# Estrategias para promover el aprendizaje de La multiplicación como cambio de unidad

**Grupo MESCUD**

Pedro J. Rojas G.
Jaime H. Romero C.
Martha A. Bonilla E.

*A nuestra compañera de búsqueda;*

*Siempre sincera y crítica,*

*Siempre solidaria…*

*¡Siempre amiga!*

## Introducción

En este escrito[1] presentaremos algunos resultados de investigación sobre el comportamiento de estudiantes de diversos niveles de escolaridad, incluyendo universitarios, en relación con situaciones-problema «simples» de estructura multiplicativa, a partir de lo cual pretendemos motivar y reconocer la necesidad, de tipo cognitivo, de reformular el modelo mental[2], ampliamente difundido, de la *multiplicación como suma reiterada* y su desconexión con el *modelo de regla de tres*; además, presentaremos una propuesta de estrategias que potencien la comprensión de la multiplicación como cambio de unidad.

El curso va dirigido a estudiantes para profesor de matemáticas y a profesores de matemáticas en ejercicio. No contiene propiamente una propuesta de trabajo en el aula con niños y jóvenes, pero sí elementos que permiten orientar el diseño de actividades para desarrollar dicho trabajo y un material útil respecto al conocimiento profesional que creemos debe poseer un profesor de matemáticas para la educación básica.

Presentamos cuatro estrategias que potencian el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad. Estas estrategias son: *Problematización, Reflexión, Comprensión* y *Automatización*.

Afirmamos en Mora y Romero (2004, p.17) que

> "De la teoría de modelos intuitivos se desprende que MADA es un modelo intuitivo paradigmático, y como se colige de lo investigado en los libros de texto de aritmética en Colombia, ...también es primitivo; por lo tanto, genera el efecto

[1] Cuya versión inicial fue preparada por los profesores Pedro Javier Rojas G. y Jaime H. Romero C., integrantes del Grupo Mescud, para el desarrollo de un curso en el marco del XXII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística realizado en la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá, 2006).

[2] Ver, por ejemplo, D'Amore, 2006, p. 143

primacía. Es decir, es una de las cogniciones cuya perseverancia y resistencia al cambio son tan fuertes que siguen estables aún bajo la aceptación de evidencia dirigida en su contra, como si el individuo que de ellas dispone se rehusara a interrogarlas. En términos de Kruglansky y Ajzen (1983, p.23) el efecto primacía '…refleja el fenómeno de congelamiento epistémico por el que la persona cesa, en algún punto, de generar hipótesis y de aceptar una proposición dada actualmente plausible como cierta. El congelamiento epistémico es una característica inevitable del proceso de enjuiciamiento en razón del carácter potencialmente interminable de la generación de cognición. La secuencia epistémica debe parar en algún punto, al menos que el individuo esté desposeído de todo conocimiento cristalizado necesario para tomar una decisión y actuar'. De todo lo dicho en este párrafo se deduce la imposibilidad de anular MADA y la dificultad que no la imposibilidad de cuestionarlo.

Lo hemos dicho antes, el modelo MADA es compatible con la multiplicación y la división en anillos euclidianos y por lo tanto, para reflexionar sobre la no pertinencia de este modelo, se requiere sobrepasar estas estructuras. Una posibilidad aparecería pronto con las fracciones pero bajo la condición de tener una comprensión adecuada desde la estructura aritmética del producto y de la división de fracciones que las diferencie como operaciones pero que las integre en tanto la equivalencia entre $a/c \div b/d$ y $a/c \times d/b$."

## Primera estrategia: Problematización

Algunos autores (Piaget, 1981; Dubinsky, 1991; Tall y Tomas, 2002) afirman que toda generalización en matemáticas es posible en relación con la existencia de una forma o esquema mental –que se manifiesta en las actuaciones de las personas, traducida en reglas implícitas o explícitas de acción–. Que esta generalización exige una transformación de esquemas mentales que puede ocurrir como producto de una categorización de esquemas de orden inferior en la interrelación de las personas con el mundo objetivo vía la acción.

Esta categorización de esquemas en ocasiones desata un conflicto cognoscitivo, que bajo ciertas condiciones puede conducir o a una crisis cognoscitiva o a una problematización. Dado el carácter traumático de las crisis (toma de conciencia de una anomalía o de una ausencia acompañada del sentimiento de imposibilidad de superar la una o de cubrir la otra y enfrentado a un requerimiento taxativo y amenazante, de procedencia interna o externa, que actuaría si el conocedor no vence la imposibilidad) y sus más probables consecuencias, sentimiento de frustración y consiguiente abandono de la situación que produce el conflicto cognoscitivo, propendemos incrementar las condiciones que hagan posible generar una problematización, para lo cual abordamos dos aspectos: *Condiciones que hacen posible las problematizaciones* y *las tomas de conciencia*.

## Segunda estrategia: Reflexión

En términos de generación de conciencia y problematización, la instrumentación provee a la clase de elementos de reflexión. Una pregunta que debe ser contestada está en relación con la posible universalidad de los comportamientos hallados *¿son excepcionales o éstos aparecen reportados en distintos lugares del mundo?*

Sin embargo, habiendo logrado volcar la atención sobre los comportamientos efectuados, la teoría que estructura los instrumentos permite orientar el estudio de aquéllos, originando su tipificación y develando el sistema de relaciones entre ellos. Poco a poco emergerá que los distintos tipos de comportamientos están vinculados con diversas maneras de uso, o con ausencias, de elementos matemáticos.

Es decir, el uso de instrumentos ayuda, fortalece y alienta procesos de metacognición profunda: permiten cuestionar alguno(s) de nuestros modelos intuitivos y asumir una actitud de "acecho" al momento de abordar la solución de situaciones y problemas, pero también aportan para determinar sobre qué elementos matemáticos se habrá de focalizar la atención. Las siguientes son preguntas propias de esta fase:

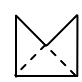
*Tercera estrategia: Comprensión*

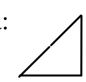
Examinemos ahora, a través de una solución de un problema que involucra fracciones, el uso constante y refinado de la recuperación de la unidad y los procesos de unitización y normación puestos en juego.

*El problema de partir y recuperar. Es usual que logremos obtener una parte de una figura, o una unidad dada, dividiéndola en el número de partes requerido (no sin invertir cierto tiempo). ¿Pero garantiza esto el proceso inverso de recuperar el todo o la unidad teniendo una(s) parte(s)?*

*Si*  *es 3/2 de la unidad, ¿cuál es la unidad?*

Después de dudar un poco, ¿cómo actuamos para encontrar la unidad?

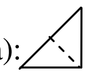
Posiblemente dividimos la figura (el todo) en tres (3) partes, de igual tamaño, así: 

Tomamos dos (2) de estas partes, esto es, tomamos 2/3 del todo; en otras palabras, tomamos 2/3 de 3/2 de la unidad, lo cual puede verse como 2/3 x 3/2 de la unidad, que corresponde en este caso a la unidad pedida: 

¿Por qué la duda? Posiblemente se deba a que para encontrar medios, lo usual sea partir la unidad en *dos* partes de igual tamaño; pero en este caso debemos partir el todo en *tres* partes para hallar la mitad de la unidad pedida; hecho que requiere reconocer que 3/2 corresponde a 3 de ½ de tal unidad. La función típicamente asignada al denominador, en este caso debe cumplirla el numerador, y viceversa. ¿Pero este actuar desde la representación gráfica, qué correlato numérico tiene?

En la experiencia que hemos tenido con estudiantes universitarios y profesores de matemáticas de educación básica y media, observamos que esta relación -entre el trabajo numérico y el gráfico- no aparece de manera "natural" y, al parecer, sólo cuando se plantea establecer explícitamente esta relación se suele reflexionar sobre ello. Respecto al ejemplo propuesto, finalmente reconocen que las acciones realizadas desde lo gráfico corresponden a una multiplicación; y específicamente que el producto 2/3 x 3/2 [x1] nos permite recuperar la unidad (el "uno" inicial de referencia). Además, podemos ver claramente que es necesario tener conciencia de las distintas unidades en juego, *los distintos unos*, además de "controlar" las relaciones entre estas *distintas unidades!*

Inicialmente tenemos tres "unos" iguales: 

y cada uno de ellos es la mitad ( ½) de otro uno (en este caso la unidad pedida): 

*Cuarta estrategia: Automatización.*

De esta manera, en una secuencia de clases es posible construir elementos de reflexión a través de objetivar mediante instrumentos nuestros modelos intuitivos, nuestros esquemas, disponiéndolos en el mundo objetivo para someterlos a nuestra propia crítica, pero además estos mismos instrumentos ofrecen elementos para poner bajo control y superar tales esquemas, logrando aprendizaje. Respecto al modelo MADA, discutido en este escrito, el saber recuperar la unidad se constituye en un puente que posibilita generar "compatibilidad" de este modelo y su superación hacia procesos de unitización y normación[3].

A continuación ejemplificamos con un problema un abordaje posibilitaría el desarrollo de las estrategias referidas, particularmente la de automatización.

*El problema de las tazas de café y los buñuelos*. Las ideas que se presentan a continuación, en relación con propuestas de solución al problema planteado, son tomadas de Bonilla y Romero (2006, en prensa) que analizan una experiencia desarrollada por estudiantes de séptimo (12-14 años) reportada por Romero, et al. (2002, p. 51) ocurrida en una institución escolar, que promueve explícitamente el trabajo por resolución de problemas[4].

Por cada tres tazas de café hay cuatro buñuelos. ¿Para cinco tazas de café cuántos buñuelos se requiere?

**Primer modelo de solución**. Si multiplicamos la primera relación por 5 llegamos a:

15 tazas de café son para 20 buñuelos
5 tazas de café son para ? buñuelos

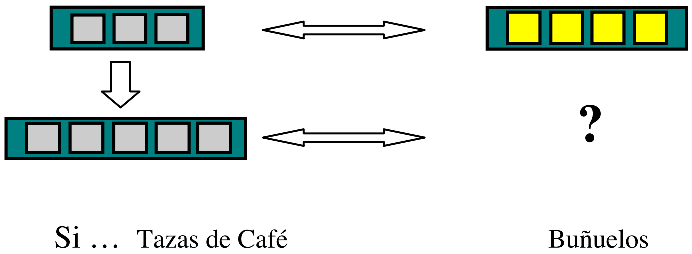
Como 5 es la tercera parte de 15, entonces ? es la tercera parte de 20.
Es decir, ? = 20/3

Segundo modelo de solución. Para llegar a 5 [tazas de café] utilizamos 2 partes de 3 más las 3. A 4 buñuelos los volvemos 3 y con este tres hacemos lo mismo. Entonces primero se convierte a 4 en 3: una unidad [de las 4] la parto en 3 partes y coloco cada una de esas tres partes en cada una de las otras tres unidades [que quedan de las 4].

---

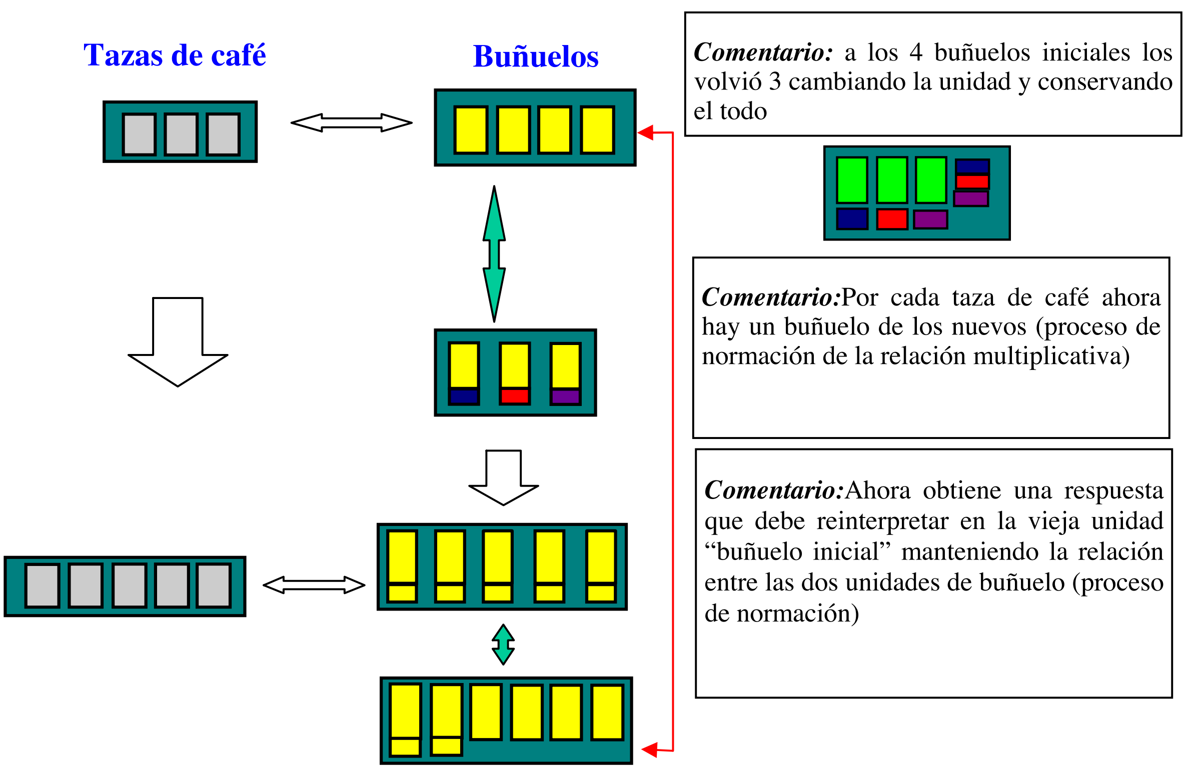
3 Comprender que el todo no cambia, que se conserva, no es suficiente; se requiere automatización de lo comprendido. Significa que los elementos constitutivos de las operaciones se le vuelvan "visibles" cuando se enfrenta a situaciones que requieran de estas operaciones. En tal sentido, se requiere trabajo orientado a "renunciar", de cierta forma, a formas de proceder que resultaban de alguna manera disconexas e incluso insuficientes,…

4 La experiencia tuvo lugar en la Escuela Pedagógica Experimental (Bogotá).




Describe la situación
mediante un diagrama

En seguida opera sobre las unidades de buñuelo interpretando y reinterpretando toda la situación




A partir de las soluciones descritas observamos tratamientos, de la multiplicación y la división basadas en los esquemas multiplicativos de unitización y normación sustentados a su vez en habilidades básicas requeridas para la recuperación de la unidad. Pero por otra parte, desde las representaciones gráficas se hace visible que estas operaciones ni achican ni agrandan, el todo se conserva y lo "único que ocurre es que la situación puede describirse desde distintas unidades, es decir que efectivamente ocurren cambios de unidad y por lo tanto, según la unidad que se escoja para la descripción ocurre que la numerosidad final depende en proporción inversa al tamaño de la unidad escogida, y entonces se recupera la idea, pero ahora de manera más compleja, que el producto agranda y que la división achica.

## Referencias Bibliográficas


*D´AMORE, B. (2006). Didáctica de la matemática. Bogotá: Magisterio [Trad. al Castellano de Angel Balderas, original publicado en italiano por Ed. Pitagora, 1999].*

*DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Advanced mathematical thinking (Tall, Ed) Dordrecht :Klower. pp. 95-123*

*FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in Science and mathematics. An educational approach. Dordrecht: Reidel*

*FISCHBEIN, E; DERI, M; NELLO, M y MARINO (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: Journal for research in mathematics education. 16 (1). 3-17 [Citado por Behr, Post y Lesh, 1994].*

*GRUPO MESCUD (2005). El pensamiento Multiplicativo: Una mirada de su Densidad y Complejidad en su desarrollo en el aula. Informe final de Investigación. Colciencias-IDEP y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Cód. 1130-11-14040).*

*GRUPO MESCUD (2006). Razonamiento multiplicativo: un camino posible. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. En pre-prensa.*

*HABERMAS, J. (1982). Teoría de la acción comunicativa, Vol. 1. Madrid :Taurus Humanidades.*

*HAREL G., BEHR M., POST T. and LESH R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations, 363-384. In: Harel and Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. N. Y.: State University of N.Y.*

*KRUGLANSKY, A & AJZEN, I. (1983). Bias and error in human judgment. In: European Journal of Social Psychology. Feb. 1-43*

*LAMON, S. (1994). Proportional reasoning. Unitizing and Norming, pp. 250-284. In: Harel and Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. New York: State University of N.Y.*

*LLINARES, S., SÁNCHEZ, V., & GARCÍA, M. (1994) Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. En: Revista Educación, 304, Mayo-Agosto de 1994, pp. 202- 222.*

*MORA, L. y ROMERO, J. (2004). ¿Multiplicación y división o cambio de unidad? En: Memorias del Sexto Encuentro de Educación Matemática. Medellín: ASOCOLME-Gaia. pp. 13-20*

*MORA, L et al. (2005). Aspectos Históricos y Psicológicos de la Multiplicación. En: Memorias del Sexto Encuentro de Educación Matemática. Medellín: ASOCOLME-Gaia. pp. 122-125.*

*PIAGET, J (1981). Epistemología genética y equilibración. Madrid: Fundamentos.*

*ROMERO, ROJAS, BONILLA y otros (2002). Aritmética y resolución de problemas en la formación de profesores. Cuaderno de trabajo (Grupo Mescud). Bogotá: Universidad Distrital .*

*SKEMP, R. (1993) Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid :Morata*

*TALL, D and TOMAS, M. (2002). What is a scheme? In: Intelligence, Learning and Understanding –A tribute a Richard Skemp.*