Universidad del Valle

Instituto de educación y pedagogía

ALGUNAS ANOTACIONES HISTÓRICAS SOBRE ARTE Y MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN PERSPECTIVA

VIVIAN LIZBETH MARTINEZ RONDÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2014

Universidad del Valle

Instituto de educación y pedagogía

ALGUNAS ANOTACIONES HISTÓRICAS SOBRE ARTE Y MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN PERSPECTIVA

VIVIAN LIZBETH MARTINEZ RONDÓN

Trabajo de Grado para optar por el título de

LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Director

Luis Cornelio Recalde Caicedo

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Algunas anotaciones históricas sobre Arte y Matemáticas: Una herramienta didáctica en Perspectiva.						
Se trata de:	*Proyecto* [ ]			*Informe Final* [X]			
Director:	Luis Recalde						
1er Evaluador:	Gabriela Arbelaez						
2do Evaluador:	Mónica Andrea Aponte						
Fecha y Hora	*Año:*	2014	*Mes:*	Febrero	*Día:*	8	*Hora:* 10:30 am

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Vivian Lizbeth Martinez R	0842389	Licenciatura en ed. Básica con enf. matemáticas

Evaluación

Aprobado	[ ]	*Meritorio*	[X]	*Laureado*	[ ]
Aprobado con recomendaciones	[ ]	*No Aprobado*	[ ]	*Incompleto*	[ ]

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* __________________ *(máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo	[ ]	*1er Evaluador*	[ ]	*2do Evaluador*	[ ]

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* __________________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

	Gabriela Arbelaez	Mónica Andrea Aponte
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

1

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:		**Recomendaciones:**		**Razón del Desacuerdo – Alternativas:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

De acuerdo a la evaluación realizada del trabajo de grado de Vivian, ambos evaluadores coincidimos que el trabajo presenta originalidad y rigurosidad en el tratamiento del problema. La estudiante logra presentar de manera precisa, los principales elementos históricos y filosóficos que relacionan el arte con las matemáticas. en este sentido el trabajo se constituye como un aporte teórico y metodológico importante para considerar más adelante la vinculación de propuestas educativas que involucren al arte y a las matemáticas.

El documento cuenta con una buena presentación y redacción en el análisis histórico que conecta el arte y las matemáticas se demuestra un excelente dominio del tema por parte de la autora, consideramos además que el trabajo hace parte de las temáticas de actualidad en la educación matemática en la medida que se propone con un estudio histórico-filosófico incorporar el arte como estrategia de enseñanza.

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador
		Mónica Andrea Aponte

Gdo

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fe.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: **ALGUNAS ANOTACIONES HISTÓRICAS SOBRE ARTE Y MATEMÁTICAS: UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN PERSPECTIVA.**

Autor: **VIVIAN LIZBETH MARTINEZ RONDÓN.**

Firma: Vivian Lizbeth Martínez Rondón
C.C. 1005890538

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

MIS AGRADECIMIENTOS:

Para mi profesor Luis Recalde por su valiosa e invaluable orientación, de igual modo por toda su comprensión y entendimiento en todas las etapas de este trabajo.

A mi madre por su amistad y apoyo en tiempos difíciles, y a todos aquellos que aportaron un granito de arena a este proceso.

CONTENIDO

RESUMEN

El propósito de este trabajo de grado es mostrar algunos momentos históricos en los cuales se puede visualizar el vínculo entre matemáticas y arte. Se han retomado diversas concepciones del arte, con el propósito de identificar algunos elementos que nos permitieron comprender más afondo la relación arte-matemática. En principio se interpretan las concepciones filosóficas de algunos pensadores que no solo han abordado el problema de los objetos matemáticos, sino que también han relacionado los saberes matemáticos con sus concepciones estéticas. En este sentido se toma como referencia a Platón, Aristóteles, Kant y Hegel. Para entender la relación arte-matemáticas, se analizan producciones artísticas en los antiguos y algunas obras de varios pintores medievales y renacentistas que perfilaron sus obras con base en la geometría. Se muestra que la necesidad de solucionar problemas de perspectiva, constituye un elemento de causalidad en el surgimiento de la geometría proyectiva. Como casos significativos, se tomarán como referencia algunos trabajos de Durero, Brunelleschi, Alberti y Velásquez, entre otros. Al final se abre la discusión de este tipo de trabajos de grado en relación con problemas en el ámbito de la educación matemática.

PALABRAS CLAVES:
Matemáticas, Arte, Historia de las Matemáticas, Educación Matemática

INTRODUCCIÓN

Respecto a la relación Arte-Matemática se ha escrito en muchas instancias. En este trabajo de grado abordaremos este aspecto a partir del análisis histórico, tanto de las matemáticas como del arte. Concretamente, analizaremos la relación entre las matemáticas y la pintura, con el propósito de visualizar conocimientos y conceptos matemáticos de una manera significativa. Esto tiene repercusiones didácticas, pues proporciona una manera especial de abordar algunas nociones que, por su carácter abstracto, parecen no tener relación con el entorno. En este sentido el análisis del uso de las matemáticas en algunas obras pictóricas constituye una herramienta motivadora para la enseñanza de conceptos matemáticos.

A través de este trabajo de grado se busca ofrecer una mirada más integral de las matemáticas. Se trata de visualizarlas en un contexto más amplio que la sola modelación de eventos técnicos o científicos, teniendo en cuenta que existen aspectos profundos del hombre que parecen mostrarse esquivos a la cuantificación, como la ética, la estética o la política. De esta forma, se puede entender las matemáticas en la dinámica de los procesos socioculturales, más allá de la sola manipulación de objetos abstractos. En síntesis, a través de este trabajo de grado se pretende suministrar algunas estrategias que ayuden a los estudiantes a entender que algunos elementos matemáticos, como la geometría, no son ajenos a su realidad.

Por estas razones, este trabajo de grado se enmarca en una perspectiva histórica epistemológica. Como la idea que se busca es la de relacionar dos perspectivas aparentemente contrapuestos como son el arte y el universo de la matemática, nos moviliza a presentar una propuesta de tipo didáctico, de tal suerte que los profesores en ejercicio, ya sea de la educación básica o la media, puedan lograr hacerse a una herramienta conceptual para poder ofrecer una visión diferente de las matemáticas a través del arte. Por esta razón, hemos incursionado en el mundo del arte para poder observar las *huellas* de las matemáticas en algunas obras pictóricas.

Tradicionalmente los trabajos de grado de este género inician referenciando directamente al problema de la geometría, a la proporción aurea, y cuestiones relacionadas con estos aspectos. Por esta razón, hemos decidido dividir el trabajo en dos partes: un primer capítulo que trata sobre la teoría de la estética, y que pretende que el profesor en ejercicio se dé cuenta que detrás de las obras de arte hay toda una teorización compleja que es importante que conozca; el segundo capítulo tiene como objeto describir la relación arte matemática en diferentes periodos de la historia, en términos muy generales.

De acuerdo con esta puntualización, en el primer capítulo nos concentramos en el tema del arte. Particularmente, se exponen algunas definiciones del arte a lo largo del tiempo, y algunas de sus variaciones que han surgido al intentar ofrecerse una definición del mismo. Posteriormente, se describen los inicios de la concepción filosófica del arte a través de la concepción pitagórica y su teoría de números y magnitudes, en sí su teoría matemática. En este sentido se resalta la importancia de la concepción de la escuela pitagórica y su considerable influjo en el pensamiento occidental. A continuación se presentan las posturas de las concepciones filosóficas de Platón y Aristóteles que, sobra decir, constituyen históricamente dos puntos de referencia de la filosofía occidental. En términos generales se aclara la gran diferencia entre ambas posturas: Platón considera que el arte es una imitación de la imitación, por ello esta posee poco valor, mientras que Aristóteles considera que el arte interviene en el desarrollo del hombre y por lo tanto posee más valor.

Además, como se tiene en cuenta el problema de la estética en diferentes periodos, y la influencia del pensamiento matemático, nos parece interesante trabajar las posturas de dos filósofos modernos: Kant y Hegel. Debido a esta circunstancia, describimos sus puntos de vista sobre el arte y el problema de la estética, puesto que ambos pensadores desarrollan una teoría sobre la estética de modo muy diferente a lo planteado por los filósofos antiguos. Sin embargo, sus perspectivas guardan aún una relación indirecta con la antigüedad. Aunque, Kant describe el arte visto desde el pensamiento trascendente, mientras Hegel introduce la noción de arte a través de un proceso de una aventura espiritual.

Por otra parte, el segundo capítulo se encuentra divido en tres partes: Antigüedad, Medioevo y Renacimiento. En estos periodos se muestra la manera en que la matemática fue utilizada por los artistas, resaltando los motivos socioculturales que incidieron para hacer de la matemática un elemento clave en el trabajo de los artistas en cada época.

En la primera parte, Antigüedad, se retoman las concepciones de Pitágoras y su gran teoría de la belleza que, después de ser extraída de la música, es llevaba tanto a la pintura como a la arquitectura. Con este punto incursionaremos en la teoría de la medidas de magnitudes, que a su vez nos lleva a la teoría de razones y proporciones y, posteriormente, a uno de los posibles contextos del surgimiento de las magnitudes inconmensurables y, finalmente, a la razón aurea. En este punto es clara la influencia que ejerció Pitágoras con su teoría de la belleza suprema; además de las influencias filosóficas de Platón y Aristóteles, sin olvidar los adelantos matemáticos de la cosmovisión pitagórica al descubrir las magnitudes inconmensurables, en sí los primeros vestigios de los números irracionales. Finalizaremos observando cómo las magnitudes conmensurables de la música y lo inconmensurable de la proporción aurea pueden ser expuestos a través de los cánones estipulados de belleza por parte de los artistas antiguos.

En la segunda parte se aborda el periodo del Medioevo. En este sub-apartado observamos, principalmente, cómo los artistas cambian todo lo estipulado en la Antigüedad, ya que el ideal de belleza ya no gira alrededor del orden y la armonía, sino que la concepción de belleza se ve impregnada por una corriente de carácter religioso. Es decir, el ideal de belleza gira a través de lo “divino”, representaciones de santos y todo lo que tenga que ver con representaciones divinas. En esta parte es de anotar la completa pérdida del sentido del espacio y consigo la noción de proporcionalidad entre cada personaje que se encuentra en la escena, puesto que, como juega un rol otra concepción, el tamaño de los personajes depende de su valor jerárquico en la divinidad. No obstante las corrientes filosóficas son adaptadas por los estetas de la época, donde se imparte la concepción de Platón de que los objetos matemáticos son bellos por sí mismos en el sentido más peculiar, pues a partir de figuras geométricas como triángulos, cuadrados, círculos, pentágonos inscritos en círculos, octágonos etc., se generan unas armaduras que estructuran la obra de arte y a través de éstas el ideal de belleza divina se da a resaltar. Algo sobre lo que llamamos la atención es el uso de la proporción aurea por parte de los artistas medievales en su representación, pues estos son conscientes de su valor y, al igual que los pitagóricos, guardan celosamente la construcción de un pentágono inscrito en un círculo. Cabe aclarar que estos artistas poseían un gran dominio del compás, pero no del conocimiento para demostrar sus construcciones. El último elemento a resaltar en esta parte del capítulo tiene que ver con la idea de Dios como un ser todo supremo que visualiza las obras de arte. Es decir, Dios es una suerte de espectador. Por lo tanto, las representaciones poseen diferentes enfoques dando la ilusión de poder observar todo lo que ocurre en una situación. Además, en este periodo se formaliza el inicio del dibujo geométrico gracias a que las representaciones deben encontrarse bajo el marco de una figura geométrica.

En la tercera parte se expone el período de Renacimiento, y se pretende mostrar cómo se vivencia el retorno del pensamiento clásico y su concepción de belleza, de tal modo que los artistas de esta época se ven en la necesidad de recurrir a las matemáticas, explícitamente a la geometría, para lograr así una representación fiel y bella de la realidad, dejando a tras todo concepción medieval. Esta idea se logra exponer a través de un análisis muy panorámico de la idea otorgada por Brunelleschi para poder dibujar en perspectiva (Espacio tridimensional en un plano bidimensional) correctamente. Idea que logra ser tratada y mejorada por otros artistas, a través de diferentes tratados en los que se exponía lo propuesto por Brunelleschi, y que terminó decantando en lo que hoy en día es conocido como geométrica proyectiva.

Para el desarrollo del trabajo de grado se han tomado como base diversas fuentes, primarias y secundarias, las cuales nos permitieron analizar algunos cambios significativos, con mutuas y fluctuantes influencias, desde diversas corrientes: religiosas, científicas y filosóficas. Por medio de diferentes corrientes de pensamiento y planteamientos, que han logrado girar alrededor de estos dos temas.

En el tercer capítulo se hace una revisión a algunos pintores modernos con el propósito de mostrar que la relación pintura-matemáticas trasciende el renacimiento. Se trata de un capítulo descriptivo donde se han tomado como referencia tres pintores representativos: Velásquez, Dalí y Escher. Esto abre nuevos caminos de estudio, que seguramente serán abordados por la autora en otras instancias.

En el cuarto capítulo se presentan algunas conclusiones generales del trabajo. Se trata de establecer vasos comunicantes entre los diferentes momentos históricos y las motivaciones que dieron como resultado este trabajo de grado. Es natural que una indagación de este estilo se ignore muchos aspectos importantes en la relación arte-matemáticas, pero ello es inevitable dado que el arte y las matemáticas son fuentes inagotables de teoría y prácticas científicas y también mundanas.

1. ALGUNAS ANOTACIONES SOBRE LA NATURALEZA DEL ARTE

Para lograr el objetivo que nos hemos trazado en este documento es conveniente establecer algunos puntos referenciales respecto al arte.

La expresión «arte» se deriva del latín «ars», que a su vez es una traducción del griego«τεχνη». Sin embargo «τεχνη» y «ars» no tenían en gran medida el mismo significado del que hoy día tiene «arte». La línea que une la expresión contemporánea más reciente con las que le precedieron es continua pero no recta. A través de los años se ha alterado el sentido de las expresiones. Los cambios han sido suaves pero constantes, y a través de los milenios ha variado significativamente el sentido de las antiguas expresiones. Esto implica que el planteamiento enciclopédico anterior no nos permite develar lo que es el arte.

En general se acepta que el arte es una creación del espíritu humano, que se origina en la facultad de ser pensante y de tener conciencia de sí. Esta conciencia de sí la obtiene el hombre por medio de la razón y la practica; por la razón, el hombre logra el entendimiento de sí, de la naturaleza o delo exterior que constituye la esencia de las cosas; la práctica es la acción, que permite exponer y reconocer, a través de una obra de arte, los sentimientos interiores o vividos por la razón.

En la medida en que vamos entendiendo como se exterioriza la conciencia, vamos comprendiendo el origen del arte.

En este proceso de conciencia y exteriorización de las facultades del hombre juega un papel importante su sensibilidad para exponer y percibir las representaciones o la realidad.

En este proceso existen algunas opiniones falsas acerca de la sensibilidad o principios sensibles que se dan respecto al arte. Una de las opiniones erróneas es la que representa el arte como la completa y absoluta sensación de placer. En esta concepción lo bello de las artes se limita al simple análisis de las sensaciones o impresiones. Cabe a aclarar que esta concepción es un poco limitada puesto que es una concepción subjetiva e individual. A esta forma de ver el arte se suman otros errores, por así decirlo, pues como se habla de concepciones individuales se logra intrincar algunas propuestas hechas para perfeccionar el gusto considerado como sentido de lo bello. Estas consideraciones son tan solo unas vagas e indefinidas consideraciones. El gusto, limitado de esta manera, no logra penetrar en la naturaleza íntima y profunda de los objetos. Pues ésta no se revela a los sentidos sin la intervención de la razón; facultad del espíritu que permite lo verdadero en todas las cosas. Es decir, no se debe limitar el arte simplemente al placer o el gusto, pues existen elementos de la naturaleza que no se pueden revelar directamente a los sentidos.

Ya habiendo expuesto las falsas opiniones que giran alrededor del arte, pasaremos a determinar el papel verdadero que cumple la parte sensible en el arte, que los objetos sensibles interactuan de dos formas distintas con el hombre; la primera es através de la percepción, por medio de los sentidos; la segunda esa través del pensamiento especulativo; aquí la inteligencia juega un papel importantedebido a que éstano se conformacon la simple observación de las formas de los objetos, por lo que no se individualiza al objeto, sino que se extrae lo esencial de éstepara poder extraer una idea universal de este objeto que pueda ser percibidapor los sentidos.

El arte ocupa una posicion intermedia entre la percepción sensible y la abstracion racional. Puesto que al arte le interesa una apariencia, una imagen de la verdad, una idea en general.en pocas palabras el arte crea en una “inmagen-apariencia”, destinada a representar ideas, mostrando la verdad bajo formas sensibles. Detal modo que los lados sensibles del artista se encuentra en la facultad de crear especificamente en la imaginación, en la que la imagen y la idea se funden en un todo que vive y preexisteen el pensamiento del artista. Estos aspectos nos llevan a preguntarnos si es posible una definición acabada del arte.

1.1 ¿Es posible definir el arte?

La revisión a diferentes documentos, nos muestra lo utópico de buscar una definición simple y acabada de lo que es el arte. En este sentido, el propósito de este apartado es proporcionar algunos elementos que nos permitan dar una idea general de lo que se puede considerar como arte.

Según al filósofo polaco Wtadystaw Tatarkiewicz (1886-1980), desde la antigüedad hasta los comienzos de la época moderna, se consideraba arte a toda producción del hombre, de tal forma que la palabra arte acaparaba todo tipo de oficios en el que interviniera la creatividad del hombre. El arte era un proceso que debía ser una actividad racional de conocimiento en el que no jugaba papel alguno la imaginación. En sí, el arte,

> Significaba destreza, a saber, la destreza que se requería para construir un objeto, una casa, una estatua, un barco el armazón de una cama (...) todas estas destrezas se denominaron artes: el arte del arquitecto, del escultor, del alfarero, del geómetra, del teórico. Una destreza se basa en el conocimiento de unas reglas, por lo tanto no existía ningún tipo de arte sin reglas (Tartarkiewicz, 1997, pág. 39).

Se puede observar, que este concepto de arte acapara casi todas las labores conscientes del hombre, desarrolladas bajo unas *reglas determinadas*. Con el tiempo, se distinguieron dos tipos de artes: las artes liberales que eran producto del pensamiento y las artes vulgares producidas mediante procedimientos manuales. En la Edad Media las artes vulgares fueron conocidas como artes mecánicas. Esta concepción de arte como producción *sujeta a reglas,* se mantuvo estable desde el siglo V a.C. al siglo XVI d.C., como bien lo afirma Tartarkiewicz (Tartarkiewicz, 1997).Entre los años 1500-1750 se dio un viraje a la noción de arte. Se busca diferenciar la producción artística de cualquier otra producción. El arte se erige a partir aquello que "produce belleza, es decir, el arte es aquella clase de actividad humana consciente que aspira, y logra, la belleza. La belleza es su propósito, su logro y su valor principal"(Tartarkiewicz, 1997, pág. 56).Esta concepción del arte empieza a gestarse alrededor del año 1750, desplazando el concepto antiguo para afirmarse como un elemento clave y universal que limita el arte a lo bello. Este concepto abarca las siete artes, denominadas así por Charles Batteux (1713 - 1780)[1].Es a partir de esta definición de arte que surge el término de *estética*, atribuido a Alexander Baumgarten, como resultado de un laberinto de definiciones, pues como afirma León Tolstoi. (1828-1910), "desde hace ciento cincuenta años (desde que Baumgarten fundó la *estética* en 1750), la cuestión de saber lo que es la belleza no ha podido ser resuelta todavía, y cada nueva obra de estética da a tal pregunta una respuesta nueva" (Tolstoi, 1898, pág. 10). Aunque nos enfrentaremos a un sin fin de definiciones, de aciertos y desaciertos sobre lo que es o no la belleza, nosotros nos aferraremos a la concepción de belleza pitagórica: *nada que sea bello lo es sin proporción (*La Gran Teoría).

Limitar, hoy en día, el arte simplemente a aquella *actividad que produce belleza,* sería un gran error. Esta definición limitadora del arte, constituyó, a mediados de 1900, según Tartarkiewicz, un obstáculo para comprender nuevas corrientes del arte como el dadaismo.[2] Los diferentes creadores entendieron que el arte no sólo se debía limitar a lo bello, sino también

[1] Con Batteux, en 1746, surge lo que hoy en día se denomina bellas artes. Las bellas artes las dividió en pintura, escultura, música, poesía y danza y luego añadió arquitectura y elocuencia. las bellas artes hoy en día son formas de arte realizadas con un fin estético, de belleza y utilidad práctica, se encuentran comprendidas por: escultura, danza, música, pintura, literatura y cine que fue incluida en el siglo XX.

[2] El dadaísmo es una corriente artística que emerge como reacción al arte convencional. Se trata tomar las banderas de la inconformidad social, las protestas contra la guerra y todo lo que tuviera que ver con un régimen social totalitario. "Por ello derribaron la torre de marfil de un arte armónicamente bello y proclamaron el anti-arte de la protesta (…) lo absurdo lo carente de valor, fue descubierto en su importancia como estampa de la realidad y se elevó a consiente la introducción del caos en la escena artística" (Thomas, 1978, pág. 75).

a lo sublime, lo trágico, lo horroroso, lo grotesco o lo cómico. Es decir a todas aquellas producciones que estimularan los diversos espacios perceptivos del hombre.

De este modo empieza a tambalear la concepcion del arte como sinonimo de belleza, para dar lugar a una nueva concepcion donde puedan encajar las nuevas corrientes artísticas. Por esta razon, se logra observar el carácter variado del arte, el cual se adapta a formas de pensamiento según las epocas, paises y culturas. Según Stuar Hampshire, citado en (Tartarkiewicz, 1997, pág. 63), “no es cierto que sea tan sencillo decir que el arte sirve a las mismas necesidades e intereses de todo el mundo según las epocas y de acuerdo con sus manisfestaciones. Pero esto no significa que podamos prescindir de una definicion de conjunto.”

Tartakiewicz, intenta recopilarar en gran medida los tres cortes más representativos del concepto del arte para unificarlo y ofrecer una definicion que no límite o abarque demasiado, pero que no sea excluyente.

> Una definición del arte debe tener en cuenta tanto la intención como el efecto, y especificar que tanto la intención como el efecto pueden ser de un tipo u otro. Por eso la definición no será solo un conjunto de disyunciones, sino que consistirá de dos conjuntos de disyunciones. Sera algo así: El arte es actividad humana consciente capaz de reproducir cosas, construir formas, o expresar una experiencia, si el producto de esta reproducción, construcción o expresión puede deleitar, emocionar o producir un choque. La definición de una obra de arte no será muy diferente: Una obra de arte es la reproducción de cosas, la construcción de formas, o la expresión de un tipo de experiencias que deleiten, emocionen o produzcan un choque (Tartarkiewicz, 1997, pág. 67).

Respecto a lo que se ha dicho hasta el momento, se puede catalogar el arte como aquella actividad que permite al hombre plasmar y reproducir todo lo puede ser pensado; el arte permite representar y trasmitir la realidad y las ideologías del momento que influencien al artista. Se puede decir que el arte es algo que surge de una unión entre el compromiso consciente con el mundo y la sublimación. Cuando se habla de un compromiso consciente con el mundo, nos referimos a que el hombre debe ser consciente que se encuentra ligado con el mundo, pues sus actos repercuten en su entorno, al igual que sus gestos, sus actitudes, etc.

Se puede decir, entonces que el arte se ve influenciado en gran medida por ese cuadro de valores que se crea alrededor del artista para así lograr ser un medio de expresión de realidades y abstracciones. La *sublimación* se podría considera como aquello que permite materializar lo que ha escapado del cuidado de la parte consciente del artista: miedos, deseos, angustia, alegrías, etc., lo cual es considerado como un proceso inconsciente que se escapa en el momento de la creación de la obra y que se exterioriza a través del arte. La obra artística constituye la materialización de algunos fantasmas del inconsciente que inciden directamente en el espectador, despertando su deleite, emoción, o un choque que sería relacionado con una combinación de sensaciones.

1.2 "La Gran Teoría" del arte.

La teoría general de la belleza se formuló en la antigüedad, sustentando la idea de que la belleza consistía en la proporción de las partes, es decir, en la proporción, el orden de las partes y sus interrelaciones. Tatarkiewicz ilustra un ejemplo de esta teoría haciendo referencia a la arquitectura, al afirmar que la belleza de un pórtico se debe al volumen, número y orden de las columnas.

Con el trascurso del tiempo, esta teoría adoptó dos interpretaciones: una amplia cualitativa y una limitada cuantitativa. La limitada sostenía que la belleza debía darse en las partes que tuvieran relación a través de razones de números pequeños: uno a uno, uno a dos, dos a tres, etc. Los pitagóricos fundamentaron esta teoría con la versión limitada, observando que la armonía de los sonidos se podía representar a través de razones de números en las longitudes de cuerda. Esta idea logra pasarse rápidamente a las artes visuales, puesto que las palabras armonía y simetría se encontraban en estrecha relación con los ámbitos del oído y la vista respectivamente.

"La Gran Teoría"[3]logró ser una teoría objetiva de la belleza al determinar que es gracias al orden, la proporción y los números que "algo" se puede considerar bello. Los pitagóricos afirmaban que el orden y la proporción producen belleza adecuada y que es gracias a los números que todo parece bello. Platón y Aristóteles se consideran los promotores de la Gran Teoría. Platón observa la importancia del número y proporción atribuyéndolo a la naturaleza y el todo, "al hallarse todas las cosas en desorden, el dios ha introducido en cada una de ellas en relación consigo misma, y en las unas respecto de las otras, unas ciertas proporciones. Y esas proporciones fueron lo más numerosas posibles y se hallaban en todas las cosas que podían conllevar relaciones regulares y una medida común"(Platón, Timeo, 1969, pág. 1161). De igual modo, Platón afirma que la medida y la proporción producen belleza, mientras que la fealdad es carencia de medida.

Por su lado, Aristóteles afirmaba que "las principales especies de lo Bello son el orden, la simetría y la delimitación" (Aristoteles, 1997, pág. 183). De igual forma, aquello que no tenga orden será feo; esto implica, según Aristóteles, que se debía estudiar "no sólo el orden y la belleza, sino también el desorden y la fealdad" (Aristoteles, 1997, pág. 10).

[3]La gran teoría domino aproximadamente desde el siglo V a.C. hasta el siglo XVIII d.C., durante estos veintidós siglo fue completada gracias al aporte de diferentes pensadores y artistas. El declive de esta teoría se dio en el siglo XVIII por el surgimiento de nuevas teorías subjetivas de lo bello y la tendencia romántica de la época.

Esta teoría trasciende hasta épocas posteriores con artistas del renacimiento, como León Battista Alberti (1404-1472), quien defendió la belleza como aquello que fuera armónico y que tuviera proporción. Alberto Durero (1471-1528) también sustentaba este punto de vista, reafirmando que sin la proporción adecuada, ninguna figura podría ser perfecta. Este tema del renacimiento lo retomaremos más adelante. En lo que resta de este apartado se hará una breve descripción de la concepción de *estética* para los filósofos Platón, Aristóteles, Kant y Hegel.

1.3 El arte en la filosofía de Platón

Ilustración 1. Platón

Empecemos por aclarar que para Platón el arte y lo bello se encuentran muy distanciados, puesto que el concepto de lo bello no tiene la estrecha relación con el arte, como en la actualidad. El concepto de belleza antiguo es mucho más amplio que nuestro concepto de belleza. No sólo comprende las formas bellas, sino también los colores, las bellas costumbres, la belleza de las almas, los pensamientos, y los sonidos.

Platón ofrece, en sus diálogos, las diferentes concepciones que giran alrededor de lo bello y el arte. De igual manera, argumenta que estos dos conceptos ocupan lugares muy diferentes en su filosofía.

Lo bello es una noción metafisica, que fundamenta su teoría del mundo de las ideas, el arte (las más importantes poesía y pintura), en cambio, ocupa un estatus inferior por no poseer un fin en sí mismo, sino que es un instrumento al servicio de lo bueno y lo verdadero.

Para comprender estas dos posturas es necesario introducirse en algunas de las reflexiones dadas por este filósofo. Lo más importante es percibir que Platón concibe dos mundos: el mundo sensible y el mundo de las ideas; el mundo sensible es un reflejo del mundo de las ideas. Platón ubica la belleza en el mundo de las ideas, colocándola al mismo nivel del Bien.

La teoría de conocimiento de Platón se basa en la búsqueda de la *esencia*, la cual constituye la base de toda ciencia. Las esencias son las ideas o las realidades suprasensibles, inmutables e imperecederas. Las esencias no son cambiantes ni se encuentran en constante fluidez como las cosas sensibles. En sus reflexiones hay cabida para las ideas perfectas, las cuales son catalogadas por la posición jerarquizada respecto a la idea del Bien. El Bien es un ente creador y supremo que genera lo bueno, la ciencia, la verdad, el ser y la realidad. La idea del bien para Platón constituye el origen de toda existencia.

Las Ideas se caracterizan por su unidad y no hacen parte del mundo sensible. Para Platón las cosa materiales no deben ser asociadas a la realidad; los objetos del mundo sensible son obtenidos por una percepción errónea pues los sentidos solo otorgan una representación falsa y tergiversada de lo que es la realidad. Según Platón, la realidad verdadera y única se fundamenta en el mundo incorpóreo que no es palpable o visible, denominado el mundo de las ideas, el cual solo es captado a través de la razón.

Aclaremos un poco que son las artes para Platón. Las artes para Platón, no valen por sí mismas, sino que se encuentran determinadas por la filosofía que es la vía por la cual se puede obtener la verdad. En sí la filosofía determina los modelos que el arte debe imitar, otorgando así el valor pedagógico que deben cumplir. Esto es debido a que algunas artes, como la pintura y la poesía, pueden salirse del camino de la representación, que es algo que Platón considera inconveniente, pues da lugar a falsas creencias de lo que es la realidad y de este modo se incentiva un caos moral. Es decir, al ser catalogado el arte como imitación de la realidad, constituye un modelo que representa lo que debe ser real. Si la representación escapa de esto, se puede tergiversar la percepción de lo que es la realidad. Por ello Platón rechaza y critica al discurso poético y pictórico, pues asimila la percepción de éstos como un completo engaño a la realidad. Aunque no obstante puede ser un elemento útil para educación, pues aunque en ocasiones el arte es una escuela del vicio, en otras ocasiones puede convertirse en una pedagogía para la virtud.

> Al ser una imitación, el arte es efectivamente un habituarse del hombre al modelo que imita. Según los modelos que propone y expone el arte, el arte eleva a los hombres o los rebaja, los familiariza con la justicia, con la injusticia, los dispone al respeto o a la rebelión, los hace amar la tradición o buscar la novedad, los educa o los pervierte. Esa es la razón por lo que el arte debe estar estrictamente regulado por la filosofía [...]. A toda sociedad le corresponde cierto tipo de hombres [...]. El arte debe presentárseles de modelo, e instaurarlo a imitarlo (Grimaldi, págs. 154-155).

Para Platón, las manifestaciones artísticas, al encontrarse constituida de signos aparenciales, se ubican en la ilusión y no otorgan una realidad verdadera. La realidad artística se encuentra en un escalón inferior del mundo sensible. La realidad, concibe Platón, se encuentra supedita en el mundo de las ideas, por lo que el mundo sensible en el que interactuamos con los objeto (el mundo corpóreo), solo es un reflejo del mundo de las ideas. En otras palabras el mundo sensible en el que nos encontramos es simplemente una imitación de la realidad absoluta que reposa en el mundo de las ideas. El arte logra ofrecer una imitación del mundo sensible; por lo que la realidad artística se logra catalogar como una imitación de una imitación, ya que el arte imita el mundo sensible, y el mundo sensible imita al mundo de las ideas, entonces el arte no posee gran valor en sí mismo, ubicándose en un lugar inferior del mundo sensible, al ser una simple imitación de éste. Por ende, el arte se ubica en el nivel más bajo de las categorías Platónica, lo que significa que la realidad artística no nos ofrece una verdad absoluta y sólo induce al engaño.

Ya aclarado que es el arte para Platón y cuál es la posición que ocupa éste en su filosofía, retomaremos el concepto de lo bello. Para Platón lo bello no es lo visible, sino aquello que trasciende al nivel de la idea o espíritu; lo bello va ligado a una concepción metafísica, puesto que "lo bello absoluto es el *ser* que contiene en su esencia todas las realidades por las cuales las cosas son bellas determinando finalmente el hecho de ser una idea o esencia que posee sus reflejos en el mundo sensible"(Platón, Banquete, 1969). Eso significa que lo bello no es lo visible, pues la belleza visible – cuerpos hermoso- es solo un reflejo de lo bello absoluto. Es decir, Platón expresa lo bello de una forma jerarquizada; primero, se encuentra la belleza de los cuerpos, siendo la belleza inferior; en segundo lugar se ubica la belleza de las almas a través de la virtud, belleza media; En el tercer escalón se encuentra la belleza en sí, como idea suprema junto al bien, la belleza absoluta. Por lo anterior se puede decir que Platón es consciente de que para captar la belleza suprema se debe partir de la belleza visible, para ascender en una belleza espiritual -intelectual y moral- que culmina con la contemplación de la belleza suprema en sí, la cual se encuentra en el mundo de las ideas.

Para Platón, la importancia y el valor de una obra de arte residen en la asimilación de la belleza absoluta. La belleza absoluta es obtenida de la concepción pitagórica como aquello que conserva la medida y la proporción; la falta de estos elementos en una obra de arte le hace perder por completo su valor de verdad. Platón expresa que existe un grave error en enjuiciar la belleza de una obra de arte según el placer que cause; la belleza de una obra de arte se debe por el valor de verdad contenido en ella. Un verdadero artista es el que imita pero teniendo en cuenta la cantidad y la cualidad. Por tanto para Platón una obra de arte es bella si contiene orden y armonía. El orden y la armonía son aspectos que conducen al bien y a la verdad, aspectos que hacen referencia al principio pitagórico *katalogia* (término que funde la idea del bien con la idea de la verdad)

1.3.1 La idea de belleza en Platón

Una de las primeras afirmaciones de Platón sobre la belleza[4], es que es un elemento indispensable paravivir. Vale la pena vivir solamente si el hombre es capaz de percibir la belleza con la misma intensidad que la verdad y la bondad. Para Platón las ideas[5]de verdad, bondad y belleza están unidas; el bien corresponderá a lo divino; lo bello, en cuanto se va alejando de lo sensible, se depurará hasta alcanzar el estatus o idea del bien, es decir lo que los griegos denominaban *kalokagathia*.

Platón, establece el proceso de concebir lo bello como el proceso de adecuación a una idea. Lo percibido como bello no será lo visible, sino lo que trasciende al nivel de la idea o espíritu (belleza suprema). Lo bello absoluto es el S*er* que contiene en su esencia todas las realidades por las cuales las cosas son bellas. Por consiguiente, lo bello en sí no será lo visible, sino lo que trasciende al nivel de la idea o espíritu.

Sin embargo Platón expresa que para captar la belleza suprema o Idea de lo bello es necesario partir de la belleza "visible", los bellos cuerpos por ejemplo, para así trascurrir por unos senderos que permitan trascender hacia la intuición de la belleza espiritual, intelectual, moral y culminar en la contemplación de la belleza en sí,

> He aquí, pues el recto método de abordar las cuestiones eróticas o de ser conducido por otro: empezar por las cosas bellas de este mundo teniendo como fin esa belleza en cuestión y, valiéndose de ellas como de escalas , ir ascendiendo constantemente, yendo de un solo cuerpo a dos y de dos a todos los cuerpos bellos y de los cuerpos bellos a las bellas normas de conducta, y de normas de conducta a las bellas ciencias,

[4]La Idea juega un papel importante en la reflexión estética de Platón, pues así como el mundo tiende al bien y la belleza, también el hombre está en continuo ascenso al ideal de hombre bello y bueno (…). Werner Jaeger nos explica en su obra *Paideia*, por qué la belleza resulta ser también una vía para la formación del hombre y para educarlo en sus virtudes, pues ella es fin y modelo al cual buscan encaminarse las acciones para el griego (Mansur, 2011, pág. 92).

[5] La idea es la esencia, el mundo ideal de las esencias es el que incide en el mundo sensible. De tal modo que, lo que se observa en el mundo sensible tan solo es un reflejo de la realidad trasmitida del mundo de las ideas a través de la esencia.

> hasta terminar, partiendo de estas, en esa ciencia de antes, que no es ciencia de otra casi sino de la belleza absoluta y llegar a conocer por ultimo lo que es la belleza en sí (Platón, Banquete, 1969, pág. 589).

De este modo, la idea de lo bello sólo se lograr mediante un proceso escalonado que parte de la observación. L apercepción de la belleza visible se debe al reflejo de la belleza absoluta que no posee contaminación alguna del mundo sensible, pues se busca ver la belleza en sí, en su pureza, limpia, sin mezcla, sin estar contaminada con las carnes humanas, los colores y demás vanidades mortales"(Platón, Banquete, 1969, pág. 590).Por tanto, el grado de belleza de las cosas reales depende de su mayor o menor distancia respecto de la Idea de lo bello. De esta forma se nota en Platón un interés más espiritualista por la belleza que va más allá de la belleza corporal, pensamientos o acciones.

1.3.2 La belleza como orden y armonía

Otra de las concepciones de Platón es la de delimitar la belleza a la medida y el número. Platón admite que la conservación de la medida y la proporción es algo que será siempre bello; mientras que la falta de medida y proporción dará referencia a la fealdad. Cabe señalar que las opiniones dadas por Platón sobre lo mencionado anteriormente tienen su fundamentación en la influencia que recibió delos Pitagóricos, quienes conciben el *Cosmos* como la causa del orden que permite mantener las partes en relación con el todo. Platón muestra cómo la influencia del movimiento armónico del universo se evidencia en la naturaleza, en una la relación con el alma humana:

> Por ejemplo, el cuerpo de un individuo chocaba contra el fuego exterior, o contra una tierra compacta, o sobre la superficie resbaladiza de las aguas, o bien se veía envuelto por el aire, en un huracán de vientos de impetuosos. Y como consecuencia de todos

> esos fenómenos, a través del cuerpo llegaban hasta el alma movimientos y la trastornaba (Platón, Timeo, 1969, pág. 1143).

Según Plazola, citado por (Bedoya, 2011, pág. 57), cada elemento del alma humana "se encuentra de acuerdo entre sí, siendo para ello de vital importancia el número y la proporción. El mundo en tanto marco y microcosmos es una sinfonía que da como resultado la belleza en sentido cuantitativo, la belleza delos cuerpos y objetos del mundo". En este sentido, la música juega un papel importante, pues, para Platón es otorgada por las musas, genera una revolución en las almas y trae consigo la armonía; ella nos proporciona otra forma de ver la belleza:

> Pues la armonía, cuyos movimientos son de la misma especie que las revoluciones regulares de nuestra alma, de ninguna manera se aparece al hombre que tiene una relación inteligente con las musas, como simplemente buena para procurarle un placer irracional, como parece ser actualmente. Por el contrario, las musas nos la han dado como un aliado de nuestra alma, ya que ella intenta llevar al orden y al unísono sus movimientos periódicos, que en nosotros se han desafiado (Platón, Timeo, 1969, pág. 1146).

Quien no aprecie la armonía de la música, no podrá poner su alma en orden; es decir, que su alma será fea. Crombie, citado en (Bedoya, 2011, pág. 57), dice que "si hemos de asumir que los objetos bellos son armoniosos, entonces la belleza puede afectarnos y producirnos placer por 'afinidad' con nuestra propia armonía interna. Parece deducirse que hombres malvados tendrán un deficiente sentido de belleza, y creo que probablemente Platón lo creía así".

Según el objetivismo platónico, hay elementos que son bellos por sí mismos y despiertan placer a quien los perciba, pues estos elementos logran otorgar belleza a los objetos, condicionan de belleza a objetos animados o inanimados, ya que estos son siempre bellos por sí mismos. Los elementos a los que alude Platón son las líneas rectas o circulares y a las superficies o sólidos precedentes de ellas por medio de regla y compás. En lo anteriormente dicho se visualiza el carácter objetivo del planteamiento de lo bello para Platón, lo cual lo podemos comprender en tres sentidos: metafísico "relación con la Idea", cosmológico "relación con el universo" y cuantitativo "objetos matemáticos". De este modo se logra distinguir tres tipos de belleza: la belleza visible que es la de menor valor para Platón; la belleza de las almas y, por último, la de más peso, la belleza en sí. De acuerdo con Rábanos.

> El pensamiento platónico se mantiene casi hasta hoy, porque es una mezcla de hedonismo, de valores éticos que se funden con valores estéticos y unifica una enorme sensibilidad con gran dosis de buen criterio. El moralismo en su producción estética lo hereda de los pitagóricos (…) afirma que lo bello tiene un papel muy importante en la moral y, consecuentemente, en la vida social, cultural y en la formación de cada individuo (Rábanos Faci, 2005, pág. 22).

Examinemos, panorámicamente, el sentido del arte para Platón. Primero, cabe aclarar que el arte es un producto racional, mientras que lo irracional no lo es. Platón hace una clasificación de las artes, dependiendo la relación que estas artes tengan con hechos reales, por lo que divide las artes de la siguiente manera:

> Algunas producen cosas, como por ejemplo la arquitectura y otras las imitan, como por ejemplo la pintura. Esta oposición entre artes «productivas» e «imitativas» fue muy popular en la antigüedad y siguió siéndolo en tiempos modernos. Otra clasificación platónica diferenciaba las artes que producen cosas reales, por ejemplo la arquitectura, y las que producen sólo imágenes, por ejemplo la pintura. Sin embargo, Platón pensaba que estas clasificaciones eran idénticas. Las imitaciones de las cosas no son nada más que imágenes de ellas (Tartarkiewicz, 1997, pág. 40).

De este modo se da surgimiento al concepto de *mimesis*, es decir la imitación de las cosas. Las artes imitativas, es decir, "las artes visuales, son un logro puramente humano, ese aspecto es uno de los más bajos" (Tartarkiewicz, 1997, pág. 113). Las artes no tienen el valor actual; éstas eran un oficio que debía cumplir con dos objetivos: el primer objetivo del arte corresponde a la utilidad moral, al modo socrático; El segundo objetivo sería reflejar de manera mimética las leyes externas de la existencia y para servir también a la verdad y a la fortaleza (Rábanos Faci, 2005, pág. 20). Para la conservación de las leyes que rigen su entorno se basaron en los elementos matemáticos como proporción, orden y armonía que les permitiera una representación aproximada de su realidad, lo cual explica por qué Platón consideraría que una obra no es bella si carece de "medida y proporción"[6]. No es raro que los artistas griegos se apoyaran fuertemente en la idea de belleza absoluta de Platón, que se basaba en los números y las proporciones para crear sus obras, como afirma Tartarkiewicz:

> Los artistas griegos se dividieron en el curso del tiempo en dos grupos: los partidarios de la simetría, y los de la euritmia. Los primeros artistas, especialmente los arquitectos, trabajaron de acuerdo con los principios de la simetría e intentaron descubrir los cánones inmutables de la belleza. Los artistas posteriores se esforzaron por establecer las relaciones que son hermosas a los sentidos. Los primeros trabajadores aceptaron sólo la belleza absoluta, cósmica, divina y supe sensorial de la simetría, y hallaron en Platón un poderoso defensor de su arte. Las artes visuales, sin embargo, siguieron en general el camino de la euritmia y la corriente ilusionista (Tartarkiewicz, 1997, pág. 122).

[6]Aspectos que conducen al bien y a la verdad y que se identifican con el principio pitagórico de la *Kalokagathía*

Hasta aquí dejaremos las referencias de Platón para concentrarnos en la idea de belleza en Aristóteles.

Ilustración 2. Aristóteles.

1.4 El arte en la filosofía de Aristóteles.

Para comprender qué papel juega el arte en la filosofía de Aristóteles es necesario referirnos a su teoría de conocimiento. Partamos del hecho que la forma en que concibe el mundo Aristóteles es muy diferente de la visión platónica. Ello da lugar a que sus planteamientos filosóficos sean distintos a los de Platón; en particular, su concepción del arte es diferente.

Aristóteles, a diferencia de Platón, ve la sensación y la imaginación como fuentes de conocimiento. Más aun, la sensación es considerada por Aristóteles como el origen del conocimiento, sustentando una postura no idealista de lo que es realidad. Para Aristóteles el mundo corpóreo es el único. Es decir, este mundo que vemos, percibimos, y experimentamos es el único existente; El mundo sensible, del que forman parte todas las sustancias individuales que conocemos, las cuales se componen de materia y forma, que logran ser portadoras de una racionalidad la cual se trasmite al interactuar con ellas.

Las esencias, a diferencia de Platón, no se obtienen del mundo de las ideas, sino de la materia. De ahí que, para Aristóteles, el conocimiento tiene su origen en las cosas mismas; no existe la necesidad de buscar principios absolutamente trascendentes y separados del mundo sensible para acceder a la verdad, pues ésta se encuentra en el mundo sensible; el conocimiento se logra a través de las sensaciones. Por tanto, el mundo sensible en la filosofía de Aristóteles ya no es una apariencia ni una mala copia de otro mundo (el de las ideas planteado por Platón);

sus características y representaciones no son tampoco ficciones que nos lleven a errar. El movimiento, los cambios, la finitud son tan reales como las cosas que los producen.

Ya aclarado un poco la visión del conocimiento concebido por Aristóteles. Analicemos la concepción del arte para Aristóteles. El arte, para Aristóteles, ocupa un grado de saber superior, denominado *techne*, el cual se considera un conocimiento exacto que se aproxima a la ciencia; como lo afirma Sossa:

> El concepto aristotélico “arte” (techne) pareciera coincidir con nuestro concepto “técnica”, entendidos ambos como aplicación utilitaria de la ciencia. No obstante, Aristóteles advierte que el arte puede comportar un claro rasgo de soberanía, entendida esta como autonomía en el sentido en que vincula y funde ambos conceptos: un conocimiento es más soberano (ocupa un lugar más alto en la escala del conocimiento) en la medida que se mas autónomo (en la medida en que su objeto en mayor o menor medida sea el mismo): “ de las ciencias, aquella que se escoge por sí misma y por amor al conocimiento sabiduría en mayor grado que la que se escoge por sus efectos. Y (…) la más dominante es sabiduría en mayor grado que la subordinada” (Sossa F. , 2002, pág. 1).

El arte logra ser un medio de conocimiento más universal que la experiencia, pero menos universal que la ciencia. El arte es una actividad humana, la cual se distingue de la naturaleza; los productos de la naturaleza son de necesidad, mientras que los productos del arte, son contingentes; es decir, son objetos producidos o la acción que los produce. De tal modo que el arte siempre produce algo. El arte como actividad humana es una producción, y solo es arte, una producción consciente, basada en el conocimiento. No es arte una producción basada sobre la experiencia o en la práctica, se debe tener la capacidad de dominar a fondo el arte, por lo que el arte como capacidad de producir es una habilidad. Aristóteles, al igual que platón, maneja el concepto de *mimesis*, aunque con una vertiente diferente. El arte imita la naturaleza (no las ideas) es decir el mundo sensible, permitiendo representar de igual modo lo que la naturaleza no puede hacer. La obra de arte logra ser un meritorio y universal reflejo del mundo sensorial, el cual enriquece al mundo, en vez de empobrecerlo como ocurrió con la visión platónica. Para Aristóteles el arte es imitación, al igual que para Platón, pero no es una imitación limitada a la apariencia de las formas, es también imitación de cómo pudieran o deberían ser. La imitación es este sentido liberará al artista de ser un simple imitador de formas de la naturaleza. Algunas imitaciones, las que se efectúan bajo el ritmo expresión verbal y armonía, hacen que se agrupen la pintura, música y poesía como las artes imitativas. ¿Pero en sí que imita el arte de Aristóteles? El arte para Aristóteles imita la realidad debido que lo real es el mundo sensible. Para Aristóteles el arte, entre más se aleje de la realidad a representar, más se acerca a la realidad como tal. En sí   el arte es una imitación que no descarta la imaginación y la creatividad

El arte se encuentra posicionado dentro de las ciencias poéticas o productivas, las cuales tiene como fin la producción de objetos útiles que logran ser más utilices o más placenteros. El ritmo y la armonía son algunas peculiaridades del arte; el orden es un elemento clave del conocimiento estético de la obra, de igual modo la estructura ya sea en la representación de una obra poética o pictórica dando lugar a señalar como bello lo que comprende magnitud y orden; la magnitud artística logra ser una atracción que iguale o supere en un universalidad la magnitud de los objetos a representar tal como son percibidos sensorialmente por el artista. Todo esto lo que busca es la congregación de las partes para llegar así a la unidad, que es lo que para Aristóteles debe poseer una obra de arte. El mundo sensible, seres viviente etc… son cada uno una unidad a representar, cada objeto sea animal o no, posee una unidad estructurada, la cual se debe tomar en la cuenta en la representación

1.4.1 Lo bello moral

Aristóteles tuvo gran influencia de su maestro Platón, respecto a la relación entre la belleza y el bien (relación que hace referencia a una concepción de *belleza moral*),al sustentar la idea de que toda belleza es buena. La belleza se relaciona con lo que es agradable a los sentidos, porque es un objeto de contemplación y no de deseo. En sí, lo bello agrada porque es bueno; quiere decir que lo *bello es bueno* al igual que lo concebía Platón*,* dando así origen a una belleza moral*.* Aunque Aristóteles "creía que el bien moral era sinónimo de belleza (…) no hablaba de una belleza suprema, inasible, sino de una belleza concreta que tocaba solo a los espíritus sensibles a ella misma*"*(Pozo Castillo, 2006, pág. 2). A diferencia de Platón, Aristóteles considera que todo lo *bueno* no es *bello,* generando así una distinción entre ambos, "el bien y la belleza son diferentes (porque el primero lleva consigo siempre la conducta como objeto, mientras que la belleza se halla también en las cosas inmóviles)" (Aristoteles, 1997, pág. 183). Además, "el bien como tal estimula a la acción; aunque se basa en la esencia metafísica de las cosas, es sólo bien en cuanto se relaciona con una voluntad. El bien se refiere a la practicidad, como algo que se ofrece en concepto de fin. La belleza, en cambio, puede existir también en lo inmóvil, aparte de toda avidez y deseo*"* (Fahré, 1949, pág. 1445).

1.4.2 Lo bello formal

La belleza para Aristóteles es orden, simetría y proporción. Lo que hace eco de las teorías pitagóricas y su preocupación por el número, tomando como referencia la Gran Teoría de la belleza, como se logra observar en su *Metafísica*:

> Los que afirman que las ciencias matemáticas no dicen nada acerca de la Belleza o del Bien se equivocan. Dicen, en efecto, y enseñan muchísimo; pues, aunque no los

nombren, si enseñan sus efectos y sus proporciones, no omiten el hablar de ellos. Y las principales especies de lo Bello son el orden, la simetría y la delimitación, que se enseñan sobre todo en las ciencias matemáticas. Y, puesto que estas cosas (me refiero, por ejemplo, al orden y a la delimitación) son causa de otras muchas, es evidente que las Matemáticas llamarán también en cierto modo causa a esta causa que consideramos como la Belleza (Aristoteles, 1997, pág. 183).

Por sí misma, esta concepción de belleza se encuentra ligada con el orden, la simetría y la proporción, pues como se puede observar, según Aristóteles, son las causas absolutas de belleza. Aclaremos que el orden para Aristóteles es, en sí, la disposición adecuada, lo que tomaría el nombre más tarde de *forma*. "La forma era una manera conceptual, no como disposición de elementos, sino como la esencia conceptual de un objeto" (Hodgson, 1994, pág. 55).Esta idea da cuenta como "su pensamiento estético lo adapta al arte" (Rábanos Faci, 2005, pág. 23), algo que no se caracteriza con tanta evidencia en Platón, pues la *forma* logra ser un elemento clave en las obras de arte: Aristóteles, quien decía que a las obras no debe exigírseles otra cosa que forma.[7]

Aristóteles acoge de la doctrina pitagórica, la concepción de la "proporción de la conveniencia". Su idea de belleza la concibe como la dimensión adecuada de los objetos, como hemos mencionado: lo bello radica en la magnitud (proporción, delimitación) y el orden. La delimitación, de acuerdo con Aristóteles juega un gran papel en el momento de apreciar la belleza,[8] pues no se podría observar lo bello en un objeto excesivamente pequeño o un objeto

[7] Cabe aclarar, que aunque el concepto de forma estuviera surgiendo, hubo que esperar hasta el siglo XX para ser utilizado en el arte.

[8] Para Aristóteles, percibir la belleza es una actividad puramente humana, pues a diferencia de los animales, percibimos la belleza por medio de nuestros sentidos, como vista y audición, sin un fin en específico, sin una necesidad alguna. La belleza produce placer; en sí, percibir la belleza es una experiencia de gocé que sólo tiene acceso el hombre. "(Los animales) no gozan ni de la armonía de los sonidos, ni de la belleza de las formas. No hay entre ellos uno que goce al contemplar las cosas bellas…(Aristóteles, 1964).

excesivamente grande, ya que nuestra percepción se vería confundida al no poder abarcar la magnitud del objeto, ya sea por lo pequeño o grande, sería imposible apreciar su belleza, por lo que afirma que la *huida de todo exceso es la clave de lo bello*,[9] Sossa intenta explicar qué es lo que entiende Aristóteles como magnitud artística:

> Trátese, pues, de un ser vivo o de una totalidad compuesta de partes, ha de tener compuesta de partes, ha de tener una determinada dimensión: no tan grande que sea inabarcable, no tan chico que sea imperceptible. ¿De qué proviene una magnitud tal? […]. La repuesta que ofrece Aristóteles es previsible: se origina en la precepción sensorial del mundo y después en la experiencia: la magnitud de la obra de arte viene determinada por la naturaleza y no se diferencia en el principio de la magnitud que la naturaleza propone para un animal […]. Más allá de la analogía, la magnitud artística debe ser una abstracción que iguale o supere en universalidad la magnitud de los objetos naturales tal como son percibidos sensorialmente por el artista (Sossa F. , 2002, pág. 8).

Para Aristóteles la belleza era una unidad de partes que cumplía con las siguientes condiciones:

1. *Táxis*: se refiere a la distribución espacial de las partes del objeto.
2. *Symmetría*: las partes del objeto deben estar en la correcta proporción.
3. *Horisméno*n (la extensión o tamaño de lo bello). Las cosas no deben ni aumentarse ni mermarse en sus dimensiones. Las artes se constituyen en elementos moderadores que buscan equilibrio como clave del bien.

[9] Un ejemplo que nos aclare este sentido, sería la imposibilidad de observar la belleza de una escultura de grandes dimensiones que abarquen el grande de una cuidad, por así decirlo, o una escultura tan pequeña que solo la alcancemos a percibir como un punto.

De lo mencionado anteriormente, se puede concluir que lo bello es valioso y agradable por sí mismo, siendo entonces una cualidad objetiva. Debido a que se logra concebir la belleza como una propiedad de las cosas, aunque de algún modo hay un factor subjetivo en la teoría de belleza de Aristóteles, como lo afirma Rábanos: "otro concepto que introduce es el de la perceptibilidad. En ésta siempre hay un factor subjetivo a la hora de contemplar la belleza" (Rábanos Faci, 2005, pág. 25). Dejaremos hasta aquí esta idea para hablar brevemente de lo que significa arte para Aristóteles.

Aristóteles esgrime el concepto de *mimesis* en las artes, al igual que Platón, pero le otorga un significado más trascendental, el cual le permite ir más allá de una simple representación de la realidad. Para Aristóteles el arte es más que una imitación de la naturaleza (*mimesis*) debido a que, a través de él, puede lograr embellecer o afectar la naturaleza, del mismo modo puede representar cosas más allá de la realidad o puede completar lo que la naturaleza no puede terminar.[10] Aristóteles había escrito "lo que puede ser cierto en arte puede no ser posible en la realidad" (Aristóteles, 1964, pág. 1460b13). De este modo, para Aristóteles el arte es "consecuencia de una producción consciente, basada en el conocimiento de los medios y con unos fines determinados. Por ello, es necesario que los artistas dominen la «techne»[11] o técnica"(Rábanos Faci, 2005, pág. 23).El arte no solo es una imitación superficial de la naturaleza, logra representar características internas, el poder reproducir las sensaciones que sentimos al observar la naturaleza como tal, por lo que para Aristóteles la experiencia estética logra ser de índole cognoscitiva según lo expresado por Ortigosa:

[10]Aristóteles hizo de las artes difería poco de la de Platón; dividió las artes según complementasen la naturaleza o la imitasen(Tartarkiewicz, 1997, pág. 82)

[11]La techné se consistía en las habilidades del productor, es decir las habilidades que poseía el artista para la creación de su arte.

> Para Aristóteles todo arte es mimesis o imitación de la naturaleza, pero no sólo en un sentido de reproducción de sus rasgos externos, sino que puede ser representación de aspectos del carácter, de las pasiones o acciones de lo existente. Así, la noción de mimesis significa más esa representación que la mera imitación, y caracteriza a las artes productivas (poesía, tragedia, comedia y música), pero también a las artes en general. En el pensamiento aristotélico dicha noción se relaciona […] con la de catarsis: Este placer estético es posible porque, según Aristóteles, la experiencia estética es de índole cognoscitiva (Ortigosa López, 2002).

Para concluir, el arte logra generar infinidad de sensaciones al espectador, ya sean de placer, tragedia, de liberación, medicinal, es decir, "todo lo atribuido a la *catarsis*". La belleza dela obra de arte se debe en gran medida a la unidad que se dé en una obra de arte, pues, cuanta mayor unidad consigue la obra de arte mayor placer proporciona al espectador. Esto se aprecia claramente cuando Aristóteles, *"*observando la forma esculpida y pintada, dice que ésta depende del equilibrio de las proporciones y de la justa medida*"*(Hodgson, 1994, pág. 72). Fahré habla lacónicamente del ideal de arte de Aristóteles:

> La belleza, según los griegos, especialmente Aristóteles, no es esencialmente fruitiva, sino que proporciona goce precisamente por la dignificación que impone al hombre. El intelectualismo aristotélico no puede admitir un concepto dulzarrón, sentimental y vacío. Es algo superior. Es virtud pedagógica, formativa del hombre, a quien enlaza con los más íntimos y sublimes aspectos del ser mismo (Fahré, 1949).

En el próximo punto recurriremos a Immanuel Kant, filósofo alemán (1724-1804), para adentrarnos en una concepción más actual sobre la estética y lo bello.

1.5 La estética en Kant

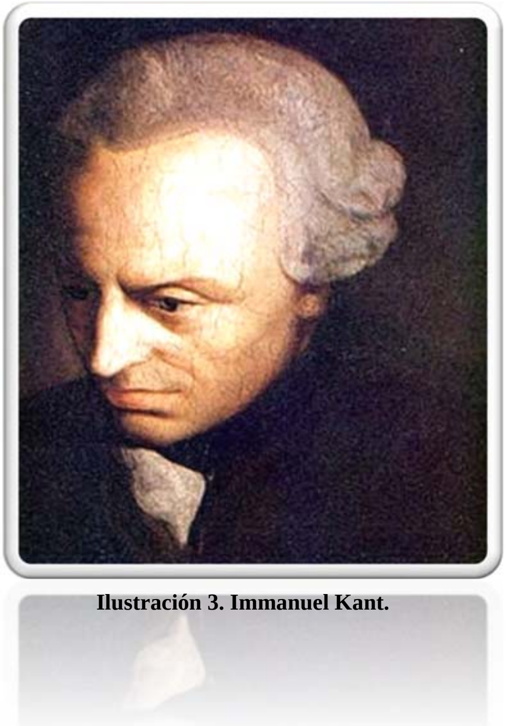


Ilustración 3. Immanuel Kant.

Kant abre una completa brecha en la historia, pues, a diferencia de Platón y Aristóteles, logra desprender la belleza del objeto atribuyéndola sólo al sujeto. Es decir, la belleza no se encuentra en el objeto que es calificado de bello, sino en el sentimiento de placer que se despierta en el sujeto causado por la observación de tal objeto: lo bello "depende por completo del sujeto, es una impresión del sujeto" (Zuleta, 2001).Se puede decir que lo bello es algo artificial, que cada hombre siente y transmite ya sea una bella obra de arte o un objeto bello de la naturaleza. Conversar sobre belleza no significa decir algo sobre el objeto en cuestión, sino es hablar del sentimiento que se genera en uno mismo por la contemplación del objeto. Como afirma Kant:

> Toda relación de las representaciones, incluso la de las sensaciones, puede, empero ,ser objetiva (y ella significa entonces lo real de una representación empírica); mas no la relación con el sentimiento de placer y dolor, mediante la cual nada es designado en el objeto, sino lo que en ella el sujeto siente de qué modo es afectado por la representación (Kant, 2004, pág. §1).

Es importante aclarar que este valor subjetivo de belleza posee un valor universal para Kant, puesto que algo no debe ser bello solamente para una persona, es decir, "al juzgar que una cosa es bella se exige a los demás la misma satisfacción". Además, "La belleza no se predica de las cosas para uno, sino que se dice como si realmente estuviera en el objeto, como si fuesen bellos los objetos, como si la belleza no se basase en un sentimiento subjetivo" (Bueno Gómez, 2008, pág. 7). De este modo, la belleza debe verse como una propiedad "objetiva de las cosas"; Sin embargo, no es posible que algo sea sólo bello para un sujeto en particular, sino que se necesita la aprobación social. Como afirma Kant:

> Muchas cosas pueden tener para él encanto y agrado, que eso a nadie le importa; pero, al estimar una cosa como bella, exige a los otros exactamente la misma satisfacción; juzgar, no sólo para sí, sino para cada cual, y habla entonces de la belleza como si fuera una propiedad de las cosas (Kant, 2004, pág. §7).

1.5.1 Las categorías de Kant

Para Kant, sólo existen dos categorías de objetos bellos: lo bello natural[12] y lo bello artístico, que relaciona la naturaleza[13] y el arte. Es importante resaltar que en la naturaleza es donde se logra dar la contemplación total de la belleza, pues lo bello de la naturaleza logra ser superior a lo bello artístico. Kant afirma que "la naturaleza era bella cuando al mismo tiempo parecía ser arte, y el arte no puede llamarse bello más que cuando, teniendo nosotros conciencia de que es arte, sin embargo parece naturaleza". En otras palabras, para Kant, "la naturaleza es bella cuando parece arte y el arte es bello cuando parece naturaleza. Pero el criterio de la belleza está, en ambos casos, en el placer que fundamenta el juicio"[14] (Bueno Gómez, 2008, pág.

[12] El objeto natural como objeto estético: Son experiencias inmediatas en la cual el objeto natural por no estar mediado es el objeto estético por excelencia, dicho objeto fija nuestra atención inmediatamente, se me impone. El objeto natural es el paradigma. Sin proceso de interpretación, no tiene que ser descifrado. No hay autor, no hay interpretación y se impone inmediatamente (Cordero, sf)

[13] Para Kant la naturaleza provee seres conceptualizables, pero no una forma acabada, pues vistos desde la razón profunda. La naturaleza aparece entonces para Kant como una sima desde la que surgen seres que vistos en sus mecanismos parciales son sin duda conceptualizables, pero que vistos de cara a una teología de su conjunto separan toda capacidad de comprensión conceptual, como sucede con especial intensidad cuando la naturaleza se desborda y se impone. El resultado de esta operación es lo bellos y lo sublime (Sossa F. , 2002).

[14]Kant define el juicio como la capacidad humana de subsumir razonamiento particulares en razonamientos generales.

11).Cabe recordar que la belleza del objeto se atribuye sólo al sujeto, de tal manera que los "juicios estéticos"[15] no dependen del conocimiento ni de la moral como había sido en tiempos anteriores, sino de la contemplación hecha por el sujeto al objeto.

> Los juicios con los que nos dirigimos a los fenómenos bellos, sean obras de arte u obras de la naturaleza, no son juicios lógicos o de conocimiento; son juicios de gusto, esto es, estéticos y por lo tanto subjetivos, lo que viene a decir en definitiva que no producen conocimiento. […] los estéticos son juicios "reflexionantes", esto es, no constituyen ni determinan el objeto porque no están dirigidos a un fin, no engarzan el objeto con un determinado concepto y no poseen otro interés que no sea el producir el sentimiento de intentar inútilmente esa vinculación así una "finalidad sin fin" que no sale de las fronteras del sujeto (Sossa F. , 2002, pág. 2).

Cuando se hace referencia a una "finalidad sin fin", quiere decir que lo bello debe parecer libre, no debe estar vinculado a las "ataduras" de la utilidad: "En realidad, Kant, define lo bello como finalidad sin fin, en el sentido de fin sin propósito. Un objeto que tiene la forma de una finalidad, no de una causalidad. No de una causalidad, de ser producto de tal cosa, sino de algún propósito implícito en la forma misma y que, sin embrago, no se propone nada en el sentido instrumental" (Zuleta, 2001, pág. 89).Si no fuera de este modo, no se diría que la belleza es subjetiva, debido a que existirían reglas que los sujetan a unos parámetros. Los objetos bellos deben poseer un fin que no debe ser percibido por el espectador, lo cual permite que se logre

[15] Los juicios estéticos son juicios de validez general, los cuales tienen gran influencia de los juicios empíricos y universales. Kant no aprueba ninguno de estos dos juicios para definir el juicio estético, pero tampoco los dejaba a un lado. Los juicios empíricos dependen de las vivencias del sujeto son solo particulares de este, es en sí es un conocimiento adquirido a través de los sentidos. en cambio los juicios universales no dependen de la vivencia del sujeto su validez es universal para todos los sujetos, un ejemplo claro de esto logran ser los juicios matemáticos, los cuales se "fundamentan en formas a priori de la sensibilidad" (Rábanos Faci, 2005).

una subjetividad universal[16].De ahí que, aunque los juicios estéticos sean subjetivos, poseen un carácter universal, puesto que, según Kant, lo que sólo agrada a algunos es un juicio privado que va relacionado con el gusto; en cambio, *lo bello* debe ser bello para todos los sujetos, debido a que, la validez universal de lo bello va relacionada con el sentimiento de placer que se genera en el sujeto a través de la contemplación del objeto: es como si la belleza no se basara en un sentimiento subjetivo sino que se “encontrara en el objeto"[17], por lo que todos los sujetos deben sentir la mismas sensación de agrado que hace determinar lo bello de algo. Lo bello, según Kant, “es lo que, sin concepto, place universalmente”.

1.5.2 Universalidad del juicio

Para la aprobación del juicio de belleza es necesaria la aprobación de varios sujetos, puesto que este juicio no puede ser determinado por un solo sujeto, debido a que no tendrá validez alguna. Es decir, “es tanto como decir que sin los otros, no hay belleza. No nos basta con un sujeto para hablar de belleza. La belleza sólo es posible en una comunidad de sujetos” (Bueno Gómez, 2008, pág. 7).

La capacidad del sujeto de percibir lo bello, a partir del placer que genera la contemplación del objeto, es lo que lo permite adherir a los juicios estéticos, por lo que podemos decir que la validez de un juicio estético, de igual modo, se ve relacionado con juicios dados en

[16]“Subjetividad universal: es clave para el idealismo posterior de Kant. En este concepto se conjugan distintos ámbitos: el entendimiento y la sensación, la racionalidad y la irracionalidad, lo infinito y lo finito, lo objetivo y lo subjetivo. Todas estas conciliaciones se reducen a conciliación entre entendimiento y sensación. Lo común entre los juicios estéticos y científicos es que produce conocimiento objetivo, universal. La sensación sería irrepetible y única. Se vinculan aspectos en principio opuestos. Es el punto exacto donde se conjugan estos dos elementos de la realidad. La experiencia estética sería igual a imaginación, más entendimiento y sensación. Es una conjunción inmediata pero opaca a la razón. No es deducible. Es irreducible a la subjetividad de la sensación. La experiencia estética tiene la universalidad opaca que tienen los aspectos de intensidad personal. Se vincula lo subjetivo de la experiencia con lo objetivo. Se trata de una experiencia que todo ser humano debería vivir” (Cordero, sf)

[17] Aclaremos que la belleza no se encuentra en los objetos, sino en el sujeto que lo contempla.

una pluralidad de sujetos. Por esto Kant recurre a algunas condiciones que deben darse para que un juicio se dé. Estas condiciones son las siguientes: la comunicabilidad, el sentido común, y la capacidad de imaginar[18].Son estas condiciones son las que llevan a la universalidad de los juicios estéticos.

En otras palabras, para llevar a la universalidad del juicio estético, es necesaria la *comunicabilidad* de los juicios personales de cada individuo, y por ende, la interferencia de la imaginación para poder comprender aquellos juicios. La imaginación nos permite colocarnos en lo posición del otro sujeto para tratar de comprender el porqué del juicio estético de éste, "aunque esto no garantice que se puede imponer el juicio estético a los individuos". Se pretende de esta manera poder crear un estándar que permita comprender por qué el mismo objeto puede generar las mismas sensaciones de placer a tantas personas, aunque sea claro para nosotros que los juicios de belleza no son percibidos de igual forma por algunas personas, pues no siempre lo que nos parece bello a unos les parece bellos a otros. Esto se debe, según Kant, a una carencia total del sentido común[19], el cual permite que se pueda comprender al otro sujeto, es decir, por medio de este sentido logramos comprender los juicios de belleza que poseen otros sujetos.

Desde nuestro punto de vista Kant intenta, muy en su fondo, formular lo bello bajo un parámetro "una medida", pues aunque defienda la subjetividad de lo bello, siempre pretende que se logre llegar a una objetividad entre los juicios establecidos por los individuos, al afirmar "que si algo parece bello a alguien y solamente es bello para esa persona, entonces no será bello

[18] "la imaginación en Kant es definida de forma amplia y precisa. Es necesaria para la conceptualización; es necesaria para pasar de la conceptualización paramente formal a la intuición del concepto y su vinculación a determinados objetos que pertenecen a ese concepto […] la imaginación no viene solamente a producir extravagancia y a desviarnos del rigor del pensamiento, sino a colaborar con el pensamiento" (Zuleta, 2001, pág. 95).

[19] "No se puede demostrar la existencia de un sentido tal; solamente se puede presuponer en virtud de la posibilidad de entendimiento entre los hombres. El sentido común hace que sean posibles los juicios de gusto, pero también tiene un papel en el conocimiento […] Esa armonía interna es la que es común a todos y es la que posibilita el que el juicio estético sea prescriptivo y no meramente descriptivo: dice que cada uno de los otros deberá estar de acuerdo con nuestro juicio, no que estará de acuerdo. Para que los demás estén de acuerdo es preciso que la subsunción del juicio esté bien realizada y que los que juzgan tengan gusto. El que carece de gusto, no estará de acuerdo con un juicio sobre la belleza. El que carece de sentido común no entenderá nuestro juicio" (Kant, 2004).

sino un gusto”. Se ve claramente como intenta generar parámetros alrededor de los juicios, determinando que lo bello es algo que produce placer y no se encuentra en el objetó mismo sino que es una propiedad de éste.

1.6 La estética en Hegel

Para Hegel, el arte es la aparición sensible de la idea. En alemán “Aparición sensible” se escribe como *sinnliches Scheinen*; el término “Scheinen” puede significar “aparición y apariencia”. Si entendemos el arte como la apariencia, podríamos caer bajo la crítica platónica del arte. Recordemos que uno de los problemas que Platón ve en el arte es que nos lleva a la pura apariencia, pone en peligro el equilibrio del alma y nos predispone a olvidar la verdadera realidad, es decir, lo estable y lo inmutable.

Respecto a la exigencia que se le hace al arte de imitar la naturaleza, Hegel afirma: “Si el arte quiere encontrar su esencia en la imitación no podrá competir con la naturaleza (por tanto vencer a la naturaleza) sino que deberá ser comparado a un gusano que intenta seguir a un elefante".[20]

Para Hegel lo real es algo totalmente distinto a aquello que podemos captar por los sentidos, planteando que el arte tiene como objetivo liberarnos de la aparición sensible. Aunque las obras de artes sean en sí mismas apariciones sensibles.

Para Hegel el contacto sensible con la “representación” constituye la percepción más imperfecta y primaria. Es una acción que también es llevada a cabo por los animales, cuyo instinto les abre el deseo de incorporarse a la representación, que es tomada como el objeto. El hombre, en cambio a pesar de efectuar el proceso de percepción sensible, tiene conciencia que

[20] Cita tomado de (Biemel, 1962, pág. 150).

no se encuentra frente al objeto como tal. Esto muestra que la obra de arte se resiste a la sola interpretación perceptiva. Kant hace un planteamiento cercano al expresar que la obra de arte era únicamente asequible cuando se tenía una actitud completamente desinteresada.

En su *Estética* de Hegel plantea el elemento sensible aparece en la obra de arte como una especie de silueta. A través de lo sensible se lleva la información a la conciencia, que aún no es una conciencia en sentido estricto. Según Hegel, el hombre tiene la capacidad de descartar "la esfera animal de la sensibilidad y del deseo". Esto es posible porque podemos discernir la representación del objeto. Así, si estamos viendo un cuadro con algo de comida somos conscientes de que no podemos degustar los manjares representados. Eso clarifica muy bien el planeamiento hegeliano de que los objetos representados son tan solo una apariencia de la realidad.

De acuerdo a lo anterior, para Hegel, la apreciación de una obra de arte necesita de la sensibilidad en un nivel diferente que en el rutinario, en el cual la existencia de las cosas naturales se supedita a la apariencia. Esto sitúa a la obra de arte en una posición intermedia entre la sensibilidad inmediata y el pensamiento. Esto se debe al hecho de que, al mismo tiempo, el arte si bien se manifiesta en lo sensible al mismo tiempo niega, en la interpretación, esa sensibilidad.

Hegel, al igual que Platón, concibe dos mundos. "El hombre es un ser anfibio, dice Hegel, vive en dos mundos, el de los sentidos y el del espíritu." (Biemel, 1962, pág. 154). El arte establece un vínculo entre estos dos mundos y necesita de cada uno de ellos. Por esta razón, el arte no puede renunciar ni a la sensibilidad ni al espíritu.

1.6.1 La idea lo ideal en la obra de arte

Se ha indicado que el arte para Hegel es la aparición sensible de la idea. Comprendamos un poco en qué sentido se hace esta afirmación. Partamos inicialmente de cuál es el significado de la palabra idea. Walter Biemeltrae a colación la definición dada por el mismo Hegel en su *Lógica*: "La idea es el *concepto adecuado,* lo *verdadero* objetivo o lo *verdadero en cuanto tal.* Si algo posee verdad la posee por su idea, o bien *algo posee verdad sólo en la medida en que es idea*"(Biemel, 1962, pág. 154). Para Hegel el proceso lógico finaliza en la idea. El punto de partida es el Ser, cuya esencia nos lleva al Concepto y finalmente se llega a la Idea, en la cual coinciden concepto y realidad. El arte logra ser uno de los medios por los que se manifiesta la idea, los otros medios son la religión y la filosofía. Aunque el arte para Hegel, logra ser de estos tres medios, es el más distante del absoluto, que es entendido desde un carácter espiritual.

Para Hegel, la 'idea' une lo subjetivo con lo objetivo, constituyéndose en un mediador en el proceso de entendimiento, mediante un proceso dialéctico que va dela obra de arte, creada desde un sentimiento vivido, a una primera imagen presentada que se codifica en la obra y finalmente llega a la conciencia del espectador.

> Si hemos entendido que toda aparición es siempre una aparición de la idea, que es la idea que se manifiesta alienándose, nos daremos cuenta de que el papel de la sensibilidad en el arte no puede ser el de una sensibilidad no intelectual sino, por el contrario, el de una sensibilidad que tiende a expresar el espíritu. Por esto Hegel dice que esta sensibilidad es sensible y al mismo tiempo negación de lo sensible (Biemel, 1962, pág. 155).

Se puede sintetizar lo ideal en Hegel y su relación con la producción artística de la siguiente manera. En primer lugar recordemos que para Hegel, "la obra de arte es la sensibilización del espíritu", es decir, el arte personifica una representación universal de lo espiritual. Por lo tanto, el arte logra ser producido por un acto humano, pero como producto espiritual. Lo ideal corresponde a la culminación de la obra. La cual comienza siendo un mero concepto, visto como unidad de lo universal, que luego, pasará a ser una *idea* que será la unidad de la subjetividad y la objetividad, como vimos anteriormente. Por último esta unión dará como resultado lo ideal que será la realidad concreta de la idea en la representación de una forma artística. Todo esto trasmitirá movimiento en su interior, es decir, representará, idealmente, aquello no estático del espíritu del artista.

1.6.2 Las formas del arte en Hegel

Hegel logra distinguir tres formas artísticas del arte, las cuales son; arte simbólico, arte clásico y arte romántico. Estas tipologías marcan el pensamiento artístico; son diferentes respecto a la relación entre el contenido y forma. El papel que cumple la idea en estas distintas formulaciones artísticas es diferente. En el arte simbólico "la idea es aún indeterminada". En el arte clásico "se realiza la concordancia entre la idea y la forma, la idea ya no es abstracta. En el arte romántico corresponde al espíritu, llegado a su término absoluto.

La forma artística simbólica va a ser un mero buscar la forma para un contenido que, en principio, es indeterminado pues se encuentra en un proceso de búsqueda. La figura va a ser deficiente, no va a expresar la idea. El hombre parte del material sensible de la naturaleza, para construir una forma, a la cual se le adjudica un significado. El medio utilizado para ello es el símbolo. En principio, el carácter ambiguo del símbolo llena de un halo misterioso la obra del arte; la forma va a ser mayor que el contenido, debido a que las formas naturales en las que se basaran se encuentran determinadas y la idea no; “la idea no encuentra un expresión de identidad entre el contenido y la forma” (Biemel, 1962, pág. 156).

La forma artística clásica va a lograr el equilibrio entre forma y contenido. La idea no solo es determinada sino que se agota en su manifestación. La idea ya no es abstracta, sino que es comprendida de modo concreto. En el arte griego, la escultura es el arte de la forma artística clásica. Las esculturas griegas no eran, para los griegos, representaciones del dios sino que eran el dios mismo. El hombre griego fue capaz de expresar su espíritu absoluto, su religión, en el arte. A esto se refiere Hegel cuando habla del carácter pasado del arte. El arte, en su esencia, pertenece al pasado siempre, porque es en él en donde la cumple, es en el arte griego en donde el arte logra su fin último, la representación total de la idea.

No obstante, por el carácter limitado del arte este equilibro entre contenido y forma tiene que romperse. Es en este momento que se da el paso a la forma artística Romántica, en la cual se establece, una vez más, la desigualdad entre forma y contenido. Desde el romanticismo, forma y contenido dejan de encajar de forma perfecta como se hacía en el arte clásico. Ahora, a diferencia del arte simbólico, la forma será la que no sea capaz de representar el espíritu. Es decir, el contenido rebasa la forma. Las artes de esta forma artística son la pintura, la música y la poesía. La idea va a ir de lo más material, la pintura, a lo menos material, pasando por la música, que tiene como materia el sonido, llegara a la poesía que es el arte universal del espíritu ya que tiene como material la bella fantasía. La poesía va a atravesar todas las demás artes. “Para Hegel el arte simbólico tiende al ideal de los bello, el arte clásico lo alcanza y el arte romántico lo supera” (Biemel, 1962, pág. 158).

De lo anterior se logra observa, la manera como Hegel logra proponer una sistematización de las bellas artes. Es decir propone una clasificación específica de cada forma artística como se vio anteriormente. Para Hegel, la escultura representa el arte objetivo perfecto. La arquitectura es aún un arte demasiado ligado a la exteriorización. La pintura, la música y la poesía son, por otra parte, formas interiorizadas y corresponden a las artes románticas. La música sobrepasa el espacio como ámbito que ya no es adecuado para la expresión del espíritu. El sonido es para Hegel la negación de la materialidad exterior y corresponde a la interiorización que tiene lugar en el arte.

A partir de Hegel, la estética toma una dirección diferente, ya no se va a ocupar más de la belleza natural, sino que se ocupa de aquella belleza que pretende expresar algo y por tanto tiene un carácter espiritual. La belleza de la obra de arte se encuentra en un nivel superior a la belleza natural puesto que ha nacido del espíritu. Si se tiene en cuente que para Hegel el espíritu es el ser verdadero que comprende todo en sí mismo, es necesario afirmar que lo bello no es completamente bello sino en cuanto participa el espíritu y es creado por él. En pocas palabras la belleza de la naturaleza aparece como un reflejo de la belleza del espíritu, es decir, como una belleza imperfecta.

1.7 Síntesis del capítulo 1

En este capítulo abordamos, de manera panorámica, algunos aspectos del arte, la filosofía del arte (estética)", y de igual modo se abordó una de las categorías estéticas más importantes que comprende el arte, como es la categoría de lo bello. En todo este recorrido intentamos describir lo que es el arte, sin lograr una definición acabada. La naturaleza del arte y su perspectiva logran escaparse a una simple definición. Sin embargo, algunos filósofos, desde distintos enfoques, han establecido acercamientos al respecto. En esta perspectiva trabajamos a Platón, Aristóteles, Kant y Hegel. Nos interesa comprender los planteamientos de estos autores alrededor de la relación arte-matemáticas. La concepción del número se encuentra en gran medida en las posturas concernientes a lo bello en una obra de arte de "cada uno de estos filósofos" y es por eso que tomamos la categoría estética de lo bello como directriz de este trabajo.

Recordemos que Platón maneja una de las posturas heredadas por los pitagóricos, la cual consistía en limitar lo bello a la medida y el número. Platón admite que la conservación de la medida y la proporción es algo que será siempre bello; mientras que la falta de medida y proporción dará paso a la fealdad, cabe aclarar que esta concepción igualmente es atribuida a lo bello de una obra de arte. Desde un punto de vista actual es claro que en estas concepciones el número juega un papel muy importante logrando así abrir una puerta imaginaria que da cabida al papel que juega la matemática en la obra de arte y la búsqueda de lo bello. Lo bello, en este sentido, es de carácter objetivo.

En Aristóteles la unidad de las partes permite la apreciación de la belleza de una obra de arte u objetos sensible. La magnitud y el orden son determinantes de lo bello. Para Aristóteles la belleza logra ser una propiedad objetiva de las cosas. No es raro que el número juegue un papel protagónico en las concepciones aristotélicas, de igual modo como se puede apreciar desde la perspectiva actual de Platón.

Por otro lado Kant, a diferencia de estos dos pensadores, establece el significado de lo bello desde dos posturas; primero como algo que se produce en el sujeto, por lo que no es una propiedad del objeto; segundo, desde el ámbito cultural al plantear que lo bello no puede ser bello solo para una persona. Para Kant, la belleza solo existe en el ámbito social, pues para su validación se necesita de la comunicación entre los individuos. En resumen, para Kant la belleza hace parte de lo común, de la normatividad a la que estamos acostumbrados a vivir. Lo bello existe dependiendo del entorno en el que viva el individuo que observa la belleza. En este sentido, podemos afirmar que Kant juega, en gran medida, con la proporción, el orden, y la armonía de una manera muy sutil, como elemento unidad que otorga continuidad y estándar a los objetos de nuestro entorno. Si algún elemento no cumple con las medidas o el estándar básico que rige la sociedad, se saldrá de la medida básica, el orden y lo estipulado, por ende se podría catalogar como feo o simplemente agradable para algunos pocos y esto no lo contempla Kant en la apreciación de lo bello. Para estos tres pensadores es absolutamente claro que lo bello natural "la naturaleza" logra ser superior a lo bello artístico.

Con Hegel no es muy claro el papel que juega la matemática en su visión de belleza, así sea de una obra de arte. Pero es necesario abarcarlo para tener una concepción más actual sobre las teorías planteadas alrededor de la naturaleza del arte, además no es posible establecer una visión panorámica del arte sin retomar la estética de Hegel. Este filósofo antepone la belleza artística por encima de la belleza natural, debido a que ésta es solo es una realidad imperfecta. Hegel, al igual que Platón, maneja la teoría de la existencia de dos mundos, aunque no de la misma manera. La revisión que hemos realizado en este apartado, de acuerdo a lo planteado en el anterior capítulo, se puede sintetizar en el siguiente cuadro.

	Platón	Aristóteles	Kant	Hegel
Definición del arte.	El arte es imitativo. "la pintura es imitación de previas imitaciones". Cualquier teoría del arte debe partir de la noción de belleza.	El arte es esencialmente imitativo, aunque va más allá de la simple imitación.	El arte es una imitación de la naturaleza que llega a la ilusión (belleza natural) o es un arte encaminado a nuestra satisfacción.	El arte debe tener otro fin que el de la imitación puramente formal de lo que existe, pues la imitación no puede dar lugar más que a artificios técnicos, que no tienen nada en común con una obra de arte.

Ficción y arte.	La ficción es esencialmente dañina por que aleja al ser humano de la búsqueda de la verdad.	La ficción ofrecía mayor grado de creatividad a los artistas, pues pensaba que estos representaban mejor o peor la realidad	El producto del arte debe parece un producto natural. Por lo tanto no hay cabida para la ficción.	La ficción puede tomarse como un valor de la realidad. En la realidad de la obra de arte interviene el espíritu.
Papel del arte	El arte cumple dos objetivos: (a) Como pauta moral del comportamiento (b) Reflejar miméticamente la realidad a partir de la medida y la proporción.	El arte llenaba la necesidad del ser humano de aprender a partir de la imitación.	El arte no es ni bueno, ni útil, ni malvado, ni es un oficio ni un artificio, etc. sin embargo tiene una finalidad, es espíritu y libre juego.	El arte constituye un alimento espiritual. el espíritu es el ser verdadero que comprende todo en sí mismo
Manifestaciones del arte.	Ciertas manifestaciones artísticas pueden tener efectos perjudiciales en el estado de ánimo del ser humano.	Consideraba las artes pictóricas, podían servir de purificadoras.	El arte debe atenerse a la naturaleza y para el hombre moderno, la naturaleza, muchas veces, supera en belleza y esplendor estético del arte más refinado y genial. La experiencia estética es una satisfacción desinteresada.	La obra de arte tiene una superioridad, esa superioridad consiste, en qué lo natural, aunque dotado de vida, se extingue, en cambio la obra de arte perdura.

2. UN ENCUENTRO HISTÓRICO ENTRE EL ARTE PICTÓRICO Y LA MATEMÁTICA

En el capítulo anterior establecimos un acercamiento a una definición de lo que podría ser el arte, su naturaleza, y su perspectiva; en ésta línea encontramos cuatros grandes teóricos del arte y de lo estético que son: Platón, Aristóteles, Kant y Hegel. Como hemos visto, dentro de las perspectivas de estos pensadores, como elementos de fondo, se encuentra la relación arte matemática; sin embargo no hemos analizado minuciosamente sus teorías dado que nuestro propósito principal consiste en ofrecer una idea panorámica de lo que era el arte con el propósito de tomarlo de elemento referencial para desarrollar el siguiente capítulo, el cual constituye el epicentro de este trabajo: la relación arte y matemáticas.

En este documento no vamos a trabajar la relación arte matemática en general, sino que vamos a trabajar en particular la relación el arte pictórico y matemática, mirando esta relación en el desarrollo histórico de las matemáticas.

La relación arte-matemáticas es tan antigua como la filosofía occidental. Así, Pitágoras en el siglo VI a. C., sustentaba la idea de que el universo era bello por estar ordenado matemáticamente. Concepción retomada por Platón, Aristóteles, los arquitectos y los pintores griegos. Las ideas estéticas de estos pensadores antiguos encontraron su síntesis en la teoría de razones y proporciones; un artefacto teórico que le daba salida al problema de las magnitudes inconmensurables. Una de estas razones, concretamente la razón aurea, surge de la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, que al unir sus vértices formaba la estrella pentagonal, el emblema de la escuela pitagórica, por lo cual se le reconocía un carácter místico. Esto explica un poco el hecho de que fuera tomada como referencia estética por los pitagóricos y luego por artistas en la composición de sus obras. Los arquitectos griegos la tomaron como base en las construcciones de templos, así como también los escultores y pintores en sus obras.

Por ejemplo Polícleto estableció un molde estético con base en las proporciones de las partes del cuerpo, el cual utilizó al plasmar en una escultura el triunfo del atleta Dorífero.

Lo romanos también tomaron como referencia la teoría de razones y proporciones en el diseño y construcción de templos sagrados como el Panteón; una hermosa y privilegiada construcción, cuya cúpula aún sigue llenando de admiración por su equilibrio geométrico, su belleza arquitectónica y su estado de conservación.

Aunque en el medioevo no hay avances substanciales en las herramientas estéticas, se utiliza una técnica geométrica, en especial las espirales y los círculos. En cambio el renacimiento enriquece al mundo con una serie de técnicas que combinan la óptica y la geometría, a tal punto que emerge una nueva rama de las matemáticas, como lo es la geometría proyectiva. Esta disciplina es una herencia de los pintores renacentistas que buscaban representar la profundidad con base en la proyección de la tercera dimensión en un plano bidimensional. Para ello hubo necesidad de redefinir la teoría del infinito actual, desterrada por Aristóteles. Entre los iniciadores de esta propuesta novedosa podemos contar a León Battista Alberti, a Filipo Brunelleschi y especialmente al pintor alemán Alberto Durero.

La representación de la tercera dimensión dio paso, en el siglo XX, a la pintura abstracta. Se trata, ahora, de no utilizar la figura acabada, sino una representación pictórica provocadora que evoca sueños, esperanzas y contingencias. Aunque existen diferentes técnicas y estilos, nos interesa llamar la atención en aquellos pintores que se basan en la abstracción geométrica, dando lugar a diferentes estilos como el cubismo abstracto, el constructivismo soviético y el constructivismo holandés.

Entre los pintores abstractos sobresale la figura de Wassily Kandisky, quien reivindicaba la necesidad de representar un principio de orden y armonía que provenía del interior de los seres humanos. En este sentido la representación geométrica constituía la herramienta ideal.

Pero el principio geométrico euclidiano, proyectivo y abstracto fue rebasado ampliamente por algunos artistas del siglo XX, como el holandés Maurits Cornelis Escher, quien utilizó objetos del análisis, la lógica y la topología en el diseño de sus pinturas.

En la actualidad, las posibilidades estéticas que emergen de las matemáticas abstractas son inimaginables. Los sistemas virtuales, verbigracia la mayor parte de las películas animadas y los juegos de video que se basan en programas no son más que reconstrucciones matemáticas.

A continuación se profundiza en algunas etapas que nos muestran la estrecha relación entre pintura y matemáticas.

2.1 Arte y matemática en la antigüedad griega.

Pondremos de presente algunas concepciones de Pitágoras que permiten otorgar una idea de cuál es el punto de partida entre la relación arte y matemática en la antigüedad, y sus repercusiones obtenidas a lo largo de este periodo en el arte. Claro está, que se lograrán divisar estas concepciones a lo largo del Medioevo y el Renacimiento.

En este periodo de la antigüedad, se referencian algunas artes como música y arquitectura de forma muy sutil, aunque se haya aclarado que nos basaremos en el arte pictórico particularmente estos punto son necesarios para el desarrollo de éste apartado.

2.1.1 Antigüedad y la influencia Pitagórica

Podríamos decir que los griegos se interesaron en sentar unas bases y principios que les permitieron reconocer al hombre como un ser dotado de conciencia sobre aquellas cosas que se encontraban ante sus ojos. Esta forma de pensamiento convirtió al hombre en un ser eminentemente racional; es decir, el hombre de esta época deja de basarse en sus instintos más básicos, abriéndose paso al razonamiento y entendimiento de todo lo que afecta su entorno. En otras palabras, *clasifica* y *organiza* su entorno para lograr entenderlo. Como bien lo afirma Hodgson: “Para los griegos existía la clasificación de: cuerpos u objetos visibles, e ideas u objetos del pensamiento. Con más o menos acierto, aquellos hombres dieron con todo un planteamiento que sería luego recogido bajo un solo concepto: forma” (Hodgson, 1994, pág. 55).

Hacer referencia al modo cómo se comprende la *forma* de “algo” no es otra cosa que concebir el que un estado de caos se convierta en una materia organizada en orden de partes. Es decir, se logra ordenar a partir de una experiencia externa que es desentrañada por nuestra mente para así entender lo que se encuentra ante nosotros. Si tenemos en cuenta este punto vista, comprenderemos un poco mejor como el pensamiento griego se vio regido por una búsqueda incesante de un estado de equilibrio y orden en todo lo que realizaban o veían. De una u otra forma los griegos tenían como finalidad llegar al estado supremo de la virtud[21], *la aret*e, necesaria para encontrar la belleza.

Lo anteriormente mencionado, respecto del orden, nos lleva implícitamente a destacar la labor de Pitágoras “quien aplicó al mundo el nombre de Kósmo, (…) implicaba tanto orden y perfección estructural como belleza” (Bonell, 2000, pág. 80).

[21]Valor del comportamiento humano, necesario para encontrar el equilibrio y la armonía es decir la belleza.

Pitágoras (580 - 495 a. C) juega un papel de suma importancia en la historia de las matemáticas y de la humanidad, pues es "a partir de Tales y Pitágoras, la matemática griega evoluciona por caminos de alta complejidad que, paradójicamente, se estructuran alrededor de una disciplina común: la geometría" (Douglas, 2006, pág. 87).

Ilustración 4. Pitágoras.

Pitágoras es originario de la isla de Samos, colonia jónica cercana a Mileto en la costa del mar Egeo, su Menesarco. Se logra distinguir tres etapas fundamentales en su vida: en la primera, se destaca su amistad con Tales, quien se cree pudo iniciarlo en las matemáticas. "En esta etapa pudo haber participado en los Juegos de la XLVIII Olimpiada, en los que habría obtenido la rama de olivo en las competencias de pugilato" (Extremiana Aldana, Hernández Paricio, & Rivas Rodríguez, 2005, pág. 147).

Ilustración 5. Pitágoras.

La segunda etapa, corresponde a sus viajes que se atribuyen fueron realizados a Egipto, Mesopotamia o Babilonia; lugares donde se encontraba el mayor cúmulo de conocimiento en matemáticas, conocimiento que logra entran en *contacto* los griegos por medio de los viajes realizados por Pitágoras a estos lugares, "este contacto significa para la matemática de la época un enorme salto conceptual pues, de una matemática dedicada en lo esencial a la solución de problemas de tipo práctico, se pasa a una matemática interesada en los conceptos y las relaciones que ellos ocultan, es decir una matemática teórica*"* (Douglas, 2006, pág. 1).

La tercera etapa, corresponde cuando, luego de estos viajes, regresa a Samos lugar en el que gobierna Polícrates, quien lo expulsa de la cuidad por "diferencias" que se dan entre ambos. Así, Pitágoras se exilia a Crotona, en el golfo de Tarento, al sur de la actual Italia. En esta ciudad logra asentarse y fundar la fraternidad Pitagórica[22], alojándose en la casa de Milo y su hija Theano.[23]

La fraternidad pitagórica tuvo gran acogida, por lo que se extendió rápidamente, alcanzando así un poder político en varias ciudades. En la cuidad de Crotona se produce la primera gran rebelión contra los pitagóricos, en la que durante una revuelta se incendia la casa de Milo, en la que vivía Pitágoras. Éste se refugia en Tarento y luego en Metaponto, donde muere.

Las ideas de Pitágoras, históricamente, trascendieron al ser individual emergiendo la denominada "escuela pitagórica". Tomando la dirección de este trabajo de grado podemos decir que para los pitagóricos el concepto de orden juega un papel preponderante al encontrarse ligado, en gran medida, con el concepto de límite y lo ilimitado: dar forma a lo informe, limitar lo ilimitado. Esta idea nos lleva a divisar el papel fundamental que desempeña el número en la cosmovisión pitagórica, pues se atribuye al número un valor limitador, razón por la cual lo informe, o "el todo", adquiere forma, debido a que "postularon naturalmente el número como el principio del que dependían el cielo y la totalidad del universo"[24]. En concordancia, el número rige al universo y le otorga orden y belleza.

---

[22]Fraternidad esotérica, dedicada a la práctica del ascetismo, la comunidad de bienes y el estudio de las matemáticas para obtener la realización de la armonía interior, acorde con la gran armonía del cosmos, a la que se accede por la gnosis numeral 'Todo está dispuesto conforme al Número'. Este grupo se dividía en dos grupos Matemáticos (conocedores) y Acusmáticos (oidores).

[23]Theano se dice que fue la primera mujer matemática y que dirigió la hermandad después de la muerte de Pitágoras, a pesar de que en ella estaban prohibidas las mujeres (al menos para asistir a las reuniones públicas) (Extremiana Aldana, Hernández Paricio, & Rivas Rodríguez, 2005, pág. 147).

[24]William Keith Chambers Guthrie, citado en (Bonell, 2000, pág. 80).

La evidencia de la concepción pitagórica y la idea que regía su doctrina, se ve claramente evidenciado en la frase "todo es número". Por naturaleza, los números son el principio de las cosas (*arche*), lo cual es dado a conocer en la posterioridad gracias a algunos biógrafos, entre los que se encuentra Aristóteles: "Los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las matemáticas, no solo hicieron avanzar a estas, sino que, nutridos de ellas, creyeron que sus principios eran los principios de todos los entes" (Aristoteles, 1997, pág. 11).

Los pitagóricos logran establecer toda una teoría completa alrededor de los números[25], ya que al decir que las cosas eran número significaba que "todos los cuerpos consisten en puntos o unidades en el espacio que cuando se tomando juntos constituyen un número" (Bonell, 2000, pág. 76). Además, se basan en ajustes geométricos para distinguir entre números cuadrados, triangulares y oblongos, los cuales se podían representarse bajo la forma de figuras geométricas como triángulos, cuadrados, y rectángulos.

---

[25]Los Pitagóricos no contemplaban todos los números que usamos actualmente, solo reconocían los números naturales sin el cero y el uno, N-(0,1). El cero, los números negativos, y los irracionales no existían en su sistema de numeración, el uno era considerado unidad generadora, no un número.

Además, el concepto de número de los Pitagóricos era diferente del concepto cuantitativo actual del número, que usamos para indicar la cantidad o magnitud de algo, esto iba más allá pues para los Pitagóricos cada número tenía atributos particulares.

Monada: Punto, el principio de todos los números. Unidad, es bueno, deseable, esencial e indivisible.

Diada: La recta, el dos representa diversidad, dualidad es el primer números femenino y representa la perdida de la unidad.

Tríada: Plano, la virtud de la triada, da lugar a la armonía, el tres es el primer número impar, y el primer número masculino.

Tétrada: Solido, este es el primer número femenino cuadrado $4 = 2^2 = 2 \times 2$. Representa la justicia, y es leal y cuadrado. Cuatro es el número del cuadrado.

Péntada: Este es el número masculino, se obtiene de la unión del primer número masculino y femenino por adición $2 + 3 = 5$. Es el número de los dedos, y el número de los sólidos o poliedros regulares, representa la armonía y belleza.

Héxada. Es el primer número femenino que se obtiene por matrimonio, al unir el 2 y 3 por multiplicación. $2 \times 3 = 6$ Es el primer número perfecto; puesto la suma de sus divisores da el mismo, $1 + 2 + 3 = 6$.

Heptada: El número siete es conocido como un número virgen; este número no tiene factores y no es factor de ningún número sin la década. Se puede representar por el triángulo y el cuadrilátero

Ogdóada: Es el primer cubo, $8 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2$.

Enéada: Es el primer número masculino cuadrado $9 = 3^2 = 3 \times 3$. El nueve es incorruptible, ya que al multiplicarse por cualquier número se reproduce a sí mismo. Por ejemplo $9 \times 5 = 45$ y $4+ 5 = 9$.

Década: numero perfecto, representa el número de dedos de un humano. Se obtiene de la suma de los 4 primeros números $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. después del 10 los números solo se repiten sí mismos.

Para los Pitagóricos era necesario tener en cuenta sólo los cuatros primeros números naturales *"Tetracty",* viéndolos como sucesión y como conjunto*:* "uno, dos, tres y cuatro", los cuales suman el número diez, considerado el numero perfecto, puesto que

> *(*Los pitagóricos) dicen que el diez es un número perfecto, más bien, el más perfecto de todos, porque comprende en sí toda diferencia numérica, toda clase de razonamiento y toda proporción. Porque si la naturaleza universal se circunscribe en las razones y proporciones numéricas y todo lo engendrado se regula, en su crecimiento y perfeccionamiento, de acuerdo con unas razones numéricas, y si, además, todo razonamiento, toda proporción y toda forma numérica los contiene la 'década' (Bonell, 2000, pág. 77).

Es a partir de estos que se pueden configurar los demás números. Sin embargo, el aporte más significativo de los pitagóricos corresponde a la teoría de razones y proporciones.

2.1.2 La teoría de razones y proporciones en el arte.

La teoría de razones y proporciones logra ser uno de los elementos claves en la relación arte y matemática desde la antigüedad griega. La palabra razón proviene de la palabra *logos*; vocablo mediante el cual los griegos logran sintetizar todo un proceso de comparación entre tamaño y cantidad. La razón comprende tanto los números como magnitudes; la razón entre las cantidades A y B, ya sean números o magnitudes, los griegos la designaban como "A es a B" que modernamente se denota como " A: B" ó $\frac{A}{B}$. Una proporción es la igualdad entre dos razones. Así, dadas cuatro magnitudes A, B, C y D, una proporción correspondería a la igualdad

A: B= C: D. La forma $\frac{A}{B}$ en el contexto griego no es un número, pero justamente con el trascurso del tiempo se va a transforma en una cantidad numérica.

La teoría de razones y proporciones, nos lleva a hablar explícitamente del proceso de medir en los antiguos. Es al interior de la escuela pitagórica que se logra dar la teoría primaria de la medida, que se da en los siglos VI y V a de c. Esta teoría de la medida se basa en la hipótesis que para medir basta con los números de contar, modernamente los *números naturales*. Es decir, para los pitagóricos dados dos magnitudes A y B se podía encontrar dos números n y m tales que, $nA = mB$, es decir "n copias de A" igual "m copias de B", cumpliéndose así la absoluta conmensurabilidad de los segmentos. Esto significa que siempre sería posible encontrar una medida en común, un segmento unidad, para las magnitudes.[26]

Lo idea anterior muestra, en gran medida, la firme creencia de la completa conmensurabilidad de las magnitudes;[27] visión pitagórica que determinaba que las magnitudes podían medirse a través de razón (*logos*) de números, creyendo que los números eran suficientes para medir magnitudes de tal modo que siempre fuera posible encontrar un segmento unidad que mida dos magnitudes cualesquiera (ejemplo: segmentos), de la misma manera que existe el uno como elemento unidad de los números.[28]

A continuación se introducirá a la construcción que permite establecer la conmensurabilidad de dos magnitudes cualquiera, procedimiento del cual se tenía la absoluta certeza que siempre se cumpliría sin importar las magnitudes dadas o los pasos a realizar.

Para entender de una mejor forma lo que se ha venido hablando sobre las razones y las proporciones, recurriremos a la siguiente construcción.

---

[26] Euclides en las Definiciones VII. 1 y VII. 2 nos ofrece la distinción existente entre el números y la unidad, la primera dice "una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una" y la segunda afirma "un número es una pluralidad compuesta de unidades"

[27] Las construcciones de corrobación de la mensurabilidad de magnitudes, condujeron a los dos conceptos de importancia fundamental en la matemática clásica griega, los cuales han sido mencionado a lo largo de este apartado: razón (logos) y proporción (alogos).

[28] Esto lo podemos ver claramente en *Euclides Def. VII. 1"un número es una pluralidad compuesta de unidades"*.

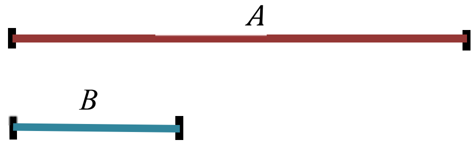


Figura 1

Dadas dos magnitudes *A* y *B*, determinamos la existencia de una medida común en estos dos segmentos de la siguiente manera.

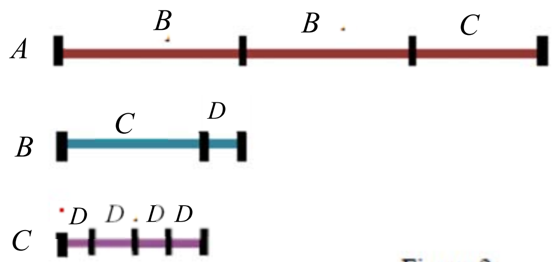


Figura 2

En primer lugar, obsérvese que el segmento *B* es de menor tamaño que el segmento *A*, (ver figura 2), por lo cual podemos incluir el segmento *B* en el segmento *A* tantas veces como quepa. Este caso particular muestra el segmento *B* cabe dos veces dentro de *A*, pero deja un restante: un pequeño segmento *C*, como se logra observar en la figura 2 es menor que *B*. Podemos, de este modo, introducir a *C* dentro de *B*, tantas veces como quepa, lo que sería una vez en este caso, dejando un pedazo restante, que es denominado como segmento *D*, este segmento restante *D*es menor que *C*. Repetimos el procedimiento introduciendo *D* dentro de *C* las veces que sea permitido (en este caso, cuatro) y vemos que ya no queda ninguno pedazo restante .En este caso podemos determinar, que el segmento *D* es el segmento unidad de los segmentos *A* y *B* pues está contenido un número entero de veces en cada uno de ellos: 14 Veces en el primero y 5 en el segundo. De este modo, se concibe a la los segmentos A y B en una razón$\frac{A}{B}$, aunque esta razón es idéntica a la razón que hay entre los números 14 y 5,$\frac{14}{5}$ por lo que hay una proporción[29] que se expresa A es a B como 14 es a 5a se denotaría A:B: :14:5. Pero esto no fue siempre así, pues una de las proporciones más importantes por su contribución a las artes, debido a su relación con las teorías de la belleza, es la proporción áurea, que será un tema que se abordara en el siguiente apartado la *proporción aurea*.

Retomemos, si todo se puede reducir al número, de igual modo lo *bello* logra ser cuantificado. Es decir, la concepción del número y todas sus atribuciones, logra ser visto como elemento cuantificador de la belleza, puesto que surge la concepción de la *armonía de las proporciones*. Esta idea, a su vez, logra ser la esencia de la belleza que denominaban los pitagóricos como *belleza perfecta;* aquello que se encontraba en relación con un sistema de proporciones matemáticas, haciendo que los objetos *bellos* se consideran los más armónicos y proporcionados. Esta idea logra tener su fundamento en la música, al atribuir el hecho de que ciertas proporciones aritméticas en las longitudes de cuerda de cierto instrumento musical el "monocordio (μόνος)", producen la armonía de tonos. Es decir, se establece que las "notas musicales" podrían ser representadas a través de razones de números:

> Producir tensiones diferentes a unas cuerdas a las cuales aplicó pesos distintos .El resultado fue descubrir que las consonancias musicales se producían al dividir una

[29]Euclides comprende que la teoría de la proporción logra serla salida conceptual a la cuestión de establecer relaciones cuantitativas. La proporción no es más que una ecuación en la que sus miembros son razones. Es decir, la proporción es una igualdad que se da entre razones de números o magnitudes (relación comparativa entre elementos similares). Esta relación que se logra dar cuanto a magnitud o cantidad, de tal forma que se relaciona una cosa con respecto a otra, o una parte con el todo. Por ejemplo, sean A, B, C, D magnitudes ó números con B y $D\neq 0$. Tenemos que las razones $A:B$ y $C:D$ son iguales, si se cumple que $A.D= B.C$, que equivale a decir $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$,si al realizar productos de extremos obtengo $A.C= B.C$, de igual forma se puede decir que A es a B como Ces a D(Recalde, 2012).

Es necesario aclarar que esta apreciación de la proporción, que se hace a través del producto, es una apreciación actual que nos permite entender un poco el concepto de proporción ofrecido por Euclides. Es necesario recordar que Euclides no contaba con una definición de producto y divisiones para las magnitudes.

cuerda (el instrumento musical al que Pitágoras aplicó el experimento era el monocordio o κανων con una sola cuerda cuyo registro era un puente móvil) en las proporciones siguientes: 1/2, para obtener la octava o δια πασων; 2/3, para obtener una quinta o δια πεντε; 3/4, para obtener una cuarta o δια τεσσαρων. Ya que todo el sistema armónico griego podía circunscribirse a las razones 1/2/3/4 = la sagrada tetractys, Pitágoras dedujo que ésta, fuente de la eterna naturaleza, era también la fuente de la armonía universal" (Bonell, 2000, pág. 79).

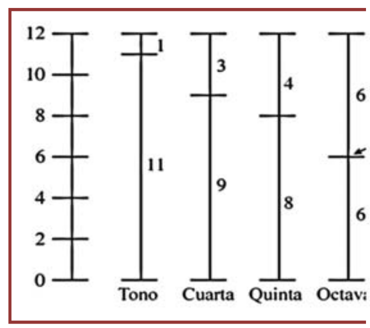


Ilustración 6. Cortadores de cuerdas

Ilustración 7. Gafurio, Theoría musical

Podría decirse que este es uno de los primeros indicios de la intervención del pensamiento matemático en busca de la belleza "armonía" en las artes que hace de la razón y proporción un elemento clave en la labor del artista de la época, y aún 2000 años después: "según esta estética, todas las partes de un conjunto se hallan ordenadas entre sí, proporcionadas por una medida común. A eso que nosotros llamamos una relación, los griegos lo denominaban canon que significa regla" ("Historia del Arte". Germain Bazin, Ediciones Omega. Pág. 69).

2.1.3 La proporción aurea: lo conmensurable e inconmensurable en el arte.

La creencia absoluta que determina que dadas dos magnitudes cualquiera (Por ejemplo segmentos), se pueden medir a través de razón (*logos*) de números, ofreciendo la posibilidad de encontrar siempre un segmento unidad se vino abajo por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables.

Uno de los posibles contextos[30] en el que se atribuye la aparición de magnitudes inconmensurable es el problema del pentágono regular; problema que se da por la imposibilidad de encontrar un segmento unidad que mida la diagonal y el lado del pentágono regular. Aunque los pitagóricos no logran encontrar un segmento unidad, obtienen una *proporción* (*alogos*) muy interesante, que es conocida como la *razón áurea* mencionada anteriormente por el papel que juega como emblema estético.

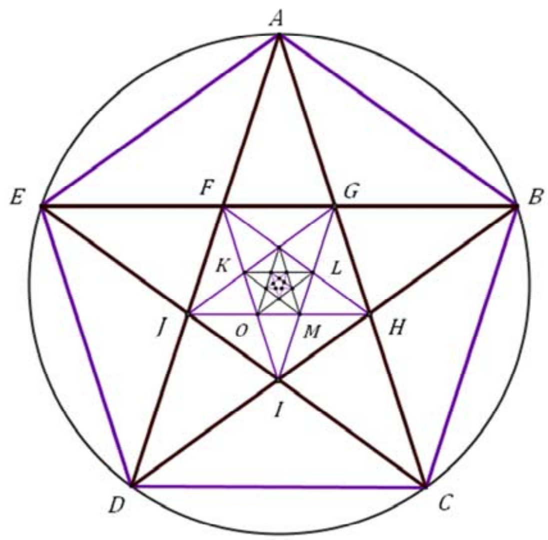


Figura 3

La inconmensurabilidad emerge de la actividad de medir magnitudes a través de comparaciones sucesivas en un proceso denominado *antiphairesis*. Parece que el primer caso en donde se evidencia que la *antiphaerisis* lleva a un proceso infinito, por lo tanto contradictorio, es en la comparación del lado del pentágono regular y su diagonal. Veamos cómo se utiliza la *Antiphairesis* en la corroboración de la inconmensurabilidad del pentágono:

[30] La aparición de las magnitudes inconmensurables se atribuyen a tres posibles contextos; el contexto musical, el problema de la diagonal del cuadrado y el problema de la diagonal del pentágono.

Dado el pentágono regular *ABCDE* de la figura 2, se realizara la *antiphairesis* de la diagonal *DB* y su lado *EA*, con el objetivo de encontrar un segmento unidad que los mida, por lo que se debe tratar de medir la diagonal *EB* en el lado *EA* se observar que:

1. Sea *EAHD* un paralelogramo, *EA=DH*. *A* cabe una vez en *DB*, por lo que sobra HB.
2. comparamos el sobrante *HB* con el lado *EA= DH*.
3. Obsérvese que *DI*=*HB*, por tanto, *HB* cabe una vez en *DI*, sobra *IH*.
4. Siguiendo el proceso debemos determinar las veces que cabe *IH* en *IG,* el lado y la diagonal del nuevo pentágono *JFGI*, formado a partir de las diagonales del pentágono dado *ABCD*. Como se puede observar volvimos al problema a la misma relación de primer paso de medir el lado y la diagonal del pentágono, por lo que este proceso, es un proceso infinito de medición, en este sentido, el proceso seguiría indefinidamente.

Al no encontrar un segmento unidad que se encuentre un número de exacto de veces en la diagonal y el lado del pentágono, la proporción entre estos dos segmentos se logra determinar de la siguiente manera: nótese que los triángulos *EAB* y *BFA* son semejantes, y por tanto

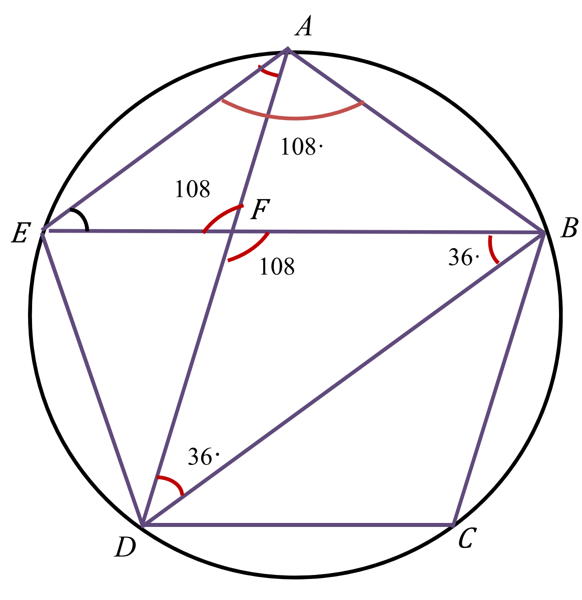


Figura 4

DB/EB= FB/AB, de donde FB/AB=1, de ahí *FB= BA*= lado del pentágono. Por otro lado, los triángulos *AEF* y *FDB* son también semejantes, por consiguiente *DB/EA=FB/AF*. Dado que $DB = EB$, $EA = FB$, $AF = FE$, se cumple la siguiente proporción: $\frac{EB}{FB} = \frac{FB}{FE}$,lo que significa que la diagonal *EB* queda dividida, por el punto de corte *F*, en sección aurea.[31]

El pentágono regular logra ser un elemento clave como sistema de proporciones en labor de los artistas: Un claro ejemplo es la máscara comprendida por pentágonos regulares, que determina el hermoso rostro de la escultura de la medusa (imagen 7).[32]

La cuestión clave en este momento, aunque saliéndonos un poco del tema, es determinar

Ilustración 9. Rostro de Medusa.

cómo hicieron los artistas griegos, y más adelante los romanos, para dotar de belleza las construcciones arquitectónicas de la época, ¿Será que tuvieron que recurrir a la construcción de tantos pentágonos regulares como fuera posible para obtener la proporción aurea en sus obras?

Ilustración 8. Partenón vista lateral.

[31]"Efectivamente, sus cualidades como sección implícita en el pentágono estrellado, así como el hecho de ser un número irracional, atrajeron la atención, la admiración y la veneración de los pitagóricos, que consideraron al pentagrama o pentalfa como su contraseña, guardando como un magno secreto su construcción. Desde entonces, si no viene de más lejos, crece una leyenda que atribuye a la sección áurea un valor místico y un interés estético" (Bonell, 2000, pág. 27).

[32] "Es un relieve en mármol, reproducido tomando el origina griego que data del primer siglo a. de C. Y se e en la Glyptothek, Munich, Alemania" (Spinadel, 2003).

Fidias[33] (470-430 a de C), es uno de los artistas griegos que ha trascendido fuertemente, puesto que se ve la gran influencia filosófica y por ende matemática en sus obras: “El equilibrio en las proporciones, la belleza formal idealizada y la perfección técnica caracterizaron todas las obras de Fidias” (Extremiana Aldana, Hernández Paricio, & Rivas Rodríguez, 2005, pág. 14). Fidias logra ser, uno de los posibles “primeros” artistas de la época antigua en utilizar la proporción áurea en sus trabajos, pues bajo sus órdenes estuvo por gran tiempo la construcción de uno de los templos más memorables en la historia: *El Partenón* (Imagen8), el cual posee en su estructura la proporción aurea. Por lo que la pregunta clave sería ¿Cómo logra este arquitecto ateniense utilizar la proporción áurea en una construcción tan majestuosa? Es decir, ¿Cuántos pentágonos tuvo que utilizar Fidias para darle ese valor armonioso a esta construcción? Nos atreveríamos a afirmar que no hubo necesidad de recurrir a este tipo de construcciones, pues la proporción aurea, como vimos anteriormente en la figura 5, se logra obtener por el corte de las diagonales del pentágono regular, logrando así el corte de la diagonal del pentágono regular en partes desiguales lo más armónico posible. El siguiente proceso, de gran sencillez, es la forma de reconocer la proporción aurea:

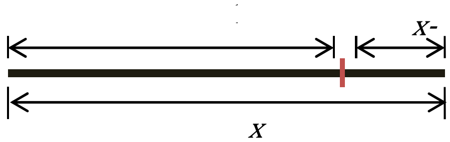


Figura 5

[33]La biografía de Fidias nos es bastante desconocida. No es segura la fecha de nacimiento, siendo llevada por algunos estudiosos al 490, mientras que otros la colocan en el 480 e incluso en la década de 470 a. C. Lo que sí es seguro es que nació en Atenas y vivió en tiempos de Pericles, su protector y amigo, y que debió morir en torno al año 430 a. C. exiliado en Olimpia, por lo que trabajó entre los años 460 a 430 a. C., lo que conocemos como el sus propios contemporáneos reconocieron que fue el escultor más importante de Grecia. (Tomado de http://algargosarte.lacoctelera.net/post/2009/10/23/fidias-escultor-los-dioses-escultura-la-etapa-cl).

$$\frac{todo}{partemayor} = \frac{partemayor}{partemenor}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Si operamos esta ecuación llegamos a:$x^2 - x - 1 = 0$.

De lo cual se tiene que:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)},$$

De lo cual,

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.6180339887498948 \ldots$$

Valor que se denota como Φ[34], en memoria del escultor Fidias.

[34] "φ es un número algebraico (no es trascendente). Recordemos que los números algebraicos son aquellos que pueden ser raíces de una ecuación algebraica de coeficientes racionales cuyos términos sean potencias enteras de x. Algunos de estos números (como es el caso de φ) pueden ser representados mediante una construcción euclidiana, es decir, con regla y compas" (Extremiana Aldana, Hernández Paricio, & Rivas Rodríguez, 2005, pág. 14).

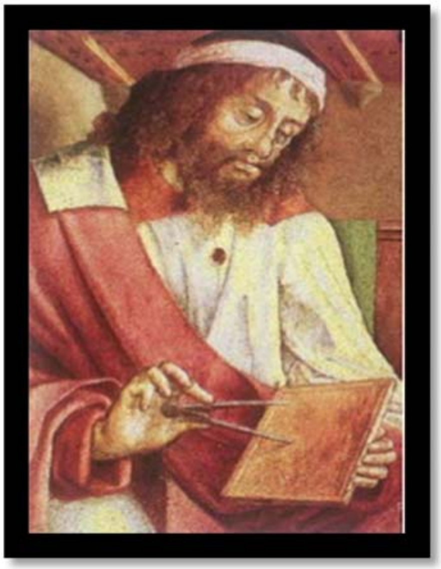


Ilustración 10. Euclides con regla y compás.

2.1.4 La proporción aurea: Euclides y la posteridad.

Para comprender en mayor medida el tema de la sección aurea es necesario recurrir a Euclides y su libro los *Elementos de Euclides*[35].Este texto otorga formas distintas de obtener la proporción aurea. Para ello, recurriremos a dos proposiciones importantes, la proposición 11 libro II y la proposición 30, libro VI.

La proposición 11 consiste en "dividir una recta en dos partes de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea equivalente al cuadrado de la otra parte". Para encontrar la proporción aurea con esta construcción, se parte del segmento dado que será la parte mayor, y a partir de éste segmento se hallara la parte menor, siendo estos dos la totalidad del segmento

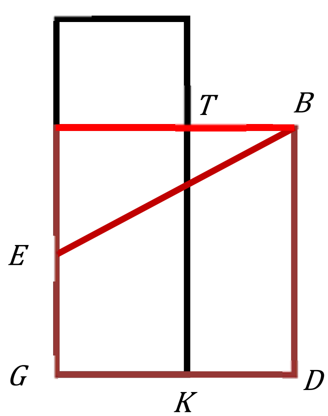


Figura 6.

1. Dada la recta *AB*, construir el cuadrado *ABGD*; hallar el punto medio *E* del lado *AG.*
2. Trazar el segmento *EB*; prolongar *GA* hasta *Z;* con *E* como centro trazamos el arco de circunferencia con radio *EB*, que se intercepte con la prolongación de *GA*, haciendo *EZ*= *EB.*
3. Constrúyase el cuadrado *ZT* sobre la recta AZ*,* prolónguese *HT* hasta corte el punto *K* en el segmento *GD.*

[35] los *Elementos de Euclides* (Siglo III A.C) obra que recopila toda la matemática empírica de las observaciones hechas por los babilonios y egipcios dotándolas de un valor teórico y especulativo. Los *elementos de Euclides* logra ofrecer la primera fuente documental importante en la que se encuentra la proporción aurea

Por tanto, la recta *AB* es cortada por el punto *T,* de tal modo queda que el rectángulo comprendido por *AB y BT* es equivalente al cuadrado *AT;* por lo tanto se cumple la proporción :$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}$, y el punto *T* divide el segmento *AB* en sección aurea.

La Proposición 30 consiste en "dividir una recta en media y extrema razón":

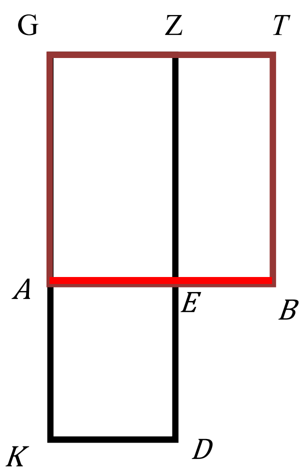


Figura 7.

1. Dada la recta *AB*, construir el cuadrado *BG.*
2. Aplicar a *AG* el paralelogramo *GD* igual al cuadrado *GB* y que excedala figura *AD* semejante a *G. GB* es un cuadrdi entonces *AD* tambien lo es.
3. como *GB es* igual *AD,* si se resta *GE* de ambos, el remanente *ZB* será equivalente al remanente *AD*, y por ser equiángulos, sus lados serán inversamente proporcionales, y, por tanto, *ZE* es a *ED* como *AE* es *EB,* por ser *AB* mayor que *EA* también *EA* será mayor que *EB* y la recta *AB* ha quedado dividida por el punto *E* en media y extrema razón".

Recurriremos a una forma más sencilla de cortar un segmento en media y extrema razón, que se basa en el procedimiento anterior realizado por Euclides

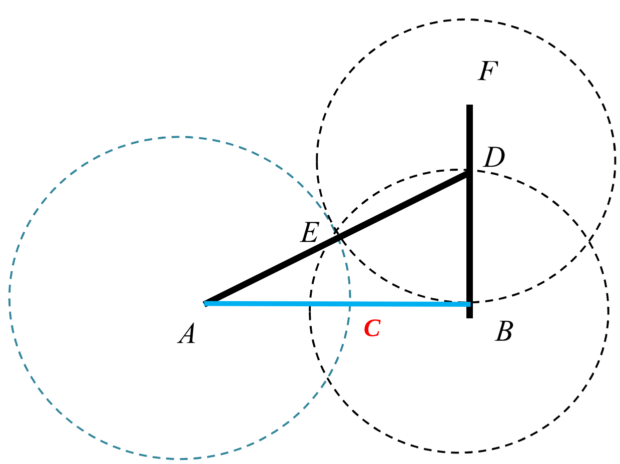


Figura 8.

1. Sea el segmento *AB*, se coloca *BF*, perpendicular a *AB,* un segmento *BD= AB/2,* se une *AD.* Con centro en *D* y radio *DB* trazamos la circunferencia que determina *DE = DB*.

2. Trazamos arco de circunferencia de centro *A* y radio *AE,* que corta *AB* en *C*, siendo *C* el punto buscado. La longitud *AB* ha sido dividida en dos parte iguales de forma que la mayor es a la menor como la suma de las dos es a la mayor

3. El punto C divide al segmento AB en razón aurea $\frac{AC}{CB}$. De este modo, obtenemos la proporción aurea $\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{AC}= \Phi$

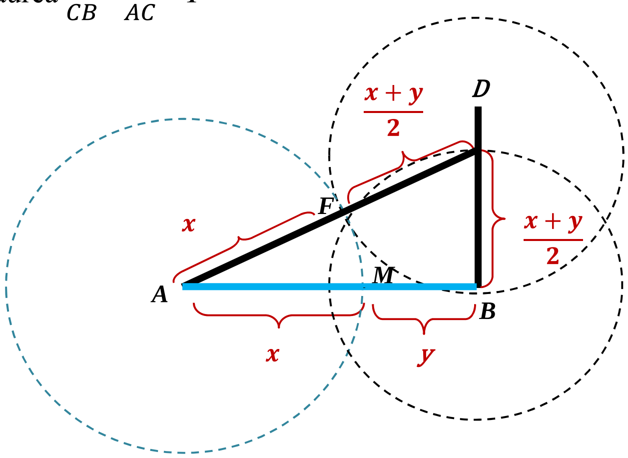


Figura 9.

$$\left(x+\frac{(x+y)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(x+y)}{2}\right)^2 + (x+y)^2$$

$$x^2+\frac{2(x)(x+y)}{2}+\frac{(x+y)^2}{2^2}=\frac{(x+y)^2}{2^2}+(x+y)^2$$

$$x^2+x(x+y)=(x+y)^2 \text{ , entonces } \quad x^2+x(x+y)=x^2+2xy+y^2$$

$$x^2+x^2+xy=x^2+2xy+y^2, \quad \text{entonces} \quad x^2+xy = 2xy+y^2$$

$x^2 = xy + y^2$, entonces $(x)(x) = (y)(x+y)$. Por lo tanto $\frac{x}{y} = \frac{(x+y)}{x}$

En este momento queda demostrado por medio del anterior proceso aritmético que el procedimiento, através de regla y compás,realizado para demostrar que un segmento se encuentra en sección aurea es válido.

Por otro lado, se debe aclarar que existe una segunda forma de cortar un segmento en media y extrema razón. Este proceso que se obtiene es muy similar a la proporción 11, debido a que, en esta construcción no se parte de la totalidad del segmento como se hizo anteriormente; sino que se parte del segmento dado el cual es el lado mayor, a partir de este lado mayor se halla el lado menor. Veamos a continuación cómo se logra esta construcción:

1. Dado el segmento *AC*, construir el cuadrado *ACDE;* hallar el punto medio *M* del lado *AC*.
2. Trazamos el segmento *MD*, con *M* como centro trazamos el arco de circunferencia con *MD* que se intercepte con la prolongación de *AC*, con lo que se obtiene el punto *B*.
3. *C* es el punto que secciona el segmento *AB* en razón aurea, es decir: $\frac{AC}{BC}$
4. De este modo, obtenemos la siguiente proporción aurea : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} = \Phi$

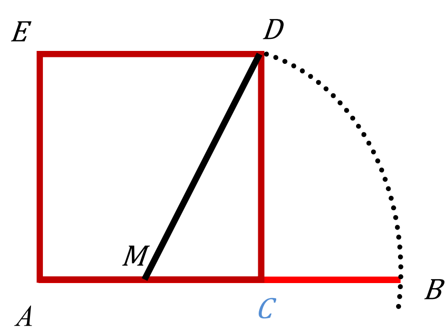


Figura 10.

Ahora probemos que el segmento *AB* se encuentra dividido por *C* en sección áurea, por lo que se debe cumplir la siguiente proporción; $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$ que equivaldría a demostrar que $\frac{(X+Y)}{X} = \frac{X}{Y}$.

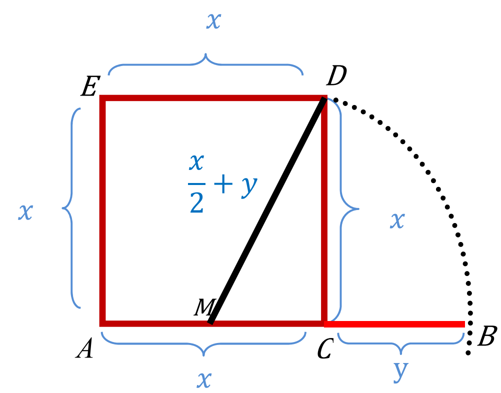


Figura 11.

El segmento *AC* será denotado como *x;* de igual forma todos los lados del cuadrado *AD*. El segmento *CB* formado al prolongar la recta *AC* se denotara como *y*. Por otro lado, el radio *MD* de la circunferencia *DB* se denotara como $\frac{x}{2} + y$. Esto lo podemos percibir más claro desde el segmento *MB* que es otro radio de la circunferencia: como *MC* corresponde a la mitad del segmento *AC* que equivale a *X*, entonces *MC*= $\frac{x}{2}$, y se sabe *CB* es denotado como *Y*. De este modo el radio *MB* será denotado como $\frac{x}{2} + y$.

En concordancia con el procedimiento anterior, ya poseemos los diferentes valores del triángulo rectángulo *MCD* que nos permiten determinar si el segmento *AB* se encuentra en sección áurea. Como en el ejercicio anterior esto se logra observar a través de lo propuesto, según Pitágoras. Dado el conjunto de números (*x, y, z*), en los que los números *x, y* correspondientes a los catetos del triángulo *MCD* y el número *z*, correspondiente a la hipotenusa, se debe cumplir que $z^2 = x^2 + y^2$, como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x)^2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)(y) + y^2 = \frac{x^2}{4} + x^2$$

$xy + y^2 = x^2$ entonces $y\,(x + y) = (x)(x)$.Por tanto$\frac{(x+y)}{x} = \frac{x}{y}$.

De esta segunda construcción se logra construir un rectángulo áureo. Trazamos una perpendicular por *B* que corte en un punto *F* que resulta de la prolongación del lado *ED*, teniendo como resultado el lado *EF* que será el lado mayor del rectángulo. De este modo, se obtendrá el rectángulo áureo *ABFE*, es decir, que los lados de este rectángulo se encuentran en una proporción igual a la razón áurea.

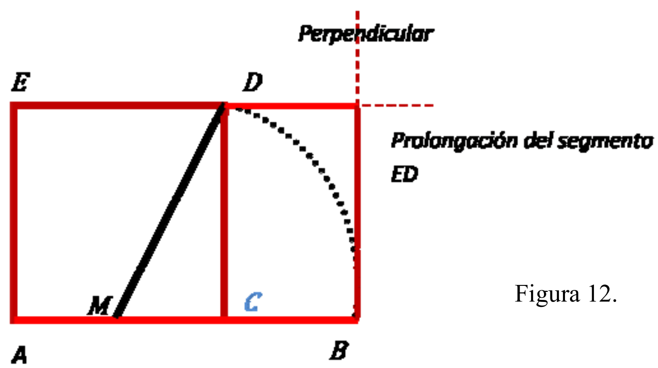


Figura 12.

Esto se logra notar más claramente de la siguiente manera: si el cuadrado vale 2 unidades, el lado mayor valdrá $1+\sqrt{5}$, por ende se obtendrá que la razón entre los dos lados vale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como lo muestra la siguiente figura:

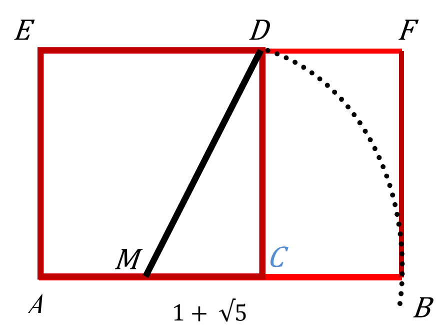


Figura 13.

Después de obtener la construcción del rectángulo áureo *EABF*, podemos inscribir infinidad de rectángulos áureos al interior de éste. El proceso de inscribir rectángulos áureos en rectángulos áureos consiste en quitar a cada rectángulo áureo un cuadrado. La superficie que queda luego de hacer esto es un nuevo rectángulo áureo. Este es el proceso que podemos realizar las veces que se quiera. Partiendo del rectángulo *AEFB*, se traza el cuadrado *CIHB*, como muestra la figura 14.

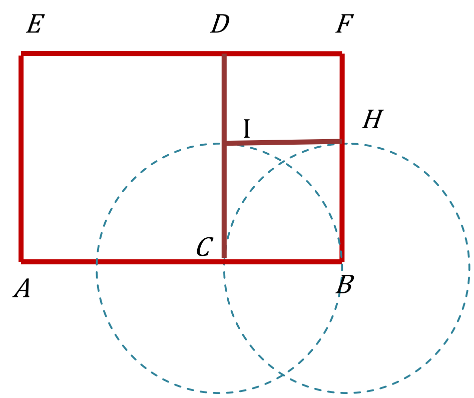


Figura 14.

De este modo, partiremos de la comprobación de que el segundo rectángulo *CDBF* obtenido es un rectángulo áureo. Si tomamos en consideración la figura 15 observemos que se obtienen las siguientes igualdades:

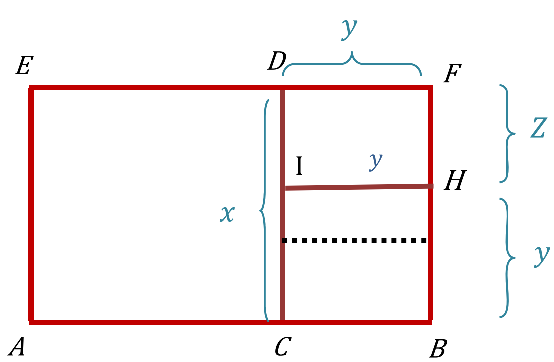


Figura 15.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z},$$

puesto que el rectángulo *AEFB* es áureo.

$$\left(\frac{y}{z} + z\right)^2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 + y^2$$

$$\frac{y^2}{4} + 2\frac{y}{2}z + z^2 = \frac{y^2}{4} + y^2$$

$$yz + z^2 = y^2$$

$$\frac{(y+z)}{y} = \frac{y}{z}$$

La anterior proporción muestra que el rectángulo *CDFB,* es un rectángulo áureo.

Este procedimiento puede repetirse en un proceso finito en el interior[36]e infinito en el exterior, debido a que se puede quitar un cuadrado en el interior del rectángulo áureo con las dimensiones del lado menor del mismo, y en el exterior porque se logra aumentar un cuadrado con las dimensiones del lado mayor del rectángulo áureo. Este proceso de inscribir rectángulos áureos en un rectángulo áureo trae consigo una de los más grandes aportes en la historia de las matemáticas y el arte, la construcción de la *Espiral de Durer*o, que es una aproximación de la espiral logarítmica, tema que se explorará más adelante en el renacimiento.

[36] Quitar de un rectángulo áureo un cuadrado con las medidas comprendida por su lado menor, se logra realizar unas cuatro veces consecutivas. En el lado del menor rectángulo formado, siempre probaremos que los rectángulos inscritos serán rectángulos áureos, además los lados respectivos de cada rectángulo se encuentra en proporción aurea.

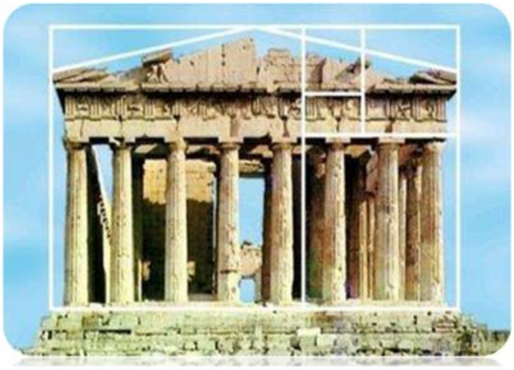


Ilustración 11. Rectángulo áureo inscrito en el Partenón

Igualmente, el rectángulo áureo fue utilizado con ayuda de distorsiones ópticas para dotar de una completa armonía a las construcciones arquitectónicas de la época griega y posteriormente romana. Dentro de las construcciones destacamos el Partenón, como se observa en la ilustración 11.

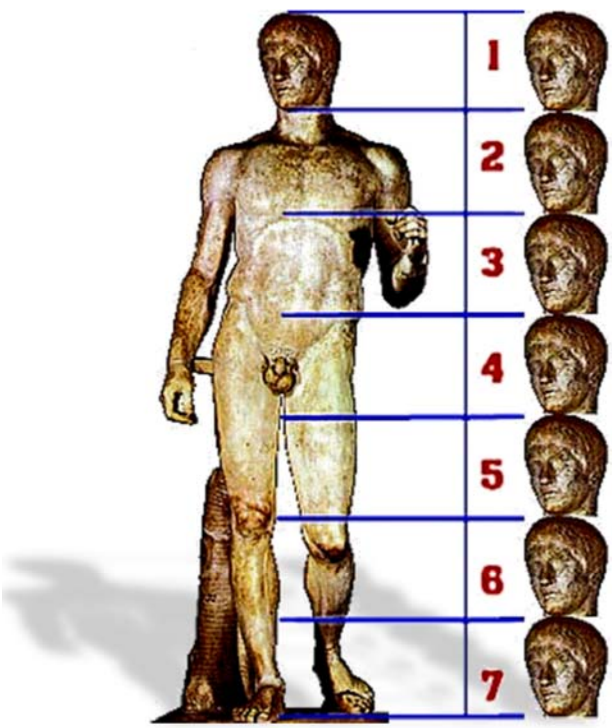
2.1.5 Canon de belleza.

Los números racionales logran ser un elemento base en la Laborde los artistas pues, a través de la conmensurabilidad logran determinar los cánones ideales que representarían al hombre. Los artistas logran utilizar esos criterios de medida para poder comprender y representar el cuerpo del hombre, que cumplía un papel importante en esta época, puesto que los griegos creían que el mundo correspondía a las medias propias del cuerpo humano, como afirma Hodgson:

> Para los griegos fue la fuente inagotable de analogía. Su finalidad está en esclarecer asuntos de composición, y no como mera construcción formal. Con lo cual se debe considerar, sobre todo, una teoría. De manera que el modelo global de asimilación del mundo ideado por el hombre responde a los datos contenidos en sus propias medidas (Hodgson, 1994, pág. 82).

De este modo, los artistas lograron establecer un factor común en las medidas del hombre que les permitió generar sus propios cánones respecto al cuerpo humano. Es decir, logran determinar cuáles serían las medidas perfectas que debe cumplir el cuerpo del hombre y, al mismo tiempo, se determinan las reglas de las relaciones armoniosas que debe cumplir cada parte del cuerpo a través del canon.

Uno de los cánones más importante es el del escultor griego Policleto[37] (en griego Πολύκλειτος), quien determinó que "la proporción total del cuerpo humano corresponde a siete veces su cabeza"[38], es decir, que el prototipo del cuerpo varonil perfecto debe cumplir con que la cabeza sea la séptima parte de la altura total del cuerpo.



La cabeza logra ser un módulo unidad del cuerpo humano. Geométricamente, si la altura del hombre corresponde a la magnitud A y la longitud de la cabeza corresponde a la magnitud B, entonces $A = 7B$.

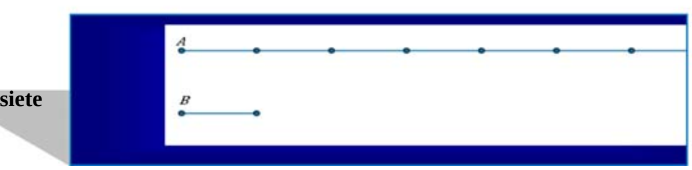


Ilustración 12. Policleto: Doríforo, canon de siete cabezas.

[37] Se caracteriza por haber fijado el canon de las proporciones ideales del cuerpo masculino (principio de simetría). El prototipo del cuerpo perfecto. Para él; la belleza reside en el número, en la proporción, en la medida y en la relación de todas las partes entre sí. Sus obras expresan el ideal griego de unir la belleza al equilibrio y a la fuerza Sus figuras son atletas en reposo, de musculatura flexible, dotados de una leve sensación de movimiento.

[38] Se han generado desde la antigüedad diferentes cánones, los cuales dan referencia a la cantidad de veces que se encontraba la longitud del puño del hombre a la altura total del cuerpo o la longitud de los dedos a la altura total del cuerpo etc. De esta manera, el canon de Policleto no es el primer canon propuesto, pero si es el canon más importante, pues a partir de éste los artistas posteriores a él comienzan a crear su propio canon teniendo, como referencia el canon de Policleto para tratar de encontrar cuáles serían las proporciones ideales del cuerpo humano.

De este modo, 7 es el valor que determina cuánto mide A respecto a un segmento unidad B.

Por lo tanto A es a B, como 1 es a 7, y como existe un segmento unidad podemos hacer una relación de puntos como lo hacían los pitagóricos.

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{7B} = \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{A}$$

También, se observa la teoría de lo inconmensurable en sus trabajos puesto que en esta escultura se logra identificar dos conjuntos de rectángulos áureos recíprocos, cada uno de $\sqrt{5}$ de largo: el rectángulo mayor abarca todo el cuerpo, con las rodillas y el pecho en los puntos de la sección áurea; el rectángulo menor se extiende desde la cabeza hasta los genitales; el ombligo se encuentra en el punto de la sección áurea dela altura total, y los genitales en el punto de 3/4 de la altura hasta el mentón.

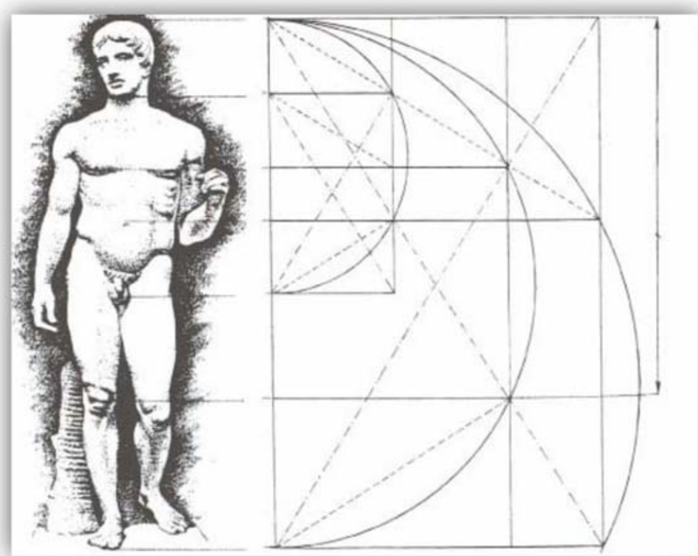


Ilustración 13. Policleeto: Doriforo en proporción áurea.

En síntesis, se logra observar cómo la teoría matemática juega un papel primordial en el establecimiento del canon y la labor del artista, pues los artistas logran apropiarse de estos conceptos matemáticos para encontrar un factor en común que les permita llegar a establecer las proporciones ideales del cuerpo del hombre los cuales se extienden a los demás ámbitos. Es decir, los griegos utilizaron las proporciones matemáticas establecer armonía a cualquier producto artístico, pues la proporción y la medida generan una armonía visual que les permitió llegar así a lo que consideraban como lo bello (tokalós).

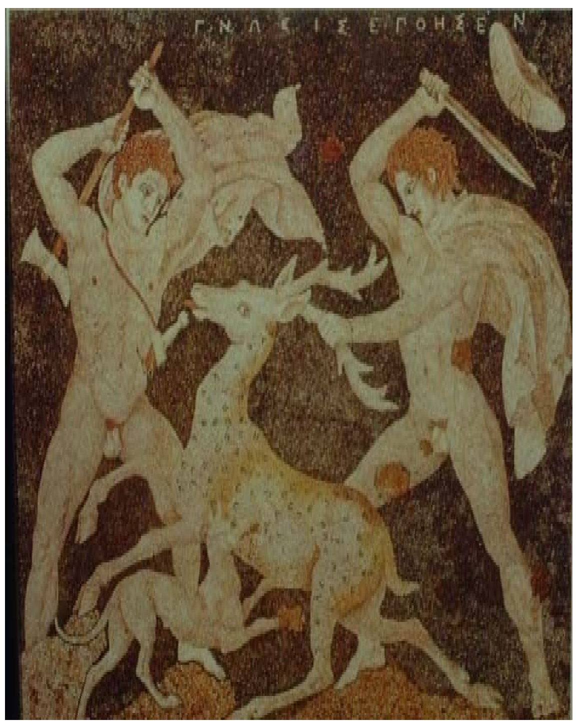


Ilustración 14. Caza del ciervo

2.2 Arte y matemática en el Medioevo

A diferencia del periodo antiguo, el Medioevo es una época en la que ocurre un cambio completo en las ideologías y el pensamiento. Básicamente las concepciones del Medioevo giran alrededor de lo divino. La naturaleza espiritual cobra una fuerza mayor que en épocas anteriores, gracias a la validación del cristianismo por parte de Constantino en el 300 d.C.

Esta ideología se ve fuertemente reflejada en el trascurso de este periodo, por lo que se logra observar su influencia en el arte de la época, contrastando con la herencia de la antigüedad y generando que el concepto de belleza sea dado por el significado de la obra, más que por su belleza en sí. El principal objetivo de esta época consiste en buscar la perfección del espíritu mas no de lo observable, para así atribuirle mayor valor al *significado* de la obra, siendo éste el elemento de mayor peso. En este sentido, el hombre deja de ser el centro de atención, para ser Dios y sus representaciones divinas el ideal a representar. Así, la divinidad pasa a ser el centro de atención en todo, al igual que pasa a ser lo más importante en las representaciones pictóricas, aunque las enseñanzas matemáticas de los filósofos y griegos y el carácter místico de estas ideologías logran intervenir en el pensamiento cristiano medieval, como lo expone Franco.

> En la edad media cristiana entre los siglos XI y XII[39] existe un aumento de conocimiento científico influencia en gran medida por la ciencia islámica. Posteriormente en el siglo XIII se produce el renacimiento de las antiguas matemáticas griegas (…). La Europa medieval entra en contacto con los escritos de la cultura griega a través de sus versiones originales y árabes (Franco, 2003, pág. 71).

Las enseñanzas de Platón y Aristóteles logran ser una “herramienta” para el hombre del Medioevo, pues a partir de este conocimiento se pretende generar relaciones entre lo terrenal y lo divino. Por esta razón, el número cobra un valor diferente, pues se logra atribuir valores místicos y divinos a las representaciones artísticas a través de los números:

[39] En el siglo XII destaca la figura de Leonardo de pisa, llamado Fibonacci, autor de un importante tratado, el *LiberAbaci*, donde entre otros problemas teóricos y prácticos aparece una serie de número, la sucesión de Fibonacci, en la que cada termino es igual a la suma de los dos precedentes, propiedad aditiva que comparte con la serie ϕ, con la que le unen otros lazos pues la razón entre dos de sus términos consecutivos tiende hacia un límite que es precisamente ϕ (Bonell, 2000, pág. 28).

> En este periodo la fascinación ejercida por las proporciones mística acerca de los números, sus relaciones simples y su trasposición del concepto numérico a formas geométricas, hace que el número sea considerado como la expresión de lo perfecto y lo divino (Franco, 2003, pág. 71).

Así, las matemáticas logran ser el puente entre lo terrestre y lo divino, pues se busca fervientemente en las matemáticas el sentido del universo. No obstante, el conocimiento matemático de los artistas de esta época logra ser algo rudimentario, puesto que estos no poseían ninguna base sólida, a diferencia de sus antecesores. Estos artistas medievales tan sólo poseían una idea abstracta de la filosofía de los números otorgada por Pitágoras y Platón, teorías que fueron trasmitidos por San Agustín (354-430).

Aunque la influencia del número y sus representaciones geométricas fuera tan fuerte, por el misticismo que giraba alrededor de éstos en esta época, se logra perder la mayoría de los aportes griegos en relación a procesos geométricos y la forma cómo éstos se incorporaron al arte. Sin embargo, las figuras geométricas logran tomar mayor fuerza en el arte de esta época, puesto que, según Bouleau, aunque los cálculos realizados por los artistas del Medioevo no fueran los correctos, estos hombre sabían utilizar muy bien el compás por lo que recurrían a la geometría[40] para alcanzar su ideal a

Ilustración 15. Biblia de Carlos el calvo: *El rey y su corte. Los dos círculos secantes, centran, distribuyen y dan dimensión a los personajes de la escena. El radio de los círculos es determinado por la distancia que hay entre los puntos de sujeción de las cortinas.*

[40]La geometría, que fue trabajada primeramente por los árabes, se introdujo rápidamente en el occidente , convirtiéndose en una materia base en la enseñanza a parir del siglo XIII , por lo que va invadir en gran escala es

representar “la belleza de lo divino”. La geometría, que fue trabajada primeramente por los árabes, se introdujo rápidamente en el occidente , convirtiéndose en una materia base en la enseñanza a parir del siglo XIII , por lo que va invadir en gran escala es uso de figuras geométricas en las composiciones artísticas en los que sobresalen círculos entrecruzados, cuadros y polígonos.

Las composiciones figurativas o representaciones se debían encontrar realizadas por regla general bajo el parámetro de alguna figura geométrica, entre las que se destacan el pentagrama o el pentágono. El artista de la época utilizaba las proporciones innatas que se encontraban al interior de estas figuras para así dotar de equilibrio su ideal religioso, que logra ser su ideal de belleza, Cabe recordar que ese valor otorgado al pentágono se debe a que en él se encuentra la proporción aurea, catalogada como representación de la belleza perfecta desde los antiguos.

Si tenemos en cuenta este valor místico que se atribuye al pentágono y pentagrama, entenderemos por qué son las figuras más utilizadas por los artistas para las representaciones. Pero no son las únicas. Hay otras figuras geométricas que son utilizadas en las representaciones. Por ejemplo, *el cuadrado* a partir de sus diagonales pretende recrear una “ilusión de perspectiva”[41]; *el círculo* otorga centralidad la representación, es la figura divina por excelencia; *el octógono* inscrito en un cuadrado, sirve para la distribución de las escenas, como lo muestra Bouleau.

---

uso de figuras geométricas en las composiciones artísticas en los que sobresalen círculos entrecruzados, cuadros y polígonos.

[41]Es una ilusión de perspectiva, debido que aun en esta época no había nacido esta rama de la geometría, simplemente son intentos de acomodar correctamente los objetos en el espacio de la representación.

Ilustración 16. Adán y Eva expulsados del paraíso.

En la escena superior, las diagonales del octógono que se une dos a dos y cuatro a cuatro, forman cuadrados y triángulos en los que se inscriben a los personajes .La espada del ángel se encuentra marcando un lado del octógono y el pie del mismo marca la diagonal del cuadrado.

En (Franco, 2003) se afirma que el arte de esta época se vuelve sistemático al ofrecer las herramientas que el artista debe utilizar en sus representaciones. En sí, la pintura se considera como una habilidad técnico-plástica que se logra realizar siguiendo diferentes pasos para la creación de un cuadro, por lo que se puede establecer un modelo para la creación: "la noción de modelo es muy importante en la edad media, época enteramente dominada por el respecto a la autoridad. A la persistencia de la iconografía se suma la persistencia de alguna formas geométricas relacionadas con la costumbres. (…) no se piensa en crear una obra original, sino una obra bella" (Bouleau, 1996, pág. 61).

La idea anterior contrarresta completamente la de los griegos, puesto que las proporciones en las representaciones se pierden por completo: todo se ve hierático. Aunque la geometría juegue un papel importante, su valor se va desvanecido un poco, al ser utilizado como una base para la representación, obviando de igual modo los cánones creados por los antiguos. Toda representación medieval se encuentra regida bajo el parámetro de círculos y polígonos. Razón por la que “la propagación de las teorías antiguas sobre geometría en la edad media hicieron que desarrollara la práctica del dibujo geométrico”(Hodgson, 1994, pág. 122). De este modo, el dibujo geométrico toma gran fuerza, pues es a través de las figuras geométricas que se logra la creación de las representaciones. El dibujo geométrico se convierte en una estructura que facilita la labor del artista a través de triángulos, polígonos estrellados, rectángulos, cuadrados etc., que pueden ser utilizados para representar toda clase de objetos, como se logra observar en la propuesta del artista y arquitecto Honnecourt, Siglo XIII. Barasch, citado por Franco, aclara un poco el trabajo realizado por el artista:

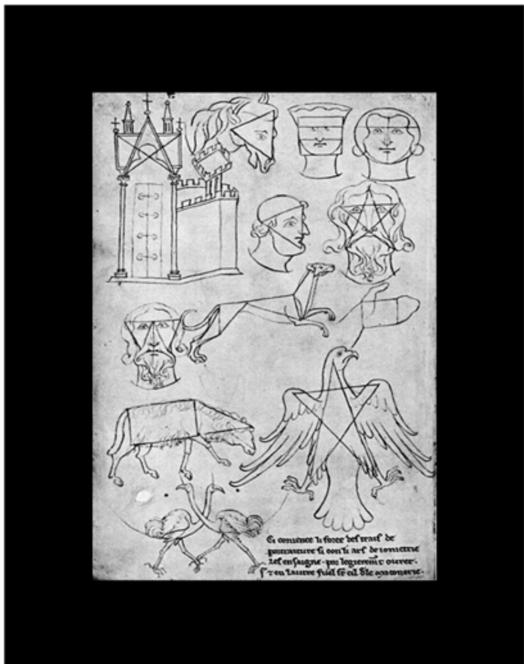


Ilustración 17. Villard de honnecourt: construcciones.

> Se conciben como a base para elaborar figuras en diferentes posiciones, aunque no se advierte afinidad alguna entre la forma del diagrama geométrico y la figura orgánica ejecutada a partir de él. Así, una estrella de cinco puntas sirve para construir la visión frontal de la cabeza de un santo; la misma configuración, si se alarga, es la base para realizar una figura en pie. El triángulo es la base para un perfil humano y también para

la cabeza de un caballo. Puesto que no existe una intrínseca entre la forma geométrica y la figura que esta contribuye a construir, se puede emplear la misma forma para figuras bastante diferentes y divergentes (Franco, 2003, pág. 81).

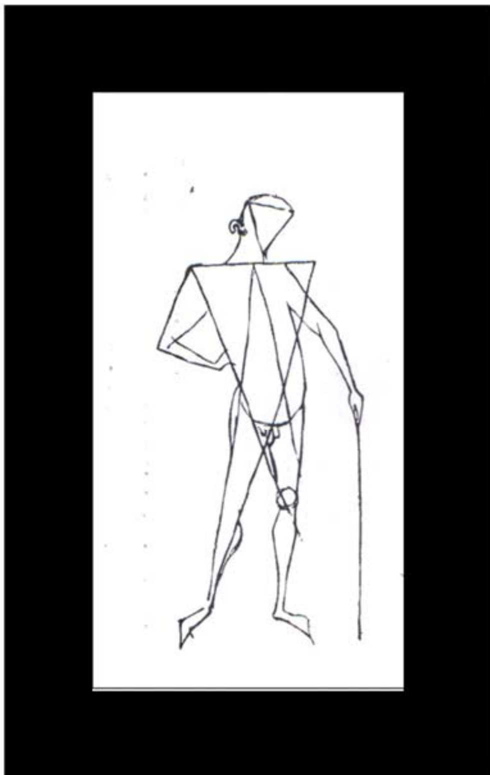


Ilustración 18. Álbum.

En los dibujos se observa como las figuras geométricas sirven de estructura para su composición. Honnecourt las presenta como una "teoría de proporciones", al inscribir las formas naturales en triángulos, círculos y variadísimas estructuras poligonales: "Parece adecuado expresar aquí la idea de que si las proporciones armónicas, el afán del equilibro y de compensación, son de todo tiempo" (Bouleau, 1996, pág. 60)

La cita anterior permite afirmar que, aunque la pintura medieval se vea influenciada fuertemente por el uso de figuras geométricas o composiciones puramente geométricas, se logra notar una completa perdida de la difusión de las teorías de proporciones, como afirma Hodgson al decir que no se sabe hasta qué punto se ve la influencia de teoría de proporciones :"no sabemos hasta qué punto en dicha época había una buena conciencia de la estética de las proporciones, si realmente se supo aprovechar la teoría de la estética como lo hiciera siglos antes"(Hodgson, 1994, pág. 122).

2.2.1 La pintura medieval y sección aurea.

Según Bouleau (1996), el uso del pentágono regular en las composiciones es de gran frecuencia, pues alrededor de este polígono, gira al igual que en la antigüedad, cierto misticismo, como vimos en el capítulo anterior, puesto que guarda la "proporción aurea". Al igual que los pitagóricos, los artistas de esta época guardan aprensivamente la construcción de éste, pues "su trazado al compás, algo complicado, era uno de esos secreto del arte que guardaban celosamente los maestros, los cuales le concebían una importancia a menudo exagerada" (Bouleau, 1996, pág. 64).

De las construcciones del pentágono regular, la salvaguardada por los artistas del Medievo es la de inscribir el pentágono regular partiendo del círculo.[42] La inscripción del pentágono regular en un círculo hace parte del procedimiento utilizado artistas de esta época, pues el círculo es la figura geométrica que no debe faltar en ninguna representación. Podría decirse que la siguiente construcción de la figura 16, fue la más utilizada por los artistas medievales:

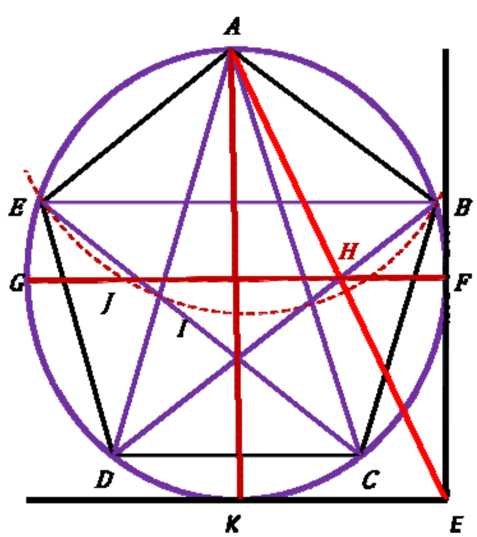


Figura 16.

1. Sea un círculo dado. trazar los diámetros perpendiculares *AK* y *GF, las* tangentes paralelas a estos, *KE* y *FE.*
2. Unir *AE* la intercesión de esta línea con *GF* da el punto *H.* llevar *AH* sobre *HG:* se obtendrá el punto *J; AJ* equivale al lado del pentágono inscrito, basta ahora llevare esta longitud sobre *E,* sobre *D,* sobre *C*, y sobre *B.*

[42] La inscripción del pentágono regular en un círculo hace parte de uno de los pequeños secretos bien conocidos por las cofradías de la edad media.

3. Trazar las diagonales *AD, AC, EB, BD*: se inscribe el pentagrama *ABCD,* al interior del pentágono regular *ABCDE*. El corte entre las diagonales da la sección aurea.

2.2.2 Pinturas del Medioevo

En este momento pasaremos a observar el uso de la geometría en diferentes pinturas de esta época, no obstante es necesario aclarar que en este periodo existen diferentes corrientes artísticas, por lo que no todas las pinturas que mostraremos a continuación corresponden a la misma corriente artística, y por ende tampoco representan los mismos fines estéticos, aunque claro está que el idealismo platónico juega su papel en la concepción estética principal de cada obra, así sea el de el ideal religioso. Respecto a las corrientes artísticas de cada obra no entraremos detalle, solo nos detendremos a observar el uso de la geometría en algunas obras.

Observemos la siguiente obra del artista Paul de Limbour, l*as Muy Ricas Horas del duque de Berry.* Representación de la vida de Jesús, en el Paraíso terrenal, (ilustración19). La perfección de esta imagen se identifica con el trazado geométrico de la "proporción aurea". La puerta se sitúa sobre la recta *FE*, y el eje de la fuente se encuentra situado en *AB*. La circunferencia tangente a *FE* contiene inscrito en su interior dos pentágonos cruzados; la dismetría de la disposición de esta circunferencia en la representación es debido a *AB* y su perpendicular *CD,* logran situar el centro de la circunferencia en sección aurea; Es decir, el punto *N* corta el diámetro *CD* en partes desiguales lo más armónicamente posible. Por último, se unen las cuatro verticales y los puntos de cruce de los dos pentágonos constituyen el ancho de la fuente y los personajes la derecha.

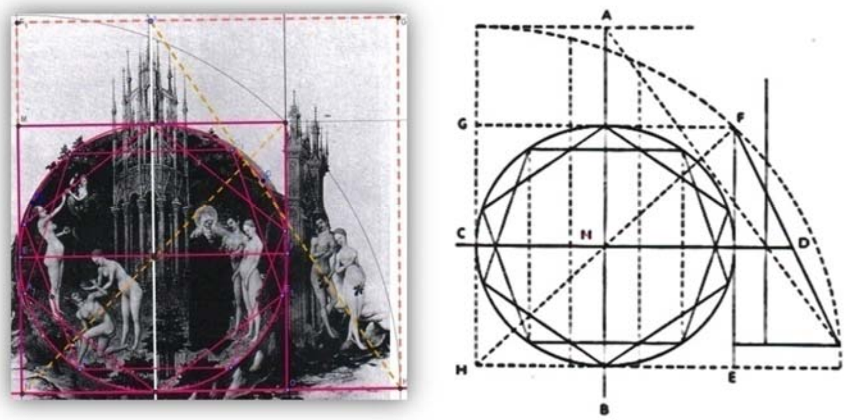


Ilustración 19. Las muy ricas horas del duque de Berry

Igualmente se encuadra en este estilo la obra de Stefan Lochner, *La Virgen del Rosal* (ilustración 20), donde se aprecia el siguiente trazado geométrico: tangente a los lados, un círculo encierra un doble pentágono, como la (ilustración 20). El pentágono apoyado sobre su base, que se encuentra a igual distancia de arriba que de abajo, determina el lugar del círculo. La prolongación de algunas diagonales de los pentágonos, pretende dar la ilusión de profundidad en las pérgolas detrás de la virgen. El muro que rodea a la Virgen, sigue el arco que ha servido para trazar el pentágono apoyado en un vértice.

Ilustración 20. Stephan Lochner; la virgen del rosal

Prosigamos, con la *Natividad* de Weltchronik des Rudolf von Ems (ilustración 21).Podemos observar que la estructura utilizada por el artista para la creación de esta pintura es enmarcada por el rectángulo áureo *ABDC*. El procedimiento de construcción de este rectángulo fue tratado en el apartado anterior *la antigüedad*. El cuadrado *AB* retirado del rectángulo *AC* determina la parte superior del cuadro; por toda la longitud de la diagonal del cuadrado *AB* se logra representa el camino del pasaje ascendiente. La virgen sigue la curva del arco que establece la dimensión del rectángulo áureo *ABCD*.

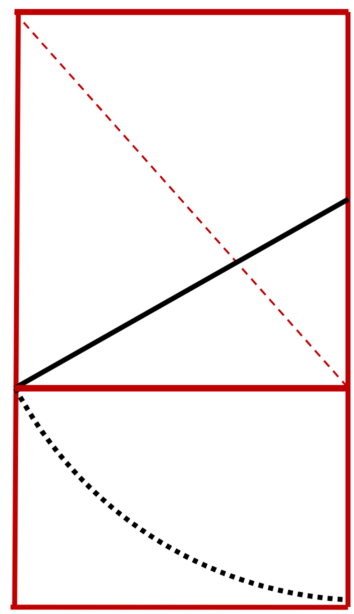


Ilustración 21. Weltchronk des Rudolf von Ems.

Otro pintor que logramos destacar, es Roger van der Weyden (1400-1464). En su cuadro el *Descendimiento de la Cruz* (ilustración 22). Este cuadro está inscrito bajo dos parámetros; el primero es el corte del segmento *AB* en sección aurea por *CD* y *DE*, y el segundo la inscripción de tres pentágonos al interior del cuadro.

Dado el cuadrado *HB´,* la proyección de la diagonal de uno de sus lados trasforma en cuadrado en rectángulo *JB´,* y a su vez, se proyecta la diagonal de este rectángulo, que da el ancho de en el que se inscribe el cuadro; la altura y el ancho del rectángulo *AB´* es proporcional de 1 y √3. La longitud de la diagonal *JB´* llevada por encima del rectángulo, determina el ángulo de la parte central, que se encuentra construido sobre la sección áurea de esta misma dimensión: $\frac{AC}{CD} = \frac{AD}{AC}\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AD}$.

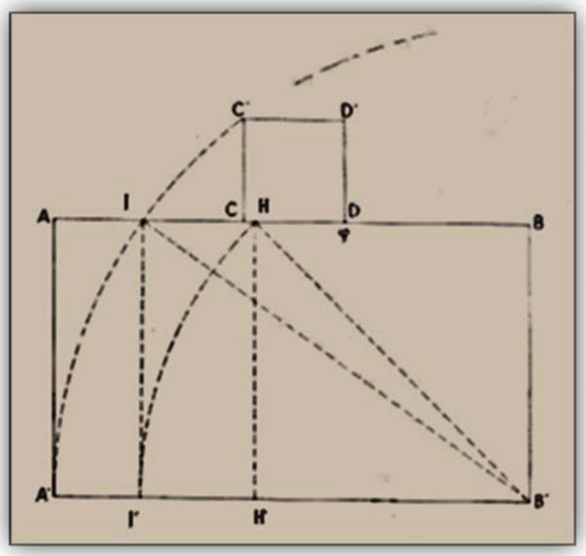


Ilustración 22. Rogiervan de weyden: descendimiento de la cruz proporción del relato. *La estructura de retablo se encuentra establecida por la proyección de las diagonales del cuadrado y el rectángulo. La altura y ancho del rectángulo son proporcionales* 1*y* √3

Las ilustraciones 23 y 24 muestran la evolución de la pintura. No se ha hecho un seguimiento exhaustivo a todo el armazón geométrico pues se quieres simplemente dar una idea genérica del abstruso proceso de construcción.

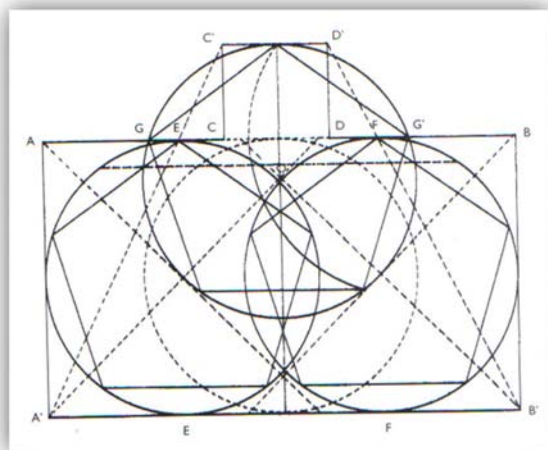


Ilustración 23. Rogiervan de Weyden: composición basada en pentágonos.

Ilustración 24. Rogier van Weyden; museo nacional del Prado

Por último, pasemos al más grande pintor de la época, Jean Fouquet (1415-1481) y su obra maestra, el díptico de *La Virgen de Etienne Chevalie* (ilustración 25). Vemos como se forma un triángulo isósceles principal donde se encuadra a la Virgen con absoluta naturalidad, con su manto cayendo sobre los lados mayores el triángulo. Este pentágono se combina con otro, formando un decágono, el cual deja un rectángulo en su interior donde se encuadran el montante de la silla y la hilera de ángeles.

Ilustración 25. La virgen de EtienneChevalie

2.2.3 Acotaciones a la Edad Media

Como pudimos observar en este apartado de la Edad Media, se logra observar como la geometría de una obra de arte, cuadro o pintura, se encontraba establecida por un marco interno que daba la impresión de una armadura, constituida de polígonos regulares: los cuales eran figuras a veces muy complejas, de cinco, seis u ocho lados, destacando de igual forma el doble de figuras que formaban pentágonos estrellados. Estas aplicaciones son propias del arte gótico y en esta perspectiva, las construcciones con regla y compas resultaban un poco complejo para los artista, por eso no es raro que con la llegada del movimiento cultural del Renacimiento, los trazos de las pinturas medievales y su falta de libertad artística quedaran atrás, por trazo mucho más simples y una visión diferente del espacio mismo, se retomar la cultura clásica y su interés por la naturaleza, como veremos más adelante en el siguiente capítulo.

El pintor, cuando realiza un cuadro, no se plantea el problema de representar el espacio, dado que éste no existe con anterioridad a los objetos, en todo caso representará los objetos sin más. Dado que no existe un espacio independiente de los cuerpos en el que están contenidos, y con respecto al cual éstos puedan situarse, las relaciones entre ellos no serán del tipo de las posiciones espaciales, tamaños relativos, proporciones, etc., sino de otro tipo: jerárquicas, morales, didácticas; por ejemplo, el tamaño de las personas no dependerá de su posición dentro del cuadro sino de su importancia social o moral. En consecuencia no existe una posición privilegiada del observador, o más bien, no existe un observador (humano); por lo que los objetos pueden representarse vistos desde donde mejor se aprecien sus cualidades esenciales. Por ejemplo, los platos se verán circulares encima de la mesa (los platos son esencialmente circulares), como si mirásemos desde arriba, mientras que los comensales se ven en alzado (es esencial ver el rostro para reconocer a las personas), como si mirásemos de lado. Una escena de estas características sólo puede ser vista por alguien que tenga el don de la ubicuidad, alguien que pueda estar en todas partes al mismo tiempo. Esto sólo lo puede hacer la mirada de Dios.

2.3 Arte y matemáticas en el Renacimiento

En el apartado anterior se logró observar como en la pintura del Medioevo predominaban las figuras simbólicas antes que las realistas, las cuales representaban la divinidad y temas bíblicos. Se nota el uso, en gran medida, deformas planas sin naturalidad, desechando por completo toda noción del espacio “real” al ubicar los personajes de forma irrealista dependiendo de su valor divino. Aunque gran parte de estos cuadros se encontraban bajo el parámetro de una armadura de figuras geométricas.

El renacimiento busca la retoma del pensamiento clásico, otorgándole protagonismo a la naturaleza como una nueva forma de ver al mundo y al hombre. La representación de la divinidad, como elemento central, se supera en favor de la descripción del mundo real. Se maneja la idea de que no hay nada más *bello* que la misma representación de la naturaleza, dejando atrás toda representación esquemática de la divinidad. Como se específica en (Franco, 2003), el artista renacentista se veía atraído por la ciencia, al entender que a través de ella se podía lograr una representación fiel y bella de la naturaleza. De ahí que las matemáticas, explícitamente la geometría, logran ser el elemento principal en la labor del artista.

Se nota clara la retoma de la concepción griega al considerar que gracias al número se puede apreciar la belleza y que la matemáticas son la esencia de la naturaleza, pues “la creencia en que el universo está ordenado, y es racionalmente explicable en términos de la geometría, era parte de una visión determinista del mundo que consideraba la naturaleza como estable e inmutable, cuyo dominio podía lograrse siguiendo principios matemáticos universales”.[43]

El interés del artista renacentista por representar lo más perfecto posible la naturaleza observada, lo llevo a recurrir a leyes matemáticas; esto animó a los artistas a descubrir nuevos elementos que les permitiera representar el entorno en el lienzo. El hecho de poder representa un espacio tridimensional (su entorno), en un plano bidimensional, como el lienzo, llevó a los artistas a enfrentarse a un problema matemático. En este contexto emerge la matematización y fundamentación de la perspectiva[44] y otros problemas matemáticos que nacen al interior de las artes pictóricas.

El uso de la “perspectiva” en épocas anteriores se refleja como algo intuitivo y poco sistemático como vimos en el Medioevo; por ejemplo el uso de cuadrados y sus diagonales en

[43](Franco, 2003, pág. 70)

[44] Se suele usar el término perspectiva para describir las técnicas de representación del espacio tridimensional sobre una superficie plana, las cuales surgieron fundamentalmente en Florencia, durante el siglo XV.

la representación de una habitación permitía ofrecer la ilusión de convergencia de las líneas paralelas del techo de la habitación que son perpendiculares al lienzo. Es decir, pretendían ofrecer una ilusión de profundidad de “algo” a través de las diagonales del cuadrado, entre otras figuras geométricas. Aunque cabe aclarar que es un efecto que no se logra muy bien hasta este momento. Otro problema al que se enfrentaron los artistas renacentistas fue el determinar el punto en el que convergen las líneas paralelas y el hecho de ver la convergencia del suelo de una habitación y su techo como algo aislado, existiendo así un punto de convergencia para cada uno de los espacios a representar. El uso de la perspectiva es la diferencia fundamental entre la pintura de la Edad Media y el Renacimiento, por lo que entra a jugar un papel predominante el punto de fuga.

El artista florentino Filipo Brunelleschi logra solventar un poco algunos de los problemas de representación del espacio tridimensional, al descubrir la existencia de un único punto de convergencia. Es decir, que tanto las líneas del suelo, como las del techo, debían converger en un mismo punto. Un único punto para todas las líneas perpendiculares al plano del dibujo.

No sabemos si Brunelleschi estableció un método como tal, sin embargo se sabe que seguía un proceso para comprobar si un dibujo estaba bien hecho, de acuerdo al siguiente proceso: se situaba el cuadro sobre un trípode, frente de la edificación pintada, con el lienzo paralelo al edificio. Al lienzo se le practicaba una pequeña perforación, con el propósito de que el artista se asomara por ella y pudiera apreciar el edificio. Después se colocaba un espejo en un plano paralelo al lienzo, de tal suerte que a través del agujero se pudiera observar parte del edificio real y parte del edificio dibujado. Para Brunelleschiel cuadro estaba correctamente pintado, si las dos imágenes encajaban perfectamente.

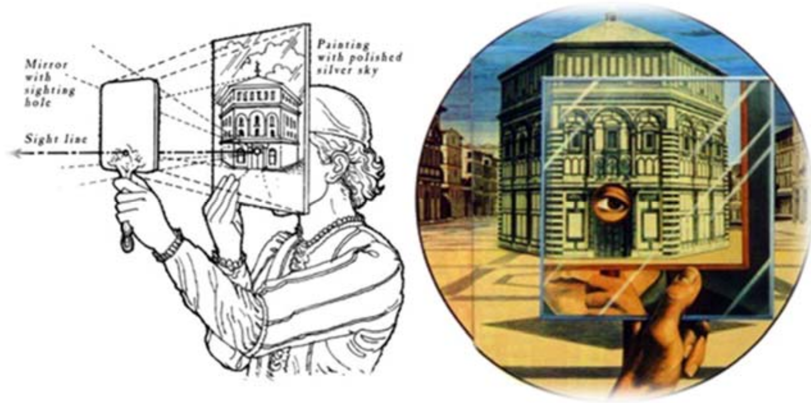


Ilustración 26. Filipo Brunelleschi. Prueba del espejo

Lo expuesto por Brunelleschi logra ser el primer intento que se da por tratar de hallar la forma correcta de dibujar un objeto tridimensional en un plano bidimensional como el lienzo. Este método atribuido a Brunelleschi promueve primordialmente el intento por tratar de fundamentar la perspectiva como una disciplina científica, sobre todo como una rama de la geometría. De este modo, recurriremos al primer pintor teórico de la perspectiva matemática León Batista Alberti.

2.3.1 La pintura de León Batista Alberti

León Batista Alberti nació en Génova el 14 de febrero de 1404 y falleció en 1472. Segundo hijo ilegítimo de Lorenzo di Benedetto Alberti, miembro de una acaudalada familia florentina.

Alberti tuvo su educación en varios sitios, en los que se encuentra Padua como centro universitario de la república de Venecia, una escuela humanista, aprendió algunos conocimientos sobre latín, el cual determinaba el grado de cultura que poseía un persona, terminando ahí, recurre a la universidad de Bolonia , en el que decide proseguir la carrera de leyes. Es incierto en qué momento de su vida poseyó una formación matemática, “es posible que nunca la hubiera tenido […]. No era extraño que los estudiantes universitarios leyeran algunos de los primeros libros de los *elementos* de Euclides, lo que significaba que alcanzaban un entendimiento aceptable del material ahí incluido(Leo96pág. 1). De igual modo, Alberti poseía un especial interés en las matemáticas prácticas, las cuales no se enseñaban en ninguna universidad y solo eran asociadas a oficios de agrimensura. Lo más probable es que adquiriera conocimiento sobre estas prácticas a medida que avanzaba en algunos estudios extracurriculares de arquitectura.

En1421, la muerte de su padre lo deja tambaleando, pues por ser hijo ilegitimo su derecho a heredar no era evidente. Sin embargo, su educación y capacidad literaria le abrieron oportunidades de patrocinio por parte del orden eclesiástico y de los mecenas.

Al no tener problemas laborales, Alberti encontró el tiempo necesario para dedicarse a la escritura. Escribió obras de teatro, un tratado de filosofía acerca de l*as ventajas y desventajas del conocimiento*, entre otros. Gran parte sus escritos se enmarcan en el género del pensamiento humanista.[45] Es de aclarar que Alberti no deja de lado su interés por las matemáticas, pues logra presentar un texto completamente diferente a lo esperado en la época. Este texto es el *De la pintura* un trabajo corto, pero que exalta por su originalidad, debido a que, hasta el momento nadie había expuesto de forma escrita lo expuesto por Alberti, de cómo dibujar en *perspectiva matemática*, por así decirlo.

Alberti juega un papel importante en la historia de la relación arte-matemática, pues logró establecer, por primera vez, una teoría formal de como dibujar correctamente los espacios tridimensionales con ayuda de algunos elementos de geometría y óptica. Alberti logra conceder

[45] La corriente humanista pretendía reanudar las glorias del pensamiento clásico, mediante la imitación de las llamadas culturas griegas clásicas: la griega y la romana. Con la última más en función con lo relacionado con los textos. Los textos humanistas no debían ser novedosos, era necesario el uso correcto del latín y expresar el pensamiento del autor original

de algún valor matemático lo planteado por Brunelleschi acerca de cómo dibujar correctamente en perspectiva. Esta postura logra ser plasmado a lo largo de su primer capítulo del libro De*la Pintura* del año 1435. Logró, a partir de lo propuesto por Brunelleschi, entender el principio que se convertiría en la base del sistema matemático de perspectiva que fue adoptado y perfeccionado por sus sucesores artistas.

El principio básico que concibió Alberti puede explicarse de la siguiente forma: Entre la escena y el ojo se interpone una pantalla de vidrio en posición vertical. Se llaman líneas de fuga las que van desde el ojo hasta cada punto de la escena; estas líneas las llamaba pirámide de rayos o proyección. En el lugar en el que las líneas atraviesan la pantalla de vidrio (la imagen plana), Alberti imaginaba puntos que determinan lo que denomina una sección. Esta crea la misma impresión sobre el ojo que la escena misma, porque de la sección provienen las mismas líneas de luz originadas en la escena. En consecuencia, el problema de pintar en forma realista es el de obtener una sección verdadera sobre la pantalla de vidrio (en la práctica sobre el lienzo). Como el pintor no mira a través del lienzo, Alberti establece que para determinar la sección se debe disponer de reglas basadas en teoremas matemáticos que establezcan la forma de dibujarla, estableciendo todo el proceso como una pirámide visual en la que se cuenta con el ojo del observador, los rayos de luz, la sección y el objeto. La siguiente figura es la representación de la pirámide visual.

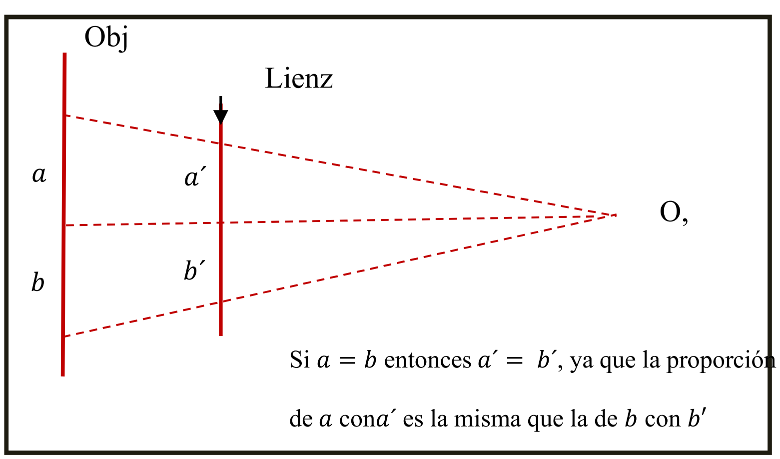


Figura 17

´Alberti establece, en su libro *De la Pintura*, teoremas y construcciones que permitirán al pintor realizar sus dibujos; el problema es que la gran mayoría se encuentran incompletos. Es decir ofrece teoremas y dibujos sin demostración, dejando de un lado de donde salen algunas de sus conclusiones, afirmando que solo los explicara desde el punto de vista de pintor. Lo que se logra entender, de forma vaga, es la influencia de Euclides en las definiciones de punto, línea y superficie que debe tener en claro todo aquel que quiera trabajar la perspectiva; debido a que , sin la presencia de estos objetos matemáticos no se puede aspirar a una representación fiel y bella de la realidad. En la pirámide de visión, propuesta por Alberti, también entra a jugar un papel importante la definición de semejanza de triángulos, que Euclides expone en su primer libro. La siguiente es las definiciones expuestas por Alberti:

> Lo primero que se debe saber es que un punto es un signo [figura] que, uno diría, que no se puede dividir en partes [...].Para nosotros una línea es una figura cuya longitud se podrá dividir en partes, pero de grosor tan fino que no puede ser dividido [...]. Una superficie es el límite externo de un cuerpo y se le reconoce no por su profundidad, sino tanto por su longitud y anchura [...] (Leo96págs. 63-64).

Retomando la pirámide de la visión, ofrecida por Alberti, es claro que el vértice de la pirámide ubica la posición del espectador, que Brunelleshi situaba por el orificio de un lienzo. Es decir, en el vértice de la pirámide se encuentra el punto en el que se sitúa el ojo del artista y, al mismo tiempo, en el lienzo se sitúa un punto céntrico que se encuentra a la altura del ojo. Es decir, lo que el artista ve y espera que el espectador vea. Esta posición en la representación se denomina el “punto de fuga”. El punto de fuga logra ser el elemento que permite la composición y proporción del espació al unificar la representación. Alberti plantea tazar una recta horizontal que pase por el punto céntrico que muestra el límite del espacio a representar. En otras palabras el punto de fuga que da dirección al infinito y la recta horizontal, línea céntrica, más bien conocida como línea del horizonte permiten al artista representar un infinito acabado en la representación del espacio. Es decir la pintura y la influencia de la perspectiva dan lugar a la representación un infinito actual, como se deja notar en los diseños pictóricos.

De igual forma la pirámide de la visión logra emularse en dirección opuesta al observador, es decir en el lienzo como lo presenta[46] la ilustración 27. Alberti determina que con la construcción correcta de la pirámide de la visión, se logra crear la perspectiva correcta en la representación. De tal modo, hace de la pirámide visual, un elemento base para la construcción de una intersección exacta que permite al pintor reproducir una representación perfecta (en primera instancia, una representación exacta de un "pavimento de mosaicos cuadrados"[47])

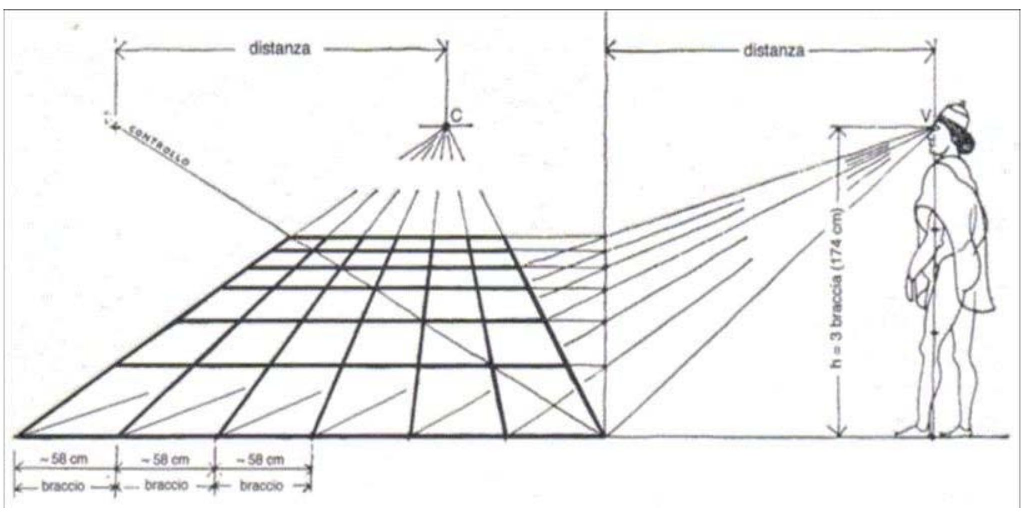


Ilustración 27. Velo o retícula de Alberti

[46]Esta logra ser una de las justificaciones que no hace Alberti, aludiendo que no le interesa aburrir a sus lectores con tecnicismos matemáticos como lo afirma J.V. Field "La primera laguna consiste en que no establece explícitamente una descripción detallada de la pirámide de visión y la primera etapa de la construcción matemática que da lugar a la intersección" (Leo96pág. 11).

[47]"El pavimento cuadriculado se convierte en el codificador de los valores espaciales, aplicables a tanto como cuerpos e intervalos. esta característica da lugar al primer ejemplo de una sistema de coordenadas que vincula el llamado espacio matemático' con intuición artística" (Panosky, 1991).

Varios artistitas lograron impregnarse de la filosofía de Alberti, incrementándose el número de artistas interesados por escribir sobre el tema de la perspectiva matemática. Eso se debe a que se descubre la importancia que ofrece la geometría para la representación de la realidad y el hecho de que esta rama, la geometría, podría fundamentar su labor como artistas, otorgándoles un puesto en las artes liberales. Dos de los grandes artistas que se vieron influenciados por los desarrollos de la geometría para la representación de la realidad, fueron Leonardo da Vinci y Alberto Durero. Referenciamos algunos aspectos generales de da Vinci y estudiamos, con alguna profundidad los desarrollos de Durero.

A diferencia de Alberti, Leonardo da Vinci (1451-1519) no escribió un manual como tal sobre la perspectiva; gran parte de sus anotaciones fueron compiladas en un texto denominado *tratado de perspectiva* (1651). Leonardo muestra claramente la importancia de las matemáticas en todo lo que realiza, y lo indispensable que son para entender la perspectiva (la perspectiva en este periodo logra ser la ciencia de ver) como logra dar a entender la siguiente afirmación "que ningún hombre que no se matemático lea los elemento de mi obra".

La perspectiva matemática que podía comprenderse por teoría de óptica y geometría, permitiría la reproducción exacta de la realidad que es lo que debería ser la pintura para Leonardo.

Leonardo logra dividir la perspectiva en tres partes: la primera parte es la disminución de tamaño que se da en objetos opacos, la segunda trata sobre la disminución y perdida del contorno de dichos objetos , y la tercera trata sobre la disminución y perdida de color en caso de grandes distancias. Aunque estas divisiones no son para nada matemáticas, Leonardo sustenta que todo problema de perspectiva se pueden solucionar por medio de cinco elementos matemáticos, que son: la línea, el punto, el ángulo, la superficie y el sólido. Leonardo tiene muy en claro la diferencia entre punto matemático y un punto real, físico; el punto real, el punto natural, tiene continuidad, por lo que puede dividirse infinitamente, en cambio el punto matemático es indivisible debido a que no posee tamaño, en concordancia con la definición euclidiana de punto, como aquello que no tiene partes. Leonardo abarca las demás definiciones sin alejarse mucho de lo propuesto por Alberti, que son un reflejo de las definiciones euclidianas, las cuales constituyen el soporte matemático de la perspectiva. En sí, gran parte de la teoría de la perspectiva matemática de Leonardo es un reflejo de la teoría de Alberti como lo afirma Martínez.

> Los paralelismos entre ambas obras no se agotan en estos puntos, y tan elocuentes son los pasajes casi idénticos que es indudable que el maestro da Vinci, el genio universal según sus propios contemporáneos, había tomado algo más que inspiración del escrito de Alberti. Esto no resta méritos a Leonardo, si de algo se le puede acusar es de responder el deseo de Alberti (…) espera que los hombres de mayor ingenio y sabiduría que le suceden logren hacer del arte de la pintura una ciencia absoluta y perfecta (Martinez, 1996, págs. 48-50).

El interés despertado por estas técnicas llevó a que los matemáticos se ocuparan en ellas y las analizaran según sus propios intereses. El resultado, si bien enriquecedor para el conocimiento matemático, fue la divergencia inevitable entre éste y la práctica de los artistas. Aproximadamente en un siglo después de la publicación del texto de Alberti era tan notable el desborde teórico, la profusión de resultados y la inercia particular que adquirió la matemática de la visión de la perspectiva, que su uso quedó fuera del alcance de quien no tuviera una preparación como geómetra. Se puede afirmar que el último pintor- matemático fue Alberto Durero, cuya obra data de la primera mitad del siglo XVI e incluye lo pictórico como la búsqueda del orden matemático.

2.3.2 Alberto Durero

Alberto Durero (1471-1528) es reconocido históricamente como pintor, grabador y maestro del Renacimiento alemán. Durero recurre a la geometría, buscando por medio de ella descubrir la belleza que oculta la naturaleza. Durero, al igual que otros artistas contemporáneos, como Leonardo y Alberti, abraza el arte y la ciencia como una unidad, que permite redoblar los esfuerzos para dibujar o pintar directamente la naturaleza, puesto, que requería de una comprensión sobre fisiología y óptica que no se encontraba en escritos antiguos. De esta manera, Durero se vio motivado e influenciado por sus contemporáneos italianos para encontrar las respuestas a sus dudas en las matemáticas. Durero otorga un manual ambicioso que pretendía posicionar mejor el gremio de los pintores. Es importante anotar que este manual, se reconoce históricamente como **el primer libro de matemáticas escrito en el idioma alemán**. Su título, *Underweysung der Messung* (1525), podría ser traducido como *Manual de Medición*.

Durero comienza su extraordinario manual de una manera muy diferente a sus colegas Leonardo y Alberti, pues abre la posibilidad de ser un manual pedagógico en el que no se excluya a nadie por la falta de conocimiento en geometría; al contrario, bien aventurados son los ignorantes en este tema para aunar en su texto, así lo expresa en la apertura de su texto, “El sagaz Euclides recopiló los fundamentos de la geometría; quien los conozca bien, no tiene ninguna necesidad de lo escrito a continuación, pues solo se ha escrito para los jóvenes y para aquellos a quienes nadie ha instruido con excelencia” (Peiffer, 2000, pág. 134). Durero procura presentar este tratado de forma sistemática, intentando que fuese de fácil comprensión para el lector, evitando divagaciones puramente formales.

La geometría que se encuentra contenida en este texto es descriptiva más no demostrativa. Este tratado logra ser memorable pues logra ser el primer documento literario en él se aborda el problema de la representación a través de un riguroso tratamiento científico. Hay dos elementos a resaltar en este libro: el primero, es que Durero a todas las construcciones que maneja les otorga un tipo de uso posible en las representaciones artísticas, y segundo, se rescata el claro conocimiento que posee respecto al infinito, pues diferencia muy bien lo abstracto, de lo representativo "lo concreto".

Durero divide su tratado de una manera sistemática y organizada en 4 libros los cuales poseen un carácter matemático cada uno, a diferencia de Alberti; quien dividió *de la pintura* en 3 libros y solo el primero de los tres libros es de un carácter matemático.

El primer libro podría decirse que parte parafraseando a Euclides; se nota la influencia de éste matemático griego en las definiciones de algunos objetos matemáticos como: punto, línea, plano y sólido, conceptos base en todo tratado de la época. Al igual que sus colegas artistas estas definiciones logran tener una estrecha relación con las definiciones euclidianas. Claro está que estas definiciones no deben caracterizarse como euclidianas simplemente, pues como señala Peiffer, Durero logra hacer una doble aproximación a los objetos matemáticos desde lo imaginario con Euclides y lo concreto (lo existente, para la labor del artista).Además Durero logra clasificar todo tipo de líneas, partiendo de líneas rectas hasta las curvas algebraicas.[48]

En el capítulo 1 Durero establece construcciones de curvas que se construyen con regla y compas.

En este tratado se logra observar construcciones de espirales las cuales tienen gran aproximación a la espiral construida por Arquímedes. Todas las construcciones de espirales expuestas por Durero tienen un gran parecido, dado que la construcción de éstas se fundamenta en dividir el radio de una circunferencia en *n* partes iguales. De este modo se logran diversas representaciones de espirales, las cuales sirven en la pintura o representación pictográfica en la

[48]Las curvas algebraicas logran ser tratadas con mayor rigor por parte de diferentes matemáticos a mediados de siglo XVII.

representación del báculo, follaje de hojas, etc. Esto en vista horizontal, y en vista vertical pueden utilizarse las espirales en forma de caracol para la representación de escaleras. La espiral en forma de caracol es muy diferente a las anteriores espirales expuestas por Durero debido a que la construcción de esta espiral, se logra teniendo en cuenta un arco y una línea recta. Se debe dividir el arco en *n* partes iguales, por lo que Durero da referencia a la trisección de un ángulo, mostrando en su tratado un acercamiento a esta construcción.

Por último se encuentra la última espiral, *la espiral de Durero*, la cual se aproxima a(Mora, 2011) la teoría de media y extrema razón. Esta espiral se utiliza en las representaciones pictóricas para reflejar la sensación de infinito en las representaciones. Este aspecto es abordado de manera profunda por Jennifer Mora en su trabajo de Tesis Alberto Durero: Relación geometría y experiencia, en el cual analiza, de manera profunda, la construcción de las curvas algebraicas expuestas por Durero.[49]

Aunque en este capítulo Durero logra trabajar con gran énfasis las curvas algebraicas, de igual modo logra darle un espacio al tratamiento de cónicas[50]: elipses, parábolas e hipérbolas, pero de un modo completamente diferente al tratamiento que se les había dado hasta ese momento, Durero no busca investigar las propiedades matemáticas de esta curvas. Su interés es el de tratar de representar las cónicas como se las imaginaba del mismo modo como lo hizo con la construcciones de espirales o curvas algebraicas, en sí el tratamiento que se les da a las cónicas logra ser desde la óptica. Para lograr este objetivo según Panosky, Durero utiliza un método denominado proyección paralela, el cual era utilizado por arquitectos y carpinteros, que trabajaban la denominada, también conocido como el método de proyección paralela. El método de proyección paralela, nunca antes había sido utilizado en la resolución de un problema

[49](Mora, 2011).

[50]Gran parte de lo que sabía sobre Durero secciones cónicas vino de Johannes Werner (1468-1522). Un antiguo alumno de Regiomontano, Johannes Werner quien vivió en nuremberg, y publico *libellus super viginti duobus conicis* en el año 1522 tres años antes que el de *la medida*. Hizo contribuciones a la geografía, meteorología y matemáticas.

puramente matemático, y es Durero quien incursiona este método en busca de una representación formal de las cónicas.

Durero observo que el corte del cono se puede detallar de dos formas desde arriba y aun lado, lo que denomina como plano lateral y plano horizontal. El corte del cono, queda delimitado por un número de puntos, de los cuales se traslada el número suficiente puntos del plano lateral al plano horizontal, el hecho es que superpone los dos puntos de vista del corte para trasferir las medidas, es decir, los puntos. De este modo la trasversal que corta el cono es representada en el plano bidimensional del papel. Este "primitivo" método otorga una representación fiel de la elipse, excepto que en el proceso de trasferencia de puntos Durero logra cometer un error por lo que la elipse queda representada bajo la forma de un huevo, es así como Durero al no encontrar una traducción correcta de elipse concede el nombre de *línea de huevo*[51]. Este método utilizado por Durero "anuncia en cierto modo, el procedimiento de la geometría analítica" (Panofsky, 1994, pág. 208).

La parábola[52] y la elipse se obtienen por prolongadas secciones oblicuas, que aparecen en constante reducción en las representaciones, excepto en la elevación lateral, las cuales deben ser obtenidas alargando proporcionalmente los ejes principales. La hipérbola se diferencia de estas dos cónicas, pues se obtiene por una paralela en sección trasversal al eje del cono. Este a diferencia de la parábola y la elipse puede ser interpretada directamente cuando se eleva una representación frontal de los dos diagramas ya sea el lateral o horizontal.

---

[51]Kepler es quien concibe la falla de Durero al no poder considerar una elipse como una figura perfectamente simétrica. Según Kepler, Durero no pudo sustraer la idea de que la representación de la figura se ensanchaba en proporción de la abertura del cono, por lo que falsea, con la construcción, hasta terminar con "eierline" (línea de huevo. "It is easy to understand why Kepler had an interest in Dürer's flawed analysis of the ellipse. For 10 years beginning in 1601, Kepler struggled to understand the orbit of Mars, a problem that had defeated Regiomontanus. Until he understood that the orbit was an ellipse, Kepler believed that it was some sort of oval. In fact, he specifically used the word "oval," a descendant of the Latin word "ovum" meaning egg" (Silver, 2012, pág. 412).

[52]Con la construcción de la parábola, se ve la primera evidencia de los espejos de Arquímedes. Durero expresa por que el ángulo de incidencia sobre un espejo es igual al ángulo de reflexión. para evitar un poco el formalismo en la explicación de este punto, Durero ofrece una "explicación" a través de un ejemplo gráfico, que poco aclara el tema.

Después de tratar las curvas con cierta extensión, y recalcar un poco la construcción de las cónicas en su libro 1, Durero, en el libro 2, pasa a tratar figuras bidimensionales las cuales les otorgo un respectivo limite. Al introducir la definición de plano, Durero incorpora la cosmología pitagórica[53]de limitar lo ilimitado. Es decir, Durero presenta al punto como elemento limitador de las líneas; las líneas a su vez permiten limitar los planos y, por último, los planos son utilizados para limitar los cuerpos en el espacio o figuras sólidas.

En este libro se centra la atención precisamente en aquellos cuerpos que son limitados por líneas, ya sean; líneas rectas, serpentinas o circulares. Cuando los cuerpos son encerrados por líneas rectas es posible hablar de ángulos y vértices correspondientes, algo que no se logra determinar cuando la superficie es encerrada por completo por líneas serpentinas o circulares, puesto que los vértices no son posibles de identificar. Para este punto de ángulos y vértices Durero otorga una diferenciación no muy clara sobre ángulos y vértices; se parte del punto de intersección entre dos líneas rectas "la diferencia entre ángulos y vértice es la siguiente. Cuando ves la parte exterior saliente eso se llama vértice, más cuando observas la profundidad interior, eso se llama ángulo" (Peiffer, 2000, pág. 188). A su vez, con su confusa definición de ángulos y vértices pasa a mostrar la existencia de tres tipos de ángulos y vértices, que solo dan cuenta en realidad a una clasificación de los vértices. Los cuales clasifica como recto, obtuso y agudo. Es de aclarar, como afirma Cardona, que Durero no posee una claridad sobre aquello que clasifica como ángulo recto, pues "no ofrece una definición como si lo hace Euclides; sino, más bien, un método de construcción que se ajusta a la proposición 31 del libro VI de Euclides, es decir, establece que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto" (Cardona, 2006, pág. 141).

[53]La cosmología pitagórica, como se veía en el primer capítulo, consistía en que todo es concebido como número, por lo que los objetos podían constituirse por puntos como sus elementos irreductibles. Así pues, la visión pitagórica impone límite a lo ilimitado al reducir todo al número.

Después de haber terminado con sus definiciones, Durero pasa a exponer un amplio espectro de posibilidades para encerrar "figuras cuadriláteras"[54], el espectro de posibilidades que permite contemplar desde cuadriláteros construidos con líneas rectas y con líneas cóncavas o convexas.

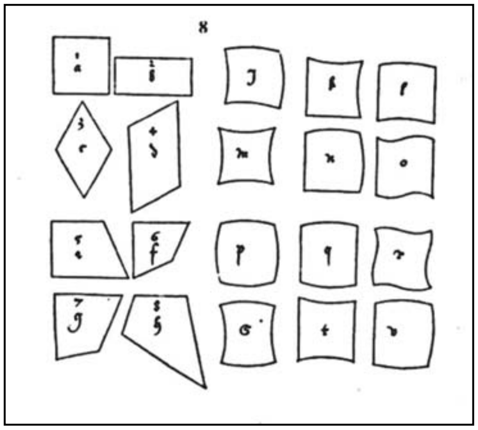


Ilustración 28. Los cuadriláteros de Durero

Después de haber abarcado el campo de los cuadriláteros, Durero comienza a desarrollar uno de los aspectos más destacados de su tratado, como lo es la construcción de polígonos regulares[55] inscritos en una circunferencia. La construcción de los polígonos los expone en el siguiente orden: hexágono, triángulo equilátero, heptágono, polígono de 14 lados, cuadrado, octágono, polígono de 16 lados, pentágono, decágono, polígono de 15 lados, polígonos de 9 lados, polígonos de 11 lados, y por último el polígono de 13 lados.

Para la construcción de algunos polígonos Durero se basa en las construcciones de Euclides, aunque como se ha dicho anteriormente Durero otorga pasos metódicos, no ofrece ningún argumento o demostración para justificar sus procedimientos recomendados.

---

[54]Peiffer afirma que Durero no tiene en cuenta la clasificación euclidiana para estos cuadriláteros, puesto que Euclides solo contemple la los cuadriláteros de a hasta g.

[55] Los polígonos regulares poseen una amplia acogida en la edad media por la influencia del arte islámico y por la invención de las armas de fuego, fortificaciones, para los cuales se necesitaba toda clase de polígonos regulares, estas construcciones poseían la características de ser sencillas debido a que no se debía cambiar la abertura del compás.

Ya habiendo otorgado esta visión panorámica de los elementos que podemos encontrar en este segundo libro *de la medida,* recalcaremos la construcción que más nos interesa; la construcción del pentágono regular. Para este caso, Durero presentados construcciones: la primera, es la construcción de Ptolomeo,[56] y la segunda, es la construcción aproximada con *abertura de compas invariante*. Veamos la primera construcción.

> Sea una circunferencia de centro en *A* y un par de diámetros perpendiculares. Después de establecer el punto medio *E* de una de los radios (radio *AC*, por ejemplo), se traza una circunferencia con centro en *E* y radio igual a la distancia que hay entre *E* y uno de los extremos del diámetro perpendicular al radio donde se encuentra *E*. Sea *D* dicho extremo. Se marca a continuación el punto *F* como el corte de esta circunferencia y el diámetro que contiene a *E*. Ahora bien el segmento *DF* constituye la base para inscribir el pentágono regular en la circunferencia inicial(Cardona, 2006, pág. 168).

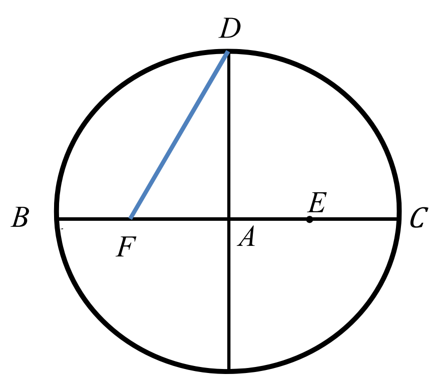


Figura 18

[56]Claudio Ptolomeo (100c-a170c), fue astrónomo, matemático y geógrafo greco-egipcio. La construcción de Ptolomeo logra ser pasada a la posteridad por Durero, pues si no hubiera sido por éste la construcción “hubiera permanecido olvidada para siempre en la *geometría deustsch”* (Panofsky, 1994, pág. 210).

Durero no se conforma con otorgar la construcción de Ptolomeo, pues como mencionábamos anteriormente, ofrece otro método parar construir un pentágono áureo. Uno logra observar como la armonía que se encuentra al interior de esta figura es un elemento trascendente en su pensamiento. De tal modo que, no es raro que la proporción aurea haya sido un elemento constante en las reproducciones de Durero. Aunque Durero no explique la procedencia de sus construcciones, tiene en claro su valor al presentar dos maneras diferentes de hacer la construcción.

El segundo método de construcción, expuesto en *de la medida*, parte de dos circunferencias de igual radio, dispuestas de tal manera que cada una de ellas pasa por el centro de la otra. Después de unir los dos centros, tendremos el segmento *AB* (constituirá el lado original del pentágono) y trazar el segmento vertical *CD,* que une los dos puntos de corte de las circunferencias, se hace centro en *D* y se traza la circunferencia de radio *DA*. A continuación se determinan los puntos de corte *E, F, G* con las otras dos circunferencias y la vertical, se trazan las rectas *EG* y *FG* hasta cortar los círculos originales en He I. estos dos puntos definen dos nuevos vértices del pentágono. Por último, basta con trazar un par de círculos con centro en *H, I* y radios equivalentes a *A, B* para obtener el punto de corte con la vertical prolongada *DC*. Este punto J es el último vértice del pentágono. No hay dificulta en advertir que el pentágono es equilátero, pues cada uno de sus lados tiene una longitud igual al radio de cada una de las circunferencias originales. No obstante, Durero rectifica que hace falta verificar si el polígono es equiangular.

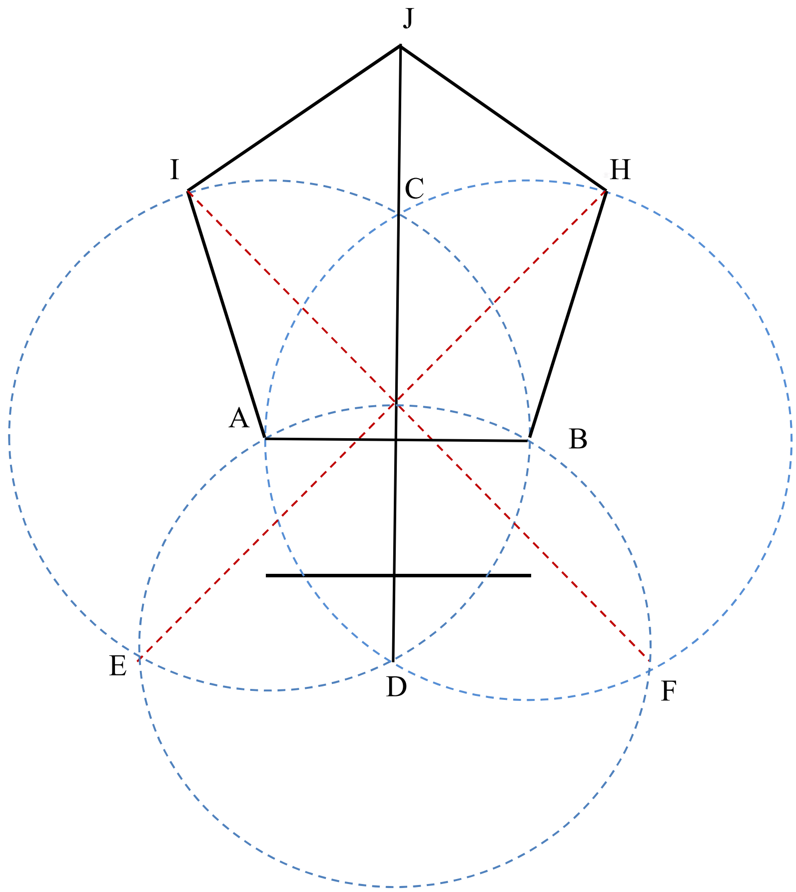


Figura 19

Durero construye polígonos regulares de 7, 9, 11 y 13 lados, pero sin ningún rigor matemático. Si bien no se ubican dentro del contexto hipotético deductivo de las matemáticas, realiza muy buenas aproximaciones con un sinfín de limitaciones. Aun así la propuesta de Durero es de suma importancia pues abre la posibilidad, de que las personas del común accedan a un conocimiento que no hubieran reconsiderado necesario para su labor, tanto para los artistas, como para los matemáticos .Sin embargo, Durero no adopta la misma posición que poseen los textos matemáticos clásicos; pero, como afirma Panosky, aunque su obra iba dirigida a un grupo en específico, también logró llegar a otro grupo motivando su imaginación.

De este modo, el *underweisung der messung* O *de la medida* sirvió, según Panosky, "como una puerta giratoria entre el templo de la matemática y la plaza de mercado". Mientras lograba familiarizar a los toneleros y ebanistas con Euclides y Ptolomeo, lograban familiarizar también a los matemáticos profesionales con lo que se podría llamar la *geometría del taller. "*Es debido en gran manera a su influencia, que las construcciones 'con la abertura del compás invariable' se convirtieron en una especie de obsesión para los geómetras del siglo XVI, y las construcciones de Durero sobre el pentágono sirvieron de estímulo a la imaginación de hombres como Cardano, Tartaglia, Benedetti, Kepler…" (Panofsky, 1994, pág. 210).

Al igual que las construcciones de polígonos, Durero abordó los modelos de corte ("redes") de poliedros, dando cuenta de algunos teselados de polígonos. También ofrece todo un compendio de construcciones con regla y compas, las cuales son de gran importancia para la labor de los artistas.

El libro tercero, es diferente a los anteriores dos primeros expuestos en la *Medida* por Durero, pues si bien los dos primeros no eran muy rigurosos el libro tercero es un libro de talante definitivamente práctico, con fines eminentemente utilitarios. Concretamente, Durero decide mostrar la aplicación de la geometría en trabajos específicos como arquitectura, ingeniería, decoración y tipografía.

Respecto a la arquitectura, Durero referencia, en gran medida a Vitruvio, debido a la belleza que caracteriza sus construcciones, "Vitruvio ha escrito en sus libros acerca de la solidez, utilidad y belleza de los edificios. Por eso se le debe seguir antes que a otros y utilizar su doctrina" (Peiffer, 2000, pág. 222).

De tal manera, Durero ofrece algunas construcciones que tienen como fin enseñar como dibujar columnas a partir de alzados de figuras geométricas, partiendo de círculos, cuadrados, pentágonos y combinaciones de estas figuras geométricas. Presenta, de manera muy sistemática, la forma de realizar lo que Durero denomina un listel que son los pedestales para las columnas, al mismo tiempo muestra cómo realizar los bordes de las columnas, los cuales referencia como pilares. Durero realiza las decoraciones de las columnas determinado que los adornos de los pilares se pueden hacer sin importar el número de las aristas.

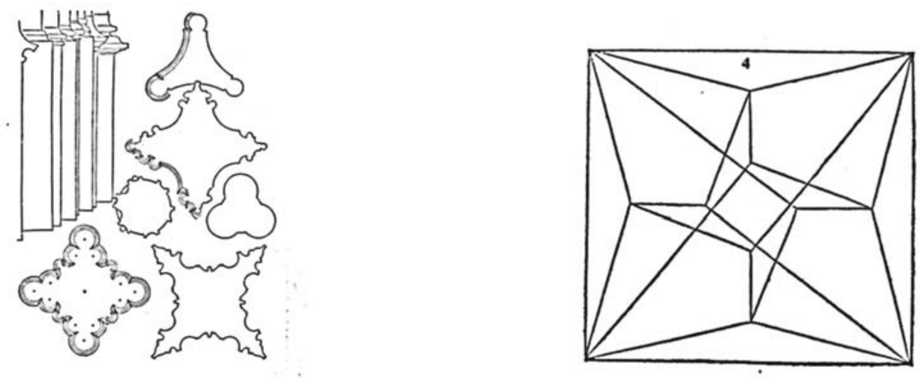


Ilustración 29. Poliedros y decoraciones

Lo más importante en recalcar en este punto, es el alzado que utiliza Durero para la construcción de describir y representar columnas en el espacio. Pues se realiza a través de una proyección vertical de la base. Durero no enfatiza en este paso, pues lo único que se logra observar son pequeños avistamientos que referencian esta técnica de proyección; específicamente es la técnica de la doble proyección; en gran medida este conocimiento sobre la doble proyección se debe a una técnica utilizada en los talleres como se mencionaba anteriormente, y que de igual forma, como afirma Peiffer, la doble proyección es una técnica trabajada en los textos de Vitruvio:

> Planta a nivel de la base (Grund) y alzado (Auszug), que, sobre la hoja de dibujo, se relacionan con dos proyecciones horizontal y vertical y que, en el texto, son descritas como operaciones materiales de aplastamiento en la base y de extracción, están próximos a la iconografía y ortografía de Vitruvio (Peiffer, 2000, pág. 55).

La relación entre planta y alzado es lo que verdaderamente logra aportar Durero, pues la comprensión de estos dos, le permitió, como se vio en el capítulo dos, una construcción aproximada de las cónicas, y en el tercer libro la construcción de las columnas. Pero donde se logra ver el aporte significativo es en el cuarto capítulo, en el cual se utiliza, de una manera más formal, la técnica de planta y alzado. Es decir, el método de doble proyección que permite la representación tridimensional de un objeto en el plano. Pero dejemos hasta aquí este punto, pues lo abordaremos de una manera más profunda en el análisis panorámico del siguiente cuarto libro.

Retomemos, por tanto, el método de la doble proyección, permite la representación de un objeto tridimensional en el plano por medio de dos proyecciones ortogonales, un sobre el plano vertical y la otra sobre el plano horizontal, estos planos "se hacen coincidir en el plano de representación efectuando una rotación alrededor de la recta común a ambos planos de proyección. Un punto del espacio es entonces representado por dos puntos del plano de representación, situados sobre una misma vertical: la línea de referencia" (Peiffer, 2000, pág. 55)

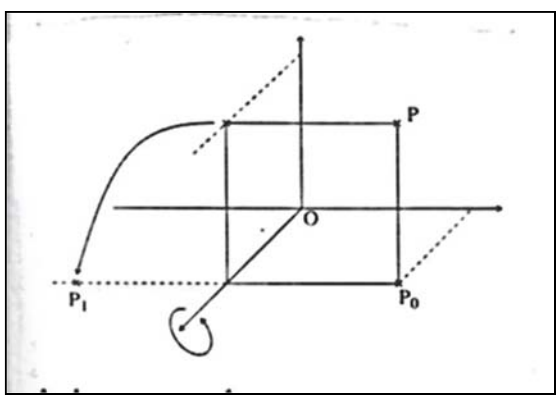


Figura 20

Ya finalizando el tercer libro, Durero otorga la construcción geométrica de letras romanas, en construcción utiliza arcos circulares y cuadrados para inscribirlas dentro de ellos. Respecto a este punto, según Panosky, Durero simplemente tuvo que limitarse a ser un mediador, al traspasar los conocimientos de las construcciones de estas letras. Sin embargo, construyó letras góticas o, en expresión de Durero, tipo *textor*; se supone que este tipo de letra son construcciones propias como afirma Panosky, no se ha encontrado ninguna fuente anterior que dé cuenta a este tipo de construcciones. Para dibujar las letras góticas, Durero no se basa de arcos circulares, ni las inscribe dentro de un cuadrado, sino que, las forma a partir de ciertas cantidades de unidades geométricas tales como cuadrados, triángulos, o trapezoides.

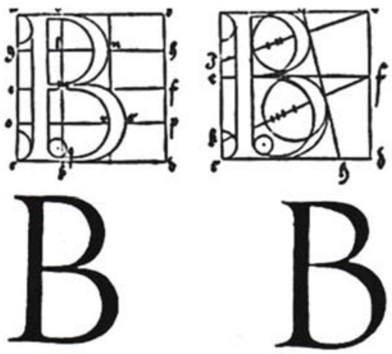


Ilustración 30.letras romanas.

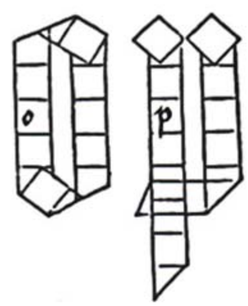


Ilustración 31. Letras góticas de Durero.

Ya habiendo dejado de un poco de lado el uso práctico de la geometría en la labor arquitectónica y demás, Durero incursiona por el cuarto libro 4, en una geometría más teórica. En éste cuarto libro, aborda, un tema ya expresado en el libro 2, el cual tiene relación con la geometría utilizada para la representación de los cuerpos tridimensionales. Para esto Durero parte de la existencia de tres tipos de cuerpos que logran construirse con regla y compas; uno de los cuerpos expuestos son los poliedros regulares: “los cuerpos que son de iguales en todo, caras, ángulos y lados. A los que Euclides llama `*corpora regularia´*. El describe cinco, pues no pueden ser otros que los que se inscriben en su totalidad tangente a una esfera”[57] (Peiffer, 2000, pág. 295).

Es importante aclarar que Durero no ofrece la construcción de ninguno de estos poliedros regulares, simplemente delimita el número de caras, de vértices y de aristas que debe poseer cada poliedro, por lo que expone esquemas de dibujos que representan cada figura. Después de haber expuesto la existencia de los poliedros regulares, “sólidos platónicos”, expresa la existencia de otros sólidos, los cuales poseen curvas desiguales; éstos se exponen de tal manera que puedan ser cortados y pegados: “quien quiera hacerlos, dibuje a mayor tamaño en un papel doblado y, con un cuchillo afilado, corte por un lado el contorno en uno de los pliegos de papel. Una vez retirado el papel restante se formará el cuerpo doblado por los trazos marcados” (Peiffer, 2000, pág. 299)

Este método logra ser una vía alterna, que utiliza el autor, para no representar una construcción de estos cuerpos semiregulares ya sea en perspectiva o estereográficamente. De tal modo, procede a presentarlos en una superficie plana, en la que la cara de los sólidos forman una “red” coherente que permiten que al ser recortado y doblado formen un modelo tridimensional real. Según Peiffer, Pappus atribuye su invención de estos cuerpos semi regulares a Arquímedes. Ya después de haber abordado lo anteriormente mencionado, Durero pasa a ofrecer la única construcción que se encuentra en este tratado como lo afirma Peiffer,

[57] Estos son los denominados sólidos platónicos, sus construcciones se logran encontrar en el libro XIII de los elementos de Euclides. “la demostración que restringe la existencia de los sólidos regulares […] se apoya exclusivamente en la proposición 21 del libro XI, que reza así: *cualquier ángulo solido esta contenido por ángulos planos menores que cuatro ángulos rectos”*(Cardona, 2006).

“No se encuentra en todo el *underwey sung*más que una sola demostración –para la duplicación del cubo[58], figura IV.51-, e incluso esta no es de Durero” (Peiffer, 2000, pág. 52). Pues como se ha mencionado anteriormente la geometría de Durero no es una geometría demostrativa, pues simplemente indica los diferentes pasos que deben realizarse para resolver un problema a través del uso de la regla y compas.

Durero, al establecer la duplicación del cubo, da paso al tema que más nos interesa de este tratado. Nos referimos a la forma de dibujar un cubo en perspectiva; para este caso desarrolla dos métodos: el primero, denominado como la construcción legítima, y el segundo, denominado el camino más corto.

Al igual que en el libro dos, Durero trae el método de la doble proyección utilizado solamente en la geometría taller que era trabajado por los artesanos de la época. Este método es utilizado por Durero para formalizar el dibujo tridimensional bajo criterios científicos.

Es de aclarar que el conocimiento de la geometría taller fue utilizado por Alberti y otros artistas. Alberti utiliza la doble proyección para la construcción de la retícula del piso en pavimento. Aunque, como se mencionaba anteriormente, el uso de este método es notablemente destacado por Durero más que por otros artistas al otorgar una representación de las cónicas en el libro dos, y en el libro cuatro destaca el dibujo de un sólido y las proyecciones de sombra. Es claro que el tratamiento que Durero utiliza para representar objetos tridimensionales científicamente no es algo completamente innovador, pues Leonardo y otros artistas italianos trabajaron esto en sus tratados de perspectiva. No obstante, Durero es el primero en exponer la doble proyección para tratar problemas matemáticos como el de las cónicas, además es el primer en exponer en un tratado la proyección de sombras, las cuales eran generadas gracias a

[58]Según Panosky, Durero debe esta construcción gracias a Johannes Werner y que también pudo consultar directamente a Arquímedes de Eutocius. “puede probarse por la por las mismas inscripciones en las figuras, que Durero consulto también al mismo Eutocios, con Pirkheimer dictándole el texto de una traducción alemana” (Panofsky, 1994, pág. 215).

los focos de luz que iluminaban los objetos. Cosa que ningún artista renacentista había expuesto en los tratados, ninguno expuso un tratamiento científico a las sombras generadas por los objetos tridimensionales. Durero no presenta construcción en perspectiva de pisos embaldosados como sí lo hacen gran parte de los artistas en sus tratados de pintura. Un claro ejemplo se observa con Alberti en su *de la pintura.* Antes de adentrarnos a observar el tratamiento hecho por Durero a las representaciones en perspectiva, otorgaremos una proposición muy importante que, según Cardona, fue aquel elemento que permitió comprender la representación del espacio, estas son: primero; la convergencia de rectas paralelas en un plano pictórico; segundo; el tamaño de los objetos varía dependiendo el ángulo de visión. Estos dos punto, son tomados de la *Óptica* de Euclides[59] por los artistas italianos y por Durero, para lograr la representación del mundo real. La convergencia de rectas paralelas en un plano pictórico reposa en la proposición 6, que dice: *los espacios paralelos vistos desde lejos parecen convergentes.* La demostración procede de la siguiente manera según lo expuesto por Cardona a continuación, expuesto en la figura 21.

> Sean AB y CD dos rectas paralelas, y sea O un punto en el mismo plano equidistantes de las rectas, el lugar donde se ubica el ojo que adelanta la observación (figura 21). Imaginemos que F, G y HI, son puntos enfrentados sobre las rectas AB y CD respectivamente. Las rectas AO, FO, GO, BO, DO, IO, HO, CO representan los trayectos de los rayos de luz que hacen visibles los puntos A, F, GI, BD. Como el ángulo AOC es mayor que el ángulo FOH, en virtud de la definición 4 que establece que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores, debe ocurrir que el segmento AC parece mayor que el segmento FH, y este mayor que GI, y GI mayor que

[59] “los principios de óptica enunciados por Durero (figuras IV.52-55), como la prolongación rectilínea de la luz, parafrasean las primeras proposiciones de la óptica de Euclides, tomadas bien de la versión impresa por Zamberti” (Peiffer, 2000, pág. 95).

BD, aun cuando dichos segmentos son iguales pues son perpendiculares a dos paralelas. Dado que las distancias AC, FH, GI, BD hacen parte de una sucesión que decrece, se impone como conclusión que las imágenes de las rectas paralelas AB y CD, en el sentido de O, convergen en un punto. Euclides demuestra después que ocurre lo mismo si el punto de observación reside en un plano diferente al de las dos rectas paralelas (Cardona, 2006, págs. 273-274).

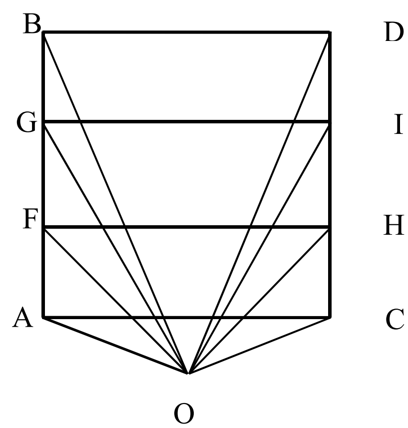


Figura 21

Esto se evidencia cuando Durero referencia cinco elementos que son de suma importancia para la labor del artista que quiera trabajar la perspectiva:

1. Ubicar al ojo en un punto.
2. El objeto a representar debe ser visto (de frente o de lado).
3. La ubicación de la luz.
4. El ojo solo ve los objetos valiéndose de rayos que deben ser líneas rectas.
5. El ángulo visual, aquel objeto que se ve bajo el mismo ángulo visual será concebido bajo el mismo tamaño aparente.

Ya con estos puntos en claro, Durero pasa a mostrar el procedimiento para dibujar los contornos de la sombra que deja proyectada un cubo en "escorzo"[60] sobre una superficie cuadrada. Para lograr estos dibujos Durero recurre a la técnica de la doble proyección, por lo que es necesario la representación en planta y alzado del objeto. Para entender los pormenores de este procedimiento, tomemos como referencia la figura siguiente.

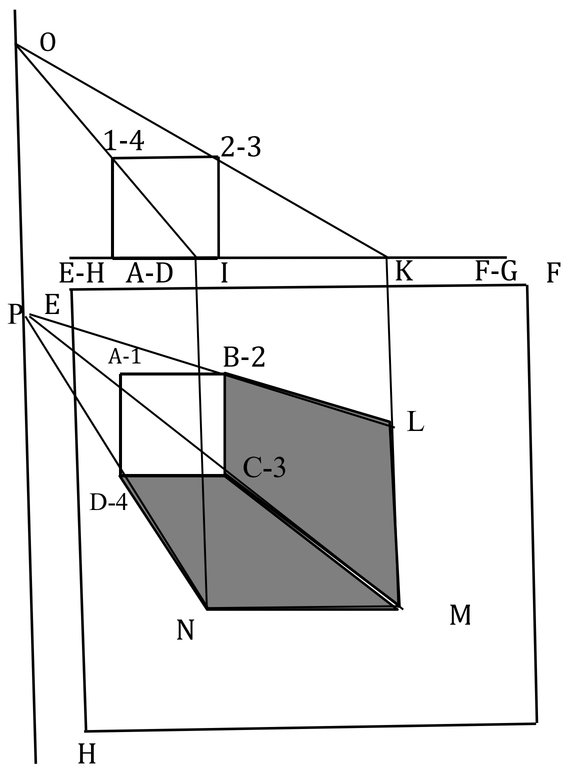


Figura 22.

[60]"la palabra española escorzo viene del verbo italiano *scorciare,* que significa representar las cosas acortándolas según las reglas de la perspectiva. El vocablo *foreshorten,* utilizado en inglés, se mantiene más cerca del significado literal del término" (Cardona, 2006, pág. 267).

Para dibujar los contornos de las sombras que deja un cubo que descansa sobre un plano, se debe dibujar la planta de un cubo en un plano proyectado en planta. Es decir, sea EFGH el plano dado y A1, B2, C3, D4 los vértices del cubo en planta. Cada punto corresponde a dos vértices del cubo: los vértices inferiores (aquellos que reposan sobre el plano EFGH) los cuales son A, B, C, D, Y los vértices superiores 1, 2, 3, 4. "ahora está terminada la proyección en planta. A continuación tienes que proyectar el alzado de esta superficie cuadrada y el cubo que está encima" (Peiffer, 2000, pág. 314).

Encima del plano EFGH se traza un segmento paralelo a EF, de tal modo que sus extremos se nombren EH y FG, esta línea representa el plano inferior EFGH. De este modo, a partir de los vértices del cubo en planta se trazan verticales que pasan por la horizontal EH-FG, las cuales se extienden hasta la altura correspondiente del cubo. Los extremos inferiores del cubo en alzado que coinciden con la altura del plano EFGH se nombran A-D y B-C, por tanto que los extremos superiores del cubo en alzado son 1-4 y 2-3. La figura ilustra que los vértices A, B, C, D, se encuentran a la altura del plano EFGH, en tanto que los vértices 1, 2, 3, 4 se hallan en un plano diferente a EFGH que se encuentra ubicado en la parte superior. Hasta este momento Durero ha realizado la disposición del cubo en planta y alzado, por lo que ahora Durero pide ubicar el foco de luz. En el alzado se ubica la luz O teniendo en cuenta la distancia de la luz a los bordes EF y GH; para el dibujo en planta se ubica la luz *P* a la altura de ella con respecto al plano EFGH. En ambas representaciones tanto planta y alzado, es necesario conservar la distancia de la luz de los bordes EF y GH; en el dibujo tanto en planta como en alzado se exige conservar la misma distancia a EH. Desde O se trazan rectas que pasan por 1-4 y 2-3, por lo que se definen los puntos de corte I y K en la recta EH-FG, y se trazan desde allí, perpendiculares a EH-FG. Por otra parte, desde el foco P se trazan rectas que pasan por B-

2, C-3, y D-4 , por lo que se definen los siguientes puntos de corte entre las siguientes rectas: L es el punto de corte entre la perpendicular que pasa por K y la recta que pasa por B-2, M es el punto de corte entre la perpendicular que pasa por K y la recta por C-3 Y N es el punto de corte entre la perpendicular que pasa por I y la recta por D-4. Para terminar se unen por medio de segmentos los puntos B-2 con L, L con M, M con N, N con D-4.

Según Peiffer la enseñanza de la perspectiva, expuesta por Durero, es la más conocida y con frecuencia catalogada como la única por ser la más imitada y comentada a lo largo del tiempo. Para Peiffer, gran parte del conocimiento sobre perspectiva que Durero expone se debe principalmente al conocimiento adquirió de los artistas italianos. De igual modo, es atribuido que el original trazado de sombras se debe a una copia exacta de los trabajos realizados por Leonardo. Para esta afirmación Peiffer, se basa en algunos comentarios hechos por Panofsky, quien presupone que “Durero se muestra también informado de algunas construcciones de Leonardo da Vinci, sobre todo de los métodos de trazados de las sombras, inéditas en la vida de Durero. Panofsky presupone que, durante su estancia italiana, Durero vio (y copió) algunos dibujos del ilustre italiano” (Peiffer, 2000, pág. 93).

Ya habiendo expuesto su método para dibujar la proyección de sombras, Durero pasa a exponer dos métodos para dibujar un cubo en escorzo. El primer método, como lo afirma Durero, permite representar todo tipos de objetos. Para esta construcción se basa en la técnica de la doble proyección y la ilustra presentando un cubo sobre un soporte horizontal de forma cuadrada e iluminado, de manera que sirva también de ejemplo de representación de sombras. Pues como se logra observar a continuación Durero utiliza el dibujo de la proyección de sombras para exponer lo que se denomina Peiffer como “construzione legittima” (Peiffer, 2000, pág. 95).

A partir de la construcción expuesta en la figura siguiente Durero añade una paralela a FG sobre la que ubica a su antojo la posición del observador en dos partes. La representación O1 ubicación del observador en la planta y O2 hace lo ubica en el alzado. Es de aclarar que los puntos O1 y O2 representan un único observador que detalla diferentes partes del objeto. Por consiguiente se trazan todas las rectas que unen O1 con cada uno de los puntos de la planta y las rectas que unen O2 con las rectas del alzado. Después Durero define la posición de un plano que se requiere para adelantar la representación. Éste plano se ubica en medio del lugar del observador y el plano EFGH, de tal modo que sea paralelo a FG, con la moderación de que atraviesa todas las rectas que emanan de O1 y O2. Durero aclara que no es obligatorio que dicho plano sea perpendicular EFGH, pues es posible moverlo vertical y horizontalmente.

El plano entre más lejos se encuentre del observador muestra las dimensiones de las representación mucho más grande. Durero pasa entonces a proyectar perpendicularmente los ojos O1 y O2 en el plano de representación (por o que se generan un par de ojos mas), aclara que estos cuatro ojos representan una y solo una ubicación del observador. Para trasladar la distancia entre cada uno de los ojos O1 y O2, y los cruces de líneas, Durero recomienda que es necesario disponer de dos compases, uno para la planta y otro para el alzado, así se logra trasladar la distancia entre cada uno de los ojos, O1 y O2, en el panel de representación, y cada uno de los cruces de las líneas de proyección que van desde los objetos (ya sea de planta o alzado) a los ojos correspondientes, los cuales se llevan hasta una hoja de papel en la que se preparan un par de ejes cruzados en ángulo recto; uno de los ejes se encuentra dispuesto para contener la ubicación en planta y el otro para la ubicación en alzado. Éste procedimiento se realiza con cada uno de los puntos de la composición y termina con la ubicación de cada uno de los puntos en el sistemas de coordenadas preparado para tal efecto. Por último, se realizan los trazos entre los puntos correspondientes. La figura 23 muestra el proceso en toda una complejidad.

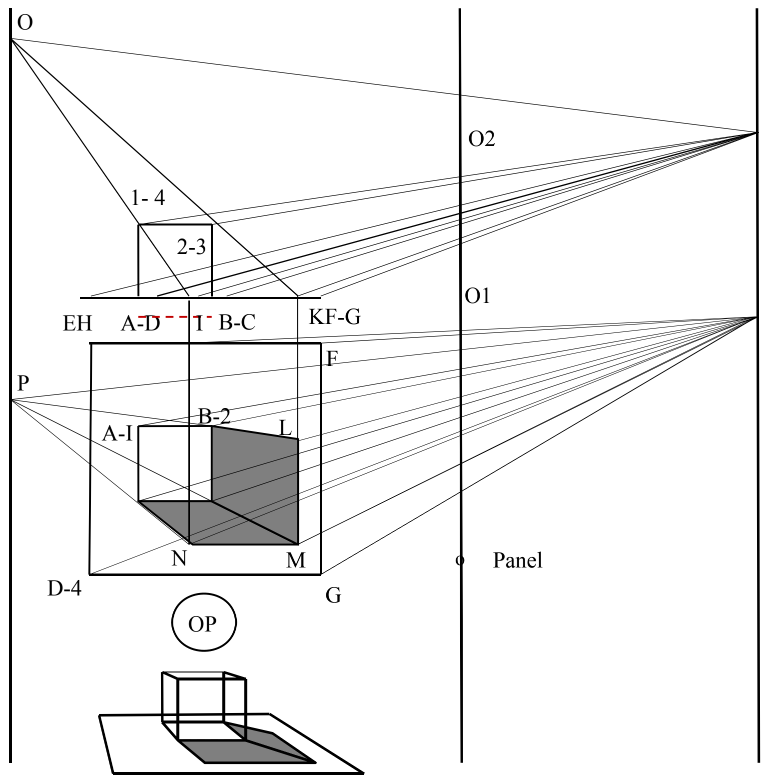


Figura 23

Este primer método para dibujar un cubo en escorzo es, según Peiffer, manejado por Durero con gran maestría, pues el dibujo y el método se encuentran acordes, a diferencia del segundo método, expuesto por Durero, denominado el *camino más corto* o el *camino abreviado,* el cual permite al artista obtener el mismo resultado obtenido con el primer método sin necesidad de invertir tanto tiempo y cuidado. El primer método, como observamos, parte de la proyección de sombras y después se construye el cubo en escorzo. En cambio el segundo método, consiste en construir primero el cubo en escorzo y después trazar los contornos de las sombras; es de resaltar que el procedimientos expuesto por Durero para este método poco tiene que ver con la imagen de la construcción.

Por último este libro termina con la exposición de una maquina llamada *porticón*, la cual permite al artista dibujar todos los objetos tridimensionales sin la necesidad de recurrir a estos procedimientos que logran ser muy laboriosos y necesitan de gran tiempo y paciencia, pues un simple error en el tratamiento de plata y alzado deformaría por completo la representación. Para esto no hay un mejor ejemplo que lo expuesto por Durero en el libro uno en su exposición de las cónicas, al mostrar la representación de la elipse como una línea de huevo al cometer un error en el procedimiento de traspasar medidas de la planta al alzado.

Es de aclarar que Durero no fue el único en ofrecer una herramienta que permitiera facilitar la labor del artista para este tipo de representaciones, pues por mencionar alguno, Alberti proporciona el denominado *velo de Alberti.* "Desde el punto de vista de un historiador de las matemáticas uno podría resumir esta historia diciendo que el uso de sustitutos adecuados permitió a los artistas olvidarse de las matemáticas que estaban en juego, y con ello la invención de la geometría proyectiva se pospuso hasta 1639" (Alvarez, Martinez, & Torres, 1996, pág. 17). Por último, es importante mencionar que los esfuerzos de Durero influenciaron a matemáticos de renombre, como Gerolamo Cardano y Niccolo Tartaglia, así como científicos famosos como Galileo Galilei y Johannes Kepler.

2.4 Acotaciones del Renacimiento

En sí podría concluirse que el artista renacentista debe crear previamente sobre la superficie en la que trabaja un universo espacial en el que se sitúan posteriormente los objetos. En esta creación desempeñan un papel fundamental las antiguas teorías sobre la luz, la visión humana y las leyes de la geometría; de manera que el espacio resultante se materializa, siendo percibido por un observador, que, como todos los demás objetos, ocupa una posición claramente determinada por métodos geométricos. Los objetos se verán ahora no como son, sino como son percibidos por el observador. El hombre.

Precisamente, la diferencia en la matemática utilizada en la pintura medieval y la renacentista no reside tanto en sus respectivos valores a representar, sino el modo de representar el espacio, o más precisamente, el carácter del espacio representado como consecuencia de modos diferentes de concebir el mundo. Dicho esto, como medio para poner a la perspectiva en contexto, nos centraremos en el procedimiento geométrico.

3. REVISIÓN DE ALGUNAS OBRAS CON CONTENIDO MATEMÁTICO

3.1 La composición geométrica en las meninas

Ilustración 32. Las meninas 1665.

Las meninas es un cuadro del año 1656, que fue realizado por el pintor español Diego Velázquez. Su nombre ha sido cambiado en el transcurso del tiempo, pues en el año 1666 el cuadro se titula "s*u alteza la emperatriz con sus damas y un enano",* en 1734 se le menciona como "*la familia del rey Felipe IV" y, finalmente,* en 1843 recibió el nombre de *"las meninas"* cuando Pedro de Madrazo lo incluyó así en el catálogo del museo del prado.

*Las menin*as logro ser, por así decirlo uno de los primeros cuadros en el que el artista logra tener la capacidad de capturar el entorno, y las relaciones espaciales de las cosas en una atmósfera. Puesto que, el espacio capturado por el autor se convierte en algo concreto y mensurable. La composición de este cuadro lo hace ser uno de los cuadros más emblemáticos de la historia.

Este cuadro de *las meninas* logra guardar en su interior secretos geométricos a través de las reglas de perspectiva; que fue desentrañada por Alberti. Velázquez logra utilizarlo con un final apoteósico, que representa la relación de la tradición clásica italiana, en la que se logra diseñar un modelo ideal que sea congruente con la perspectiva que se da al cuadro, la precisión de la obra logra ser absoluta. Velásquez devela en su cuadro todos los datos que contiene ese espacio a representar, el pintor no esconde nada a la vistas, más bien nos incorpora en el cuadro haciéndonos parte de la representación, todo esto gracias al uso de diferentes perspectivas.

Es por eso que la perspectiva, es el elemento de la representación, es una forma simbólica, histórica, social, convencional que permite la representación de dos dimensiones en el mundo proyectivo euclidiano de tres dimensiones. Velásquez logra determinar en la representación plana del lienzo una correspondencia de infinitos objetos tridimensionales, en los que existen infinitos objetos que si son vistos desde un punto de vista fijo producirán la misma perspectiva. Con esto Velásquez busca que todos elementos que se ajustan al cuadro logren representar el espacio “real”, en sí, reconstruir el “espacio visible”

Velásquez logra dividir la atmosfera del cuadro en tres diferentes planos. El primer plano maneja un tamaño natural en el que se encuentra ubicada una niña de vestido blanco, la infanta margarita, que se encuentra rodeada de sus sirvientas *las meninas*, junto a ellas hacia el lado derecho se encuentran los enanos de la corte y un mastín que no se inmuta a pesar de que uno de los enanos le ha puesto el pie encima.

En el segundo plano se encuentra Marcela de Ulloa y un hombre anónimo, a la izquierda aparece Velázquez, que se autorretrata, con su lienzo y en el tercer plano al fondo del cuadro se encuentra José nieto, aposentador de la reina. A pesar de estar situado este personaje en el tercer plano que se maneja en el cuadro, su posición es muy privilegiada, ya que se destaca en gran medida por ser el centro de la perspectiva del cuadro, teniendo ubicado un punto de fuga en su codo y además posee un gran foco de luz detrás suyo, el cual logra hacer que resalte mucho más, sin que se pierda en la penumbra de la profundidad donde se encuentra ubicado. Por último se puede ver a la reina mariana de Austria y el rey Felipe IV en el espejo que cuelga en la pared del fondo, el cual se encuentra rodeado de otros cuadros representativos de Velázquez.

Ahora bien después de esta breve descripción del cuadro, se analiza la manera en que Velázquez logra resolver problemas de composición del espacio de la pintura. Esto lo hace por medio de la perspectiva, el color y su gran capacidad de caracterizar los personajes. Por tanto, el color juega un papel importante en este cuadro, ya que gracias a la intensidad de los colores y la luz creada con ellos, se logra capturar los espacios que más resaltan en el cuadro, y también por medio del difuminado de los colores logra vislumbrar el alejamiento de las cosas. Claro está, sin olvidar el uso de éstos con la perspectiva, pues Velásquez por medio de un conjunto de perspectivas logra capturar la atmosfera que lo rodea por un instante, logrando la sensación de que se tratara de una fotografía.

La primera de las perspectivas es la lineal, la cual logra guiar nuestra vista hacia el fondo; es la perspectiva otorgada por Alberti. Esta perspectiva permite que la posición de cada objeto del plano, sea proporcional a los otros objetos de los planos. Gracias a esta perspectiva se trabaja con espacios donde hay líneas rectas y paralelas, las cuales se cortan en algún punto infinito en la representación.

La otra perspectiva que se encuentra es la aérea, que representa la difuminación progresiva de los contornos la degradación de los colores en el acercamiento y alejamiento de distancias.

La posición de los puntos de fuga de estas perspectivas depende de una división que se le dio al cuadro, teniendo como referente las proporciones y forma de la cabeza humana, ya que esta se encuentra conformada por la primera figura rectilínea, el isopleuro, que es el triángulo equilátero. El triángulo equilátero se asemeja a las medidas del cuadro de *las meninas* según lo expuesto por Sáseta, "Las medidas del cuadro, según el catálogo del museo del Prado, son de 276 cm de ancho y 318 cm de alto. Traducidas al sistema antiguo y redondeado según la metodología explicada: 10 pies de ancho por 11 ½ pies de alto. La proporción entre el ancho y el alto del cuadro es similar a la proporción entre la altura y el lado de un triángulo equilátero" (Sáseta, 2011, pág. 90)

No solo hay que tener en cuenta que la estructura base para la composición de la pintura es un triángulo equilátero, sino también, que es a partir de esta figura que se logra determinar los puntos de fuga. Pero todo parte en que el método utilizado por Velásquez para dividir la cabeza que esquematiza la composición y contiene el triángulo equilátero, es el mismo método según Sáseta utilizado por Luca Pacioli para dividir un rectángulo que circunscribe isopleuros en seis partes iguales.

> Esta operación sugiere un método para situar el horizonte en el cuadro, la línea horizontal que pasa por el punto de fuga. Dividiendo la altura del cuadro en doce partes y tomando cinco de estas partes se halla la altura del horizonte. Medida desde el borde inferior del cuadro: cuatro pies y 9 pulgadas y media, (enigmática altura, la altura de los ojos de una persona de 1,45 metros de estatura aproximadamente, ¿los ojos de la reina?). La línea vertical que pasa por el punto de fuga es el eje central de la puerta,

que a su vez divide en cuatro partes la pared del fondo. así que la posición del punto de fuga en el cuadro se sitúa a 5/12 de la altura del cuadro y en la línea que pasa por el centro de la puerta, debajo y cerca del codo de nieto Velázquez, aposentador de la reina (Sáseta, 2011, pág. 90).

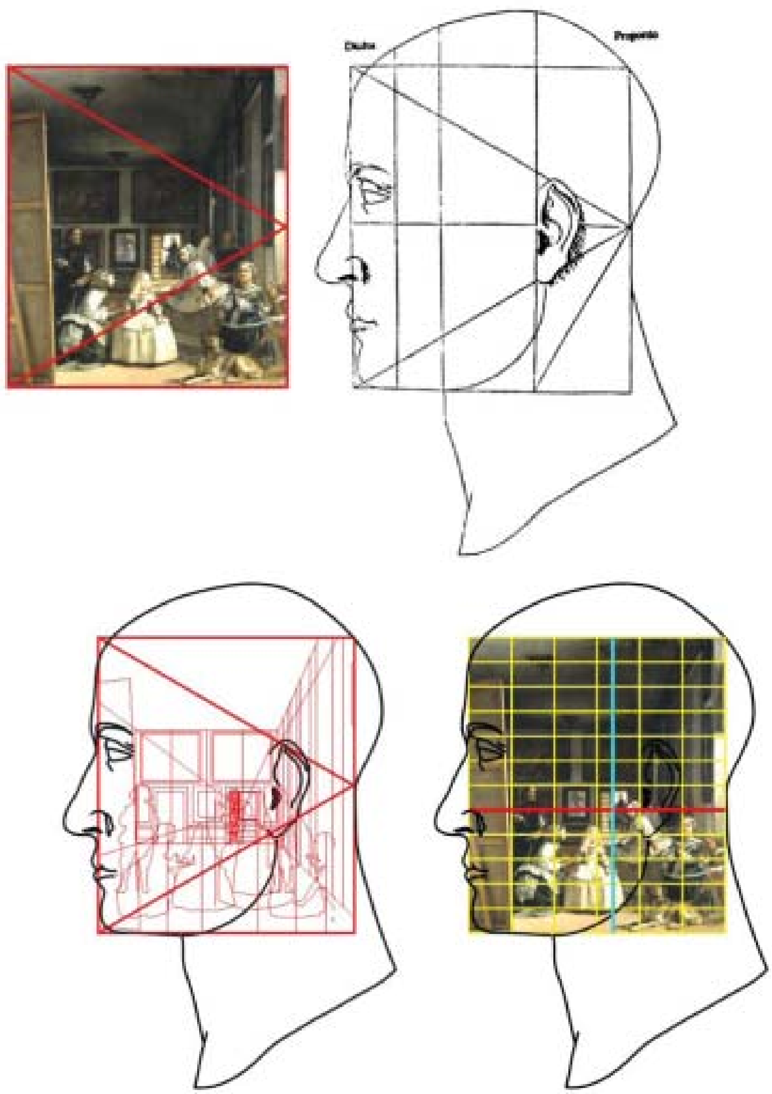


Ilustración 33. División de las meninas. Tomado de (Sáseta, 2011)

El segundo punto de fuga se encuentra situado el vértice del triángulo, que da referencia a una ventana en la pared lateral que permite la penetración de un foco de luz, que ilumina la sala. Es de admirar como esta majestuosa obra nos incorpora en la representación, pues a través de algunos elementos matemáticos en la composición el artista logra crear una de las más grandes obras de arte.

3.2 Dalí y la cuarta dimensión

Dalí logra ser un gran representante del hiperrealismo. Las obras de este artista poseen una gran influencia de los adelantos científicos del siglo XX, y de grandes pensadores. Si se detalla a fondo cada una de sus obras, se comprenderá que la obra de este artista se ven influenciadas fuertemente por la física. Pues la física hace parte de la ideología que impregna cada obra de Dalí. La más grande influencia la obtiene de Albert Einstein con su nueva forma de entender la realidad, *la teoría de la relatividad*, al igual de teoría de física cuántica según lo expuesto por Carmen Ruiz.

> La nueva ciencia propone un mundo donde no existe el determinismo, donde las partículas pueden encontrarse en dos lugares al mismo tiempo, donde la identidad de los objetos se crea con el mismo acto de la observación". Son conceptos difíciles de entender pero abiertos a la imaginación. Son unas ideas tan estimulantes que se convertirán en un tema recurrente en el laboratorio de creación surrealista y, por lo tanto, de sus creaciones experimentales. Según Gavin Parkinson: Dalí estaba fascinado por la teoría de la relatividad porque ofrecía la idea que la realidad no podía reducirse a un único flujo (Ruiz, 2010, págs. 5-6).

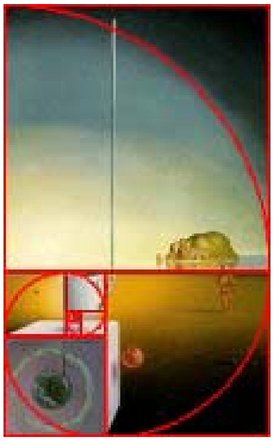


Ilustración 34. Dalí

Aunque la física ejerce gran influencia en el pensamiento de este artista, las matemáticas no se quedan atrás. Dalí llevó a cabo en sus obras un extraordinario desarrollo de las matemáticas. Como los maestros clásicos, logra aplicar el conocimiento científico al equilibrio de las composiciones. En especial, gracias a los consejos del matemático húngaro Matila Ghyka, obtuvo un gran dominio de la Regla Áurea, una proporción que como vimos anteriormente ya era conocida por los griegos. Es el caso del cuadro "Semitaza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud" (1945) donde una espiral áurea controla toda la composición. La proporción aurea es utilizada constantemente por el artista en sus representaciones.

Ilustración 35. Dalí. Corpus hipercubis.Oleo sobre lienzo, dimensiones de 1.94 cms. x 1.24 cm

Aunque existe una pintura que logra ser emblemática al escapar del ideal de representación de los artistas, pues Dalí logra ir más allá del uso técnico de las matemáticas y las incorporó como forma de expresión artística. Usó figuras abstractas como el cubo, la esfera o el dodecaedro, junto con otras casi inéditas en arte, como el hipercubo, un objeto de cuatro dimensiones. Dalí se interesa, al igual que los artistas renacentistas, en representar el espacio tridimensional de la realidad, teniendo en cuenta aspectos matemáticos, y elementos geométricos que le permiten la construcción de la perspectiva. La imaginación de este artista no se satisface por la representación fidedigna de la realidad o del espacio tridimensional en un plano bidimensional, pues este, escapa de todo lo planteado por los artistas al pretender exponer una cuarta dimensión en sus representaciones. El cuadro emblemático en este sentido, es el cuadro definido por Dalí como *un sensacional cuadro, un Cristo explosivo, nuclear e hipercúbico, un trabajo metafísico*, mencionado anteriormente, “La crucifixión” (1954) o “Corpus Hypercubus”. Este cuadro se encuentra compuesto de un hipercubo desplegado que nos permite ver su composición en una cruz en la que el artista posiciona a Cristo, Las visiones de este cubo no nos son posibles ya que en nuestro mundo estamos sujetos a las tres dimensiones por lo que solo podríamos ver parcialmente el cubo. Dalí es consistente de esto por tanto nos ofrece una proyección de los puntos del hipercubo en cuarta dimensión a una tercera dimensión representada por ocho cubos unidos por sus caras , su desarrollo tridimensional se puede observar en éste cuadro en la estructura de la cruz. Es eminente la fascinación de Dalí por combinar su técnica con el conocimiento matemático.

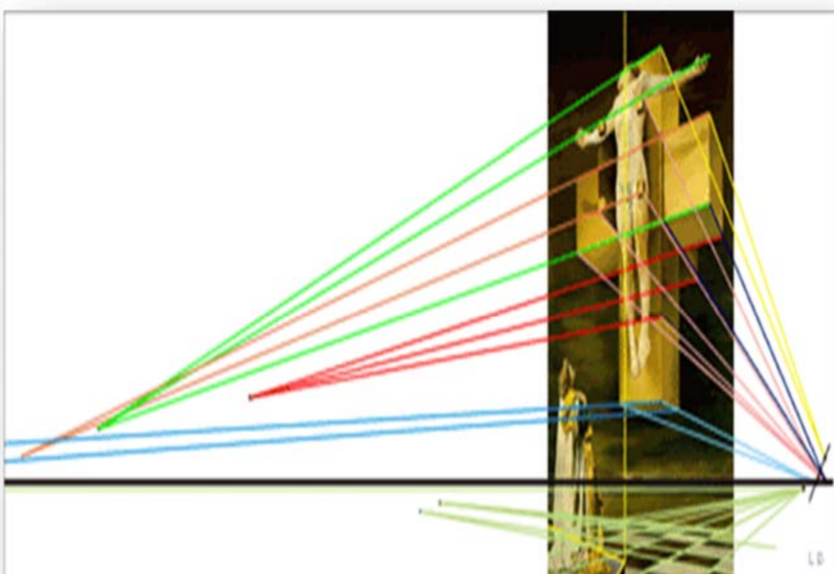
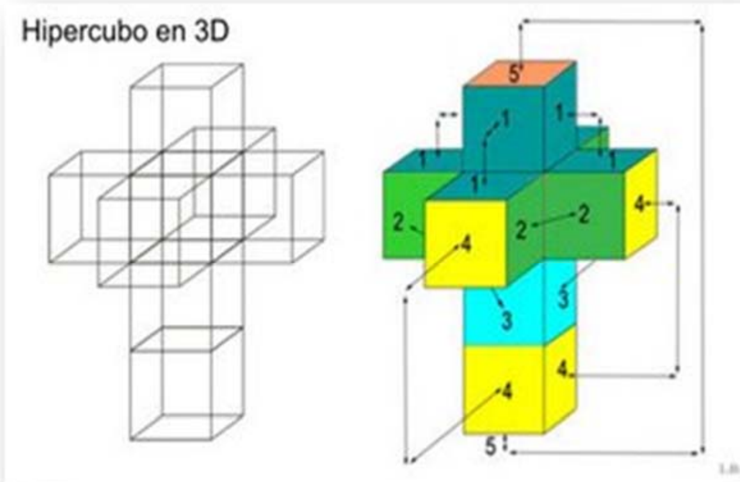


Ilustración 36. Cristo en cuatro dimensiones

Se puede decir que nos encontramos ante una de las obras más expresivas, hermosas e impactantes jamás realizadas por ningún pintor. En este cuadro se ve el uso de la perspectiva, son varios los puntos de fuga utilizados por el artista para representar esta obra. Es notable el esfuerzo requerido por parte del artista para la construcción del hipercubo en una tercera dimensión, como se logra observar, fueron necesarios diferentes puntos de fuga para la construcción del cuadro. Al fondo se encuentra un paisaje en el que se sitúa la línea de horizonte en la que, según Alberti, deben converger los puntos de fuga.

El artista establece trasformaciones geométricas, pues representa los supuestos clavos en forma de pequeños cubos, equidistantes entre sí y flotando. Debajo de éste, se encuentra Gala mirando fijamente. Ella se encuentra sobre el piso embaldosado semejante a un tablero de ajedrez pero con la sombra de la cruz reflejada en los cuadrados pintados de negro dándole una dimensión dual.

Dalí hace uso de los principios topológicos y de traslación matemáticos para representar algunos de los aspectos más profundos del ser humano denominados en el estética surrealista además, utilizo en gran medida la teoría de las catástrofes del francés Rene Thom, como medio de representación de los distintos tipos de infinitudes de una manera surrealista. Lo más llamativo del trabajo de este artista es que logra en gran medida otorgar algunos elementos a través de sus obras que son recogidas por los científicos años después, un claro ejemplo es el hipercubo, pues Dalí con su dibujo logra adelantarse casi veinte años a la representación matemática establecida por Thomas Banchoff que en 1975 publicó un artículo en el Washington Post ilustrado con la obra de Dalí.



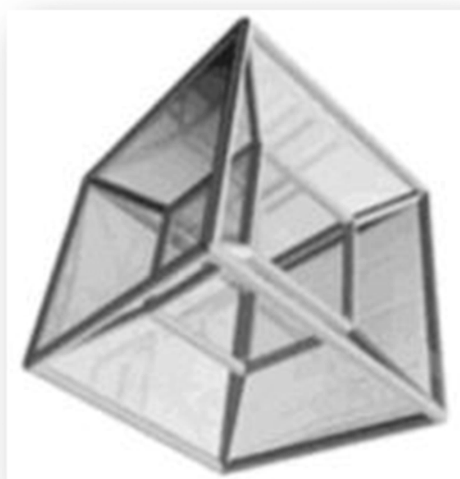


Ilustración 37. Representación tridimensional y tetradimensional.

.

3.3 El espacio matemático de Maurits Cornelius Escher

Maurits Cornelius Escher nació en 1898 en Leeuwarden, Holanda. Logra formalizar sus estudios en artes decorativas, aunque no logró ser considerado como un artista autentico en los inicios de su carrera. En 1924 vivió en a Ravello, donde conoció a su mujer, Jetta Uniker, con la que casó en 1924 marchando a vivir a Roma. En 1926 nació su primer hijo y hasta 1935 viajó y vivió por toda Italia, principalmente por el Sur. En este año visitó Granada donde estudia los ornamentos de la Alhambra que tanto le habían impresionado en un viaje anterior, los cueles logran impulsar en gran medida el trabajo y el interés de este artista por las matemáticas. En 1937 su trabajo toma gran fuerza y su trabajo logra ser solicitado por muchos. En el año 1941 se refugia en Holanda, donde su producción fue más profusa. En 1970 se trasladó a una residencia de artistas en el Norte de Holanda y allí falleció en 1972.

El arte de Escher fue ser, en gran medida, por el mundo artístico, pero fue acogido exuberantemente por matemáticos y físicos, pues logra ser referenciado en diferentes publicaciones científicas. En 1937 su arte se caracteriza por el uso de la simetría y la perspectiva, la continuidad y el infinito. Estos temas los refleja en gran medida en sus obras, específicamente aborda las siguientes temáticas: primero, la estructura del Espacio; segundo, estructura de la Superficie (partición de la misma); y tercero, Proyección del espacio tridimensional en el plano.

La Estructura de la superficie se logra vislumbrar en los cuadros Escher por medio de los teselados; éstos logran ser divisiones regulares que se hacen en el plano, llamados mosaicos, los cuales son arreglos de formas cerradas que cubren completamente el plano sin ocultar uno al otro o dejar hueco alguno. La gran mayoría de veces las formas que componen los mosaico son polígonos regulares o formas similares, como las baldosas cuadradas de los pisos. Sin embargo, Escher se sentía fascinado con todo tipo de teselación regular o irregular. Un elemento especial de estos teselados es lo denominado como metamorfosis, el cual permite que las formas cambien y se convienen entre sí, como lo muestra este cuadro *reptiles,* que es obtenido a través de una teselación hexagonal. Este tipo de cuadros son tomados como referencia de los mosaicos de Alhambra.

Ilustración 38. Escher, reptiles 1943.

Escher logra obtener sus mosaico a partir de trasformaciones como reflexiones, traslaciones y rotaciones de polígonos regulares e irregulares, esto le permite gran variedad en los patrones. Logra inscribir en los sólidos, otras formas como animales, pájaros y otras figuras. Estas distorsiones tenían que obedecer tres, cuatro, o seis veces la simetría del patrón principal con el fin de preservar la teselación. Escher no solo trabaja teselados con sólidos regulares e irregulares sino que también trabaja “la intersección de estos sólidos”, lo cuales se logran encontrar en una de los más interesantes grados en madera de este artista, estrellas.

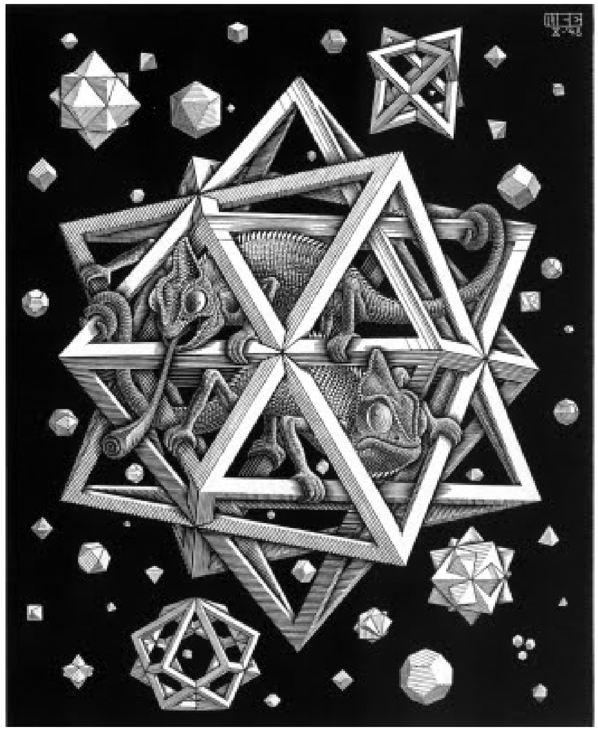


Ilustración 39.Escher, estrellas.

Los sólidos construidos e interceptados van des octaedros, tetraedros, cubos y, entre otros. Este artista no se limita simplemente a dibujar un montón de formas geométricas, pues en el cuadro la estrella coloca camaleones al interior del poliedro de tal forma que nos concentremos y veamos con otros ojos las representaciones. Sin duda, éste logra ser otro motivo de admiración por parte de matemáticos a la obra de Escher, tan sólo un ejemplo de percepción de frescura se encuentra en la parte posterior de todo gran descubrimiento matemático. Escher no solo se satisface con interceptar sólidos en sus representaciones, sino que también intercepta planos, juagando con la posibilidad de la representación del plano tridimensional en la representación bidimensional.

Su grabado en madera intercesión de Tres planos muestra la preocupación que desvelo a los artista desde tiempo atrás. El poder representar en un plano dimensional una representación tridimensional que la mente pueda discernir.

Estos elementos ya empiezan a ser parte de lo denominado como estructura del espacio.Entre los espacios representados por Escher se encuentra el espacio hiperbólico, el cual fue inspirado por H..S..M. Coxeter (1957) al exponer en su artículo un enlosetado de Poncaire del plano hiperbólico.[61]Escher comprende que la propiedad métrica que caracteriza en mundo de Poincare es que todo se va disminuyendo a medida que se acerca al borde y que todo va aumentando a medida que se va alejando, en sí, nunca se podrá llegar a ese borde por que será un proceso infinito en el que entrara al ir disminuyendo cada vez más y más.

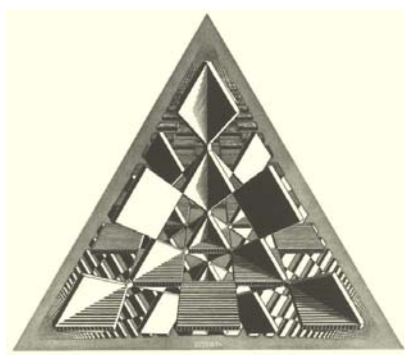


Ilustración 40.Escher, intercesión de tres planos.

Un ejemplo claro, es el cuadro ángeles y demonios hiperbólicos, el cual se asemeja enormemente a la geometría hiperbólica expuesto por Poncaire en su enlosetado.

[61] Superficie no euclideana en la que por cada punto pasa una infinidad de rectas paralelas a una dada.

Ilustración 41. Escher, ángeles y demonios hiperbólicos. 1960.

Ilustración 42. Escher, Möbius Strip II.

Escher no solo utiliza las geometrías euclidianas con sus teselados, y no euclidianas, con su geometría hiperbólica, sino que también utiliza aspectos visuales de la topología. Logra ocuparse de esos aspectos de la topología que permite que ciertas propiedades de un espacio no se distorsionen al estirarse o doblarse los espacios, sin generar agujeros o romperse. La cinta de Möebius es quizás el mejor ejemplo, Escher logra realizar gran variedad de representaciones de la misma. La más conocida e la recorrida por unas hormigas, que caminan por un solo lado de la banda, dando las ilusiones que caminaran por los dos lados de la misma.

En sí, Escher logra juagar fuertemente con el conocimiento matemático para otorgar una estética en sus representaciones, es de aclarar que el uso que da este artista es de manera muy empírica, pero es notable que aunque muchas veces no entendiera el valor matemático que tenía sus obras, no se limitó en sus representaciones. Pues en éstas se logra ver el uso de la perspectiva por parte del artista, conceptos de infinito actual en sus representaciones, se habla de una lógica del espacio a representar que invita adentrarse en un mundo inimaginable pero posible en la imaginación del artista. Es claro que las matemáticas constituyen ese elemento que motivó al artista a ser una persona creativa y que hoy en día tenga la aceptación y apreció por parte de matemáticos y físicos, y de los artistas.

4. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han retomado algunas concepciones del arte, con el propósito de identificar algunos elementos que nos permitieran comprender más afondo la relación arte-matemática. Se lograron desentrañar algunos aspectos recónditos de esta relación para identificar algunos elementos primigenios que llevaron a los artistas a incluir las matemáticas en sus trabajos pictóricos. Uno de esos aspectos tiene relación con la incansable búsqueda por cuantificar lo bello.

Como se ha logrado observar, en diferentes periodos de la historia, la matemática se ha encontrado por así decirlo al servicio de la expresividad artística. De ahí que se puedan identificar en las obras de arte unos saberes matemáticos; algunos evidentes y otros secretos, que conforman, proporcionan, y dan significado a las intenciones del artista y que al mismo tiempo contribuyen a explicar el emotivo y al misterioso emanar de la belleza. Cuando hacemos mención a los «saberes», no pretendemos limitarnos simplemente a la aplicación al Arte de la Matemática útil o práctica de los artesanos, como lo expusieron los artistas renacentistas, sino que, de igual modo, nos referimos a esos aspectos filosóficos de las Matemáticas que han influido sobre el Arte. Este es el caso de la antigüedad cuando los artistas adhieren a las concepciones pitagóricas de proporción y armonía, como la esencia de la belleza.

Es claro que desde la antigüedad, la matemática ha jugado un papel importante para los artistas en el desarrollo de sus obras y su búsqueda por representar su ideal de belleza. Eso se nota en la concepción misma de filósofos antiguos como Aristóteles y Platón, y también en filósofos modernos como Kant y Hegel. Aunque hay variaciones se nota, en unos y otros, la necesidad de identificar las leyes que gobiernan la estética. Claramente en los antiguos, hay una subordinación de lo estético a la concepción pitagórica de orden y proporción.

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, en cada periodo los artistas trabajan con el orden y la proporción en las representaciones, aunque en algunos casos sea de una manera muy "sutil" como en el Medioevo .Periodo que, como vimos, se caracteriza por la pérdida completa de la proporción y la representación del espacio. Pero es imposible dejar de un lado como se hizo implícito el uso de pentágonos regulares para la creación de armaduras que estructuraban la obra pictórica, además les permitían exponer el ideal divino de belleza.

Con todo lo plateado podría pensarse que lo bello puede ser susceptible de medición, ya sea desde éste punto de vista, la matemática por así decirlo se presenta como un mediador a lo largo que la historia, al ofrecer un elemento que permita al hombre poder plasmar y representar algo tan etéreo como es la belleza. La cual no logra ser eterno y desde la antigüedad el hombre logra ser consciente de que aquello que consideran bello se puedo ir evaporando con el paso del tiempo. Es aquí donde surge la pregunta ¿si es posible una teoría de cuantificación de la belleza?, pues uno puede cuantificar magnitudes, pero parece imposible cuantificar aquellos aspectos más trascendentales del hombre, como la estética.

Encontrándonos en este punto, es necesario recurrir a Birkhoff, matemático que al igual que Pitágoras, logra observar que la matemática como una vía para el acercamiento y entendimiento de lo que es lo bello. En sí se vio atraído por la estructura formal de la música occidental, para ofrecer lo que considera "la teoría matemática general de la bellas artes", sustentando que los valores estéticos y algunos otros elementos trascendentales del hombre pueden ser susceptibles de medición.

Birkhoff no pretende otorgar un sistema acabado en el que se sistematice de forma cuantitativa lo que es la belleza, “sino que, simplemente pretende con su teoría invitar a los matemáticos a examinar que es eso de lo bello y lo bueno, pues filósofos, teólogos, escritores de estética y otros expertos llevan más de 2000 años tratando estos asuntos sin ningún avance considerable”(Birkhoff, 1969). La visión expuesta por Birkhoff logra ser muy compatible con la visión de este trabajo, en el sentido de que el objetivo central era exponer tendencias e ideologías que han motivado a los artistas a recurrir al uso de las matemáticas para expresar con ella, por así decirlo, sus ideales de belleza y con ello un elemento motivador que involucre el uso de las matemáticas con otras parcelas del conocimiento que parecen completamente ajenas. Esto es mejor expuesto desde el punto de vista de Birkhoff, quien nos aclara que el sentimiento estético de las percepciones auditivas y visuales posee un sentimiento de valor que debe ser diferenciado de las afecciones sensuales, emocionales, morales o intelectuales que muchas veces involucramos para dar un juicio.

Los objetos estéticos se encuentran clasificados de dos formas; los que se encuentran en la naturaleza y los que son obras de los artistas. Según Birkhoff, las obras de arte son la libre expresión de ideales estéticos, y es por eso que las obras de arte poseen un mayor valor estético.

Birkhoff determina que la expresión estética se ve integrada por 3 fases sucesivas: primero, el esfuerzo de atención requerido al acto de percepción, el cual aumenta en proporción a la complejidad (C') del objeto; segundo, recompensa del esfuerzo es el sentimiento de valores o cuantía estética (C); por último, observación y determinación si el objeto se caracteriza de cierta armonía u orden (O) logra ser necesario en el efecto estético.

Para Birkhoff la experiencia estética se puede entender como una relación armónica de variables posiblemente cuantificables de tal modo que:

$$C = \frac{O}{C'}.$$

Es decir la cuantía estética logra ser obtenido por la razón entre el orden (O) y la complejidad del objeto (C'). Esta teoría, Birkhoff se fundamenta en factores físicos y psicológicos que permiten identificar estas diferentes variables.

Birkhoff determina que algunos elementos del *orden* resultan de una propiedad física, como por ejemplo la simetría de figuras geométricas. El orden, se encuentra en la repetición, similitud, contraste, simetría, balance y secuencia. *La cuantía estética*, es de índice cuantitativo en el hecho de la comparación, no se puede comparar un jarrón con una melodía es necesario la equidad. *La complejidad,* es determinada como la asociación y elementos ya sea de orden formal o connotativo que interactúan con el individuo.

Las asociaciones por técnicas visuales o auditivas son denominadas formales, mientras que a las demás se les denomina connotativas. Es por eso que Birkhoff basa su teoría en los elementos de orden formales, pues los elementos de orden connotativos son de una inconcebible variedad y es por eso que es casi imposible hacer un análisis que permita cuantificar el valor estético de estos elementos. En si la hipótesis de la cuantía estética se encuentra determinada "por la densidad de las relaciones de orden en el objeto estético".

Si tenemos en cuenta lo expuesto anteriormente podemos atrevernos a determinar, de igual manera, que tanto la belleza de las obras de arte, al igual que la belleza física o de algunos otros aspectos pueden ser descritos matemáticamente. Esta descripción no implica que lo bello se encuentre predeterminado en una fórmula general, de tal suerte que no cuenten los valores sociales o culturales. Estos aspectos nos llevan a argumentar en favor de una construcción social de lo denominado bello. Pero eso no significa que podamos hablar de una belleza objetiva; bien sabemos que los medios de comunicación y las ideologías dominantes nos moldean ideales y formas de pensar que nos van imponiendo moldes estéticos muy convenientes para la sociedad de consumo.

De esta manera, podemos decir que las matemáticas constituyen un auxiliar de apreciación, que nos explica o nos ofrece pautas de cómo pudo ser concebida la composición.

Lo estético, logra ser algo que siempre ha llamado la atención porque hace parte de los hombres. El error está en que se ha venido dejando a un lado, pues el profesional, el ingeniero, el matemático, etc. se han venido olvidando de estos aspectos, y solo se educan en las técnicas propias de su disciplina. Solo se dedican a trabajar una parcela del conocimiento, no desde un punto de vista integral que bien podría hacerse desde la misma disciplina mirando lo político, lo estético, lo ético, que son cosas que son parte del hombre. Es decir, que el hombre se ha metido tanto en su campo de acción que en general no percibe que estos otros elementos también hacen parte fundamental de su vida.

Las anteriores ideas hacen, que el conocimiento se ha reducido a diferentes parcelas a las que solo tienen acceso aquellos expertos en el tema. Por tanto, no es raro que hoy en día el ciudadano común asocie las matemáticas a eruditos en el tema, o a algo totalmente abstracto y ajeno a su vida, por ello, nada tendrá que ver con aquellos aspectos tan trascendentales de la vida. Es decir, las matemáticas mismas en el entorno ideológico en el que se encuentran, no gustan al ciudadano común y corriente, la perciben como una disciplina fría alejada de su entorno poco significativo para él.

La historia nos revela los vínculos recíprocos entre matemáticas, filosofía, arte y, en general, cualquier manifestación de la cultura; constituyéndose en el lugar de encuentro y punto de convergencia entre las diversas disciplinas matemáticas y las múltiples disciplinas llamadas humanísticas y artísticas. Aunque claro está que el énfasis es la relación arte–matemática, es imposible dejar de lado valores sociales, epistemológicos para poder comprender desde lo más recóndito esta relación, que logra fundamentarse en la búsqueda de la belleza como fue expuesto en este trabajo. La ignorancia o el desentendimiento a conocer este terreno compartido han alimentado actitudes en las matemáticas que conducen a su aislamiento cultural y social y por así decirlo la atrofia de la educación matemática. Pues estos temas logran ser totalmente olvidados en la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Es probable que esa sea una de las tantas razones por lo que existe esa relativa aversión hacia las matemáticas. Para algunos jóvenes puede llegar a ser un poco abrumador intentar relacionar la matemática con el arte, pues ambos, desde su punto de vista tienen posturas aparentemente diferentes El arte, como actividad humana, logra estar relacionada a la belleza, mientras que las matemáticas al ofrecerse tan alejada de las parcelas del conocimiento logran ser acogida como una disciplina fría y deshumanizada.

Un trabajo como éste, puede ser un elemento motivador para mirar que la matemática no solamente hace parte de la ingeniería, de la ciencia, sociología sino también de la estética, algo que está desde el punto de vista de lo lúdico. Por tanto, cuando hicimos nuestro trabajo de grado, quisimos mirar que el profesor, especialmente de media o básica puede obtener algunos elementos motivadores para aportar en la clase, claro está que nosotros estamos hablando en la tesis desde el discurso, pues sería pertinente proponer un taller o un curso que exponga de una mejor manera esta relación y su aporte pedagógico. Pero, realmente se nos escapa de las manos proponer esto, y lo posponemos hasta que el tiempo pueda estirarse un poco más.

Por otro lado cuando uno hace una tesis como ésta, se pretende que se comprenda que el arte puede ser un elemento motivador en la enseñanza de las matemáticas, y , a la vez, que las matemáticas puedan proporcionar elementos para apreciar la belleza de una manera que vaya más allá de la intuición. En este sentido se plantea que los artistas también deberían comprender que es necesario retomar gran parte de lo clásico en sus producciones, pues no basta solo tener en cuenta la teoría del color, de la luz, sino también la teoría de la proporción, por lo que uno está hablando de matemáticas.

Algo que no podemos dejar de lado es el hecho que se trata de un trabajo de grado en la carrera de Educación Básica, con Énfasis en matemáticas. Es un trabajo que se ha desarrollado en la línea de Historia de las Matemáticas y puede ubicarse en el tipo de estudios interdisciplinarios de corte histórico epistemológico. En este sentido es importante anotar tres aspectos determinantes de esta indagación. El primero tiene relación con la importancia pedagógica que, de manera implícita, puede desprenderse de esta actividad. Reiteramos que en contra de las ideologías imperantes de unas matemáticas descontextualizadas, podemos diseñar propuestas novedosas de intervención como la establecida en (Mariño, 2004). El segundo aspecto tiene que ver con los desarrollos matemáticos despegados a lo largo del trabajo. En particular la teoría de razones y proporciones, teoría de números y en especial el desarrollo de la geometría proyectiva, que abarca uso de los primeros intentos de uso del infinito actual en matemáticas. Es un hecho que la geometría proyectiva tiene sus inicios en las propuestas de los pintores renacentistas y su búsqueda de representar el espacio tridimensional en un espacio bidimensional. El tercer aspecto tiene que ver con los aspectos interdisciplinarios que se manejan en el trabajo y que relaciona filosofía, arte y matemáticas. Estas particularidades generales aparecen dilucidadas en el primer capítulo, que de alguna forma, le da un carácter especial a este trabajo por cuanto es un tema que no ha merecido un espacio en los diferentes trabajos de tesis que se revisaron.

La relación arte matemática y su posible incidencia en la educación matemática: enseñanza de las matemáticas y la geometría, se encuentra delimitado en cómo se puede contribuir al desarrollo de conceptos matemáticos y geométricos, como; espacialidad, magnitudes, teoría de razones y porciones, y la visualidad. Las obras de arte no solo se presentan como una futura herramienta que permite contribuir a la enseñanza de la geometría sino que también permite un desarrollo de la estética y visualización de los estudiantes.

La forma en que la matemática está siendo tratada en la mayoría de las escuelas sugiere que es algo complejo y difícil de entender, pues a pesar de la infinidad de propuestas existentes para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en la escuela, muy a menudo simplemente se enseña sistemáticamente a resumir ejercicios y la resolución de problemas matemáticos metódicos y sencillos. En gran medida el rechazo existente por parte de los estudiantes podría decirse que logra ser por la manera que es presentada la matemática en la escuela. Es necesario que los jóvenes entiendan que la matemática no sólo se resume a la enseñanza de los números y ecuaciones, pues hay más posibilidades. Debido a que, las matemáticas van más allá, como el desarrollo de la creatividad, el razonamiento, la visualización, que logran ser un enlace entre diferentes áreas del conocimiento, esenciales para la educación básica.

Una propuesta para este propósito actual de enseñanza de las matemáticas se puede encontrar en la relación de las matemáticas con el arte, es decir, la educación y el arte. Según Duarte Jr. (2007) arte y la educación "[...] no sólo significa incluir el arte currículos escolares [...] tiene que ver con un modelo educativo basado en la construcción de un significado personal para la vida, es decir, apropiado para cada alumno "(p.77).

En este sentido, algunos de los trabajos de investigación en el campo de la enseñanza de las matemáticas en relación con el arte que se han desarrollado. Podemos mencionar la investigación brasileña: (Alves, 2007) que desarrolló la disertación: titulada "Más allá de la mirada: una matemática enlace comer arte”.

Si, según lo informado por Alves (2007), las matemáticas "[...] asusta mayoría de los estudiantes porque ellos no entienden lo que significan los conceptos" (p.24), el arte puede ser un espacio en el que la adquisición de conocimiento matemático sea significativo, teniendo en cuenta las motivaciones que llevaron a sus creaciones, sus usos, y sus aplicaciones. Además, según Alves (2007), en el arte existe un gran bagaje cultural, en el que la imagen de la metamatemática podrá ser visible a través de combinaciones de colores, líneas y formas que se han desarrollado a lo largo del siglo. Según Alves es necesario introducir las imágenes en el aula, pues así se trae de regreso el pensamiento geométrico que logra ser abandonado en gran medida en favor del pensamiento algebraico.

No se pretende desterrar el pensamiento algebraico para que predomine el pensamiento geométrico, todo lo contrario, la relación arte matemática permite que estos pensamientos sean explorados en la educación matemática. Pues aunque no lo mencionamos en profundidad en este trabajo, la aritmética hace parte de las obras de arte. Que nos hayamos basado en los procesos geométricos y su influencia a lo largo de la historia, no significa que no exista otra vía de desarrollo a lo largo de la historia de la relación arte matemática con la influencia fuerte de la aritmética, que se dio fuertemente podría decirse explícitamente en la música.

A lo largo de este trabajo vemos como esta relación se va haciendo cada vez más estrecha, pues las matemáticas se vuelven indispensables en la representación de los ideales de cada época. Respecto a esto, hay muchos trabajos que hacen uso de las artes visuales como medio de fomentar aprendizaje de los estudiantes. Otros consideran el arte como ilustración, o como una aplicación del conocimiento matemático determinado, o incluso para la contextualización histórica de la invención de la matemática y geométrica. Nosotros lo vemos como una futura herramienta didáctica la cual se puede ir construyendo a lo largo de otros estudios.

BIBLIOGRAFIA

Alvarez, C., Martinez, R., & Torres, C. (1996). *De la pintura.* (Martinez, & Rafael, Trads.) Mexico: Servivios editoriales de la facultad de ciencias, UNAM.

Alves, M. (2007). *Muito além do olhar: um enlace da matemática com arte.* Porto Alegre.

Aristóteles. (1964). *Obras.* (F. Samaranch, Trad.) Madrid: Aguilar.

Aristoteles. (1997). *Metafisica.* (V. G. Yebra, Trad.) Madrid: Editorial Gredos.

Azúa, R. E. (s.r.). *Breve Semblanza de la Proporción Áurea. laberintos e infinitos.* Obtenido de http://laberintos.itam.mx/files/137.pdf. .

Bedoya, E. (2011). *Aproximaciones a lo bello en platón.* Obtenido de http://arielenlinea.files.wordpress.com/2011/12/54_platon.pdf).

Betancurt, A. M. (1977). *El Taller Educativo.* Bogota: Coperativa Editorial Magisterio.

Biemel, W. (1962). La estética de Hegel. 149-162. Colonia: Universidad de Colonia.

Birkhoff, J. (1969). Matemáticas de la estética. En J. Newman, *Sigmma el mundo de las matemáticas.* Barcelona: Grijalbo S. A.

Bonell, C. (2000). *la divina proporcion : las formas geométricas.* México, D.F: Alfaomega.

Bouleau, C. (1996). *Tramas: La geometrií secreta de los pintores.* Madrid: Ediciones Akal.

Bueno Gómez, N. (2008). Del concepto kantiano de juicio a la reflexión estética actual. *circulo hermeneutico*, 5-12.

Cardona, A. (2006). *La geometría de Alberto Durero.* Bogotá: Fundación Universidad Jorge Tadeo Lozano.

Cordero, T. (sf). *La estética kantiana.* Recuperado el 2013, de http://www.ugr.es/~inveliteraria/PDF/Kant.pdf.

Douglas, J. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemáatica Venezolana*, 87-103.

Egg, A. (1986). *Hacía una pedagogía autogestionaria* . Buenos Aires: Editorial Humanitas.

Emmer, M. (2005). La perfección visible: matematica y arte. *Artnodes*, 1-10.

Euclides. (1999). *Elementos.* Madrid: Editorial Planeta-DeAgostini, S. A. (De la Biblioteca clásica Gredos).

Extremiana Aldana, J. I., Hernández Paricio, L. J., & Rivas Rodríguez, M. T. (2005). La Divina razon de la Belleza. *Sigma*, 145-178.

Fahré, L. (1949). Los valores estéticos en la filosofía aristotélica. *Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía* (págs. 1445-1451). Argentina: Mendoza.

Franco, C. (2003). Tesis arte geometrico. Granada: Universidad de Granada.

Grimaldi, N. (s.f.). *El estatuto del arte en platón.* Recuperado el 3 de mayo de 2013, de http://hdl.handle.net/10171/2099

Hodgson, M. L. (1994). *Geometría y diseño de la realidad sensible,Tesis doctoral.* San Cristóbal de La Laguna: Universidad de la Laguna.

Kant, I. (2004). *Critica del juicio.* (M. García, Trad.) Madrid: Espasa- Calpe.

Mansur, J. C. (2011). Belleza y formación en el pensamiento de Platón. *Conjectura*, 83-97.

Mariño, R. (2004). *La geometria en el arte y en el diseño.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Martinez, E. (2008). Matemáticas y arte en educación infantil. uno , 2008. *Uno*, 1-17.

Martinez, R. (1996). Leon Batista Alberti y el arte de lo visible. En *Leon Batista Alberti De la pintura* (págs. 29-51). Mexico: editoriales de la facultad de ciencias UNHAM.

Monsalve, B. (sf). La Belleza Vista Como Aconceptual En La Estética De Platón. *vereda.aula.ve*.

Mora, J. (2011). *Alberto Durero: Relación geometría y experiencia.* Cali: Universidad del Valle. Trabajo de Grado.

Núñez, R. M. (2012). La belleza y la divina proporción. *Aula abierta*, 77-87.

Ortigosa López, S. (2002). La educación en valores a través del cine y las artes. *Revista Ibero American*.

Panofsky, E. (1994). Durero como matemático. En J. Newman, *El mundo de las matematicas* (págs. 1992-2015). Barcelona: Sigma.

Peiffer, j. (2000). *De la medida.* Madrid: Ediciones Akal.

Platón. (1969). Banquete. madrid: Aguilar S. A de Ediciones.

Platón. (1969). Timeo. Madrid: Aguilar S.A de Ediciones.

Pozo Castillo, Y. (2006). Belleza, mimesis y arte en la poética de Aristóteles. *Revista cultural de cumanayagua*, 1-5.

Rábanos Faci, C. (2005). *Estética para historiadores del arte.* zaragoza: Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Rábanos Faci, C. (2005). Estética para historiadores del arte. zaragoza: Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Recalde, L. (2012). *Lecturas de Historia de las matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Ruiz, C. (2010). Salvador Dalí y la ciencia, más allá de una simple curiosidad. *Pasaje a la ciencia* , 4-13.

Sáseta, A. (2011). Las meninas. Magia catóptrica. La reconstrucción tridimensional del cuadro. *cuadernos de los amigo de los museos osuna*, 89-98.

Silver, D. (2012). *american scientist online*. Recuperado el febrero de 2013, de http://www.americanscientist.org

Sossa, F. (2002). Autonomía en la estética de Aristóteles. *A Parte Rei. Revista de filosofía*(22), 2-12.

Sossa, F. (s.f.). *A parte reí. Revista de filosofía.* Obtenido de http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/sosa30.pdf

Spinadel, V. (2003). La familia de números metálicos. *Cuadernos del CIMBAGE* (6), 17-44.

Tartarkiewicz, W. l. (1997). *Historia de las seis ideas: Arte, belleza, forma, creatividad ,mimesis, experiencia estetica.* Madrid: Edictorial Tecnos.

Thomas, K. (1978). *Diccionario del arte actual.* Barcelona: Editorial Labor, S.A.

Tolstoi, L. (1898). *¿Qué es el arte?* Biblioteca Digital Ciudad Seva.

Velasquez, F. (.-5. (2005). Matemática, arte y belleza. *Uno*, 1-5.

Zuleta, E. (2001). *Arte y Filosofia.* Cali: Hombre Nuevo Editores.