se adquiriera un buen dominio del ábaco japonés, luego se plantearon actividades para realizar suma y restas sencillas aumentando el nivel de dificultad a medida que se avanzaba en el proceso. Las sumas y restas sencillas fueron asimiladas muy bien pero las sumas y restas con llevadas (cuando se completa la decena y hay que pasar a otro nivel) necesitó un poco más de tiempo, pero con la práctica adquirieron la destreza para un mejor desempeño. Se observó que los niños presentan dificultades en los números cuando hay ceros intermedios ya que se confunden y en varias ocasiones lo omiten.

- Los niños aprendieron el manejo con el ábaco como un juego que generó espíritu de competitividad.

- Hablando con los padres estos manifestaron su satisfacción con el avance en el proceso durante el corto tiempo que se pudo aplicar en este año y su deseo de continuar con él. A si mismo manifiestan el progreso de los chicos no solo en matemáticas sino en otras áreas.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El ábaco japonés como instrumento didáctico es un buen motivador para trabajar las operaciones básicas, ya que permite a los niños su manipulación e interacción con él, creando un ambiente propicio para el proceso de enseñanza aprendizaje.

Para obtener óptimos resultados trabajando con el ábaco japonés es necesario tener disciplina y ejercitarse constantemente.

El trabajo con el ábaco japonés estimula la capacidad de análisis, razonamiento lógico, creatividad y sentido de competitividad, incitando a los niños a ser cada vez mejores.

Es recomendable trabajar cada estudiante con su ábaco japonés y en grupos pequeños, en la medida de lo posible tener un ábaco grande desde el que se puedan realizar operaciones para todo el grupo.

De acuerdo con la opinión de los padres de familia y después de varias secciones se puede afirmar que el trabajo con el ábaco japonés genera cambios positivos en los resultados académicos de varias áreas del conocimiento.

Los resultados positivos en el trabajo con el ábaco japonés, dependen en gran medida de la motivación tanto de profesores como de estudiantes.

El ábaco estimula la capacidad de razonamiento lógico y deductivo del estudiante, ya que para realizar algunas operaciones deben buscar estrategias que le permitan realizar correctamente el ejercicio.

Anexos

Anexo A

Encuesta diagnóstica docente

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Educación Matemática
Estudiantes: María Gladys Gaviria Bedoya y Nuredine Gaviria Bedoya
Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, La Ceja
Grado Tercero Primaria

ENCUESTA DIAGNÓSTICA DOCENTE

1. ¿Cuál es su nivel académico?:

   a. ___ Bachiller Pedagógico.
   b. ___ Licenciatura en básica primaria.
   c. ___ Licenciatura en Matemáticas.
   d. ___ Licenciatura en preescolar.
   e. ___ Especialización.
   f. Otro, ¿Cuál? ______________

2. ¿Considera que sus estudiantes asisten a clases motivados para estudiar matemáticas?

   a. Si ___
   b. No ___

3. ¿Considera que usted si posee un dominio suficiente de las matemáticas como para impartir clases en los niveles que le han asignado?

a. Si ___ b. No ___

4. La actitud que demuestran tus estudiantes frente a la matemática es de:

   a. ___ Apatía hacia las matemáticas.
   b. ___ Interés por las matemáticas.
   c. ___ Deficiencia en las operaciones básicas.
   d. ___ Escaso desarrollo del razonamiento lógico.
   e. Otros, ¿Cuáles? ______________________

5. El material didáctico necesario para tus clases:

   a. ___ Te lo proporciona el colegio.
   b. ___ Usted misma lo construye.
   c. ___ Lo construyen los alumnos.
   d. Otros, ¿Cuáles? ______________________

6. ¿Cómo califica usted el ambiente de trabajo en su escuela para la enseñanza de las matemáticas?

   a. ___ Muy bueno.
   b. ___ Bueno.
   c. ___ Regular.
   d. ___ Malo.
   e. Otros, ¿Cuáles? ____________

7. Los recursos didácticos utilizados para estimular el aprendizaje de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) en sus clases son:

   a. ___ Materiales concretos.
   b. ___ Juegos Matemáticos.
   c. ___ Dibujos, diagramas, gráficas.
   d. ___ Tablero, tiza o marcador.
   e. Otros, ¿Cuáles? ____________

8. ¿Si utiliza material concreto, que tipo de material maneja para estimular el aprendizaje de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) en sus clases?

   a. ___ Juego de cartas.
   b. ___ Domino.
   c. ___ Bingo.
   d. ___ El ábaco abierto.
   e. ___ Carteleras.
   f. Otros, ¿Cuáles? ____________

9. ¿Cómo inicia y motiva el tema de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)?

a. ___ Explica los algoritmos formales.
b. ___ Realiza una reseña histórica.
c. ___ Inicia con una situación problema.
d. ___ Resuelve ejercicios numéricos.
e. Otros, ¿Cuáles? ____________

10. La preparación de la clase para enseñanza de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) es realizada por:

    a. ___ El director del grupo.
    b. ___ El docente del área.
    c. ___ Todos los docentes del grado tercero.
    d. Otro, ¿Quién? ____________

11. Las evidencias que guarda sobre la planeación de la clase para la enseñanza de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) son:

    a. ___ Cuaderno del alumno.
    b. ___ Diario de campo.
    c. ___ Material concreto.
    d. ___ Ninguno.
    e. Otros, ¿Cuáles? ____________

12. ¿Qué tipos de ábacos conoce?

    a. ___ El ábaco chino.
    b. ___ El ábaco Ruso.
    c. ___ El ábaco Japonés.
    d. ___ La Yupana del Perú.
    e. Otros, ¿Cuáles? ____________

13. ¿Ha trabajado con los niños algún tipo de ábaco?

    a. Si ___
    b. No ___

14. ¿Si ha trabajado con los niños algún ábaco?
    ¿Qué ventajas ha observado?
    ____
    ¿Qué dificultad ha tenido?
    ____

15. Su método para evaluar los alumnos incluye:

    a. ___ Corregir oportunamente las tareas y ejercicios de todos mis alumnos.
    b. ___ Observación del trabajo de los estudiantes en clase.
    c. ___ Evaluación escrita periódicamente.
    d. ___ Evaluación oral.
    e. Otros, ¿Cuáles? _________

Anexo B

Prueba diagnóstica del estudiante

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Educación Matemática
Estudiantes: María Gladys Gaviria Bedoya y Nuredine Gaviria Bedoya
Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, La Ceja
Grado Tercero Primaria

PRUEBA DIAGNÓSTICA DEL ESTUDIANTE

1. Realizar las siguientes sumas.

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 48 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ +\ 59 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 172 \\ +\ 247 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 628 \\ +\ 275 \\ \hline \end{array}$$

2. Realizar las siguientes restas.

$$\begin{array}{r} 500 \\ -\ 364 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 467 \\ -\ 230 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ -\ 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \\ -\ 32 \\ \hline \end{array}$$

3. Realizar las siguientes multiplicaciones.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 143 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 12 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 254 \\ \times\ 78 \\ \hline \end{array}$$

4. Realizar las siguientes divisiones.

   $24 \,\underline{\lfloor 3 \quad}$ $\qquad 144 \,\underline{\lfloor 6 \quad}$ $\qquad 136 \,\underline{\lfloor 2 \quad}$ $\qquad 96 \,\underline{\lfloor 8 \quad}$

5. Resolver los siguientes problemas.

   a. Una caja tiene 4 lápices, ¿cuántos lápices habrá en 18 cajas?
   b. Pepe tiene 20 bolas de cristal y las quiere repartir entre 5 amigos, ¿cuántas bolas de cristal le debe dar a cada migo?
   c. Juanito va a la tienda a comprar 3 bolsas de leche, cada bolsa le cuesta 2.000 pesos, la mamá le entrega un billete de 10.000 pesos, ¿cuánto dinero debe traerle a la mamá?
   d. Para entrar al colegio a Pedrito le compran un cuaderno, un lápiz, un borrador y un sacapuntas. Si el cuaderno costó 1.000 pesos, el lápiz costó 500 pesos, el borrador costo 400 pesos y el sacapuntas costo 700 pesos. ¿cuánto costaron los útiles de Pedrito para su entrada al colegio?
   e. Carlitos llevó al colegio 2.000 pesos para comprar la lonchera, compró un paquete de papitas por 700 pesos y una gaseosa por 650 pesos, ¿cuánto dinero le sobró a Carlitos?

Anexo C

Carta de autorización de los docentes

La Ceja, ______________________________ de 2015

Estimado Docente

Cordial saludo,

Señor docente ______________________________ de la I. E. Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, le solicitamos a usted nos permita aplicar una encuesta a los alumnos del grado tercero de básica primaria, hacer observaciones en el aula de clase y realizar algunas actividades utilizando al ábaco japonés, esto lo hacemos como parte de nuestro trabajo titulado **El ábaco japonés: Una mediación que da sentido al razonamiento matemático**.

Para nosotros es de vital importancia su colaboración y ayuda en el trabajo de investigación que estamos realizando en La Maestría en Educación Matemática.

La información registrada será confidencial y de uso exclusivo para analizar por el grupo de investigación.

____

Firma del Docente

Anexo D

Carta de autorización del plantel educativo

La Ceja, ____________________ de 2014

Estimada Rectora

Cordial saludo,

Señora rectora ____________________ de la I. E. Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo, le solicitamos a usted autorización al docente ____________________, para que nos colabore en la realización del estudio de investigación titulado **El ábaco japonés: Una mediación que da sentido al razonamiento matemático**. Para nosotros es de vital importancia su colaboración y ayuda en el trabajo que estamos realizando en La Maestría en Educación Matemática. La información registrada será confidencial y de uso exclusivo para analizar por el grupo de investigación.

____

Firma Rectora

Anexo E

Carta de Autorización del padre de familia

La Ceja, ______________________________ de 2015

Estimado Padre de Familia

Cordial saludo,

Señor ______________________________ padre de familia, le solicitamos a usted autorización para hacer uso del material escrito, audiovisual y fotográfico que hemos recogido con su hijo ______________________________, durante el trabajo realizado con el ábaco japonés como parte del estudio de investigación titulado **El ábaco japonés: Una mediación que da sentido al razonamiento matemático**.

Para nosotros ha sido de vital importancia su colaboración y la de su hijo en el trabajo que estamos realizando en La Maestría en Educación Matemática.

La información registrada será confidencial y de uso exclusivo para analizar por el grupo de investigación.

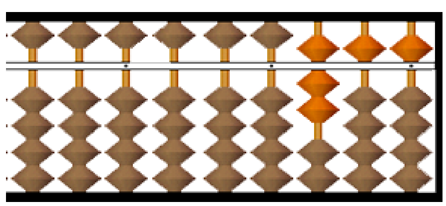
____

Firma del Padre de Familia

Anexo F

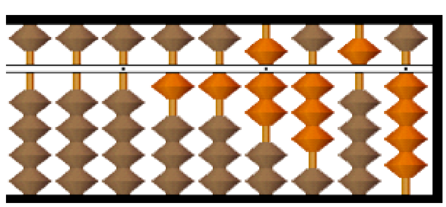
Representación de números en el soroban

En las siguientes gráficas se representan números en el ábaco, la actividad consiste en reconocerlos, leerlos y escribirlos en forma polinómica.



1. Se lee: ____

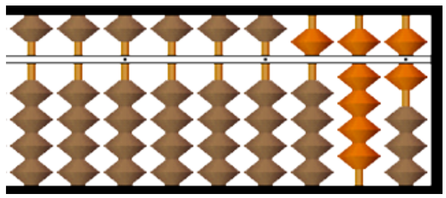
   Se compone como ____________ = __________ + __________ + __________



2. Se lee: ____

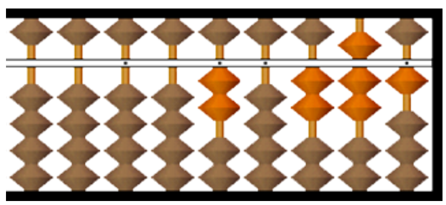
Se compone como ____________ = __________ + __________ + __________

__________ + __________ + __________



3. Se lee: ____

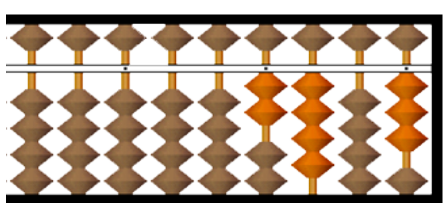
   Se compone como ____________ = __________ + __________ + __________



4. Se lee: ____

   Se compone como ____________ = __________ + __________ + __________

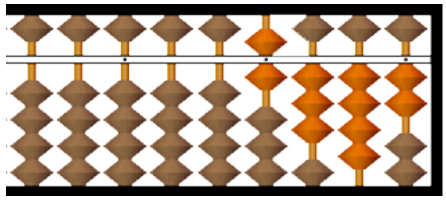
   __________ + __________



5. Se lee: ____

   Se compone como ____________ = __________ + __________ + __________

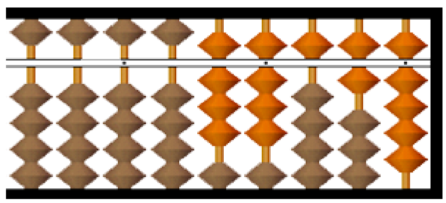
   + __________



6. Se lee: ______________________________

   Se compone como __________ = __________ + __________ + __________

   + __________



7. Se lee: ______________________________

   Se compone como __________ = __________ + __________ + __________

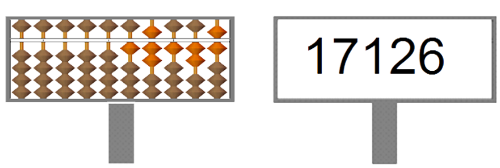
   __________ + __________

Anexo G

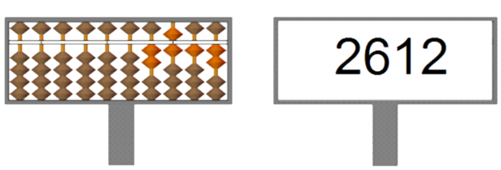
Lectura de números en el ábaco japonés

La actividad se debe realizar por parejas. Un alumno toma al azar una paleta por el lado del ábaco japones y se la enseña a su compañero pidiéndole que lea en voz alta el número escrito, luego toma otra paleta al azar y se la enseña por el lado del número escrito en arábigo para que él lo escriba en el ábaco japones. Intercambian y se repite el procedimiento.

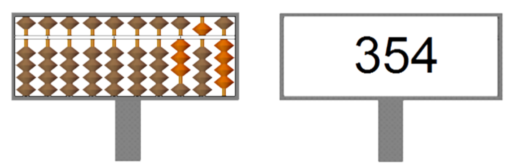
1.



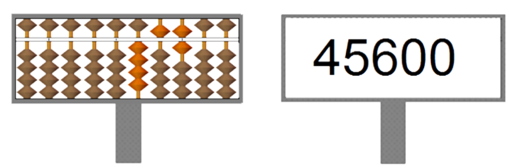
2.



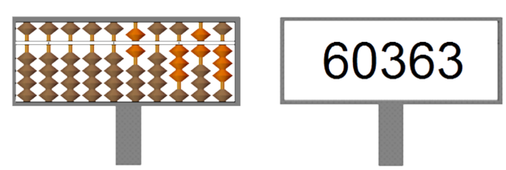
3.



4.

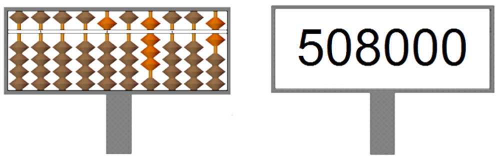


5.



6.

7.



8.

9.

10.

11.

12.

Anexo H

Adición y sustracción en el ábaco japonés

Realizar las siguientes operaciones utilizando el ábaco japonés, leer el resultado y colocarla al frente del ejercicio correspondiente.

1. Sumar en el Soroban los siguientes números y colocar su resultado.

   a) $345 + 122 + 5101 =$ __________
   b) $345 + 122 + 5101 =$ __________
   c) $2234 + 4210 + 1321 =$ __________
   d) $245{,}016 + 13{,}051 + 10{,}420 =$ __________
   e) $300 + 12 + 166 + 6211 =$ __________
   f) $1{,}671 + 3002 + 32106 =$ __________
   g) $723{,}112 + 50340 + 102100 =$ __________
   h) $2170452 + 400332 + 305100 =$ __________
   i) $321 + 2124 + 41022 + 1102 =$ __________
   j) $432 + 3301 + 2103 + 50132 =$ __________
   k) $260405 + 1013303 + 305170 =$ __________

2. Con ayuda del Soroban realizar las siguientes restas de números naturales y colocar su resultado en el espacio indicado.

   a) $7697 - 3264 =$ __________
   b) $36856 - 13423 =$ __________
   c) $21659 - 10437 =$ __________
   d) $475827 - 144616 =$ __________
   e) $55894 - 34450 =$ __________
   f) $80767 - 40343 =$ __________
   g) $617658 - 314546 =$ __________
   h) $5658 - 3427 =$ __________
   i) $38574 - 14163 =$ __________
   j) $7658957 - 4216834 =$ __________

3. Realizar las siguientes sumas en el Soroban y colocar su resultado en el espacio indicado.

a) $23214 + 14253 + 35121 =$ ________
b) $3734 + 1258 + 2004 =$ ________
c) $423 + 122 + 217 =$ ________
d) $1435 + 612 + 2620 =$ ________
e) $934 + 453 + 2011 =$ ________
f) $4032 + 1684 + 2153 =$ ________
g) $472 + 313 + 171 + 32 =$ ________
h) $51 + 312 + 53 + 120 =$ ________
i) $253 + 103 + 436 =$ ________
j) $13425 + 32560 + 14074 =$ ________
k) $5237 + 3008 + 7432 =$ ________
l) $935 + 603 + 318 =$ ________
m) $73 + 256 + 124 =$ ________
n) $4783 + 7102 + 3008 =$ ________
ñ) $54131 + 6506 + 2104 + 8122 =$ ________

4. Realizar en el ábaco las siguientes operaciones.

a) $362 + 524 - 441 =$ ________
b) $4563 - 3411 + 217 =$ ________
c) $768 - 133 - 324 + 453 =$ ________
d) $1543 + 3126 - 3417 =$ ________
e) $131 + 326 - 235 =$ ________
f) $32465 - 11233 + 44121 =$ ________
g) $57679 - 13201 - 12346 =$ ________
h) $2514 + 1232 - 2413 =$ ________
i) $74658 - 32414 + 13525 =$ ________
j) $527 - 216 + 465 - 463 =$ ________

Anexo I

Hacia la multiplicación

Se deben tener tres círculos (amarillo, rosado y blanco), cuatro triángulos (azules, negros, verdes y rojos) y pegante.

La actividad se realiza por parejas. Los niños pegan el triángulo sobre el círculo y dibujan en la parte visible del círculo los ojos y la boca para formar la carita, deben hacer todas las caras posibles sin que les falte ninguno y sin que se repitan. Así

Figura I.1: Arreglo multiplicativo de niños.

De acuerdo con el trabajo realizado con las caras y sombreros responder las preguntas:

1. ¿Cuántos sombreros tienen la cara amarilla? ______________________
2. ¿Cuántos sombreros tienen la cara rosa? ______________________
3. ¿Cuántos sombreros tienen la cara blanca? ______________________
4. ¿Cuántas caras tienen sombrero azul? ______________________
5. ¿Cuántas caras tienen sombrero negro? ______________________
6. ¿Cuántas caras tienen sombrero rojo? ______________________
7. ¿Cuántas caras tienen sombrero verde? ______________________

Anexo J

Tablas de doble entrada

- Completar la tabla de doble entrada realizando la multiplicación de un número de la línea horizontal (arriba) con un número de la vertical (izquierda) y colocar el resultado en el punto donde se encuentran.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Tabla J.1: Tabla de doble entrada

- De acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla de doble entrada, completar los enunciados que se presentan continuación.

  1. Encontrar todas las multiplicaciones que den como resultado 24.

(a) ____________ × ____________ (c) ____________ × ____________
(b) ____________ × ____________ (d) ____________ × ____________

2. Encontrar todas las multiplicaciones que den como resultado 36.

(a) ____________ × ____________ (c) ____________ × ____________
(b) ____________ × ____________ (d) ____________ × ____________

3. Encontrar todas las multiplicaciones que den como resultado 7.

(a) ____________ × ____________ (b) ____________ × ____________

4. Encontrar todas las multiplicaciones que den como resultado 12.

(a) ____________ × ____________ (c) ____________ × ____________
(b) ____________ × ____________ (d) ____________ × ____________

5. Encontrar cuatro multiplicaciones que den el mismo resultado.

(a) ____________ × ____________ y ____________ × ____________
(b) ____________ × ____________ y ____________ × ____________
(c) ____________ × ____________ y ____________ × ____________
(d) ____________ × ____________ y ____________ × ____________

6. Expresar en forma de multiplicación y resolver.

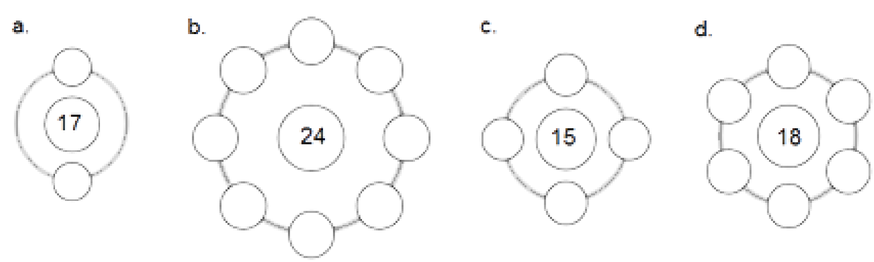
(a) 9 veces 5: ________________ (e) 3 veces 6: ________________
(b) 4 veces 8: ________________ (f) 5 veces 4: ________________
(c) 7 veces 4: ________________ (g) 6 veces 2: ________________
(d) 8 veces 9: ________________ (h) 2 veces 7: ________________

Anexo K

Descomposición de números

1. Con el número de objetos formar los grupos de objetos que se piden
   (a) Se tienen 12 objetos formar grupos de a cuatro
   (b) Se tienen 28 objetos formar grupos de a siete.
   (c) Se tienen 18 objetos formar grupos de a seis.
   (d) Se tienen 16 objetos formar grupos de a dos.

2. Encontrar todas las multiplicaciones que den como producto el número que aparece en el centro



3. Descomponga en forma polinómica cada uno de los factores y multiplique siguiendo las pautas dadas en los ejemplos.

Referencias

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Visor.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33–115.

Bruño, G. (1950). *Aritmética: curso superior*. Procuraduría General.

Camilloni, A. (2010). La validez de la enseñanza y la evaluación:¿ todo a todos. *Anijovich, R.(comp.). La evaluación significativa. Buenos Aires: Paidós*.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, *3*.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143–168.

Elliot, J. (1993). Conocimiento, poder y evaluación del profesor. *Calidad de la enseñanza e Investigación-Acción*, 155–174.

Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden, author=Schmidt, Q and others, year=2006, publisher=MEN. (s.f.).

Flores, A. R., Picado, M., y Espinoza, J. (2015). Conocimiento en el horizonte matemático de un profesor para enseñar funciones en cuarto año de secundaria en costa rica. En *Xiv conferencia interamericana de educación matemática.*

Fresneda, I. F., Rodríguez, R. M., y Martínez, L. N. (s.f.). Japan, investigation and experience about the educative system.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, *1*(2), 79–98.

Herruzo, P. M., y Membrives, A. R. (1996). *Guía didáctica para el aprendizaje del ábaco japonés (sorobán).* ONCE, Departamento de Servicios Sociales para Afiliados, Sección de Educación.

Kamii, C., y Devries, R. (1983). *La teoría de piaget y la educación preescolar.* Madrid: Visor.

Las habilidades, Á. E. (2005). Impacto del aprendizaje de aritmética mental con ábaco en las habilidades cognitivas de los niños.

Londoño, S. L. (1966). *Aritmética y geometría: curso primero de bachillerato.* Bogotá: Bedout.

Martínez, E. C., del Olmo Romero, M. Á., y Martínez, E. C. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Martínez, F., Díaz, B. A., Tejada-Tabayas, L. M., y Ascencio-Mera, C. D. (2011). Investigación cualitativa en salud: una revisión crítica de la producción bibliográfica en méxico. *salud pública de méxico*, *53*(6), 504–512.

Martínez O, M. H., y cols. (2012). *Implementación y creación de herramientas didácticas que afiancen las cuatro operaciones básicas de la aritmética de los números naturales* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Nacional de Colombia.

Mateo, S. E., y Laguna, P. T. (2014). Trabajo fin de grado.

MEN. (2009). Estándares básicos de competencias en matemáticas. *Potenciar el Pensamiento Matemático: Un Reto Escolar*.

MEN. (2015). Derechos básicos de aprendizaje. *Colombia Aprende*.

Mesa, O., y Uribe, C. (2001). *¿ Cómo construír pensamiento matemático en la básica primaria.* Medellín: Escuela Normal María Auxiliadora de Copacabana.

Mújina, V. (1983). *Psicología de la edad preescolar: un manual completo para comprender y enseñar al niño desde que nace hasta los siete años.* Madrid: Visor.

Pastrán Sánchez, R. A., Pérez, V., Gisel, V. R., y Zamora Villenas, E. F. (2015). *Significados que otorgan los docentes a la didáctica de la matemática* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Academia de Humanismo Cristiano.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.(trans l. leake, p. burrell & hd fishbein).* New York: Norton.

Restrepo, B. (2000). Una variante pedagógica de la investigación-acción educativa. *OEI-Revista Iberoamericana*.

Romero, L. R., y Cano, A. F. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1–22).

Saquicela Coronel, N. J., y Arias Orellana, J. A. (2011). *Guía metodológica para la aplicación del material didáctico en el área de matemáticas para segundo año de básica del centro educativo fiscomisional san francisco del cantón santiago parroquia chinimbimi 2010-2011* (Tesis Doctoral no publicada).

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, *vol. 9*, p. 1.