REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 1, 43-64

LO ARBITRARIO Y LO NECESARIO: UNA FORMA DE VER EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS[1]

DAVE HEWITT

Este artículo está constituido por tres partes que se publicarán en los tres números del séptimo volumen de la Revista EMA. Haciendo eco de la distinción filosófica entre lo necesario y lo contingente, el autor propone en esta primera parte una forma de ver el currículo de matemáticas. Lo que en esta disciplina se cumple de manera necesaria, puede ser encontrado, resuelto o desarrollado por algún estudiante. Lo que en ella es contingente o arbitrario, —lo que no tiene que ser como en efecto es— debe ser comunicado por alguien a todo estudiante, en aras de que éste pueda adoptar las convenciones y acuerdos que utiliza la comunidad para comunicarse

Comenzaré con una proposición:

> Si tengo que recordar…, entonces no estoy trabajando en matemáticas.

Continuaré con una anécdota.

> Katia tenía cuatro años cuando su madre, Bárbara, mencionó la ciudad de Nueva York durante la conversación con alguien.
>
> Katia: ¿Dónde está Nueva York?
> Bárbara: En los Estados Unidos.
> Katia: ¿Por qué?

Antes de seguir con la lectura, piense en lo que usted le habría respondido a Katia.

Cuando yo escuché este diálogo me sorprendió la simplicidad de la pregunta y la dificultad que experimenté para decidir cómo proporcionar una respuesta adecuada. Bárbara dio una respuesta que de alguna manera reflejaba mi sentir —"Porque así es". Otra manera de responder habría podido ser que quienes llegaron a esas tierras, procedentes de Inglaterra, decidieron

---

1. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, del original Hewitt, D. (1999). Arbitrary and necessary part 1: a way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics, 19* (3), 2-9. Agradecemos a David Pimm, el editor de *For the Learning of Mathematics* por haber autorizado la traducción al español y la publicación de este artículo en la *Revista EMA*.

darle ese nombre para recordar la ciudad de York, significativa para algunos de ellos. Desde el punto de vista de Katia, Nueva York podría estar en cualquier parte. No parecía haber razón alguna, en su concepto, para que este hecho fuera como es, y, en efecto no tiene que ser así forzosamente. Simplemente, es así. Katia habría podido obtener tal información de alguien que ya la tuviera, o por otros medios, como la televisión, un libro, o un mapa.

Me pasaría algo parecido si se me preguntara por el nombre de una persona que nunca he visto o sobre la que nunca he sabido nada. Si la persona está cerca de mí, puedo observarla y tratar de adivinar su nombre, en cuyo caso debo confirmar si mi conjetura es correcta. Para conocer el nombre de alguien tengo que ser informado al respecto e incluso en tal caso tengo que confiar en que se me dijo la verdad. Aun en el caso de tener esa confianza, aprenderme el nombre de la persona me costará algún trabajo que incluye el recordarlo y asociarlo con esa persona en particular. Tales cosas están en el ámbito de la memoria. Si quiero conocer el nombre de una persona necesito que se me informe cuál es y tengo que memorizarlo si quiero estar en capacidad de recordarlo algún tiempo después.

Puedo inventar un nombre para esa persona que nunca antes he visto; sin embargo, tendré dificultad para referirme a ella cuando me comunique con otras personas, ya que no compartimos el mismo referente. Por tanto, inventar tal nombre puede tener algún interés para mí, pero será de poca utilidad para comunicarme con otros. De modo que regreso a la necesidad de obtener la información del nombre de la persona y memorizarlo para usarlo posteriormente.

Una situación del campo de las matemáticas que puede ser equivalente a la anécdota de Katia, es la del siguiente diálogo, con respecto al cual se pide al lector que piense en la respuesta que daría, antes de continuar con la lectura.

Estudiante: ¿Cuántos lados tiene un cuadrado?
Profesor: Cuatro.
Estudiante: ¿Por qué?

La única razón de por qué un cuadrado tiene cuatro lados es que hace mucho tiempo se tomó la decisión de llamar ‘cuadrados’ a ciertos cuadriláteros que cumplen unas determinadas propiedades. No hay nada que obligue a que tales formas poligonales *tengan* que llamarse cuadrados —de hecho, en otras lenguas, las mismas formas se designan con otros nombres. Mirar cuidadosamente las formas geométricas no le ayuda al estudiante a saber el nombre de ellas, como tampoco se revela el nombre de una persona con sólo mirarla. Todos los nombres que se usan en matemáticas y en cualquier otro dominio son asuntos acerca de los cuales es necesario informar a los estudiantes y parte del papel del profesor es hacer esto.

Una vez que los estudiantes han sido informados del nombre de una forma geométrica, necesitan realizar algún trabajo adicional: deben memorizar la palabra y asociarla con formas que tengan las mismas propiedades. Es típico del ámbito de la memoria que, por ejemplo, no sólo se tenga que memorizar una palabra sino también asociarla con las cosas apropiadas. Muchas veces, los estudiantes recuerdan con éxito una palabra pero no han hecho la asociación apropiada. Por ejemplo, un estudiante puede no llamar cuadrado a la forma de la Figura Nº 1 porque las propiedades que asocia con *cuadrado* no incluyen la posibilidad de que los lados no sean horizontales o verticales.

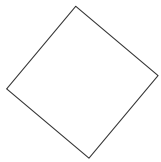


Figura Nº 1. ¿Un cuadrado?

Incluso los nombres asignados sistemáticamente tales como 'octágono', 'heptágono', 'hexágono', que siguen ciertas reglas y que se generan a partir de raíces lingüísticas particulares, no conducen al estudiante a *estar seguro* de que un polígono de cinco lados deba llamarse 'pentágono', como lo muestra el ejemplo del 'cuadrado' ya que no se acostumbra a llamar 'tetrágono' a un polígono de cuatro lados. Puesto que los nombres se acuerdan social y culturalmente, entonces alguien que haga parte de esa cultura tendrá que informar al novato si sus conjeturas —muy sensatas— sobre los nombres 'pentágono' y 'tetrágono' corresponden efectivamente a los nombres aceptados dentro de esa cultura y por tanto se pueden considerar 'correctas'.

LO ARBITRARIO

Los estudiantes pueden percibir que los nombres y las etiquetas son arbitrarios en el sentido de que no hay razón alguna por la cual algo *tenga* que llamarse con un nombre particular. En efecto, no existe tal razón. Ginsburg (1977) presenta una transcripción de una conversación con una niña de segundo grado, Catalina.

> Yo: ¿Por qué escribes un 13 así, con un 1 seguido de un 3?
>
> C: Porque hay un 10, ¿sí? Entonces se pone sólo 1. No sé por qué se hace así. Se podrían poner 10 unos y un 3. 13 es como 10 y 3 por eso se pondría 103, pero sólo se pone 1 por el 10 y 3, por los 3 extra que se agregan al 10. (p. 88)

Catalina muestra una consciencia[2] de que la forma simbólica en que se escriben los números es una elección que no tiene que ser obligatoriamente como es. Incluso, ella ofrece una alternativa. Los nombres (por conveniencia para la escritura, incluyo bajo esta denominación a las etiquetas y a los símbolos) se refieren a elecciones aceptadas dentro de una comunidad particular. Si un estudiante quiere llegar a ser parte de la misma comunidad, debe aceptar tales nombres, sin *cuestionarlos*.

Describo algo como *arbitrario* si cualquier persona sólo puede llegar a saber que dicho algo es verdad porque un medio externo le informa al respecto —ya sea el profesor, un libro, la red electrónica, etc. Si algo es arbitrario, lo es para todo el que aprende y lo que debe hacer es memorizarlo. Gattegno (1987) afirmó:

> (…) hay una forma de conocimiento que se diferencia tajantemente de tener consciencia de algo —el conocimiento que está respaldado solamente por la memoria, como la etiqueta de un cierto objeto, o un número telefónico, ítems que son arbitrarios. Sin alguien más, ese conocimiento no existiría para nosotros. (p. 55)

No sólo las etiquetas, los símbolos o los nombres son arbitrarios. El currículo de matemáticas está lleno de convenciones que se basan en elecciones hechas en algún momento del pasado. A cualquiera que aprenda esas convenciones hoy, pueden parecerle decisiones arbitrarias. Por ejemplo, ¿por qué al escribir una pareja ordenada, la primera componente es la x y la segunda, la y? Esto es sólo una convención y no hay una razón para ella. En consecuencia, un estudiante podría decidir escribir primero la y. Si los estudiantes quieren hacer las cosas a su manera, sin aceptar una convención cultural, esto puede ocasionar tensión al profesor, puesto que no hay razón que pueda sustentar por qué la convención tenga que ser como es. Se usan frases como "camine por el corredor y luego suba las escaleras" o "x precede a y en el abecedario". Sin embargo, esos son recursos que inventan los profesores como ayudas mnemotécnicas más que como justificaciones. La verdad es que no hay razón para que la x se escriba primero.

Recuerdo una vez que estaba jugando *snooker*[3] con mi sobrino de cinco años, Roberto, en una mesa pequeña de *snooker*, en la que él acababa de introducir la bola amarilla por uno de los huecos. Era mi turno y Roberto dijo que la de color café era la siguiente. A mí me convenía más la verde y por tanto dije que ésa era la siguiente. El insistió en que era la café. No había

2. Hemos traducido como tal el término "awareness" usado por el autor. En la tercera parte del artículo se precisa su significado. [N.T.]
3. Se trata de una especie de billar con bolas numeradas y de colores, que deben introducirse en huecos. [N.T.]

razones que yo le pudiera dar para justificar que la verde fuera la siguiente; no había nada en los colores que indicara que el verde debía seguir al amarillo, y esa era una convención que Roberto no iba a aceptar, particularmente porque no hacerlo era una ventaja para él. Lograr que los estudiantes acepten y adopten nombres y convenciones no siempre es fácil.

El hecho de que se haya elegido 360 como el número de unidades en una vuelta completa tuvo mucho más que ver con las personas que tomaron la decisión y con aquello de lo que eran conscientes en el momento de tomarla, que con cualquier otra razón. Los babilonios tenían un sistema de numeración basado en 60 y estaban buscando la razón entre el perímetro de un hexágono regular y la longitud de la circunferencia circunscrita. Sabiendo que el perímetro de un hexágono regular es seis veces el radio de la circunferencia circunscrita, esto condujo, evidentemente a que se dividiera la circunferencia en 6×60, es decir, en 360 partes o grados. Si la decisión se tuviera que tomar hoy, con nuestro sistema métrico de medición, quizás se vería a 100 como lo más natural. Para un escolar, que vive en el mundo actual, de ninguna manera 360 es una elección obvia. Un estudiante que examine una vuelta completa y la analice cuidadosamente, no puede llegar a la conclusión de que ésta debe dividirse en 360 unidades (ver Figura Nº 2).

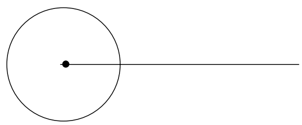


Figura Nº 2. Profesor: "Como se puede ver en este diagrama, una vuelta completa se debe dividir en 360 partes"

Como lo señala Clausen (1991):

> Mi sentir durante mucho tiempo ha sido que nuestro uso de los grados para medir cantidades de giro (ángulos) es muy arbitrario. No hay manera de que un niño (o un adulto) pueda *intuir* que hay 360 grados en una vuelta completa. Es un conocimiento totalmente arbitrario, formal y verdadero porque el profesor lo dice. (p. 16)

Un profesor tiene que informar al estudiante cuántos grados hay en una vuelta completa. Un intento de hacer que esto parezca menos arbitrario es traer a cuento una perspectiva histórica al salón de clase. Los estudiantes pueden aprender algo de historia a partir de este enfoque, pero no se estarán desarrollando matemáticamente al memorizar lo arbitrario. Como lo señala Pimm (1995, p. 187) "La forma de pensar encarnada en la frase simple 'es o no es' es profundamente matemática". Sin embargo, la frase *podría ser* ¡no es profundamente matemática! Y lo arbitrario está lleno de *podría ser*. En contraste con la naturaleza arbitraria de los grados, Clausen observa que:

> Por otra parte, las ideas de media vuelta, un cuarto de vuelta, dos tercios de vuelta, etc. tienen un significado válido, real en sí mismo. Si giro, de manera que al final quede con la cara al frente del punto de donde partí, entonces sé que he dado una vuelta completa. No hay nada nuevo que aprender —ningún número arbitrario como por ejemplo 37, del que el profesor tenga que informarme. Puedo trabajar por mí mismo el significado de media vuelta, o de un cuarto de vuelta, etc., usando mi propia experiencia al girar media vuelta, o un cuarto de vuelta, o lo que sea. Las fracciones de una vuelta tienen una validez intuitiva de la que carecen los grados. (p. 16)

En lo anterior, Clausen destaca la naturaleza de 'es o no es' que tienen las fracciones de una vuelta, la cual se puede conocer sin que el profesor tenga que informar sobre ella.

LO NECESARIO

Hay aspectos del currículo de matemáticas con relación a los cuales los estudiantes no necesitan ser informados. Son cosas que ellos pueden resolver por sí mismos y saber que lo que han hecho es correcto. Son partes del currículo de matemáticas que no son convenciones sociales sino propiedades que se pueden abordar a partir de lo que cada quien ya sabe. Como Clausen lo señala, hay propiedades acerca del acto de girar en torno a sí mismo que puedo conocer por mí mismo. Por ejemplo, si giro en torno a mí un cuarto de vuelta y luego otro cuarto de vuelta, he girado media vuelta. Es posible encontrar otras fracciones de una vuelta sin necesidad de ser informado. El contenido matemático del currículo se puede, por tanto, dividir en las cosas arbitrarias y las necesarias.

Todos los estudiantes necesitan ser informados de lo arbitrario. Sin embargo, lo que tiene carácter de necesario depende de la consciencia que los estudiantes tienen ya: por ejemplo, es necesario que la longitud del lado requerido en el triángulo que se muestra en la Figura Nº 3 sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pero, no todo estudiante estará en posibilidad de ser consciente de esto. Por tanto, aunque ese asunto tiene carácter de necesario, ello no implica que todos los estudiantes tengan la consciencia para ser capaces de resolverlo. Lo que se afirma es, solamente, que *alguien* es capaz de llegar al resultado sin recibir información al respecto.

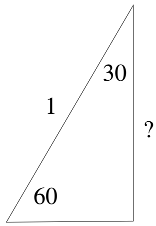


Figura Nº 3. ¿Cuál es la longitud del lado?

Aquellas cosas de índole necesaria se pueden resolver: es sólo cuestión de que haya estudiantes que tengan la consciencia requerida para hacerlo. Si no es así, entonces la elección de un determinado tópico puede no ser oportuna en un momento dado. Por ejemplo, no le enseño integración de funciones trigonométricas a mis alumnos de once años. Si un estudiante tiene la consciencia que se requiere para desarrollar algo por su cuenta, entonces sugiero al profesor no informarle sino introducir tareas que ayuden al estudiante a usar su consciencia para llegar al conocimiento de lo necesario. Lo necesario está en el ámbito de la consciencia, mientras que lo arbitrario está en el ámbito de la memoria (ver Figura Nº 4).

Lo arbitrario	*Todos* los estudiantes *necesitan* ser informados de lo arbitrario por alguien	Ámbito de la memoria
Lo necesario	*Algunos* estudiantes *pueden* llegar a ser conscientes de lo que es necesario sin ser informados de ello por alguien	Ámbito de la consciencia

Figura Nº 4. Lo arbitrario y lo necesario

EXAMEN DEL CURRÍCULO

Pedí a mis estudiantes de licenciatura escribir una lista de aquellos temas del currículo de matemáticas sobre los que, en su concepto, no se puede desarrollar trabajo alguno (los que podrían ser de otro modo) y aquellas cosas sobre las cuales sí se puede trabajar (las que deben ser como son). Ellos elaboraron la lista que se presenta en la Figura Nº 5.

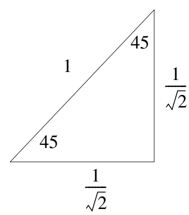
Asuntos sobre los que no se puede trabajar (podrían ser de otro modo)	**Asuntos sobre los que sí se puede trabajar (deben ser como son)**
Nombres de las formas geométricas	Ángulos interiores de polígonos regulares
Definiciones de…	$(V = IR) \Rightarrow I = \frac{V}{R}$
Mediciones de orientación	Solución de una ecuación lineal
Coordenadas x y y	Lo que sucede con los números al multiplicarlos por un número < 1 o > 1
¿Qué tan pesado es un kilogramo?	Estimaciones aproximadas de mediciones
¿Qué tan largo es un metro?	2×3
Terminología —e.g., nombres de teoremas, tales como el teorema del factor palabra/etiqueta	Encontrar los factores de $a^3 + b^3$
	Encontrar ángulos o longitudes en problemas con triángulos, por ejemplo, en un triángulo rectángulo e isósceles. 
	Propiedad de ser primo un número
	Simetría
En síntesis, palabras, símbolos, notación y convenciones	En síntesis, propiedades y relaciones

Figura Nº 5. Una forma de dividir el currículo

La división del currículo de matemáticas en lo arbitrario y lo necesario se basa en las raíces filosóficas de las nociones de ‘contingente’ y ‘necesario’. Kripke (1996) escribió que:

> Dado que [algo] es verdad, ¿podría haber sido de otra manera? […] Si la respuesta es ‘no’, entonces este hecho acerca del mundo es algo necesario. Si la respuesta es ‘sí’, entonces este hecho acerca del mundo es algo contingente. (p. 36)

Es verdad que la coordenada x se escribe antes de la coordenada y. Sin embargo, habría podido ser de otra manera; se habría podido tomar una decisión diferente según la cual la coordenada y se escribiera primero. Esto es posible y las matemáticas basadas en una tal convención podrían ser igualmente consistentes. Por tanto, el hecho de que la coordenada x venga primero es una verdad contingente.

Nozick (1984) afirmó:

> Permítaseme establecer el principio de razón suficiente como sigue: cada verdad tiene una explicación. Para cada verdad p, existe una verdad q que aparece en la relación E que explica a p. [...] Cuando se sostiene cualquier otra verdad sin una explicación, ello es un dato bruto arbitrario. (pp. 140-141)

No hay explicación de por qué la coordenada x deba venir primero, por tanto este es un hecho arbitrario y sucede lo mismo con gran parte del resto de las matemáticas del currículo con respecto a coordenadas. Varios capítulos en los libros de texto tienen que ver con que los estudiantes sepan cómo dibujar y nombrar los ejes, cómo escribir coordenadas, que sepan que la coordenada x se escribe primero que la y, que conozcan la coordenada de un punto y que sepan cómo localizar un punto conocidas sus coordenadas. Todo eso es arbitrario y en mi concepto las matemáticas no residen en lo arbitrario, se encuentran en lo que es necesario. *Antes de seguir con la lectura, ¿puede usted pensar en algo del currículo de coordenadas que sea necesario y no arbitrario?*

Me preocupa que se dedica poco tiempo a lo que tiene carácter de necesario y mucho tiempo a la memorización y práctica de las convenciones. Las matemáticas se ocupan de las propiedades —y las propiedades se pueden abordar o se pueden deducir. Esto implica que gran parte de los capítulos sobre coordenadas no tiene que ver con las matemáticas.

¿Qué matemáticas se agrupan bajo el título de coordenadas? Existe la consciencia de que una posición no se puede describir sin partir de algún punto: se requiere de un origen. Esto no es algo que un profesor deba informar a los estudiantes; ellos pueden llegar a hacerse conscientes de ello con una tarea apropiada. Es necesaria alguna forma de vectores de base (no necesariamente con ángulos rectos) o sus equivalentes (tales como los ángulos en el caso de las coordenadas polares) aunque, por supuesto, no es necesario el nombre por el que se conocen.

Estos son algunos de los aspectos en los que residen las matemáticas correspondientes al tópico de las coordenadas, y no en la práctica de las convenciones. No estoy diciendo que la aceptación y la adopción de las convenciones no sea importante en las clases de matemáticas, sino que es necesario darse cuenta de que no es allí donde residen las matemáticas. Por tanto, sigo preguntándome acerca de la cantidad de tiempo de clase dedicada a lo arbitrario en comparación con el que se dedica a aquello en donde residen realmente las matemáticas.

ENFOQUES DE LA ENSEÑANZA Y SUS CONSECUENCIAS

¿Cómo puede un profesor trabajar un tópico específico con un grupo de estudiantes dada la división del currículo en lo arbitrario y lo necesario? Por ejemplo, al llevar a cabo una tarea que incluía el lanzar dos dados de seis caras un cierto número de veces y encontrar cuál resultado ocurría con más frecuencia, un estudiante, Samuel, dijo al profesor que él no sabía el nombre que se le daba al puntaje que ocurría más frecuentemente. El profesor replicó que Samuel había estado en una lección previa en la que eso se había mencionado y que debía pensar acerca de eso.

No estoy seguro de qué había que 'pensar acerca de eso'. El nombre, 'moda' —se recuerda o no y Samuel estaba indicando que no se acordaba de dicho nombre. Aquí no hay nada sobre lo cual se pueda desarrollar un trabajo. Las únicas opciones para él son recordar (lo que en este caso no es posible) o ser informado por alguien. Invitar a los estudiantes a 'pensar sobre algo' es apropiado para lo que es necesario, pero no para lo que es arbitrario. Si en esta ocasión no memorizaron el nombre, compete al profesor ayudar a los estudiantes a que lo memoricen. El papel del profesor, en el caso de lo arbitrario, es apoyar la memoria. Por ejemplo, el 'hecho' de que los ángulos internos de un triángulo sumen la mitad de una vuelta completa es algo de lo que los estudiantes pueden hacerse conscientes por sí mismos. El papel del profesor es proporcionar una tarea que los ayude a educar su propia consciencia respecto de los ángulos interiores de un triángulo. Por tanto, el papel del profesor es educar la consciencia de sus estudiantes, en lugar de darles algo para memorizar (ver Figura Nº 6).

	Estudiante	**Profesor**	**Modo de enseñar**
Lo arbitrario	*Todos* los estudiantes *necesitan* ser informados de lo arbitrario por alguien	Un profesor *necesita* informar a los estudiantes de lo arbitrario	*Ayudar a la memoria*
Lo necesario	*Algunos* estudiantes *pueden* llegar a ser conscientes de lo que es necesario sin ser informados de ello por alguien	Un profesor no necesita informar a los estudiantes de lo que es necesario	*Educar la consciencia*

Figura Nº 6. Modos de enseñar

Si un profesor decide informar a los estudiantes de algún contenido matemático que tiene carácter de necesario, entonces lo está tratando como si fuera arbitrario, como si fuera algo que requiere ser contado. Por ejemplo, si un profesor estableció que los ángulos interiores de un triángulo suman la mitad de una vuelta completa en vez de proponer a los estudiantes una tarea para que se hagan conscientes de esto, entonces ellos tienen que aceptar como verdadero lo que su profesor diga. En este caso, la propiedad mencionada se convierte simplemente en otro 'hecho' que debe ser memorizado. Llamo a esto *saber aceptado.*

Es posible para los estudiantes usar su consciencia para tratar de deducir por su cuenta por qué tal saber aceptado es verdad. Si un estudiante tiene éxito en ello, entonces esto se convierte en un hecho necesario y se sitúa directamente en el ámbito de la consciencia. Sin embargo, con mucha frecuencia, un estudiante acepta simplemente ese saber aceptado y lo trata como algo para memorizar o, de hecho, para olvidar.

En una clase que observé, algunos estudiantes de entre 14 y 15 años estaban trabajando en la resolución de ecuaciones simultáneas y un estudiante tenía dificultades con la reorganización de una ecuación. Había escrito:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ y &= 2 - x \end{aligned}$$

Le pregunté por el signo '$-$' que debería preceder a y y su respuesta fue reescribir la segunda ecuación como:

$$y = 2 + x$$

Le dije que creía que había hecho lo correcto cuando cambió de lugar a x, pero que seguía habiendo un signo '$-$' en frente de y. Escribí un '$-$' en frente de y en la segunda ecuación original:

$$-y = 2 - x$$

Entonces él cambió ambas sustracciones por adiciones diciendo "dos negativos hacen un positivo":

$$+y = 2 + x$$

Este es un ejemplo de un estudiante que recuerda un saber aceptado —"dos negativos hacen un positivo"— pero que no recuerda las situaciones en las que ese saber aceptado es apropiado. Es una frase que ha recordado, pero no ha adquirido la consciencia que acompaña a esa frase memorizada. Más que basar sus acciones en una consciencia matemática del opuesto, sus acciones están influidas por una memoria de algo ‘para hacer’ cuando estén presentes dos negativos.

Las transformaciones de las ecuaciones tienen que ver con lo que es necesario y un profesor que proporcione una frase en tal sentido, convierte la consciencia en saber aceptado que el estudiante trata entonces de memorizar. El problema con la memoria es que da la oportunidad de olvidar. En este caso, se recuerda la frase pero la situación asociada con la que se relaciona (que es relativamente compleja) se olvida.

El saber aceptado puede ir acompañado de una explicación de por qué algo es verdad. Un profesor puede explicar por qué los ángulos en cualquier triángulo suman la mitad de una vuelta. El hecho de que el profesor dé una explicación no significa que los estudiantes tengan la consciencia necesaria para comprender esa explicación, o que harán el trabajo requerido para estar en una posición en la que ellos también sepan por qué ese *debe* ser el caso. Una explicación cuidadosa puede incrementar la posibilidad de que algunos estudiantes estén en capacidad de usar la consciencia que tienen para llegar a darse cuenta de por qué un ‘hecho’ es verdad. Otros estudiantes pueden no tener suficiente consciencia, o eligen no usar la consciencia que tienen para ubicarse en esa posición. Para esos estudiantes, el hecho de que los ángulos interiores de cualquier triángulo sumen la mitad de un ángulo llano continúa siendo saber aceptado que está en el ámbito de la memoria, a pesar de los esfuerzos del profesor.

Poincaré (n.f.) consideró el siguiente escenario:

> De la misma manera nuestros alumnos imaginan que saben las matemáticas cuando comienzan a estudiarlas seriamente. Si súbitamente les digo, sin ninguna otra preparación: “No, ustedes no las conocen; ustedes no comprenden lo que imaginan comprender; debo demostrarles lo que para ustedes es evidente;” y si, en la demostración, me apoyo en premisas que a ellos les parecen menos evidentes que la conclusión, ¿qué pensarán los infortunados alumnos? Pensarán que la ciencia de las matemáticas no es sino un agregado arbitrario de sutilezas inútiles; o perderán su gusto por ella; o quizás la verán como un juego divertido. (p. 128)

La explicación de un profesor se basa frecuentemente en la propia consciencia y, en consecuencia, usa cosas que los estudiantes no encuentran *evidentes* —cosas que no están en la consciencia de los estudiantes— y por tanto la explicación no les ayudará a educar su propia consciencia. Como lo señala Poincaré, para varios estudiantes las matemáticas pueden llegar a ser “un agregado arbitrario de sutilezas inútiles” o simplemente un juego con símbolos (aunque dudo que se considere muy ‘divertido’).

La Figura Nº 7 presenta un resumen de las elecciones disponibles para un profesor en relación con lo arbitrario y lo necesario y el resultado consecuente en términos de la forma como los estudiantes tienen que trabajar. Revisaré partes de este resumen considerando la lista de estrategias de enseñanza de Merttens (1995) en la que se incluye *Dar instrucción*:

> **Dar instrucción**: es la estrategia más alineada con la enseñanza tradicional y quizás la que ha sido más criticada en los últimos veinte años. [...] La instrucción o la provisión de procedimientos es la práctica que ocurre cuando alguien:
> 1. da una receta;
> 2. da un conjunto de instrucciones;
> 3. muestra la manera de moverse a lo largo de una pista numerada;
> 4. explica cómo hacer una multiplicación como suma;
> 5. explica las reglas del *Monopolio*;
> 6. demuestra cómo escribir en letra pegada;
> 7. muestra cómo ponerse un chaleco salvavidas;
> 8. da el procedimiento para cruzar una calle de manera segura.
> (p. 7, numeración hecha por mí)

	Lo arbitrario		**Lo necesario**	
Profesor	el profesor informa	el profesor no informa	el profesor informa	el profesor propone una actividad apropiada
	↓	↓	↓	↓
Estudiante	los estudiantes tienen que memorizar	los estudiantes tienen que inventar	saber aceptado, los estudiantes tienen que memorizar a menos que tengan éxito al usar su consciencia para llegar a saber	los estudiantes usan su consciencia para llegar a saber

Figura Nº 7. Resumen de las elecciones del profesor y las consecuentes formas de trabajar por parte del estudiante

Al mirar la lista hecha por Merttens y analizarla en términos de lo arbitrario y lo necesario, afirmo que todo lo mencionado excepto lo que se expone en el ítem 4 es arbitrario (no estoy considerando el ítem 3 ya que no tengo muy claro lo que el autor quería decir al mencionar este ejemplo). Esto significa que es completamente apropiado que la instrucción sea una estrategia usada para estos ejemplos, ya que los estudiantes no conocerán una receta *particular*, cómo jugar *Monopolio* (en una forma *particular*), o escribir en letra pegada (en una forma *particular*), etc., a menos que se les informe al respecto. Como se indicó en la Figura Nº 7, si un profesor elige no informar a los estudiantes acerca de estas cosas, entonces los estudiantes son perfectamente capaces de inventarse recetas, formas de jugar Monopolio, o de escribir en letra pegada, etc.

El ejemplo 4, sin embargo, es diferente ya que la multiplicación tiene el carácter de necesaria. Dos veces tres es seis, no cinco. (No me refiero a las palabras —los significantes— *dos*, *tres*, *multiplicado*, etc., sino a lo significado —la *dosidad*, en ausencia de una mejor expresión, la operación asociada con la palabra *multiplicado*, etc.) Los estudiantes pueden inventar cuánto es dos veces tres —por ejemplo, siete— pero ¡están equivocados! Aunque hay alternativas para efectuar una multiplicación en términos de suma, el asunto de la multiplicación de números tiene el carácter de necesario y por tanto cómo se lleva a cabo una multiplicación será correcto o no desde el punto de vista de las matemáticas. Si se informa a los estudiantes sobre cómo hacer una multiplicación como suma, entonces esto es saber aceptado.

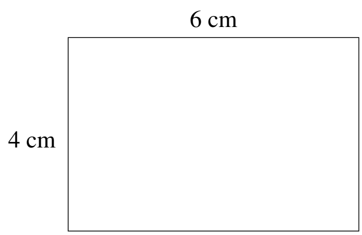
Merttens continúa diciendo:

> Instruir a los niños es darles una serie de procedimientos en los que se les dice “ahora haga esto, después haga aquello”. *También es dar crédito a la inteligencia de ellos*. Es asumir que, con nuestra ayuda, utilizarán estos procedimientos cuando sea apropiado y de manera apropiada, que tendrán la inteligencia no sólo para adoptarlos sino para adaptarlos, parafraseándolos en sus propios términos y con sus propias razones, articulándolos (en todos los sentidos de la palabra) en sus propios contextos; [...] La tan mentada *comprensión* vendrá ya sea cuando ellos usen el procedimiento, o más tarde, o incluso podría no venir si ellos no tuvieran la necesidad de relacionar un algoritmo particular con algún otro aspecto de la materia. Comprender, en este sentido, es traducir, incorporar a la propia historia lo que a uno le han dado. (p. 7)

Los estudiantes bien pueden proceder a usar *su inteligencia* haciéndose conscientes de por qué algunos procedimientos deben dar respuestas correctas, en cuyo caso, el saber aceptado se convertirá en algo necesario y por tanto podrán *incorporar a su propia historia lo que se les ha dicho.* Sin embargo, he visto demasiadas clases en las que se no se da a los estudiantes el tiempo ni el ánimo para que trabajen en el intento de *comprender* el saber aceptado que se les ha ofrecido. Con mucha frecuencia, las lecciones de matemáticas parecen consistir en aceptar el saber del profesor y practicar cómo replicarlo antes de pasar al siguiente punto de saber aceptado que les proporciona el profesor. Por tanto, creo que hay otras razones —además de no necesitar jamás *relacionar un algoritmo particular con algún otro aspecto de la materia*— por las cuales los estudiantes no *comprenden* los procedimientos sobre aspectos del currículo de las matemáticas.

CUESTIONES DADAS - PROPIEDADES ASUMIDAS

Cuando se usa la consciencia para determinar que algo es necesario, puede haber alguna información suministrada, además de los nombres arbitrarios y las convenciones. Por ejemplo, en la Figura Nº 8, la tarea podría consistir en encontrar el área y el perímetro del rectángulo. El área y el perímetro son asuntos que tienen la calidad de lo necesario puesto que se puede desarrollar trabajo con ellos, pero sólo porque previamente se han dado algunas de sus propiedades, tales como la longitud de los lados del rectángulo. A estas propiedades las llamo *cuestiones dadas*.



Todos los ángulos interiores son de 90 grados

Area = ?

Perímetro = ?

Figura Nº 8. Una pregunta tradicional

Lo que es necesario se deduce entonces como una consecuencia de ciertas cuestiones dadas. Si las propiedades dadas hubieran sido insuficientes para determinar el área, entonces se podrían crear —ya fuera mediante un número elegido o una etiqueta asignada. Por ejemplo, el siguiente enunciado acerca del área:

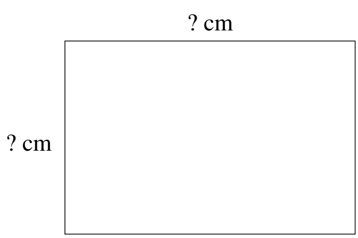
$$area = H \times B$$

sólo tiene sentido con la asignación del significado a las incógnitas H y B. Aquí debe notarse que hay una confusión de las etiquetas arbitrarias (en este caso, H y B) con las propiedades que están etiquetando —las longitudes reales de los lados del rectángulo. Lo primero es lo arbitrario y lo último lo dado. Se adopta lo arbitrario (las etiquetas) y se aceptan las cuestiones dadas (propiedades) y con ellas se trabaja para encontrar lo que es necesario.

Un estudiante puede llegar al conocimiento de las cuestiones dadas, de tres maneras:

- en primer lugar, puede 'recibirlas' verbalmente del profesor o a través de textos escritos (como en la Figura Nº 8), etc.;
- en segundo lugar, puede observarlas a través de sus sentidos, por ejemplo, viendo que uno de los lados de un rectángulo dado es más largo que el otro, o percibiendo que la esquina de un salón es de más de 90 grados, etc.;
- en tercer lugar, puede crear sus propias cuestiones dadas, poniéndole, por ejemplo, la etiqueta H a la propiedad de longitud de un lado del rectángulo, o inventando una ecuación para tratar de resolverla, etc.

Se requieren las cuestiones dadas para que otras cosas lleguen a ser necesarias. Sin embargo, las cuestiones dadas en la Figura Nº 8, tales como la longitud de los lados del rectángulo, son propiedades en sí mismas que podrían haber sido necesarias si el perímetro y el área se hubieran dado en primera instancia (ver Figura Nº 9).



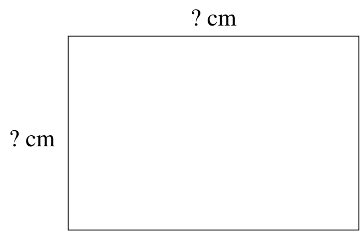
Todos los ángulos interiores son de 90 grados

Area = 24 cm^2

Perímetro = 20 cm

Figura Nº 9. Una pregunta alternativa

Si se dan algunas propiedades pero no son suficientes para determinar las longitudes, como en la Figura Nº 10, esto no impide trabajar sobre ciertas cosas a partir de los datos proporcionados. Por ejemplo, puedo decir que el perímetro más pequeño posible es $4 \times \sqrt{24}$. El perímetro sigue siendo una parte del currículo de matemáticas relativo a las propiedades y yo puedo usar mi consciencia para deducir nuevos resultados dentro de esta área del currículo, basados en cuestiones dadas que se relacionan con el tema.



Todos los ángulos interiores son de 90 grados

Area = 24 cm^2

Perímetro = ? cm

Figura Nº 10. Ahora, ¿qué se puede saber con seguridad?

Aunque las cuestiones dadas son propiedades, ellas residen en el ámbito de la memoria puesto que son hechos asumidos más que resultados deducidos. Como tales, no se puede desarrollar trabajo sobre ellas y por tanto deben ser memorizadas si se quiere que estén disponibles en el futuro (sin que sea necesario recibir información acerca de ellas de nuevo). Así que aunque el perímetro es un aspecto del currículo, que es necesario, un perímetro particular dado como en la Figura Nº 9 debe memorizarse. Por tanto, las propiedades dadas dentro de preguntas matemáticas particulares tienen que ser memorizadas, mientras que otras propiedades relacionadas se pueden deducir a través de la consciencia que se tenga de las cuestiones dadas que se han memorizado.

LO GENERADO - GENERACIÓN DE NUEVAS POSIBILIDADES

Aunque lo arbitrario requiere de la memoria para ser retenido, es posible utilizar la consciencia aun con lo arbitrario. Esto se puede hacer de dos maneras. En primer lugar, una consciencia con respecto a las propiedades puede estar basada en la adopción de una convención. Por ejemplo, habiendo adoptado la convención de que hay 360 grados en una vuelta completa y que la medición de una vuelta se basa en una escala lineal (ambas arbitrarias), entonces puedo usar la consciencia que tengo acerca de la linealidad para decir que *si parto por la mitad esto entonces aquello se parte por la mitad*. Esto me conduce a poder decir definitivamente que hay 180 grados en la mitad de una vuelta completa —una certeza que se elabora a través de la consciencia de la convención adoptada originalmente.

El uso que doy aquí a la palabra 'certeza' se basa en la premisa de que *si adopto esta convención, entonces* hay una propiedad con respecto a una media vuelta, propiedad que se cumple y puedo enunciar y sobre la que no necesito recibir información. Claro que si se adopta una convención diferente entonces la propiedad ya no se cumple. Ayer (1962) propone un ejemplo que cae dentro de esta filosofía:

> Aparte del hecho de que es apropiado considerarlas [a las proposiciones *a priori*] verdaderas, lo que no se puede decir de las reglas lingüísticas, tales proposiciones se distinguen también por ser necesarias mientras que las reglas lingüísticas son arbitrarias. Al mismo tiempo, si éstas son necesarias es sólo porque las reglas lingüísticas relevantes se presuponen. Así, por ejemplo, es un hecho empírico, contingente, que la palabra "earlier" se use en inglés para significar más temprano, y es arbitraria, aunque conveniente, la regla del lenguaje que establece que las palabras que representen relaciones temporales se deban usar transitivamente; pero, dada esta regla, la proposición: si A ocurre más temprano que B y B ocurre más temprano que C entonces A ocurre más temprano que C se convierte en una verdad necesaria. (p. 17)

El escenario *si…, entonces esto debe ser así* está en la base del trabajar matemáticamente para establecer nuevas certezas —lo necesario.

La segunda forma de usar la consciencia con lo arbitrario se basa en ser creativo con las convenciones en sí mismas: *si…, entonces esto podría ser así*. Por ejemplo, considérense los nombres de los números. Los nombres utilizados para nuestros números son arbitrarios, lo mismo que lo son las convenciones de cómo usarlos. *One*, *two*, *three*, *hundred*, *thousand*, etc., son tan arbitrarios como podrían serlo *un*, *deux*, *trois*, *cent*, *mille*, etc. La convención en inglés es que 21 se expresa mencionando primero el valor del dígito más alto —*twenty-one*—[4] mientras que en alemán se menciona primero el dígito de menor valor —*ein-und-zwanzig*. De modo que la forma en la que se combinan las palabras también es arbitraria. Sin embargo, habiendo adoptado los nombres y las convenciones en inglés, puedo usar mi conscien-

4. Convención también adoptada en español en el nombre *veintiuno* para 21. [N.T.]

cia para generar nuevos nombres de números. Por ejemplo, diga en voz alta el número siguiente (de acuerdo con las reglas del inglés, o las del español):

$$4280381$$

Probablemente el lector nunca antes en su vida ha dicho u oído decir este número. Como consecuencia, no puede haber memorizado cómo hacerlo. La habilidad de generar nuevos nombres de números a partir de convenciones adoptadas está en el ámbito de la consciencia. Sin embargo, los nombres de los números no son necesarios puesto que sólo son nombres. Así que considero a tales cosas como parte de *lo generado*. Estos objetos han sido generados a partir de nombres y convenciones, usando la consciencia. La cuestión de si son “correctos” o “equivocados” no es apropiada, puesto que siempre son posibles las alternativas; es sólo cuestión de si ellas se aceptan o no dentro de una cierta cultura. Lo que fue aceptado en el pasado, como la palabra ‘billón’ para significar 1,000,000,000,000 en el Reino Unido, puede llegar a cambiarse con el tiempo, como en efecto ha sucedido ya que ahora, también en el Reino Unido, ‘billón’ significa 1,000,000,000.

De la misma manera que la consciencia ha sido utilizada para trabajar con convenciones para producir nuevos nombres de números nunca dichos antes, se pueden explorar algunas convenciones hasta algunos extremos que usualmente no se han considerado dentro de una cultura. Por ejemplo, un niño que dice los siguientes nombres de números: *one hundred*, *two hundred*, *three hundred*,… puede continuar y decir: *eight hundred*, *nine hundred*, *ten hundred*, *eleven hundred*,…[5] No hay nada ‘equivocado’ en esto y de hecho he escuchado tal uso en la televisión y la radio (para designar números correspondientes a años, por ejemplo). Sin embargo, esto se puede explorar más. Desde un punto de vista pedagógico, esta exploración tiene sus aplicaciones y puede ayudar a flexibilizar las formas de considerar y de nombrar los números.

Las convenciones también se pueden ampliar: por ejemplo, la notación para las coordenadas en dos dimensiones se pueden extender a tres, cuatro o más dimensiones y por tanto ofrecer una manera de trabajar con otros escenarios conceptualmente más complejos. Las convenciones se pueden, así mismo, combinar como al escribir $\frac{1}{2}(3, 4)$ para representar $\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$. Estas son formas en las que alguien puede usar su consciencia para generar nuevas posibilidades dentro del mundo de las convenciones. No todas ellas serán aceptadas en la comunidad matemática, pero ejemplifican el uso de la cons-

5. En español puede ocurrir que diga *veintiuno*, *veintidós*, *veintitrés*,… *veintiocho*, *veintinueve*, *veintidiez*. [N.T.]

ciencia en esta área. La habilidad de generar tales posibilidades reduce la demanda sobre la memoria, que de otra forma sería muy pesada. Borges (1985) creó un personaje, Funes (el memorioso), quien nunca olvidaba nada y una de las cosas que hizo fue inventar un nombre diferente para cada número. Afortunadamente para nosotros, las demandas para la memoria son menos exigentes a través del uso de nuestra habilidad para generar números a partir de relativamente pocas palabras.

RESUMEN

En la Figura Nº 11 se presenta una visión general de la dinámica sostenida en este artículo. Ver el currículo de matemáticas en términos de aquellas cosas sobre las que alguien puede desarrollar trabajo específico (lo necesario) y aquellas cosas de las que todo el mundo debe ser informado (lo arbitrario) puede clarificar los papeles que tienen profesores y estudiantes en la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje. Lo arbitrario tiene que ver con los nombres y las convenciones y los estudiantes no tienen más elección que memorizar lo arbitrario; el profesor tendrá que informar a sus estudiantes acerca de lo arbitrario. He indicado esto en la Figura Nº 11 expresando que el estudiante recibe lo arbitrario. La única otra opción que tiene el profesor es rehusarse a informar a los estudiantes de lo arbitrario y entonces ellos tienen que inventarlo. Esto es perfectamente posible y puede ser deseable en algunas ocasiones; sin embargo, eso no cambia el hecho de que en algún momento en el futuro sea necesario informar a los estudiantes de la cuestión si se quiere que hagan parte de una comunidad matemática que se comunica a través de convenciones adoptadas.

Como lo señala Mandler (1989):

> De la buena teoría bien se puede decir con Humpty Dumpty: “Cuando uso una palabra, ella significa exactamente lo que quiero que signifique —ni más ni menos.” Sin embargo, la historia de las ciencias sociales está llena de conceptos y términos abandonados que no han sido debidamente considerados, como corolario de lo que Humpty Dumpty dijo: una vez que se elige que una palabra signifique algo (exactamente) entonces es necesario comenzar a convencer a los demás de que la usen de la misma manera; pues si no es así, los monólogos nunca serán reemplazados por el diálogo y el consenso. (p. 237)

No parece probable que los estudiantes puedan convencer a la comunidad matemática de cambiar los nombres y las convenciones ya establecidos, incluso si tuvieran la plataforma para intentarlo. Por tanto, es el estudiante quien debe, aun a su pesar, aceptarlos y adoptarlos para comunicarse con la comunidad matemática.

	Nombres y convenciones	**Propiedades**
Memoria	*Lo arbitrario* (elecciones) (recibido o inventado)	*Cuestiones dadas* - - -→ *Saber aceptado* (hechos asumidos) (hechos derivados) (recibido, observado o inventado) (recibido)
Consciencia	*Lo generado* (nuevas posibilidades) (sobre ello se desarrolla trabajo)	*Lo necesario* (certezas nuevas derivadas) (sobre ello se desarrolla trabajo)

⟶ usando mi consciencia

- - -→ ‘recibiendo’ la consciencia de otra persona

Figura Nº 11. Visión general

Lo necesario tiene que ver con propiedades y una posibilidad para los estudiantes es ‘recibir’ las propiedades a través del profesor quien informa acerca de ellas como lo hace con lo arbitrario. Sin embargo, esto convierte lo necesario en saber recibido y los estudiantes muy seguramente lo tratarán como algo que deben memorizar. En efecto, ellos no tendrán otra opción a menos que sean capaces y tengan la voluntad de hacer el trabajo requerido para llegar a ser conscientes de la necesidad de ese saber recibido. Algunos estudiantes pueden ser capaces de hacer ese trabajo, en cuyo caso el saber recibido se convertirá en una certeza derivada y se sabrá más a través de la consciencia que de la memoria.

Otra opción para el profesor es proporcionar una tarea que haga accesibles las propiedades a través de la consciencia. Una tarea apropiada ayudará a que tales propiedades sean más accesibles a través de la consciencia que de la información que el profesor proporcione y permita a los estudiantes elaborar lo necesario, por sus propios medios, para deducir por qué algo debe ser como es.

Un profesor que toma deliberadamente la posición de no informar a los estudiantes acerca de cualquier cosa que sea necesaria, es consciente de que desarrollarse como matemático es educar la consciencia en vez de coleccionar y retener recuerdos. Más aun, esta posición clarifica a los estudiantes la forma de trabajar que es apropiada para cualquier aspecto particular del currículo —lo arbitrario se debe memorizar, pero en relación con lo necesario, se debe educar la consciencia.

Si tengo que recordar…, entonces no estoy trabajando en matemáticas.

REFERENCIAS

Ayer, A.J. (1962). *Language, truth and logic*. London: Victor Gollanez Ltd.

Borges, J.L. (1985). Funes, the memorious. En A. Kerrigan (Ed. y Tr.), *Fictions* (pp. 97-105). London: John Calder.

Clausen, T. (1991). Turning Logo. *Micromath, 7* (1), 16.

Gattegno, C. (1987). *The Science of education: Part 1 - Theoretical considerations*. New York: Educational Solutions.

Ginsburg, H. (1977). *Children´s arithmetic: The learning process*. New York: van Nostrand.

Kripke, S. (1996). *Naming and necessity.* Oxford: Basil Blackwell.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Reflections and prospects. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 237-244). New York: Springer-Verlag.

Merttens, R. (1995). Teaching not learning: Listening to parents and empowering students. *For the Learning of Mathematics 15* (3), 2-9.

Nozick, R. (1984). *Philosophical explanations*. Oxford: Clarendon Press.

Pimm, D. (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics*. London: Routledge.

Poincaré, H. (n.f.). *Science and method* (F. Maitland, traduc.). London: Thomas Nelson and Sons.

Dave Hewitt
School of Education
University of Birmingham
Edgbaston
Birmingham
B15 2TT
United Kingdom