Procesos de representación de algunas estructuras algebraicas finitas

Carlos Julio Luque Arias
Lyda Constanza Mora Mendieta
Johana Andrea Torres Díaz
Leonardo Angel Bautista
Jaime Fonseca González
Juan Carlos Ávila Mahecha
Haydee Jiménez Tafur

Grupo de Álgebra Universidad Pedagógica Nacional.
luque.ca@gmail.com
jimenezhaydee@gmail.com

Resumen

Presentamos un conjunto de actividades matemáticas elementales para abstraer algunas estructuras finitas como los campos Z_2 y Z_3, y el concepto de isomorfismo de estructuras algebracicas. Se enfatiza en dos procesos: el paso de la estructura a los modelos y el paso de las representaciones a la estructura. Finalmente hacemos algunas aplicaciones a la lógica.

Palabras clave: proceso lógico, representación, estructura, isomorfismo.

Introducción

Pretendemos abstraer la estructura algebraica (Z_2, +) comparando varias representaciones de la misma; iniciaremos con operaciones en conjuntos con dos elementos, los cuales hasta ahora no hemos considerado como números, por ejemplo la idea de paridad en los números naturales, transformaciones del plano como reflexiones, entre otras, hasta lograr una caracterización de ella con tablas de Cayley[5] y de ellas obtener otra caracterización en términos de propiedades, lo que nos permite conseguir otras representaciones e identificar el mecanismo de paso de una representación a otra, conocido como isomorfismo, para luego aplicar este proceso a otras operaciones con dos elementos y obtener nuevas representaciones de ellas. Estudiamos las propiedades que tienen estas

[5] Ilse, D., Lehmann, I. & Schulz, W. (1984). *Gruppoide und funktionalgleichungen*. Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

estructuras con la ayuda del software *Propiedades algebraicas de estructuras finitas*[6] y notamos que estructuras isomorfas tienen las mismas propiedades algebraicas. Seguidamente estudiamos $(Z_2, \times)$ y, de manera similar a como se hizo para $(Z_2, +)$, partimos de algunas de sus representaciones para llegar a las propiedades que caracterizan esta estructura, basados en las tablas construidas. Posteriormente, establecemos un par de relaciones entre ellas. Luego, buscamos otras estructuras con dos elementos utilizando mecanismos ya propuestos como *el cambio de nombre* de cada uno de los elementos de una tabla en particular y modificaciones de éste, con ello obtenemos las 16 operaciones posibles en un conjunto con dos elementos; con base en esto, buscamos relaciones entre unas operaciones y otras.

A partir de las operaciones establecidas, buscamos propiedades necesarias y suficientes que nos permitan determinar la estructura, de una única manera, salvo isomorfismo; con ello, logramos hacer conjuntos de operaciones y estableciendo axiomas, demostramos algunos teoremas, haciendo así miniteorías al interior de este capítulo y nuevamente, buscamos relaciones entre las operaciones caracterizadas, formando así una estructura a partir de estructuras. Finalmente, presentamos una aplicación de Z_2 a la lógica.

Luego estudiaremos con los mismos métodos, estructuras formadas en conjuntos con tres elementos, pero esta vez aplicaremos las propiedades de las operaciones para resolver ecuaciones, de manera análoga a la que usamos en la secundaria para resolver ecuaciones entre números reales, con el propósito de establecer, que estos procedimientos no dependen de la naturaleza de los objetos que operamos, sino de las propiedades de las operaciones que entre ellos definamos.

Iniciamos con un conjunto con tres elementos cuyos elementos son conjuntos infinitos de números y entre ellos definimos una operación; luego presentamos una situación geométrica, en donde el conjunto está formado por tres funciones y la operación entre ellas es la composición usual; seguidamente abordamos un caso algebraico partiendo de las tres raíces cúbicas de la unidad y la operación es la multiplicación usual en los números complejos; y por último estudiamos un conjunto cuyos elementos son tres matrices con su multiplicación habitual como operación. De lo anterior, observamos que todos los ejemplos mencionados son representaciones de una estructura conocida como el grupo $(Z_3, +)$. Seguidamente estudiamos cómo las propiedades de grupo de $(Z_3, +)$ no determinan una sola representación sino tres, que igual se pueden caracterizar, con otras propiedades básicas.

Luego establecemos el mecanismo de paso de una representación a otra, lo que permite abstraer el concepto de isomorfismo y con él, un procedimiento para copiar operaciones que preserva sus propiedades. De nuevo recurrimos al software *Propiedades algebraicas de estructuras finitas* para verificar que las estructuras isomorfas tienen las mismas propiedades algebraicas. Después aplicamos lo aprendido con $(Z_3, +)$ a la estructura $(Z_3, \times)$;

---

[6] Elaborado por Leonardo Ángel, miembro del grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyo disco está adjunto en el libro de estructuras análogas.

ensamblando estas dos estructuras, obtenemos el campo (Z_3, +, ×) y resolvemos ecuaciones en él.

Posteriormente, para conseguir nuevas estructuras con tres elementos no isomorfas a las ya construidas, modificamos la condición de isomorfismo o usamos los axiomas con los que definimos estructuras con dos elementos. Finalmente, construimos estructuras algebraicas a partir de relaciones de orden, los retículos, y presentamos algunas aplicaciones de éstos en la construcción de lógicas trivalentes.

Referentes teóricos

En un conjunto con dos elementos podemos definir 16 operaciones (conectivos) posibles y caracterizarlas con algunas *propiedades básicas*, es decir, propiedades necesarias y suficientes para que la estructura quede determinada de manera única, salvo isomorfismos.

1. La conjunción y la disyunción

Las condiciones: Para todo x, y en {0, 1} se cumple que[7]

A1. $xx = x$ (Idempotencia)

A2. $xy = yx$, (Conmutativa)

determinan las operaciones conjunción $\wedge$, y disyunción $\vee$ de la lógica usual. La primera, A1, determina la diagonal principal:

$\wedge$	0	1
0	0	
1		1

$\vee$	0	1
0	0	
1		1

y la segunda dice que los elementos de la diagonal secundaria deben ser iguales y para ello hay dos posibilidades: o son 0 o son 1, la primera opción determina la conjunción y la segunda la disyunción. Estas dos operaciones también cumplen otras propiedades; ya vimos que además de idempotentes y conmutativas, son asociativas y tienen elemento idéntico,

[7] Omitiremos el símbolo de la operación, con el ánimo de simplificar la escritura, esto quiere decir que xy representa x © y o xx representa x © x , la operación se hace explícita en el texto.

pero también cumplen propiedades que habitualmente no se mencionan[8] ni se estudian, por ejemplo:

i. Identidad I de Stein[9]: $x(xy) = yx$
ii. Identidad II de Stein: $x(yx) = (yx)y$
iii. Identidad I de Schröder[10]: $x(xy) = (xy)y$
iv. Elasticidad: $x(yx) = (xy)x$
v. Asociativa cíclica I: $x(yz) = z(xy)$
vi. Asociativa cíclica II: $x(yz) = (zx)y$
vii. Identidad de Abel – Graβmann I: $x(yz) = z(yx)$
viii. Identidad de Abel – Graβmann II: $x(yz) = (yx)z$
ix. Permutabilidad a izquierda: $x(yz) = y(xz)$
x. Permutabilidad a derecha: $(xy)z = (xz)y$
xi. Propiedad del producto reducido[11]: $(xy)z = x(zy)$
xii. Autodistributividad a izquierda: $x(yz) = (xy)(xz)$
xiii. Autodistributividad a derecha: $(xy)z = (xz)(yz)$
xiv. Autodistributividad a izquierda abeliana: $x(yz) = (xy)(zx)$
xv. Autodistributividad a derecha abeliana: $(xy)z = (zx)(yz)$
xvi. Bisimetría: $(xy)(uv) = (xu)(yv)$

2. La flecha de Peirce y la barra de Sheffer

Las condiciones: Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A2. $xy = yx$, (Conmutativa)

A3. $xx = y$ con $x \neq y$.

determinan las operaciones barra de Sheffer $|$, u operador NAND, y funtor de Peirce[12] $\downarrow$, u operador NOR de la lógica bivalente. La condición A3. determina la diagonal principal:

[8] Ilse, D., Lehmann, I & Schulz, W. (1984). *Grupoide und funktionalgleichungen*. Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
[9] Stein, S. (1957). *On the foundations of quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**. p.p. 228-256.
[10] Schröder, E. (1873). *Lehrbuch der arithmetik und algebra fuer lehrer und studierende*, Band 1, Leipzig: Teubner.
[11] El original en alemán es *Eingewandtes Produkt*.
[12] El aporte de Peirce a la lógica también incluye el invento de la lógica de relaciones, la lógica de cuantificadores y la lógica trivalente; estudió la axiomatización del cálculo proposicional, el cálculo implicativo débil, la negación intuicionista, las tablas de verdad, los conectivos completos, las definiciones reticulares y la notación de los conectivos proposicionales.

$\mid$	0	1
0	1	
1		0

$\downarrow$	0	1
0	1	
1		0

y la condición A2. dice que los elementos de la diagonal secundaria deben ser iguales y para ello hay dos posibilidades: o son 1 o son 0, la primera opción determina la barra y la segunda el funtor. Estas dos operaciones cumplen, de las propiedades enunciadas anteriormente, sólo la propiedad elástica, que es deducible de la propiedad conmutativa como lo hicimos en el teorema T1. A pesar de que la flecha o funtor de Peirce carece de casi todas las propiedades enunciadas para otras operaciones, esta operación permite expresar todas las demás operaciones lógicas en términos de ella, por ejemplo: La negación: $\neg p = p \downarrow p$; la disyunción: $p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$; y la conjunción: $p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

3. La implicación y la diferencia recíproca

Las condiciones: Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A5. $xy = y$ con $x \neq y$

determinan las operaciones *implicación* $\rightarrow$, y *diferencia recíproca* $\bullet\!-$, y las únicas propiedades de las enunciadas que cumplen es que son permutables a izquierda y auto distributivas a izquierda, esto es: $x(yz) = y(xz)$ y $x(yz) = (xy)(xz)$ respectivamente.

4. La diferencia y la implicación recíproca

Las condiciones: Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A6. $xy = x$ con $x \neq y$.

determinan la estructura de las operaciones *diferencia* $-\!\bullet$, e *implicación recíproca* $\leftarrow$, y las únicas propiedades de las enunciadas que cumplen es que son permutables a derecha y auto distributivas a derecha, esto es: $(xy)z = (xz)y$ y $(xy)z = (xz)(yz)$ respectivamente.

5. La tautología y la contradicción

Las condiciones: Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A7. $xy = yx = xx$

Determinan las operaciones $\perp$, $\top$, que forman un semigrupo conmutativo.

6. La equivalencia y la disyunción exclusiva

Las condiciones: Para todo x, y en $\{0, 1\}$ se cumple que

A4. $xx = yy$ (Unipotencia)

A8. $xy = yx \neq xx$

determinan los grupos abelianos $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$, que cumplen además la propiedad de elasticidad, consecuencia de la conmutatividad; las asociativas cíclicas I y II, las identidades de Abel–Graβmann I y II, la permutabilidad a izquierda y a derecha, la propiedad del producto reducido y la bisimetría, que son consecuencias inmediatas de la asociatividad y de la propiedad conmutativa.

En un conjunto con tres elementos es posible definir 3^9 operaciones y una de ellas es la que corresponde a la estructura $(Z_3, +)$ y podemos caracterizarla con algunas propiedades, salvo isomorfismos, por ejemplo:

1. Un conjunto con tres elementos y una operación, que tiene estructura de *grupo*.
2. Un conjunto con tres elementos y una operación, que tiene estructura de monoide cancelativo.
3. Un conjunto con tres elementos y una operación, que tiene elemento idéntico y es cancelativa.
4. Un conjunto con tres elementos y una operación, que tiene estructura de loop[13].
5. Un conjunto con tres elementos y una operación, con elemento idéntico a y para los otros dos elementos b y c distintos de a, se cumple que $b^2 = c$, $c^2 = b$ y $cb = bc = a$.

---

[13] Un *loop* es un conjunto H con una operación +, tal que para todo a de H, las funciones L_a: $x \to a + x$ y R_a: $x \to x + a$ son funciones biyectivas en H; dicho de otra forma si para todo a y b en H, las ecuaciones $a + x = b$ y $y + a = b$ tienen soluciones únicas. El concepto de *Loop* es de A. ALBERT (Albert, A., *Quasigroups I*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943) 507 – 519.). Algunos (Bol, G., *Gewebe und gruppen*, Math. Ann. **114** (1937), 414 – 431.) lo llaman *Dominio normado* (Normbereich).

Metodología

Presentamos un problema general y a partir de él mediante preguntas pretendemos recoger información en relación con el objeto matemático en cuestión, sobre ideas, soluciones o propuestas de los asistentes que permitan pasar de las representaciones a la estructura y viceversa.

Referencias bibliográficas

[1] Birkhoff, G & Bartee, T., (1970). Modern applied algebra. New York: McGraw Hill.

[2] Braunss, G. & Zubrod, J., (1974). Einfürung in die booleschen algebren. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft.

[3] Dubreil, P., (1965). Lecciones de álgebra moderana. México: Editorial Reverte S. A.

[4] Fraleigh, J., (1999). A first course in abstract Algebra. Sixth Edition. New York: Addison-Wesley.

[5] Herstein, I., (1970). Álgebra moderna. México: Editorial F. Trillas.

[6] Ilse, D., Lehmann, I. & Schulz, W., (1984). Gruppoide und funktionalgleichungen. Berlín: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[7] Lentin, A. & Rivaud, J., (1971). Álgebra Moderna. Madrid: Aguilar.

[8] Lukasiewicz, J., (1970) Selected works, Amsterdam: North Holland Publishing Co.

[9] Luque, C., Mora, L. & Torres, J., (2002). Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir. Bogotá, D. C.: Universidad Pedagógica Nacional.

[10] Luque, C., Mora, L. & Torres, J., (2005). Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir e invertir. Bogotá, D. C.: Universidad Pedagógica Nacional.

[11] Luque, C., Mora, L. & Torres, J., (2006). Estructuras análogas a los números reales. Bogotá, D. C.: Universidad Pedagógica Nacional.

[12] Mostow, G., Sampson, J. & Meyer, J. P., (1963). Fundamental Structures of Algebra. New York: McGraw Hill.

[13] Oostra, A., (2005) Lógicas de Lukasiewicz y sus álgebras, en Huellas en los encuentros de Geometría y Aritmética, Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

[14] Reichenbach, H., (1932) Wahrscheinleighkeitslogik, Berlin: Berliner Berichte.

[15] Stein, S., (1957). On the foundations of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 85.

[16] Warner, S., (1990). Modern Algebra. New York: Dover.

[17] www.univalle.edu.co/~robruiz/TEORIA%20DE%20LA%20ADJUNCION.pdf. Ruiz, C., Teoría de la adjunción. (Enero 31 de 2007).