REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 1, 3-42

UNA MIRADA AL TRATAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD EN TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS

EDGAR A. GUACANEME

En este artículo se presenta un análisis de algunos textos escolares de matemáticas para grado séptimo que abordan el estudio de la proporcionalidad. Este análisis contempla explícitamente tres objetos de estudio: la estructura general del texto, la configuración interna de las unidades temáticas a través de las cuales se desarrolla el estudio de la proporcionalidad y el tratamiento de algunos temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de la proporcionalidad.

INTRODUCCIÓN

En el marco del Magister en Educación – Énfasis en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle (Colombia), se desarrolló la tesis titulada "Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas" (Guacaneme, 2001). A través de este trabajo académico, dirigido por el profesor Jorge Arce, se intentó contestar la pregunta: ¿Desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas, cómo es el tratamiento que de la proporción y la proporcionalidad se hace en las teorías matemáticas y en los textos escolares de matemáticas?

En la primera parte del trabajo de tesis se abordaron y recapitularon algunos tratamientos formales o seudoformales de la proporción y la proporcionalidad; en la segunda parte del estudio —reportada parcialmente en este artículo— se desarrolló el análisis del tratamiento de la proporción y la proporcionalidad en algunos textos escolares de matemáticas.

Esta segunda parte comportó la selección de los textos que serían objeto de estudio, y la identificación, análisis y ubicación de las diferentes formas de expresión de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en tales textos.

Se seleccionaron cinco textos correspondientes al grado séptimo de la educación básica, a saber: *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* (Londoño y Bedoya, 1988), *Dimensión Matemática 7* (Londoño, Guarín y Bedoya, 1993), *Procesos Matemáticos 7* (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995), *Matemáticas McGraw–Hill 7º* (Beristain y Campos,

1997) y *Logros Matemáticos. Séptimo grado* (Contreras, Lizcano, García, Cano y Flechas, 1997). Estos textos pretenden responder a disposiciones curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1975; MEN, 1989), aunque en la mayoría de ellos no sea explícito a cuál disposición responden.

La actividad de determinación de variables para el análisis de los textos y el análisis mismo discurrieron de manera dialéctica. Se definió así que el análisis se movilizara desde una visión panorámica del texto hacia aspectos muy específicos del tratamiento de la proporcionalidad; se asumieron entonces tres niveles de aproximación a los textos: el primero daría cuenta de sus estructuras generales, el segundo, de las estructuras de las unidades temáticas a través de las cuales se propicia el estudio de la proporcionalidad y el tercero presentaría una mirada al tratamiento de algunos temas centrales en esta temática. Estos tres niveles definen la estructura a través de la cual se presentan a continuación algunos resultados del análisis de los textos seleccionados.

ESTRUCTURA TEMÁTICA GENERAL DEL TEXTO

En este tópico se consideraron fundamentalmente la ubicación del capítulo —o capítulos— sobre proporcionalidad y su posible relación con los otros capítulos que configuran el texto. En primer lugar se reporta —de manera no muy exhaustiva— la organización sugerida explícitamente en dos propuestas curriculares colombianas para las matemáticas de grado séptimo (MEN, 1975; MEN, 1989) y luego se presenta la organización temática de los textos.

Mirada a las propuestas curriculares

En el programa de matemáticas para el Curso II: Aritmética y Geometría (MEN, 1975, pp. 4-7) se reportan trece unidades temáticas, dos de las cuales (resaltadas en negrilla) abordan temas relativos a la proporcionalidad. Éstas son en su orden:

Unidad Nº 1: El número entero y el número racional
Unidad Nº 2: Sistema métrico
Unidad Nº 3: Unidades de superficie
Unidad Nº 4: Volumen
Unidad Nº 5: Unidades de capacidad y de peso
Unidad Nº 6: El tiempo (Duración)
Unidad Nº 7: **La proporcionalidad y sus aplicaciones**
Unidad Nº 8: **Tanto por ciento - Interés - Descuento**
Unidad Nº 9: Cambio

Unidad Nº 10: Nociones de contabilidad y comercio
Unidad Nº 11: Geometría plana
Unidad Nº 12: Volumen
Unidad Nº 13: Simetría

En la propuesta de programa curricular (MEN, 1989, pp. 31–32) se presentan los contenidos matemáticos organizados tanto en ocho sistemas (numéricos, geométricos, métricos, análisis real[1], de datos, lógicos, conjuntos y, relaciones y operaciones), como en cinco unidades temáticas, una de las cuales (resaltada en negrilla) aborda el estudio de la proporcionalidad:

Unidad I: Los números enteros
Unidad II: Los números racionales
Unidad III: **Proporcionalidad y sus aplicaciones**
Unidad IV: Geometría y medición
Unidad V: Combinatoria y estadística. Diferentes tipos de condiciones y de expresiones de cuantificaciones en el lenguaje ordinario

Como puede observarse, si bien el número de unidades temáticas en cada propuesta es radicalmente diferente, no lo es la cantidad de temas tratados. Las cuatro primeras unidades de la propuesta de 1989 parecen configurarse por los temas abordados en doce unidades de la propuesta de 1975, en tanto que la quinta unidad parece introducir temas no considerados en la de 1975; en particular, las unidades séptima y octava de la propuesta de 1975 se han compilado en la tercera unidad de la propuesta de 1989.

De otra parte, se nota que si el orden de aparición de las unidades temáticas se corresponde con el orden en que se abordan escolarmente, en ambas propuestas el estudio de la proporcionalidad aparece posterior al estudio de los números enteros y de los números racionales y anterior al estudio de los aspectos geométricos (no métricos). De igual forma, se nota que el estudio de los aspectos métricos se ubica precediendo a las unidades relativas a la proporcionalidad en la propuesta de 1975, pero no en la de 1989.

Ahora bien, en ninguna de las dos propuestas se explicitan los argumentos que respaldan la cantidad de unidades temáticas y su orden relativo; tampoco se encontraron referencias específicas respecto a la cohesión que existiría entre las diferentes unidades temáticas (salvo una consideración acerca de la relación entre los enteros y los racionales que aparece en la pro-

1. En el sistema de análisis real se encuentran explícitamente referenciados los temas de razón y proporción.

puesta de 1989). Esta ausencia de información explícita limita el análisis que se puede hacer, a la vez que deja abierta una puerta de indagación de aspectos curriculares en torno a la organización temática de las matemáticas de grado séptimo, en las propuestas curriculares colombianas.

Mirada a los textos escolares

La mirada a la estructura temática general implicó identificar las tablas de contenido de cada uno de los textos seleccionados y ubicar aquellos capítulos que se refieren de manera explícita a la proporcionalidad. A continuación se reseñan dos de tales tablas:

Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7

Capítulo 1:	Conjunto de los números enteros Z
Capítulo 2:	Relaciones, operación binaria
Capítulo 3:	Números racionales Q
Capítulo 4:	Unidades de longitud. Perímetro
Capítulo 5:	Unidades de superficie
Capítulo 6:	Área de algunas regiones planas
Capítulo 7:	Unidades de volumen. Volumen de cuerpos geométricos
Capítulo 8:	Unidades de capacidad. Unidades de peso
Capítulo 9:	Longitud y tiempo
Capítulo 10:	**Proporcionalidad**
Capítulo 11:	**Aplicaciones de la proporcionalidad**
Capítulo 12:	Simetría. Traslación. Rotación

Logros Matemáticos. Séptimo grado

Capítulo uno:	Sistemas lógicos y de conjuntos
Capítulo dos:	Sistema de los números enteros
Capítulo tres:	Sistema de los números racionales
Capítulo cuatro:	Sistemas de medición
Capítulo cinco:	Sistemas geométricos
Capítulo seis:	**Sistemas analíticos**
Capítulo siete:	Sistemas de datos

En primer lugar, la comparación de las estructuras temáticas de los textos con las estructuras de las propuestas curriculares permitió explorar qué tanto y qué tan bien los textos retoman la configuración general de las propuestas.

Al examinar el número de unidades temáticas que configuran los textos se concluyó que ninguno de ellos presenta un número igual al de las dos propuestas. Además, se estableció que en los cinco textos se incluyen unidades temáticas no contempladas en las propuestas y también se excluyen algunas que sí lo están; por ejemplo, en *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7*, se excluye la unidad "Nociones de contabilidad y comercio" incluida en la propuesta de 1975 y en *Dimensión Matemática 7*, se incluyen dos unidades tituladas respectivamente "Lógica" y "Conjuntos" y se excluye la unidad "Combinatoria y estadística" vinculada en la propuesta de 1989. En cuanto al número de unidades temáticas dedicadas a la proporcionalidad, se observó que tres de los textos (*Dimensión Matemática 7*, *Matemáticas McGraw–Hill 7º* y *Logros Matemáticos. Séptimo grado*) presentan el mismo número de unidades que configuran la propuesta que parecen desarrollar; de ellos, sólo *Dimensión Matemática 7* retoma el título sugerido en la propuesta. Estos hechos constituyen indicios que hacen dudar de la correspondencia de los textos con alguna de las propuestas curriculares.

En segundo lugar, la comparación de las estructuras temáticas de los textos permitió evidenciar que son similares entre sí en algunos aspectos, pero difieren en otros.

En efecto, en todos los textos, el estudio de la proporcionalidad está precedido del estudio de los números enteros y de los racionales, sin embargo, no es explícita la justificación de este hecho; más aun, al hacer una lectura de las unidades temáticas de proporcionalidad no se identificaron nexos entre estos conjuntos numéricos y la proporcionalidad, ya que sólo en un bajísimo porcentaje de los ejercicios y ejemplos se utilizan números enteros negativos o racionales negativos y siempre se trabajan con magnitudes absolutas (es decir, nunca se trabajan con magnitudes relativas). Por otra parte, la ubicación del tema de la proporcionalidad es muy variada con respecto a las unidades temáticas que versan sobre aspectos métricos, geométricos o estadísticos; por ejemplo, en dos textos los aspectos estrictamente geométricos aparecen después de la proporcionalidad, en otros dos aparecen precediendo el estudio de ésta y en un quinto se da el caso en que aparecen tanto antes como después del estudio de la proporcionalidad. Para aquellas unidades tampoco es posible identificar los nexos explícitos con la(s) que versa(n) sobre la proporcionalidad.

ESTRUCTURA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS

En este tópico se consideró fundamentalmente la pertenencia de los temas a la(s) unidad(es) temática(s) que trata(n) sobre proporcionalidad, su disposición dentro de ella(s) y las relaciones entre éstos. Las dos propuestas curriculares y los cinco textos seleccionados fueron objeto de esta mirada; sin embargo, en este artículo no se reporta el resultado para la totalidad de los textos.

Mirada a las propuestas curriculares

Al igual que se hizo en la sección anterior, se mirará la configuración en la organización sugerida en las propuestas curriculares de 1975 y 1989.

En primer lugar, cabe señalar que en el programa de matemáticas para el Curso II Aritmética y Geometría (MEN, 1975, p. 6) se reporta una unidad temática que de manera explícita aborda temáticas relativas a la proporcionalidad y una unidad que se puede reconocer como un campo específico de aplicación de la proporcionalidad. La configuración temática interna de estas unidades se puede observar a continuación:

Unidad Nº 7– **La proporcionalidad y sus aplicaciones**

7.2 *Contenido*

- 7.2.1 Producto y cociente de una cantidad por un entero
- 7.2.2 Razón de dos cantidades homogéneas
- 7.2.3 Serie de razones iguales. Propiedad fundamental
- 7.2.4 La igualdad de razones equivalentes bajo el nombre de proporción
- 7.2.5 Cálculo del término desconocido de una proporción
- 7.2.6 Propiedades de las proporciones
- 7.2.7 Magnitudes directamente proporcionales
- 7.2.8 Regla de tres simple directa
- 7.2.9 Problemas sobre tanto por ciento y porcentaje
- 7.2.10 Magnitudes inversamente proporcionales
- 7.2.11 Regla de tres inversa
- 7.2.12 Regla de tres compuesta
- 7.2.13 Repartos proporcionales directos e inversos
- 7.2.14 La regla de compañía

Unidad Nº 8– **Tanto por ciento - Interés - Descuento**

8.2 *Contenido*

- 8.2.1 Tanto por ciento
- 8.2.2 Tanto por ciento más
- 8.2.3 Tanto por ciento menos
- 8.2.4 Interés simple
- 8.2.5 Concepto de descuento
- 8.2.6 Descuento comercial

Ahora bien, la tercera unidad “Proporcionalidad y sus aplicaciones” de la propuesta curricular de 1989 se plantea como una ampliación del estudio de la proporcionalidad iniciado en quinto grado. La propuesta trabaja fundamentalmente con operadores multiplicativos ampliadores o reductores; también enfatiza el estudio de la proporcionalidad directa y aborda la proporcionalidad inversa relacionada con situaciones que no corresponden a funciones lineales. El porcentaje, el interés y el reparto proporcional, lo mismo que los problemas de "regla de tres" se tratan mediante la aplicación de operadores multiplicativos.

Ante la ausencia de una tabla temática de esta tercera unidad, se revisó el contenido de ésta y así se pudo determinar con más precisión los temas propuestos y su estructuración. Como resultado de esta revisión se sostiene que hay seis apartados en la unidad. El primero aborda el estudio de algunos conceptos fundamentales de proporcionalidad, tales como razón entre números, razón entre medidas de una misma magnitud, función, correlación y proporcionalidad (directa e inversa), razón como operador, proporciones. El segundo apartado trata los operadores multiplicativos, las funciones lineales y la linealidad como propiedad de los operadores. En el tercer apartado se trabajan el tanto por ciento como operador multiplicativo, algunos problemas de porcentaje, la tasa de interés como un porcentaje, algunos problemas de interés y el uso de operadores multiplicativos para cambios de moneda. En el cuarto se estudia el reparto proporcional directo a partir de la aplicación de operadores multiplicativos y el procedimiento ligado a la obtención de la cuarta proporcional. El quinto apartado aborda el estudio de las funciones lineales, las funciones de gráfica lineal y las funciones de gráfica no lineal. El último apartado trata las magnitudes inversamente correlacionadas y las magnitudes inversamente proporcionales.

Una mirada comparativa a estas dos propuestas permite establecer que la diferencia fundamental entre ellas, en lo que respecta al contenido temático, radica en el papel central que juega la idea de operador multiplicativo y la inclusión de la linealidad en la propuesta de 1989. También se puede establecer que, en cuanto a la organización temática, ambas propuestas abordan el estudio de la razón y la proporción, y posteriormente el estudio de la proporcionalidad y sus aplicaciones, aunque en la propuesta de 1975 no es muy específico cuáles son las aplicaciones y por qué aparecen en unidades temáticas diferentes.

Por otra parte, en ninguna de las unidades de las dos propuestas estudiadas se encontraron explícitamente reseñados los nexos entre los temas que las configuran, de modo que se pudiera determinar una ruta y cohesión entre los temas. Este hecho es mucho más evidente en el caso de la propuesta curricular de 1975, ya que en ésta sólo aparecen los temas listados en una numeración de un solo nivel, en la cual no es evidente siquiera la jerarquía temática. En el caso de la propuesta curricular de 1989, el nexo temático parecer ser la idea de razón, en tanto operador multiplicativo, idea que permite encontrar la cuarta proporcional, que determina la proporcionalidad y la linealidad y que compila diversos tipos de situaciones de proporcionalidad.

Mirada a los textos escolares

Para determinar las estructuras internas de los textos, inicialmente se retomaron los títulos de los apartados que de manera explícita configuran los capítulos o unidades temáticas previamente identificadas. Dos ejemplos de tales estructuras explícitas son:

Dimensión Matemática 7

10. La proporcionalidad y sus aplicaciones

10.1 Razones
- 10.1.1 Concepto de razón
- 10.1.2 Razones iguales

10.2 Proporciones
- 10.2.1 Proporciones
- 10.2.2 Propiedades de las proporciones

10.3 Magnitudes

10.4 Correlación y proporcionalidad

10.5 La función lineal y la función afín
- 10.5.1 La función lineal
- 10.5.2 Propiedades de la función lineal
- 10.5.3 La función afín

10.6 Longitud de una circunferencia

10.7 Proporcionalidad inversa

10.8 Aplicaciones de la proporcionalidad
- 10.8.1 Regla de tres simple
- 10.8.2 Regla de tres compuesta
- 10.8.3 Repartos proporcionales
- 10.8.4 Tanto por ciento
- 10.8.5 Interés simple

Matemáticas McGraw–Hill 7º

Capítulo 3: Funciones y variación proporcional

1. Funciones
2. Variación directamente proporcional
3. Cálculo de valores de variables directamente proporcionales
4. Variación inversamente proporcional
5. Cálculo de valores de variables inversamente proporcionales

La estructura reseñada para cada texto si bien da cuenta de los temas abordados en cada unidad temática, sólo lo hace a través de un listado de temas que, salvo en el caso de uno de los textos, tienen la misma jerarquía. En efecto, en cuatro textos (Londoño y Bedoya, 1988; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995; Beristain y Campos, 1997; Contreras et al., 1997) todos los temas se reportan en listados ordenados en numeración de un solo nivel y sólo en uno (Londoño et al., 1993) se utiliza un listado de dos niveles. Así, estos listados no expresan las posibles relaciones entre los temas ni los niveles de subordinación entre éstos.

Quizá en un intento por explicitar estas relaciones temáticas, tres de los textos presentan sendos diagramas. En uno de los textos (Londoño et al., 1993, p. 235) se intenta dar cuenta del contenido de toda la unidad temática a través de un cuadro sinóptico, en el que si bien se genera una jerarquía de tres órdenes para cada uno de los conceptos centrales (razones y proporciones), no contiene una explicación adjunta que justifique la ubicación de las temáticas y que presente las relaciones entre éstas. En otro texto (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, pp. 99, 111 y 123), para una de las tres unidades temáticas que versan sobre proporcionalidad, se presentan "diagramas de procesos" que expresan sendas sucesiones lineales de temas y aplicaciones de éstos que no dan cuenta de mayores relaciones y/o vínculos temáticos. En un tercer texto (Contreras et al., 1997, p. 291), se pretende describir un "mapa conceptual" de la temática estudiada en el capítulo; sin embargo, como lo manifiestan los mismos autores, es necesario completarlo con los otros temas abordados en el capítulo y, por tanto, no da información suficiente sobre la estructura temática.

Al valorar esta situación de descripción se consideró que ni las tablas de contenido, ni los diagramas de conceptos o procesos, ni los mapas conceptuales parciales —todos ellos exhibidos en los textos— logran explicitar las relaciones entre los temas. Por ello, se diseñó e implementó una estrategia que permite, cuando menos, lograr una visión general de los contenidos implicados en las unidades temáticas y de sus posibles vínculos. Esta estrategia consiste en describir el texto matemático, representar de manera esquemática los temas y sus vínculos y valorar algunos hechos que allí se observan. A continuación se presentan los resultados para dos de los textos analizados.

Dimensión Matemática 7

Como se pudo ver a través de la tabla de contenido, este texto aborda el estudio de la proporcionalidad en un solo capítulo, denominado "La proporcionalidad y sus aplicaciones", dividido en ocho apartados.

En el primer apartado (10.1 Razones) inicialmente aparece reseñado y definido el concepto de *razón entre números*. Luego se usa (sin definición previa) la idea de igualdad entre razones para definir *serie de razones iguales* y de éstas se enuncia su *propiedad fundamental*. En el apartado 10.2 Proporciones, se presenta el concepto de *proporción*, se hace una distinción entre *proporción continua* y *ordinaria*; se formula *la propiedad fundamental de las proporciones*, y se ejemplifica cómo a partir de esta propiedad, por un lado, se pueden obtener otras proporciones y, por otro, *calcular un término desconocido de una proporción* ordinaria o continua. En el apartado 10.3 Magnitudes, brevemente se aborda la idea de *magnitud*. A continuación, en el apartado 10.4 Correlación y proporcionalidad, atendiendo a la idea (no definición) de *razón constante entre las magnitudes* aunada a la definición de *magnitudes correlacionadas directamente* se define cuándo dos *magnitudes son directamente proporcionales*; en seguida, se establece que la *representación gráfica* (cartesiana) de la proporcionalidad directa entre dos magnitudes es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y se presenta una definición nominal de *función lineal*. Adicionalmente, se introduce la idea de proporcionalidad directa entre magnitudes obtenidas a partir de la diferencia de valores de otras magnitudes. El apartado 10.5 La función lineal y la función afín, inicia con la definición de *función lineal* y reseña algunos aspectos de la *gráfica de la función lineal*, al igual que define *pendiente de la recta*; en seguida, reporta dos *propiedades de la función lineal*; y termina definiendo la *función afín*. El tratamiento del número *π como razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro*, así como la *fórmula de la longitud de la circunferencia* son los temas presentados en el apartado 10.6 Longitud de la circunferencia. Después, en el apartado 10.7 Proporcionalidad inversa, bajo la definición de *magnitudes correlacionadas inversamente* y la idea (sin definición) de *producto de magnitudes constante* (llamado *constante de proporcionalidad*) se define cuándo dos *magnitudes son inversamente proporcionales*; posteriormente se formula una *propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales* que implica la idea (no definida previamente) de *razón entre dos valores de una misma magnitud*. El último apartado (10.8 Aplicaciones de la proporcionalidad) comienza con el tratamiento de la *regla de tres simple*, tanto *directa* como *inversa*; en ambas —a partir del reconocimiento del tipo de correlación y proporcionalidad— se plantea una proporción con un valor desconocido y luego éste se calcula; también se induce una manera de solucionar este problema a través del uso de *operadores multiplicativos*. Luego se establecen las condiciones de la *regla de tres compuesta* —en general— y de cuándo ésta es *directa*, *inversa* o *mixta*; para solucionar los problemas de este tipo también se recurre a los operadores multiplicativos. Posteriormente, a partir del reconocimiento del tipo de proporcionalidad, de la escritura de razones (o productos iguales) y del uso de la propiedad fundamental de la serie de razones iguales, se resuelven problemas de *reparto proporcional*. En seguida, se establece el *tanto por ciento* como un operador fraccionario multiplicativo y bajo esta interpretación se resuelven algunos problemas; otros problemas utilizan otra interpretación del tanto por ciento, ligada a la idea de proporción generada por una situación de proporcionalidad directa. Finalmente, se aborda el tratamiento del *interés simple*, tema en el cual se establecen los términos *capital*, *interés*, *tiempo*, y *rata, tasa porcentual o tanto por ciento*, entre los cuales se enuncia la existencia de correlación directa y se presenta una *fórmula para calcular el interés simple* (en la que interviene un operador multiplicativo) que los relaciona, fórmula que se utiliza para calcular el capital, el tiempo o la rata.

La representación esquemática de la organización temática del capítulo 10 puede verse en la Figura Nº 1. En ella los recuadros blancos representan los temas definidos explícitamente en el texto, mientras que los grises expresan un tratamiento del concepto en el texto por vía no definicional, o tácita; asimismo, las líneas continuas representan nexos presentes en el texto, en tanto que las líneas entrecortadas expresan nexos no existentes y la letra "A" encerrada en una pequeña circunferencia sirve también de conector.

La estructura temática de la Figura Nº 1 permite visualizar algunos aspectos que en la versión listada de la tabla de contenido no se alcanzan a percibir.

En primer lugar, es posible apreciar la existencia de dos bloques temáticos relativamente inconexos. Uno de ellos está determinado por el tratamiento de la razón y la proporción en el contexto aritmético; allí se ubican los temas de los apartados 10.1 y 10.2 (Razones y Proporciones, respectivamente). El otro bloque aborda el estudio de la proporcionalidad entre magnitudes, y de manera preponderante, de las magnitudes directamente proporcionales; contiene los temas de los apartados 10.3 a 10.8 (i.e., Magnitudes, Correlación y proporcionalidad, La función lineal y la función afín, Longitud de una circunferencia, Proporcionalidad inversa y Aplicaciones de la proporcionalidad). La conexión explícita entre estos dos bloques se manifiesta sólo en dos oportunidades, a saber: en el tratamiento de los repartos proporcionales a través del uso de la propiedad fundamental de las series de razones iguales y en el cálculo de un término desconocido de una proporción determinada por valores de las magnitudes implicadas en un problema de regla de tres. En estos dos casos se usan elementos de las razones o las proporciones numéricas en un contexto no estrictamente aritmético, es decir, en el contexto de las magnitudes.

En segundo lugar, en la estructura temática de la Figura Nº 1 es posible apreciar que algunos de los conceptos usados para definir temáticas centrales del capítulo no exhiben un tratamiento siquiera tácito en el texto. Es el caso de los conceptos de *razón*, *igualdad entre razones*, *razón de valores de*

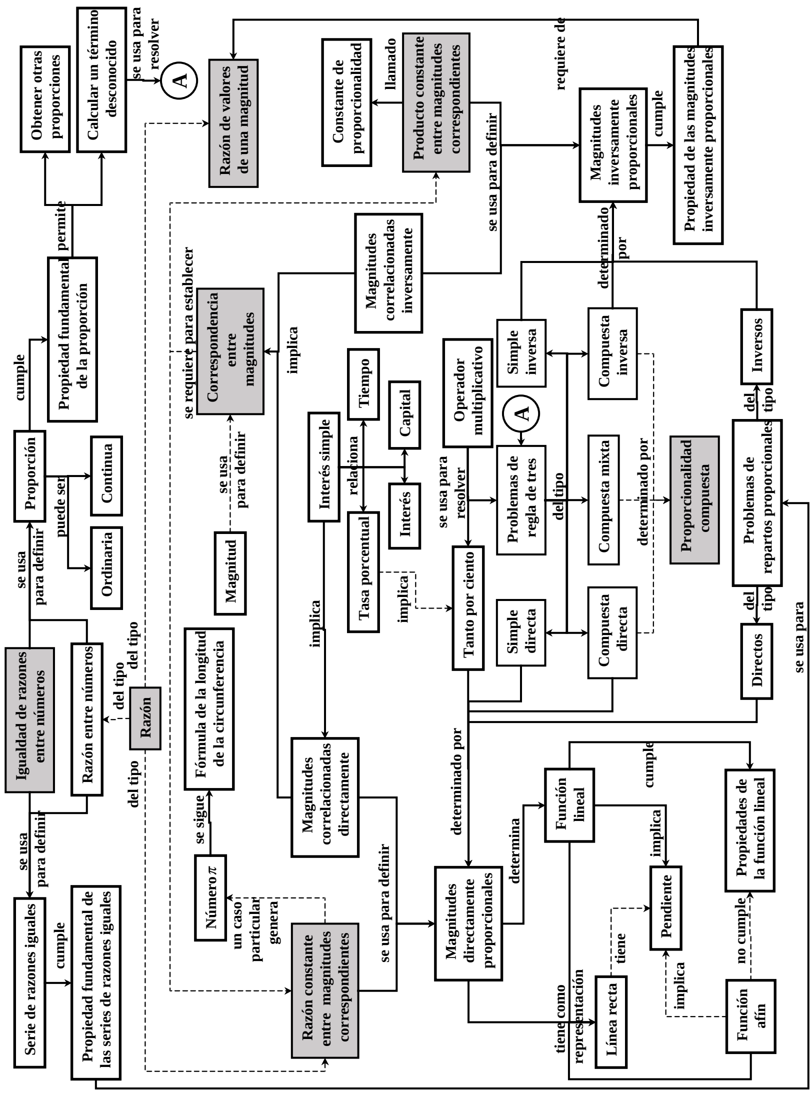

Figura Nº 1. Estructura temática del capítulo 10

una magnitud, correspondencia entre magnitudes, razón entre magnitudes correspondientes, producto entre magnitudes correspondientes y *proporcionalidad compuesta*. Una mirada a la estructura permite evidenciar, por ejemplo, cómo los conceptos de razón y producto constante entre magnitudes correspondientes —usados para definir respectivamente magnitudes directa e inversamente proporcionales— no están definidos para el lector del texto; su definición depende de la posible extrapolación de una interpretación de la idea (tácita) de igualdad entre razones, e igualdad entre números (producto), procedente del contexto aritmético.

En tercer lugar, se identifica que dos temas abordados en sendos apartados aparecen aislados y, en cierto sentido, independientes de las demás temáticas tratadas explícitamente en este capítulo. Por un lado se tiene el caso de la *magnitud*; por otro, la construcción del *número* π y su relación con la *fórmula de la circunferencia*. A este respecto, sorprende cómo el tratamiento que se hace del número π como el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro, no se relaciona con la posibilidad de considerar cada una de estas longitudes como magnitudes correlacionadas directamente con razón constante para cada pareja de valores correspondientes, es decir, como magnitudes directamente proporcionales. De la misma manera sorprende el hecho de no considerar la idea de constante de proporcionalidad para magnitudes directamente proporcionales, sino sólo para las inversamente proporcionales; este hecho imposibilita considerar al número π como la constante de proporcionalidad que describe la relación entre las dos magnitudes relativas a la circunferencia reseñadas antes, o tal vez, como operador multiplicativo.

Un cuarto aspecto es el papel utilitario que cumple la idea de operador multiplicativo. Éste es usado para la solución de algunos (muy pocos) problemas de regla de tres y de tanto por ciento, pero en ningún momento se establece una relación conceptual con las magnitudes directa o inversamente proporcionales; relación que quizá podría llegar a darse con los conceptos de razón y producto constante entre magnitudes correspondientes.

Finalmente, un quinto aspecto es el tratamiento marginal de la función lineal y de la función afín. Muestra de ello es la falta de nexos de las propiedades de la función lineal (aditividad y homogeneidad) con las demás temáticas abordadas en el capítulo o la inutilidad de las gráficas de las magnitudes directamente proporcionales en la solución de problemas de "aplicación" de la proporcionalidad.

Matemáticas McGraw–Hill 7º

Como se reseñó anteriormente, este texto aborda el estudio de la proporcionalidad a través de un único capítulo (Funciones y variación proporcional) organizado en cinco apartados.

En el primer apartado (1. Funciones), los autores recuerdan la idea de *función* como *correspondencia entre elementos de conjuntos*, generada por una *proposición abierta* con dos *variables*. Recuerdan, además, que los dos conjuntos reciben el nombre de *dominio* y *codominio* respectivamente, y que un elemento del último se denomina *imagen* de uno del primero. Para finalizar este apartado, reseñan la posibilidad de tabular y graficar —en el plano cartesiano— los pares ordenados de dichos elementos y cómo a partir de la gráfica se pueden determinar parejas de valores aproximados de la función; por último, definen el concepto de *función*.

En el segundo apartado (2. Variación directamente proporcional), aparece la idea de *multiplicación de un valor de magnitud por un factor constante*; además, se alude a la idea de *comparación entre razones* (cada una formada por dos valores de una misma magnitud, pero cada una relativa a magnitudes diferentes) para determinar *variaciones relativas entre las magnitudes*. También se reseñan las ideas de *variable independiente* y *dependiente*. Luego de esto, se encuentra la primera definición de este apartado, *variaciones directamente proporcionales*, la cual se refiere a la nominación de funciones en las que el *cociente entre la imagen y su correspondiente elemento del dominio* es constante. En seguida, se define cuándo dos *magnitudes son directamente proporcionales* y se denomina el valor del cociente como *constante de proporcionalidad*, el cual en ocasiones —dependiendo del contexto— es una magnitud. También, de modo no muy explícito, se indaga sobre el *crecimiento relativo de los valores de las magnitudes* implicadas; se plantea la posibilidad de escribir *proporciones entre valores de magnitudes* y de describir con proporciones fenómenos de proporcionalidad directa y se usa la *propiedad fundamental de las proporciones* para establecer si existe o no proporción entre valores de magnitudes.

En el tercer apartado (3. Cálculo de valores de variables directamente proporcionales), los autores aplican la igualdad entre los cocientes de los valores correspondientes y la propiedad fundamental de las proporciones para *calcular un valor desconocido* en una situación de variación directamente proporcional. Luego, reseñan la *recta* que pasa por el origen como la *representación gráfica* de las funciones en las que las magnitudes son directamente proporcionales.

El cuarto apartado (4. Variación inversamente proporcional), implica la comparación entre una situación de proporcionalidad directa y una que no lo es, a través del análisis de los crecimientos relativos de los valores de las magnitudes implicadas, de las gráficas de las funciones y del comportamiento aritmético de los datos; en este último se utiliza la idea de *producto de dos valores correspondientes* para caracterizar las *variaciones inversas* y con ello las funciones denominadas *variaciones inversamente proporcionales*. Igualmente, se utiliza la gráfica para determinar valores aproximados de la función y se emplea la idea de razón entre valores de una magnitud para establecer la existencia de proporción entre razones de valores relativos, lo cual justifica que se haya tratado antes la idea de razón inversa.

En el último apartado (5. Cálculo de valores de variables inversamente proporcionales), se utilizan el reconocimiento de la situación como de variación inversamente proporcional y la propiedad que se refiere al producto constante entre los valores correspondientes para *calcular un término desconocido*. También aquí se plantea la posibilidad de presentar a través de *proporciones* algunas situaciones de variación inversamente proporcional.

Por medio de la Figura Nº 2 se presenta un esquema de la estructura temática del capítulo 3 del texto en cuestión; en ésta las convenciones son las mismas que para la figura anterior.

El trabajo de construcción de esta estructura fue particularmente laborioso. Quizá el tipo de discurso empleado en el texto dificultó un poco la identificación de los conceptos tratados, la determinación de su estilo de definición o aparición (explícita o tácita) y el establecimiento de los nexos entre éstos.

Un primer aspecto que sorprendió en algún momento de la construcción de la estructura, y que fácilmente se reconoce en la Figura Nº 2, es la “simetría” conceptual de la misma. Por ejemplo, los temas de magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales tienen un tratamiento estructural muy similar, es decir, involucran conceptos correspondientes, incluso los abordados de manera implícita (v.g., los conceptos de razón entre magnitudes correspondientes y razón inversa entre magnitudes correspondientes). Esta misma simetría se reconoce en los conceptos relativos a la variación de valores de una magnitud —tratados de manera implícita— que se ubican en la parte superior central de la estructura temática, e incluso en los nexos entre los temas reseñados. Esta simetría no se percibe en la estructura presentada a través de los cinco apartados que configuran el capítulo. En aquella, tal vez logra advertirse cómo el tema de funciones precede y —en cierto sentido— estructura las ideas de variación directamente e inversamente proporcional y cómo en cada uno de los apartados existe una manera de calcular valores.

La estructura temática resultante (presentada en la Figura Nº 2) permite también advertir el tratamiento implícito que se hace de las magnitudes correspondientes y las variaciones entre éstas; salvo el caso de la variación inversa, todos los demás conceptos implicados a este respecto aparecen tratados de manera tácita o no son objeto de estudio en el texto. Igualmente permite reconocer que estos temas no están vinculados con las variaciones directa e inversamente proporcionales, lo que no deja de sorprender pues la explicitación de estos nexos daría sentido al tratamiento de las magnitudes correspondientes y las variaciones relativas entre éstas en el marco de la proporcionalidad.

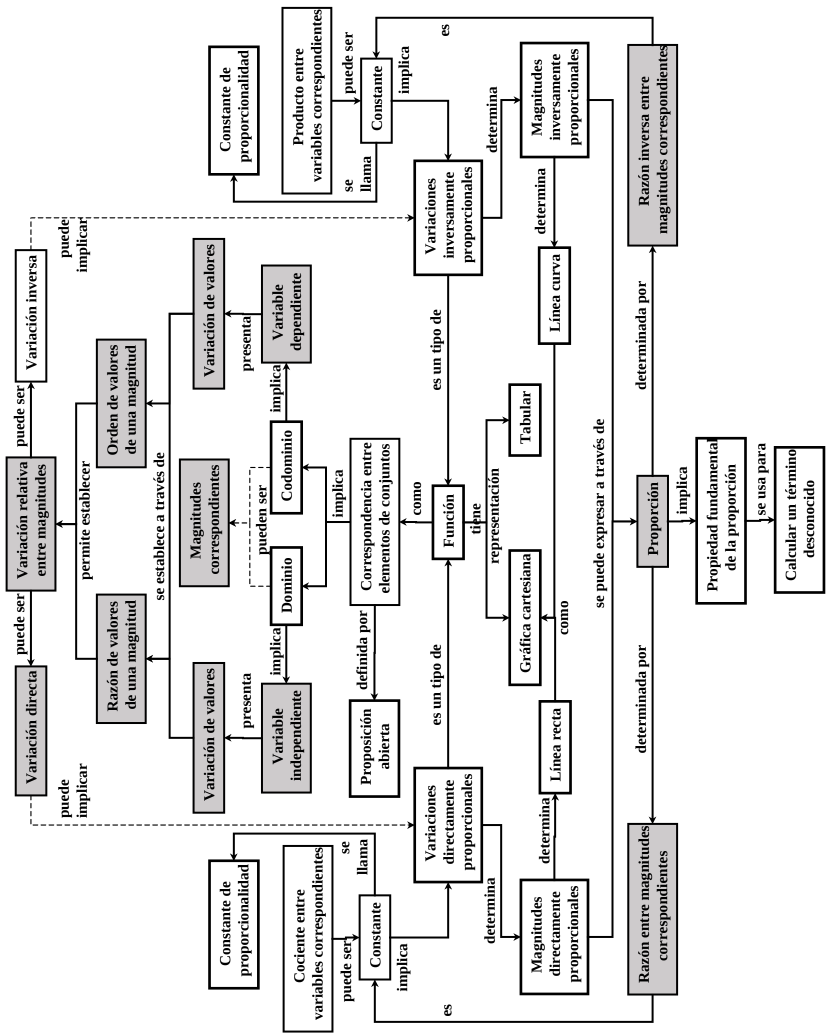

Figura Nº 2. Estructura temática del capítulo 3

Finalmente, al parecer, los temas de razón y proporción entre números y entre valores de magnitudes han sido objeto de estudio de un curso anterior, ya que en este capítulo se hace un uso de éstos sin que haya una referencia a su tratamiento conceptual.

MIRADA A ALGUNOS TEMAS CENTRALES

Intentando profundizar en el tratamiento de temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de la proporción y la proporcionalidad, se analizó la manera como los textos escolares seleccionados abordan cuatro de estos temas, a saber: razón, proporción, magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.

Razón

Inicialmente se reportan las definiciones de razón presentadas explícitamente en los textos.

> Se llama **razón** entre dos números *a* y *b* (con $b \neq 0$), al cociente de la división de *a* por *b*. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 229)

> Se llama **razón** entre dos números *a* y *b* (con $b \neq 0$), al cociente de la división de *a* por *b*. […] Adicionalmente, puede entenderse la **razón** como un operador multiplicativo que al ser aplicado sobre el consecuente, produce el antecedente. [...] Una **razón** es una comparación entre dos magnitudes: toda fracción es una razón, pero no toda razón es una fracción. (Londoño et al., 1993, pp. 236–237)

> Una **razón** entre dos números racionales *a* y *b*, $b \neq 0$, es el cociente indicado entre *a* y *b*. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100)

> Se llama **razón** de dos números a la división indicada entre ellos. (Contreras et al., 1997, p. 251)

Como puede observarse, no se reporta definición alguna del texto *Matemáticas McGraw–Hill 7º*; éste es el único de los cinco textos que, en el contexto de la proporcionalidad en el grado séptimo, no define el concepto de razón. Igualmente puede advertirse que un mismo texto expone tres definiciones diferentes de la razón.

El análisis de estas definiciones, así como del tratamiento global de la noción de razón, condujo a la identificación de al menos cuatro hechos relevantes.

En primer lugar, se identifica un elemento común a las definiciones reportadas: la idea de división está ligada a la de razón. Sin embargo, en dos de los textos (Londoño y Bedoya, 1988 y Londoño et al., 1993) se referencia la razón como el cociente de la división, es decir, el resultado de la división, en tanto que los otros dos (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995 y Contreras et al., 1997) la reportan como la división indicada, es decir, la división sin realizar. Estas dos miradas son significativamente diferentes; la razón —en tanto división realizada o como operador— es un elemento de un conjunto numérico, es decir un número que se establecería precisando los dos conjuntos donde dividendo (antecedente) y divisor (consecuente) tomen valores, respectivamente; mientras que la razón —en tanto división indicada— se puede considerar como un elemento de un producto cartesiano de los conjuntos donde dividendo y divisor tomen respectivamente valores.

Ahora bien, en cada uno de los cuatro textos se encuentran inconsistencias con la respectiva definición propuesta. En el texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* se presentan algunos ejemplos previos a la definición, a partir de los cuales se colige ésta; en ellos se mencionan dos números y no precisamente uno, como es de esperarse: "La razón entre el número de personas que votan en Colombia es 6 a 15", "La razón del número de niños enfermos entre el número de niños es de 25 a 70", "La razón de mujeres al número de varones en el colegio es de 3 a 5", "La razón entre el número de profesores y estudiantes en el colegio es de 1 a 50" (Londoño y Bedoya, 1988, p. 229). De manera similar, el primer ejemplo, posterior a la definición, involucra dos números, pues aunque en la afirmación "el rendimiento del automóvil es 30 kilómetros por galón de gasolina" (*ibid*, p. 230) sólo aparece explícitamente el número "treinta", implícitamente aparece el número "uno", para referirse a "un galón de gasolina"; en este sentido, el rendimiento no es el cociente de la división, sino un cociente indicado, lo cual riñe con la definición dada en el texto.

También en el texto *Dimensión Matemática 7* se presentan algunos ejemplos previos a la definición en los cuales se mencionan dos números y no uno: "La razón entre el número de personas que votan en el país es 6 a 13", "La razón del número de zurdos al número de personas interrogadas es 4 a 100", "La razón de mujeres universitarias al número de universitarios es 26 a 100" (Londoño et al., 1993, p. 236). Así mismo, el primer ejemplo, posterior a la definición, involucra dos números dado que el resultado "la planta tiene un rendimiento de 20 horas de trabajo por galón de gasolina" (*ibid*, p. 237) si bien explicita el número "veinte", deja implícito el número "uno", para referirse a "un galón de gasolina"; en este sentido, el rendimiento no es el cociente de la división, sino un cociente indicado, lo cual de igual forma riñe con la definición dada en el texto.

Si bien en el texto *Procesos Matemáticos 7* el ejemplo que aparece en el apartado que se refiere a la idea de razón (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100) involucra dos números, más adelante, en el apartado que aborda el estudio de las magnitudes directamente correlacionadas, aparece la interpretación de la razón como un número, lo que se opone a la definición planteada en el texto. En efecto, los autores afirman que "Dos magnitudes que están directamente correlacionadas no aumentan en la misma razón" (*ibid,* p. 103), e ilustran esta afirmación así: "Por ejemplo, si *L* es la magnitud longitud del lado del cuadrado y *A* la magnitud área del mismo cuadrado, entonces a mayor lado corresponde mayor área, pero a doble lado no corresponde doble área" (*ibid*, p. 103); la palabra "doble" utilizada en el ejemplo significa el número "dos" y se refiere a la razón entre dos lados —o entre dos áreas—, lo que rivaliza con la idea planteada en la definición de razón.

En el caso del texto *Logros Matemáticos. Séptimo grado* la inconsistencia se encuentra, entre otras, en dos de los tres ejemplos que suceden a la definición. Tal inconsistencia se identifica en las expresiones: "la razón entre el perímetro y el lado es $\frac{9}{3}$ o 3, lo cual significa que el perímetro es tres veces el lado" y "la razón entre el perímetro del cuadrado de la Figura Nº 2 y su lado es $\frac{10}{25}$, o 4, lo cual significa que el perímetro es cuatro veces el lado" (Contreras et al., 1997, p. 252). Los números "tres" y "cuatro", usados respectivamente en cada expresión, están representando razones, pero no son cocientes indicados como se señala en la definición.

En segundo lugar, se observa que no siempre es explícito el conjunto al cual pertenecen los números implicados en la razón. Sólo en uno de los cuatro casos (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995) se establece explícitamente el conjunto de los racionales, como conjunto al cual pertenecen antecedente y consecuente, excluyendo para este último el valor de cero; en otro de los textos (Londoño et al., 1993), al intentar establecer una relación entre las fracciones y las razones, se presenta implícitamente la pertenencia de antecedente y consecuente al conjunto de los racionales. Además, es posible señalar que en tres de los cuatro textos se excluye explícitamente la posibilidad de razones con consecuente cero, mientras que en el otro la exclusión es implícita. Esta exclusión parece justificarse en la asociación de la razón con la división; en efecto, no sería posible considerar una razón como cociente si el consecuente fuera cero pues no existiría tal cociente.

A pesar de los esfuerzos por precisar los conjuntos a los que pertenecen antecedente y consecuente, un lector puede llegar a inferir que las razones están formadas casi exclusivamente por números enteros positivos. Una inferencia semejante se logra al estudiar las situaciones presentadas en los textos (v.g., ejemplos, ejercicios, problemas), las cuales vinculan de manera prioritaria números enteros positivos y —excepcionalmente— números racionales positivos, dejando así de lado el estudio de situaciones en los que se vinculen números negativos.

En el texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7,* en el apartado de estudio de las razones y las proporciones, se identificaron algunos pocos ejercicios, una explicación y no más de tres ejemplos, en donde se utiliza un entero negativo o un racional como antecedente o como consecuente. Sin embargo, salvo por dos tablas numéricas vinculadas a sendos ejercicios, no se encuentra situación alguna que implique enteros negativos o racionales en el estudio de la variación proporcional; así mismo, salvo tres situaciones particulares que vinculan valores decimales o racionales positivos, las situaciones utilizadas en el apartado de aplicaciones de la proporcionalidad emplean razones compuestas por enteros positivos. Los otros tres textos exhiben una situación bastante semejante a la descrita antes, es decir contienen una gran cantidad de situaciones —por no decir la mayoría de situaciones— con números enteros positivos.

Ahora bien, a pesar de la falta de precisión acerca del conjunto al cual pertenecen los números implicados en la razón y la insistencia en los números enteros positivos, en todas las definiciones es muy claro que la razón involucra dos números y sólo en la tercera definición del texto *Dimensión Matemática* (Londoño et al., 1993, p. 237) se considera la posibilidad de tener razones entre magnitudes, o razones entre medidas de magnitudes. Esa claridad contrasta con lo identificado en el análisis de las definiciones implícitas acerca de la razón —contenidas en los textos a través de los ejemplos y los ejercicios—, es decir, con el hecho de que en los textos se utilizan razones que no corresponden a divisiones entre números. Algunas de éstas se presentan como divisiones, indicadas o realizadas, entre medidas de magnitudes no homogéneas que se interpretan como nuevas magnitudes. Otras razones se presentan como divisiones entre magnitudes homogéneas que se interpretan o bien como un número o como una magnitud.

De aquellas razones de magnitudes no homogéneas que representan nuevas magnitudes, los textos presentan, por ejemplo:

- el rendimiento de un automóvil, asumido como la razón entre la distancia recorrida y la cantidad de combustible consumido (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100);
- la densidad de población, asumida como la razón entre el número de habitantes y el área que habitan (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Londoño et al., 1993, p. 238);
- la velocidad, considerada como la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado (Londoño y Bedoya, 1988, p. 243; Londoño et al., 1993, p. 246);
- el salario, definido como la razón del dinero devengado en un determinado tiempo (Londoño y Bedoya, 1988, p. 250);

- la densidad, asumida como la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo (Londoño et al., 1993, p. 266).

De aquellas razones de magnitudes homogéneas que representan nuevas magnitudes, los textos presentan, por ejemplo:

- la morbilidad, considerada como la razón del número de enfermos entre el número de habitantes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Londoño et al., 1993, p. 237);
- la escala, asumida como la razón entre la longitud en el dibujo y la longitud en el terreno (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Londoño et al., 1993, p. 238).

De aquellas razones de magnitudes homogéneas que representan un número, los textos presentan, por ejemplo:

- la razón entre dos longitudes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 237; Londoño et al., 1993, pp. 246, 253; Contreras et al., 1997, pp. 251, 252, 253, 257, 261, 267);
- la razón entre dos precios de un artículo en dos momentos diferentes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 274; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 114);
- la razón entre los pesos de dos cantidades diferentes de un producto (Londoño y Bedoya, 1988, p. 273; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 128).

El hecho de que los autores utilicen, sin definir explícitamente, razones que no corresponden a divisiones entre números, es muy importante, pues con este tipo de razones se desarrolla la mayor parte del trabajo de la proporcionalidad. En otras palabras, se utiliza un concepto de razón no definido y —en cierta medida— se define un concepto no muy utilizado.

En tercer lugar, si bien los textos trabajan implícitamente con razones entre magnitudes —aunque las definiciones planteen que éstas se establecen entre números— no contienen alusión alguna al tipo de magnitudes involucradas en la razón. No es nada difícil identificar que este no es un hecho relevante para los autores de los textos, ya que en un mismo texto aparecen razones entre dos magnitudes discretas, entre dos magnitudes continuas, y se da el caso también de razones configuradas por una magnitud discreta y una continua, o viceversa. Así mismo, se encuentran prioritariamente magnitudes absolutas.

Este hecho, aparentemente poco relevante para los autores, es de suma importancia tanto para la coherencia del discurso matemático contenido en los textos, como para las ideas que a través de ellos se transmite. Como un ejemplo de esta aserción se puede citar que en el texto *Procesos Matemáticos 7* se plantea una pregunta de selección múltiple en la que hay que identificar la gráfica de una correlación directa y la opción correcta muestra una semirrecta cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas, que está ubicada en el primer cuadrante (Dpto. Editorial de Santillana, S.A., 1995, p. 109); antes de esta pregunta sólo se han presentado gráficas que involucran magnitudes absolutas y, en consecuencia, gráficas en el primer cuadrante. Este tipo de información genera la idea errónea de que la proporcionalidad directa sólo se podría representar gráficamente a través de semirrectas de pendiente positiva. También se puede citar, del mismo texto, el hecho de que se traza una curva continua para representar gráficamente la relación de proporcionalidad inversa entre el número de canecas (magnitud absoluta discreta) y la cantidad de litros que representa la capacidad de éstas (magnitud absoluta continua) (*ibid*, p. 127); de la misma manera es factible citar el caso de la "recta" utilizada en Contreras et al. (p. 260) para representar la relación ente el número de cuadernos y el costo de los mismos, o las curvas continuas que relacionan dos magnitudes discretas en Beristain y Campos (1997, pp. 118, 134). Esta situación pone al descubierto la ausencia de una seria reflexión sobre las limitaciones y/o restricciones que impone el tipo de magnitudes implicadas en la representación gráfica, lo que conduce probablemente a la identificación errónea de la continuidad como característica implícita e inherente a las variaciones proporcionales.

Finalmente, y en cuarto lugar, se presentan algunas observaciones con respecto al tipo de notación que se utiliza para el concepto de razón. En todos los cuatro textos se plantea explícitamente —cuando se introduce la notación (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Londoño y Bedoya, 1993, p. 236; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100; Contreras et al., 1997, p. 251)— el uso de una simbología que implica dos números y una línea o vínculo (v.g., $\frac{6}{15}$), o dos números y dos puntos (v.g., 6:15). Ahora bien, cuando la simbología implica dos números y un vínculo, es válido afirmar que desde el punto de vista de la notación no se establece diferencia alguna entre un racional y una razón. Esta afirmación se sustenta en la conjugación de dos hechos; por un lado, la disposición de los tres elementos (números y vínculo) es la misma utilizada para el trabajo con números fraccionarios o con racionales, por otro lado, la mayoría de los números utilizados en las razones son enteros. La notación que implica el uso de los dos puntos sólo se enuncia como una posible notación, pero salvo una aparición esporádica, no se logró identificar que se usara posteriormente en ninguno de los textos; de lo cual se sigue que de las notaciones, la prioritariamente utilizada es aquella que implica el uso de dos números y el vínculo entre ellos.

Sin embargo, en los cuatro textos se identifica el uso de diversas notaciones que no se reportan de manera explícita. Una de ellas, ampliamente utilizada, es la que presenta dos medidas de cantidad de magnitud separadas por un vínculo (v.g., $\frac{180km}{6galones}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, pp. 230, 244, 246; Londoño y Bedoya, 1993, pp. 237, 259, 260, 277, 278, 281; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, pp. 100, 132; Contreras et al., 1997, p. 267). Así mismo, e implícitamente equivalente a la anterior, se utiliza una notación que vincula un número y dos "unidades" de magnitudes (v.g., $30\frac{km}{galon}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, pp. 230, 251; Londoño y Bedoya, 1993, pp. 237, 246; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100). También se da el caso de una notación que vincula dos razones, cada una escrita con la notación reportada inmediatamente antes (v.g., $\frac{60\frac{km}{h}}{70\frac{km}{h}}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, p. 246). El número de ejemplos que se podrían citar —de estos tipos de notaciones— aumentaría vertiginosamente, si las situaciones que involucran medidas de cantidad de magnitud se trataran y presentaran atendiendo a las "unidades" de magnitud, es decir, si en el planteamiento y solución de estas situaciones se trabajara no sólo con el número de la medida (v.g., 30), sino con la medida (v.g., 30 metros). A este respecto cabe señalar que en los cuatro textos el tratamiento de las situaciones que implican magnitudes, se hace mayoritariamente con los números y no con las medidas.

También fue posible reconocer que hay un uso abundante de razones expresadas a través de palabras o expresiones verbales o textuales. En este sentido, se identificó que previo al establecimiento de la notación para las razones, se ha utilizado la palabra "a" o las palabras "es a" para asociar los números (v.g., 6 es a 15, o 6 a 15). Además se observó que luego de la presentación de la notación aparece un sinnúmero de palabras o expresiones que hacen referencia —de manera no muy explícita— a una razón; algunas de ellas, que parecen cumplir el papel de vínculo son "por", "por cada", "de cada" (v.g., 30 kilómetros por galón, $1500 por década, 100 litros por minuto, 20 por ciento, 3 mujeres por cada 5 hombres, un litro de agua por cada cinco litros de leche, 5 niños de cada 14); otras no sólo cumplen el papel de vínculo sino que contienen uno de los datos de la razón (v.g., 6 horas diarias, 8 litros diarios, 2,5% mensual, 25% anual).

De otra parte, se estableció que en algunos apartados de los textos, en lugar de números en la notación de las razones, se utilizan letras que representan números generalizados (v.g., $\frac{a}{b}$), o letras y espacios que representan incógnitas (v.g., $\frac{x}{y}$, $\frac{[\ ]}{60}$), o letras que representan valores de cantidades de magnitudes e incluso las magnitudes mismas (v.g., $\frac{s}{t}$); sin embargo, en ninguno de los dos primeros casos se señala el conjunto al que pertenecen los valores numéricos representados por la letra o los posibles valores de las incógnitas. De la misma manera se encontraron razones en las que se vinculan palabras (v.g., $\frac{diagonal}{lado}$).

En suma, las quince notaciones diferentes antes reportadas permiten afirmar que los textos utilizan una gran variedad de notaciones para la razón, hecho que no es presentado en ninguno de ellos de manera explícita, dejando al lector la tarea de identificarlas y de apreciar su relativa equivalencia.

Proporción

Igual que antes, se reportan inicialmente las definiciones de proporción presentadas explícitamente en los textos.

> La igualdad de dos razones se llama **proporción**. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 233)
>
> Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones. (Londoño et al., 1993, p. 240)
>
> Una **proporción** es la igualdad entre dos razones. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 101)
>
> Una **proporción** representa la igualdad entre dos razones equivalentes. (Contreras et al., 1997, p. 255)

Como puede observarse, tampoco se reporta definición alguna del texto *Matemáticas McGraw–Hill 7º*.

El análisis de estas definiciones, así como del tratamiento global de la noción de proporción en los textos, conduce a la identificación de al menos tres hechos relevantes.

En primer lugar, cabe notar cómo se utilizan respectivamente las expresiones “se llama”, “se denomina”, “es” y “representa” en cada una de las definiciones. Desde una perspectiva particular se observa que las cuatro definiciones son de carácter nominal y que este carácter es evidente en las dos primeras, pero no en la tercera ni en la cuarta.

En efecto, las dos primeras definiciones tienen un carácter nominal tácito, en el sentido que presentan un nombre para un objeto matemático particular, en este caso, para la igualdad de dos razones; en otras palabras, tales definiciones están presentando la palabra “proporción” para nombrar a la igualdad de dos razones.

El carácter nominal en la definición “Una proporción es la igualdad entre dos razones” es implícito y un tanto difuso; inicialmente, a través de esta definición se reconoció la existencia de dos objetos matemáticos (i.e., la proporción y la igualdad entre dos razones), que por medio de la definición —y particularmente de la palabra “es”— procuraban hacerse uno, al presentarlos como idénticos; sin embargo, el recordar una observación hecha en el mismo texto para los conceptos de razón y fracción,[2] hizo pensar que para lograrse la identidad faltaría expresar la afirmación recíproca, es decir, “la igualdad entre razones es una proporción”. Además, si la proporción y la igualdad entre razones se quisieran hacer idénticas sería necesario establecer previamente qué es cada una, para luego mostrar que no tienen diferencias, lo cual no se hace en el texto. De lo anterior se sigue que esta definición es también nominal y que, en consecuencia, sólo introduce un nombre nuevo (proporción) para algo supuestamente conocido (igualdad entre razones).

En el estudio de la cuarta definición, es decir “Una proporción representa la igualdad entre dos razones equivalentes”, inicialmente se observó que el uso de la palabra “representa”, excluye el carácter nominal de las otras tres definiciones y conlleva la existencia de dos objetos: uno que representa (i.e., la proporción) y otro representado (i.e., la igualdad entre dos razones). Ahora bien, si se considera que *lo representado* y *lo que representa* son en esencia diferentes pero semejantes, es decir que comparten algunas características pero otras no, se colige que la proporción y la igualdad entre dos razones no son objetos idénticos, sino más bien, dos objetos que se parecen y que uno puede representar al otro. Sin embargo, cabe advertir que en los términos en que se presenta esta definición no se describe suficientemente a la proporción como un objeto nuevo; además, como no está definido previamente, la definición no permite al lector saber qué y cómo es una proporción en tanto objeto matemático y cómo es que representa a la igualdad

2. “Toda fracción es una razón, pero no toda razón es una fracción” (Londoño et al., 1993, p. 237).

entre razones equivalentes. Por lo anterior, se concluye que esta también es una definición nominal no tácita y aun más difusa que la tercera.

Un segundo hecho, relativamente evidente, es que la noción de igualdad de razones está implicada y reportada de manera explícita en las cuatro definiciones. Este hecho remite, sin discusión alguna, al estudio de la presentación de la igualdad entre razones en los cuatro textos, del cual se concluye que en ninguno de ellos hay un tratamiento que permita al lector saber cuándo dos razones son iguales al margen tanto de la idea de fracciones equivalentes, como de la identificación de las razones con las fracciones.

En el texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7*, incluso antes de abordar de manera explícita la idea de razones iguales, los autores ya han incluido la igualdad entre razones en los dos ejemplos que presentan de la idea de razón; en efecto en estos ejemplos se encuentran respectivamente las expresiones $\frac{180km}{6galones} = 30\frac{km}{galon}$ y $\frac{5}{100} = \frac{1}{100}$ (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230) que no son explicadas de manera alguna, simplemente se presentan. En esta misma sección, estos autores proponen como ejercicio escribir fracciones equivalentes a una fracción dada (*ibid*, p. 231). Luego, en el apartado 10.2 (Razones iguales. Propiedad fundamental), se valen de dos ejemplos para enunciar la igualdad entre razones; estos ejemplos son: “Decir que hay 3 mujeres en el colegio por cada 5 hombres, equivale a afirmar que hay 6 mujeres por cada 10 hombres” y “En forma semejante, decir que 25 niños de cada 70 están enfermos equivale a afirmar que 5 niños de cada 14 están enfermos”. Como puede verificarse, estos ejemplos no establecen explícitamente condición alguna que permita al lector saber cuándo dos razones son iguales; sencillamente se presentan dos parejas de razones iguales. Así, el único recurso que le queda al lector es recurrir a la idea de fracciones equivalentes, sugerida de manera implícita a través del ejercicio enunciado arriba, con lo cual identificaría tanto la igualdad de razones con la equivalencia de fracciones, como las razones con las fracciones.

La situación en el texto *Dimensión Matemática 7* es en esencia idéntica a la expuesta antes. En este texto, también previo al estudio de la igualdad entre razones, se ha hecho uso de ésta —sin justificación ni explicación— en los ejemplos 1, 2 y 3 (Londoño et al., 1993, p. 237); además, el lector debe utilizarla para resolver los ejercicios 14 y 15 (*ibid*, p. 238), que anteceden al apartado que aborda la igualdad de razones. En este conjunto de ejercicios los autores proponen hallar fracciones equivalentes a una fracción dada. En consecuencia, en este texto no hay información que le permita a un lector aprendiz saber cuándo dos razones son iguales, tal vez quedando limitado a identificar equivalencia de fracciones con igualdad de razones.

La información que proporciona el texto *Procesos Matemáticos 7* presenta la misma situación de los dos textos anteriormente citados, es decir, se utiliza la igualdad de razones antes de definirla y se intenta definir a través de un ejemplo que presenta razones iguales. Sin embargo, en este texto no aparece la idea de fracciones equivalentes precediendo a la idea de razones equivalentes.

El texto *Logros Matemáticos. Séptimo grado* identifica la idea de fracciones equivalentes (o de igual cociente exacto) con la de razones equivalentes, a través de unos ejercicios presentados bajo el título “Conocimiento previo” y una conclusión expuesta bajo el título “Conocimientos básicos” (Contreras et al., 1997, p. 255).

Antes de enunciar el tercer hecho respecto de la proporción, es conveniente señalar que el carácter nominal de las definiciones (reportado como un primer hecho), aunado a la falta de precisión en la definición de la igualdad entre razones (reportado como un segundo hecho), hacen que las proporciones no logren un nivel de definición que le permita al lector entenderlas más que como equivalencia entre fracciones. En otras palabras, la proporción se reduce a un nuevo nombre para dos fracciones equivalentes y, en consecuencia, las razones se asumen como un nuevo nombre para las fracciones. A este respecto vale la pena cuestionarse acerca de si es necesario que los textos inviertan tantas páginas relacionadas con la razón y la proporción, y los profesores y estudiantes deban hacer tantos esfuerzos para introducir **sólo dos nombres nuevos** para dos objetos ya conocidos.

Un tercer hecho, respecto del tratamiento de las proporciones, se relaciona con la aparición en los cuatro textos de la propiedad fundamental de éstas. En efecto, en los cuatro textos se encuentra: el mismo título (i.e., “Propiedad fundamental de las proporciones”), al menos tres enunciados diferentes —y no siempre equivalentes— de tal propiedad y ninguna demostración —aunque sí verificaciones parciales— de ésta.

Para verificar la validez de la afirmación respecto de la no equivalencia de los enunciados, se presentan en seguida tal como figuran en los textos.

> En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 234)

> En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$. (Londoño et al., 1993, p. 241)

> Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a \times d = b \times c$. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 101)

> En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos. (Contreras et al., 1997, p. 256)

Al examinar los tres enunciados verbales se aprecia que son textualmente equivalentes, pues si bien se pueden reconocer diferencias en el orden de las expresiones verbales, no se identifican significados diferentes. Sin embargo, no es cierto que esta equivalencia se dé entre los enunciados simbólicos; en ellos se advierten dos estructuras lógicas diferentes, a saber: $p \Rightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$. Esta observación permite percibir que entre los textos no hay uniformidad frente a la traducción lógica de los enunciados textuales que enuncian la propiedad. Además, pone en alerta frente a las consecuencias de asumir una u otra estructura lógica. Al enunciar la propiedad bajo la estructura $p \Leftrightarrow q$, y no bajo la forma $p \Rightarrow q$, se cuenta con una herramienta para construir proporciones a partir de una igualdad de productos. Este hecho parece no ser advertido por los autores del texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* ya que el segundo ejemplo (Londoño y Bedoya, 1988, p. 234) que aparece luego de enunciar la propiedad bajo la estructura $p \Rightarrow q$, presenta la manera de formar ocho proporciones a partir de la igualdad de dos productos.

Por otra parte, dos de los tres textos que presentan la expresión simbólica de la propiedad, utilizan la implicación $p \Rightarrow q$ para exhibir y sustentar la estrategia procedimental de calcular la cuarta proporcional (i.e., un término desconocido de una proporción); el texto *Procesos Matemáticos 7* propone ejemplos del uso de esta estrategia antes de enunciar la propiedad, en tanto que el texto *Logros Matemáticos. Séptimo grado* no hace presentación alguna de dicha estrategia, aunque sí propone ejercicios que requieren su uso.

Finalmente, es necesario reiterar que en ninguno de los textos aparece argumentación alguna acerca de la validez de la propiedad más allá de la presentación de algunos ejemplos que anteceden y/o suceden al enunciado de la propiedad.

Magnitudes directamente proporcionales

Como se hace en los dos apartados anteriores, se reportan aquí las definiciones con las cuales se presenta la proporcionalidad directa en los textos.

> Decimos que dos magnitudes varían en forma **directamente proporcional** cuando la razón de sus medidas es constante. Es decir: Si x es la medida de la magnitud P y y es la medida de la magnitud Q,

> entonces P y Q son **directamente proporcionales** si $\frac{x}{y} = k$, donde k recibe el nombre de constante de proporcionalidad. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 243)
>
> Dos magnitudes están en proporción directa o son **directamente proporcionales** si están correlacionadas directamente y su razón permanece constante. (Londoño et al., 1993, p. 245)
>
> Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si están relacionadas de tal forma que al multiplicar o dividir el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra viene multiplicado o dividido por dicho número. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 104)
>
> Dos magnitudes x, y son **directamente proporcionales**, si $\frac{f(x)}{x} = k$ o $\frac{y}{x} = k$, $(x \neq 0)$ en que k es una constante, y recibe el nombre de constante de proporcionalidad. También puede definirse como: $y = kx$ o $f(x) = kx$. (Beristain y Campos, 1997, p. 114)
>
> Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si son directamente correlacionadas y, además, tienen cociente constante. (Contreras et al., 1997, p. 259)

Como puede observarse, para este tema los cinco textos estudiados contemplan definiciones explícitas relativas a la proporcionalidad directa. Frente a estas definiciones se identificaron tres hechos relevantes; el primero se refiere a las diferencias entre las definiciones, en tanto que el segundo alude al marco de ejemplificación utilizado y el tercero al marco de ejercitación reportado.

Un primer hecho que resulta interesante es que no todas las definiciones coinciden y que hay entre ellas más diferencias que semejanzas. Al menos cinco aspectos caracterizan las diferencias.

Si se observa detalladamente, no todas las definiciones implican el uso del concepto razón. En efecto, en la definición reportada en Dpto. Editorial de Santillana S.A. (1995) no aparece ni el término “razón”, ni una notación o nombre que permita evocar el concepto. Sólo en las definiciones de Londoño y Bedoya (1988) y de Londoño et al. (1993) aparece el término “razón”. Por su parte, en Beristain y Campos (1997) y en Contreras et al. (1997) si bien no aparece el término, la notación $\frac{f(x)}{x} = k$ (o $\frac{y}{x} = k$) y el término “cociente”, respectivamente, podrían remitir implícitamente a una idea de razón.

Un segundo aspecto que establece diferencia es la aparición en dos de las definiciones (Londoño et al., 1993 y Contreras et al., 1997) de la condición de correlación directa entre las magnitudes. En efecto, en los textos *Dimensión Matemática 7* y *Logros Matemáticos. Séptimo Grado*, previo a la definición de proporcionalidad directa, se ha hecho un breve estudio de la correlación directa en el que se establece, como condición que la define, el carácter monótonamente creciente de la relación entre las magnitudes. Esto conduce a que a través de la incorporación de la correlación directa en la definición de proporcionalidad directa, estos dos textos excluyan la posibilidad de existencia de magnitudes directamente proporcionales que presenten un comportamiento monótonamente decreciente. Por su parte, las definiciones presentadas por Londoño y Bedoya (1988) y por Beristain y Campos (1997) al no poner restricciones al valor algebraico de la constante k, y la definición del texto *Procesos Matemáticos 7* (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995), al no condicionar el número por el cual se multiplica o divide, dejan abierta la posibilidad de tener magnitudes directamente proporcionales con k negativa, es decir relaciones monótonamente decrecientes.

Un tercer aspecto, que define diferencia entre las definiciones, atiende a los elementos implicados en la razón o el cociente. En sólo una de las definiciones, de las cuatro que relacionan implícita o explícitamente a la razón, el cociente o razón se establece entre medidas de las magnitudes; en las tres restantes, no es transparente la interpretación que tiene que hacer el lector de la expresión “la razón o cociente entre magnitudes”, o de alguna expresión equivalente. El reconocimiento de esta diferencia permite advertir, nuevamente, la imprecisión con la que en los textos se trabajan las ideas de “magnitud”, “medida de una magnitud, “valor de una magnitud” o “cantidad de una magnitud”; igualmente, permite un argumento adicional frente a la necesidad de definir y trabajar explícita e intencionadamente con razones entre medidas de cantidad de magnitud, y no sólo entre números.

Un cuarto aspecto que define diferencia entre las definiciones atiende a la estructura lógica de las mismas. Si bien todas ellas tienen una estructura condicional (i.e., de la forma $p \Rightarrow q$), en la que la proposición q se refiere al carácter directamente proporcional de las magnitudes implicadas y la proposición p describe las condiciones que se deben cumplir, hay variaciones en la estructura interna de la proposición p. En las definiciones propuestas por Londoño y Bedoya (1988) y Beristain y Campos (1997) se identifica la estructura $p \Rightarrow q$ donde p es una proposición simple, en los otros tres textos la proposición p es compuesta; en efecto, en Londoño et al. (1993) y en

Contreras et al. (1997) la proposición p tiene la estructura $p_1 \wedge p_2$, mientras que en Dpto. Editorial de Santillana S.A., (1995) la estructura de p es $p_1 \Rightarrow p_2$.

Un quinto aspecto que caracteriza la diferencia entre las definiciones —particularmente entre la primera y las otras cuatro— es que la primera está caracterizando explícitamente, más que a las dos magnitudes, la manera como éstas varían; entre tanto las otras definiciones denotan el par de magnitudes. Sin embargo, al estudiar el tratamiento que se hace de la variación en aquel texto, esta diferencia es tan sólo nominal y no compromete un carácter conceptual.

Un segundo hecho que interesa reportar tiene que ver nuevamente con la estructura lógica de las definiciones. Atrae la atención precisamente el hecho de que ninguna de las definiciones incluya un bicondicional en lugar de una implicación. Desde una perspectiva particular, las definiciones —con esta estructura— sólo están suministrando unos criterios para determinar la existencia de proporcionalidad directa entre dos magnitudes, mas no unas características que se colijan a partir de la proporcionalidad directa. Por ejemplo, interpretando la definición del texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* (Londoño y Bedoya, 1988) se puede asegurar que basta con comprobar que la razón de las medidas de las magnitudes es constante, para afirmar que las magnitudes son directamente proporcionales, pero no se puede aseverar la proposición recíproca, es decir, que dada la existencia de proporcionalidad se siga que las razones son constantes; sin embargo, en este texto figura esta afirmación en uno de los ejercicios: “Recordemos que $k = \frac{x}{y}$ si son directamente proporcionales” (*ibid*, p. 248), lo cual indica una contravención a la estructura del enunciado de la definición.

Bajo la óptica expresada en el párrafo anterior se revisaron los ejemplos que presentan los textos y para cada texto se identificaron aspectos específicos que se exponen a continuación.

En el texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* tanto el ejemplo que precede a la definición (Londoño y Bedoya, 1988, p. 242) como los tres primeros ejemplos que suceden a la definición (*ibid*, pp. 243–244), efectivamente concluyen la existencia de proporcionalidad directa a partir de la comprobación sobre las razones de las medidas de las magnitudes. Sin embargo, el tercer ejemplo incluye un análisis que conduce al enunciado de una propiedad que se sigue de la existencia de proporcionalidad directa,[3] la cual no coincide con la proposición p de la definición, pero tiene semejanza con la de la definición reportada en *Procesos Matemáticos 7* (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 101).

Los ejemplos utilizados antes y después de la definición del texto *Dimensión matemática 7* (Londoño et al., 1993, pp. 245–248) efectivamente deducen la existencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes al comprobar las condiciones impuestas en la definición. Este texto involucra propiedades que se siguen de la existencia de la proporcionalidad directa a través de la presentación de las propiedades de la función lineal, previa identificación de ésta con la proporcionalidad directa (*ibid*, pp. 248–249).

En *Procesos Matemáticos 7* los autores presentan un solo ejemplo de la definición (Dpto. Editorial de Santillana S.A., p. 104). Sin embargo, el tratamiento inicial del ejemplo no ilustra el contenido de la definición, ya que no presenta un análisis que implique la multiplicación de un valor de la primera magnitud para obtener otro valor de esa misma magnitud y la correspondiente verificación de que los respectivos valores de la segunda magnitud también se pueden establecer por medio de la misma multiplicación; en su lugar aparece un enunciado categórico —sin argumentación alguna— con respecto a la existencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes, la verificación de que las razones entre valores correspondientes de las magnitudes es constante (condición no mencionada en la definición) y la representación en el plano cartesiano de la relación. Luego de ello, y al final del ejemplo, sí aparece una verificación para dos parejas de valores de la condición de la definición. Más adelante, en el siguiente numeral del texto (*ibid*, p. 106), los autores presentan un nuevo ejemplo en el que utilizan el hecho de tener razones constantes entre los valores de las magnitudes como condición para establecer la proporcionalidad; es decir, utilizan una condición no definida y no incorporan la condición definida explícitamente.

El texto *Matemáticas McGraw–Hill 7º* presenta dos ejemplos, uno de ellos precede a la definición (Beristain y Campos, 1997, pp. 112–114) y el otro la sucede (*ibid*, pp. 115–116). En ambos se hace la comprobación del valor constante del cociente entre los valores de las magnitudes implicadas, como condición que define la proporcionalidad directa entre las magnitudes. Además, en ellos, dadas las condiciones de los contextos físicos que incorporan, las constantes de proporcionalidad pueden significar nuevas magnitudes físicas. No obstante, se percibió que no se hace mayor énfasis en la comprobación de la condición para concluir la existencia o no de la proporcionalidad, condición que por demás está dada como un supuesto desde el inicio del primer ejemplo.

3. "Si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón entre dos cantidades de una magnitud es igual a la razón entre las cantidades correspondientes de la otra". (Londoño y Bedoya, 1988, p. 244)

En el texto *Logros Matemáticos. Séptimo grado* sólo aparece un ejemplo (Contreras et al., 1997, p. 259); éste, además de preceder a la definición, no se reporta explícitamente como un ejemplo de la misma.

Un tercer hecho alude al tipo de ejercicios relacionados con la definición de la proporcionalidad directa. En los cinco textos aparecen ejercicios en los que se da una tabla de valores de dos magnitudes relacionadas y se pide determinar si las magnitudes son o no directamente proporcionales; se supone que para resolver estos ejercicios se espera que los estudiantes apliquen la respectiva definición, es decir, que verifiquen si los datos satisfacen las condiciones descritas en ella.

Ahora bien, en la mayoría de los textos (excepto en *Matemáticas McGraw–Hill 7º* y *Logros Matemáticos. Séptimo grado*) aparecen ejercicios en los que se propone indicar cuáles pares de magnitudes son directamente proporcionales, pero no dan valores de las magnitudes, sino que se reportan sólo los nombres de las magnitudes (v.g., volumen y capacidad); se observa aquí que el texto no ha enunciado información suficiente que les permita a los estudiantes responder a estos ejercicios, a menos que diseñen alguna actividad para recolectar datos y, posteriormente, analizarlos. También, vale la pena advertir que en dos de los textos (*Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* y *Dimensión Matemática 7*) se propone completar tablas de valores que reportan algunos datos de magnitudes directamente proporcionales y que el desarrollo de estos ejercicios supone el uso de una proposición recíproca a la enunciada en las definiciones, lo cual no se realiza en ninguno de los dos textos.

Magnitudes inversamente proporcionales

Los cinco textos estudiados incluyen de manera explícita sendas definiciones relativas a la proporcionalidad inversa, las cuales se reportan a continuación:

> Decimos que dos magnitudes varían en forma **inversamente proporcional** cuando el producto de las cantidades correspondientes es una constante. Es decir: Si x es la medida de la magnitud P y y es la medida de la magnitud Q, entonces P y Q son **inversamente proporcionales** si $x \cdot y = k$, donde k recibe el nombre de constante de proporcionalidad. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 245)

> Dos magnitudes están en proporción inversa o son **inversamente proporcionales** si están correlacionadas inversamente y su producto permanece constante. (Londoño et al., 1993, p. 256)

> Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando están inversamente correlacionadas y el producto de los valores correspondientes de dichas magnitudes es constante. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 104)

> Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando están inversamente correlacionadas y el producto de los valores correspondientes de dichas magnitudes es constante. (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 104)

> A las funciones en las que encontramos que $x \cdot y = k$, es decir, que el producto de cada elemento del dominio por su correspondiente imagen es constante, las llamamos variaciones **inversamente proporcionales**. Estas funciones también pueden definirse como: $y = \frac{k}{x}$ ($x \neq 0$). (Beristain y Campos, 1997, p. 128)

> Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando, al aumentar una, la otra disminuye y están relacionadas por un producto constante. (Contreras et al., 1997, p. 278)

Al analizar estas definiciones se detectaron al menos dos hechos; el primero se refiere a la estructura lógica de las mismas y el segundo al uso del producto constante como condición aparentemente uniforme en las cinco definiciones. Posteriormente a la descripción de estos hechos se plantearán tres observaciones referidas al uso de las definiciones, al marco de ejemplificación y al marco de ejercitación, en esta temática.

Una mirada a la estructura lógica de las definiciones y al carácter de las mismas, revela que la definición presentada en Beristain y Campos (1997) parece tener un carácter nominal; además, permite observar que esta definición no comporta la estructura condicional que caracteriza a las demás. En efecto, las cuatro definiciones restantes tienen una estructura de la forma $p \Rightarrow q$, en la que la proposición q se refiere al carácter inversamente proporcional de las magnitudes implicadas y la proposición p describe la(s) condición(es) que se deben cumplir. No obstante esta semejanza, se percibe que la estructura interna de la proposición p presenta dos estructuras lógicas; en la definición de Londoño y Bedoya (1988) se reconoce la estructura $p \Rightarrow q$ con p una proposición simple, en tanto que en las de Londoño et al. (1993), Dpto. Editorial de Santillana S.A. (1995) y Contreras et al. (1997) se identifica que p es una proposición compuesta con estructura $p_1 \wedge p_2$. Precisamente, para estos tres textos, cabe advertir que la existencia de correlación inversa constituye una de las proposiciones que conforman la conjunción.

A propósito de la exigencia de la correlación inversa, es necesario señalar que ésta impone una restricción a la proporcionalidad inversa, pues no permite contemplar relaciones, de comportamiento creciente, entre magnitudes no necesariamente absolutas, que satisfagan la condición del producto constante y que deberían considerarse dentro del conjunto que definen magnitudes inversamente proporcionales. En otras palabras, la exigencia de correlación inversa sólo admite relaciones cuyas gráficas cartesianas se corresponden con subconjuntos de hipérbolas —asintóticas a los ejes coordenados— trazadas en el primer y tercer cuadrante, excluyendo así las relaciones cuyas gráficas son un subconjunto de hipérbolas trazadas en el segundo y cuarto cuadrante.

Por otra parte, vale la pene reiterar aquí un comentario que se presentó en el anterior apartado: la estructura condicional contemplada para las definiciones no permite en principio deducir o colegir algo del hecho de tener dos magnitudes inversamente proporcionales (como sí lo permitiría una estructura bicondicional); sólo ofrece unos criterios para decidir si existe o no proporcionalidad inversa entre dos magnitudes relacionadas, a partir del análisis de las parejas de datos.

Un segundo hecho, relativo a la comparación de las definiciones, lo constituye su aparente semejanza en cuanto a la presencia de la condición sobre el producto constante. En efecto, todas las definiciones vinculan como condición suficiente, o como parte de ella, el valor constante del producto. Además, se ha podido establecer que tres de los cinco textos plantean en la definición que el producto se realiza entre medidas, valores o elementos de las magnitudes, mientras que los otros dos (Londoño et al., 1993 y Contreras et al, 1997) lo establecen entre magnitudes; este último planteamiento, más que general, parece ambiguo. Igualmente, y tal vez como consecuencia de la ambigüedad reseñada, es posible reconocer que estos mismos dos textos no hacen alusión alguna a la correspondencia entre los valores de las magnitudes; al parecer la presuponen.

A propósito de lo reiterativo de la condición sobre el producto de valores de magnitudes, surge la observación sobre el uso de las definiciones. Sorprende que algunos textos no sean suficientemente coherentes con la herramienta presentada a través de la definición. Por ejemplo, en el texto *Procesos Matemáticos 7* se emplea, sin presentación previa, una característica que podría constituir una definición alterna para la proporcionalidad inversa, o una propiedad de la misma (ver "Regla de tres simple inversa", Dpto. Editorial de Santillana S.A., p. 126), y no se utiliza la definición explicitada dos páginas antes. Así mismo, es posible ubicar un caso similar en el texto *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* cuando a partir de dos datos conocidos de una magnitud, y de un dato conocido y otro desconocido de otra magnitud correspondiente, se afirma que las magnitudes son inversamente proporcionales, es decir, no se hacen los productos para verificar el carácter de la relación (ver “Ejemplo 1”, Londoño y Bedoya, 1988, p. 250); este mismo caso se presenta en *Dimensión Matemática 7* (ver “Ejemplo 29”, Londoño et al., 1993, p. 260).

Ahora bien, los tratamientos que hacen los textos *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* y *Dimensión Matemática 7*, en cuanto a los ejemplos y ejercicios son muy similares entre sí y con los que han hecho para el caso de la proporcionalidad directa. Es decir, proponen ejemplos adecuados a la definición pues buscan comprobar si dos magnitudes son inversamente proporcionales, pero también, a través de uno de estos ejemplos, introducen una propiedad de la proporcionalidad inversa. Por su parte, el texto *Procesos Matemáticos 7* inmediatamente después de la definición utiliza un ejemplo en el que sólo se verifica la condición sobre el producto, mas no la condición sobre la correlación inversa, también presentada como parte de la definición; ni este texto, ni *Logros Matemáticos. Séptimo grado* proponen ejercicios relacionados con el contenido de la definición. El reconocimiento de la proporcionalidad inversa sí es objeto de trabajo del texto *Matemáticas McGraw–Hill 7º*, allí se dan varias tablas con valores de las magnitudes relacionadas y se pregunta si éstas representan una proporcionalidad inversa.

UNA SÍNTESIS DE RESULTADOS

El análisis hasta aquí reportado permite reconocer un amplio espectro de resultados con respecto al tratamiento de la proporcionalidad en los libros de texto de matemáticas. La tarea de sintetizarlos sería dispendiosa y hasta inútil, pues difícilmente se obtendría un texto de menor extensión que pudiera recopilar tales resultados. Sin embargo, se han seleccionado algunos que desde una perspectiva particular, y mediado por el impacto causado y por su posible trascendencia, se constituyen como los más importantes. A continuación se presentan, no sin antes advertir que existe la posibilidad que en la lectura del artículo el lector haya identificado algunos resultados que considere más importantes que los aquí reportados.

La proporcionalidad ocupa un lugar difuso

Una vez que en las propuestas curriculares se identificó que el estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad se propone para ser desarrollado fundamentalmente en grados quinto y séptimo y haber considerado específicamente las propuestas curriculares de matemáticas para grado séptimo, fue posible evidenciar que no era una tarea sencilla reconocer a qué disciplina matemática escolar correspondía el estudio de estos temas, aunque se reconoció una tendencia hacia un tratamiento aritmético de éstos. En aquellas propuestas se identificó que excepto las razones, las proporciones y la proporcionalidad, los demás temas fácilmente se pueden hacer corresponder con el estudio de la aritmética, de la geometría o de la estadística; por ejemplo, en la propuesta de programa curricular (MEN, 1989) se pueden ubicar las dos primeras unidades (Los números enteros y Los números naturales) dentro de la aritmética, la cuarta (Geometría y medición) naturalmente en la geometría y la quinta (Combinatoria y estadística) en la estadística, pero no es muy evidente que la tercera unidad (Proporcionalidad y sus aplicaciones) pueda pertenecer a una de estas disciplinas matemáticas escolares.

En los textos escolares de matemáticas estudiados, el carácter difuso del lugar atiende a las exiguas relaciones entre los temas que se abordan en los capítulos o unidades temáticas anteriores y posteriores, y las razones, las proporciones y la proporcionalidad; por ejemplo, se reconoció que en el contexto de la proporcionalidad es casi nulo el uso de magnitudes relativas y por ende los números (enteros o racionales) negativos brillan por su ausencia en este contexto, no siendo explícito por qué el estudio de estos números debe preceder al de la proporcionalidad. Así, la proporcionalidad en el grado séptimo necesariamente no tiene que estar precedida del estudio de estos conjuntos numéricos, ni de ninguno de los otros temas que se abordan en este grado; al parecer, en las propuestas expresadas en los textos, la proporcionalidad no tiene prerrequisitos que se aborden particularmente en este grado y no es un prerrequisito para abordar los otros temas matemáticos abordables habitualmente en séptimo grado.

No hay un tratamiento de la razón que sea significativamente diferente al tratamiento de los números

Como se destacó ampliamente en una de las observaciones hechas, a pesar de identificar a través de definiciones a la razón con el cociente indicado o con el cociente exacto, todos los textos terminan por hacer un tratamiento de la razón como un número. Consecuentemente, aplican los algoritmos de producto y cociente de racionales (escritos en forma fraccionaria) a tales operaciones entre razones, así como la igualdad entre racionales para dar cuenta de la equivalencia entre razones (i.e., la proporción).

Muy recientemente, este hecho ha sugerido una pregunta cuya respuesta está aún pendiente: ¿para qué estudiar las razones y las proporciones en la escuela si a través de la división y de la medida se identifican, respectivamente, con los racionales y la igualdad entre racionales?

Adicionalmente, es necesario identificar aproximaciones escolares a la razón y a la proporcionalidad que no atiendan al cociente y a la medida y que, en consecuencia, respeten la naturaleza y esencia de la razón (en tanto relación o pareja) y de la proporción (en tanto equivalencia entre razones o relación entre relaciones). El libro V de los Elementos constituye una aproximación matemática formal que preserva la naturaleza de estos conceptos y no la contamina con la idea de número ni de medida.

Se reconocen algunas nociones implícitas no definidas

El estudio del tratamiento que se hace de las proporciones permitió advertir que si bien la proporción se define como una igualdad entre razones, ninguno de los textos analizados contiene información que le permita al lector saber cuándo dos razones son iguales, al margen de la igualdad entre fraccionarios, conduciendo así la idea de proporción a la igualdad de fracciones. De la misma manera, se identificó que en el tratamiento de la proporcionalidad nociones como *cantidades correspondientes*, *producto entre cantidades correspondientes*, *razones entre cantidades correspondientes*, *producto entre razones*, *proporcionalidad compuesta* o *variación de una magnitud* no presentan definición explícita ni implícita, pero que de ellas se hace uso para explicar y caracterizar los tipos de proporcionalidad.

No es muy explícita la relación entre las proporciones y la proporcionalidad

La mirada que se hizo de la estructura interna de las unidades temáticas y/o capítulos que abordan el estudio de la proporción y la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas se pudo sintetizar a través de las estructuras temáticas (v.g. Figura Nº 1 y Figura Nº 2). En éstas, y en el análisis que les acompaña, se puede identificar que en los textos estudiados existen dos bloques temáticos claramente disociados. Un primer bloque aborda el estudio de la razón y la proporción en un contexto aritmético; el segundo aborda el estudio de la proporcionalidad en el contexto de las magnitudes. Entre estos bloques no se establecen relaciones conceptuales de manera explícita a más de una eventual aplicación de la propiedad fundamental de las series de razones iguales en los problemas de reparto proporcional, o el cálculo de un término desconocido de una proporción en la solución de problemas de regla de tres.

Ahora bien, como está implícito en las estructuras temáticas reseñadas, entre estos dos bloques existen unos fuertes nexos conceptuales y procedimentales que no deberían estar ausentes en los libros de texto, ni en el conocimiento de profesores y estudiantes. La idea de razón está implicada en ambos bloques temáticos y, si bien en uno de ellos el contexto es aritmético y en el otro es de magnitudes, un tratamiento de las distintas expresiones de las razones (v.g., razón entre números, razón entre cantidades de una misma magnitud, razón entre cantidades correspondientes, razones entre medidas de cantidades de una misma magnitud, razones entre medidas de cantidades correspondientes, razón inversa) a través de una única idea de razón podría constituir un nodo que permita cerrar un poco la brecha entre estos dos bloques. De igual manera, es necesario reconocer que la idea de proporción y de serie de razones iguales está fuertemente ligada a las definiciones usuales de proporcionalidad directa y a algunas de proporcionalidad inversa, y que en el ámbito escolar es precisamente este nexo el que justifica, por ejemplo, que los problemas de regla de tres se solucionen de una manera determinada, hecho que no se advierte de manera explícita en los textos escolares de matemáticas y que un profesor de matemáticas, que no haya hecho una reflexión especial al respecto, podría no reconocer fácilmente.

La proporcionalidad directa puede no ser creciente y la inversa puede no ser decreciente

En los textos escolares de matemáticas y en una de las propuestas de programa curricular (MEN, 1989) se identifica que las condiciones de correlación directa e indirecta se establecen como necesarias para la existencia de proporcionalidad directa e inversa, respectivamente. Ligado a esto, las expresiones “cuando una variable crece la otra crece o cuando una decrece la otra decrece” y “cuando una variable crece la otra crece o cuando una decrece la otra crece”, son utilizadas frecuentemente para establecer sendas condiciones necesarias para la existencia de la proporcionalidad directa e inversa.

Se sabe, sin embargo, que estas condiciones no son ni necesarias ni suficientes para que la función entre dos magnitudes defina una proporcionalidad. Sólo cuando ambas magnitudes relacionadas son absolutas, estas condiciones se pueden considerar necesarias. Entonces es válido afirmar que la proporcionalidad (directa o inversa) sí exige que la función que relaciona las magnitudes sea monótona.

Ahora bien, el hecho de que los textos no incluyan un tratamiento de la proporcionalidad para magnitudes relativas ofrece también un —aparentemente— nuevo ámbito de investigación a través del cual se puedan construir situaciones que involucren magnitudes relativas directamente proporcionales y la función de proporcionalidad sea monótonamente decreciente, así como situaciones que involucren magnitudes relativas inversamente proporcionales y la función de proporcionalidad sea creciente. Diseñar e implementar en la escuela esta dimensión de la temática podría ayudar a darle sentido a la constante aparición del estudio de los enteros y racionales negativos —en séptimo grado— como temática previa al estudio de la proporcionalidad.

A través del estudio de estas actividades se quisiera, por ejemplo, que tanto profesores como estudiantes pudieran entonces reconocer que una recta de pendiente negativa graficada en el plano cartesiano puede representar una relación de proporcionalidad directa, al igual que una (y sólo una) rama de la hipérbola asintótica a los ejes coordenados puede representar una relación de proporcionalidad inversa aun si ésta se ubica en el segundo y cuarto cuadrante.

REFERENCIAS

Beristain, E. y Campos, Y. (1997). *Matemáticas McGraw–Hill 7º*. Bogotá: McGraw–Hill Intermericana S.A.

Contreras, H., Lizcano, G., García, G., Cano, E., y Flechas, H. (1997). *Logros Matemáticos. Séptimo Grado*. Bogotá: McGraw–Hill Interamericana S.A.

Departamento Editorial de Santillana S.A. (1995). *Procesos Matemáticos 7*. Bogotá: Editorial Santillana S.A.

Guacaneme, E. (2001). Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. Tesis de Maestría. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

Londoño, N., Guarín, H. y Bedoya, H. (1993). *Dimensión Matemática 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

Ministerio de Educación Nacional (1975). *Programas de matemáticas. Resolución 277 de Febrero 4 de 1975*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1989). *Programas de Matemáticas. Reforma Curricular. Grado Séptimo*. Bogotá: MEN.

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
E-mail: eguacane@uniandes.edu.co