Grupos de isometrías del plano

Brigitte Johanna Sánchez Robayo
juanitasan82@msn.com

Jaime Fonseca González
jfgonzalez@pedagogica.edu.co

Resumen

Los movimientos rígidos del plano se formalizan en el concepto de isometría del plano. Cada uno de estos movimientos tiene propiedades que pueden representarse geométricamente, además criterios para identificar movimientos realizados a partir de dos puntos y su respectiva imagen por la transformación; estos criterios son empleados para identificar el resultado de aplicar varias transformaciones a puntos del plano. Formalmente, esta operación corresponde a la composición de isometrías, operación bajo la cual, algunos subconjuntos de isometrías tienen estructura de grupo.

Palabras Clave: Isometría, paralelogramo, translación, rotación y reflexión.

Presentación/Introducción

Las isometrías del plano forman parte del currículo de matemáticas escolares y son fundamentales en el inicio del aprendizaje de la geometría transformacional. La conferencia pretende mostrar a los profesores interesados, una manera diferente de abordar las isometrías y de establecer propiedades algebraicas propias de las estructuras, empleando un software de geometría dinámica como herramienta para la visualización, sin entrar en procesos demasiado abstractos.

Referentes Teóricos

Isometrías

Una *isometría* o *transformación rígida* es una función biyectiva T: $R^n \to R^n$ que conserva distancias, es decir que para cualquier par de puntos X, $Y \in R^n$,

$$d(X,Y) = d(T(X),T(Y))$$

Las isometrías del plano son las isometrías cuyo dominio y codominio es el plano euclidiano Π. Se denota el conjunto de las isometrías del plano como $\boldsymbol{R}$.

El Grupo de las Isometrías del Plano

Las isometrías del plano son funciones biyectivas y la composición es una relación binaria sobre ellas, entonces si T_1 y T_2 son isometrías, la composición $T_1 \circ T_2$ es una función biyectiva tal que al aplicarla a dos puntos X, Y del plano, la distancia entre la imagen X', Y' de los puntos es la misma que la distancia entre X y Y,

$$d\left(\left(T_1 \circ T_2\right)(X), \left(T_1 \circ T_2\right)(Y)\right) = d(X, Y)$$

Es decir, la función compuesta es también una isometría y por tanto, la composición es una operación binaria. Particularmente la estructura $(\boldsymbol{R}, \circ)$ es de grupo.

Paralelogramos

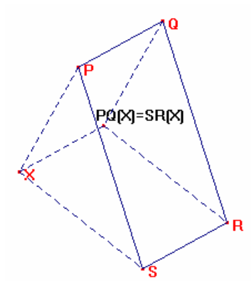
Un paralelogramo $ABCD$ es:

1. El cuadrilátero $ABCD$ donde $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, si A, B, C, D son puntos no colineales.
2. La unión $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$, si A, B, C, D son puntos colineales.

Translaciones

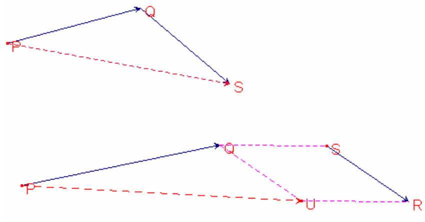
La **translación** $\overleftarrow{QP}$ (dos puntos distintos) de P a Q según la distancia de P a Q, se define como una función sobre el plano Π, tal que a cada elemento X del dominio asigna el elemento X' de manera que existe el paralelogramo $\square QPXX'$. En caso en que P y Q sean iguales, $\overleftarrow{QP}(X) = X$.

Una translación tiene infinitas parejas de puntos que la representan, es decir que para cualquier traslación $\overrightarrow{PQ}$, existen otras parejas de puntos S, R tales que para cualquier punto $X \in \Pi$, la traslación de X por $\overrightarrow{PQ}$ es la misma que la imagen de X por $\overrightarrow{SR}$. De hecho, si dos traslaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{SR}$ son iguales, los puntos que las determinan son vértices del paralelogramo $PQRS$.



Para la composición de dos translaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{SR}$ se determina el punto Y, tal que existe $\square SRYQ$ y $\overrightarrow{QY} = \overrightarrow{SR}$, por lo tanto $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{QY}$. La composición de dos translaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ tales que comparten uno de los puntos que las determinan, es la translación $\overrightarrow{PR}$, así $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PY}$. Con lo que se muestra que la composición de translaciones es una operación binaria en el conjunto.

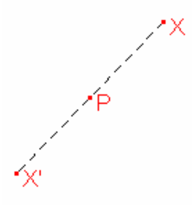
Se definió la translación $\overrightarrow{PP}$ como la función que asigna a cada punto X de Π, el mismo X, es decir $\overrightarrow{PP}$ es la función idéntica y por tanto, el elemento neutro de las translaciones con la operación de composición. De igual manera, si un punto X se traslada por $\overrightarrow{PQ}$, y la imagen es trasladada por $\overrightarrow{QP}$, el punto resultante es X, lo que quiere decir que la isometría inversa de una translación $\overrightarrow{PQ}$ es la translación $\overrightarrow{QP}$. Adicionalmente, la composición es operación asociativa y conmutativa en el conjunto de las translaciones τ. Por tanto, el conjunto de las translaciones con la operación de composición tienen estructura de grupo abeliano.



Reflexión Central

Si P es un punto fijo, la reflexión central $[P]$ sobre P (llamado el centro de la reflexión central) es una función:

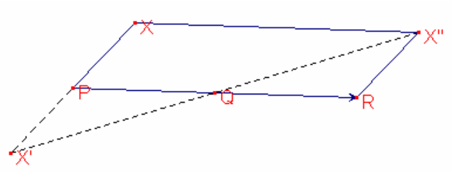
$$[P] : \Pi \to \Pi$$
$$X \to [P](X)$$



Donde $[P](X)$ es el extremo del segmento cuyo punto medio es P y uno de sus extremos es X. Si P y X son el mismo punto, la función $[P](P)$ corresponderá al punto P, es decir $[P](P) = P$.

Para toda reflexión central, su función inversa es ella misma, pues si X es un punto del plano y X' es la reflexión central de X por un punto fijo P, entonces el segmento $\overline{XX'}$ tiene como punto medio a P, esto quiere decir que la reflexión de X' por P es el punto X, es decir $[P]\circ[P](X) = X$ para cada X de Π, es decir $[P]\circ[P] = I$.

Al componer dos reflexiones centrales, se obtiene una translación, es decir, $[Q] \circ [P] = \overrightarrow{PR}$ donde $R = [Q](P)$.



De lo anterior se puede deducir que si se une el conjunto de las translaciones al conjunto de las reflexiones centrales, la composición es operación binaria en este nuevo conjunto, ya que al componer una reflexión central y una translación o viceversa, se obtiene una reflexión central, por tanto, este nuevo conjunto con la operación de composición tienen estructura de grupo.

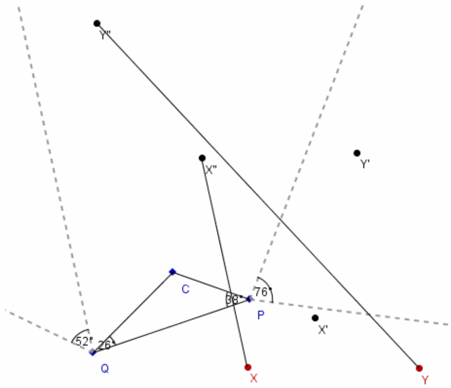
Rotaciones

Una rotación por un punto fijo P (centro de rotación) según un ángulo dirigido $\alpha \in (-180^o, 180^o]$, es una función $[P(\alpha)]$ definida como

$$[P(\alpha)] : \Pi \to \Pi$$
$$X \to [P(\alpha)](X)$$

Donde

1. $[P(\alpha)](X) = X$, si $X = P$.
2. $[P(\alpha)](X)$ es un punto X' tal que $d(P, [P(\alpha)](X)) = d(P, X)$ y $\angle XP[P(\alpha)](X) = \alpha$, si $X \neq P$.



Respecto a la composición de rotaciones, si dos de ellas tienen el mismo centro P, entonces la función compuesta es una rotación con centro P y ángulo dirigido igual a la suma de la medida de los ángulos dirigidos de las dos rotaciones que se componen, es decir $[P(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [P(\beta+\alpha)]$; si son dos rotaciones $[P(\alpha)]$ y $[Q(\beta)]$ con centros diferentes y cuya suma de las medidas de sus ángulos no es 0º o 360º, entonces la composición es una rotación con centro en el punto C, que es el tercer vértice del triángulo CQP tal que la medida de los ángulos CPQ y CQP es la mitad de los ángulos de giro respectivamente y, el ángulo de rotación es $\beta+\alpha$; en el caso en que los centros sean diferentes y la suma de la medida de los ángulos sea 0º o 360º, la composición es una translación. Si se compone una translación con una rotación, el resultado es una rotación, $\overleftarrow{CD} \circ [P(\alpha)] = [Q(\alpha)]$ donde existe □$PCD[Q(\alpha)](P)$; si se compone una rotación con una translación, el resultado también es una rotación, es decir $[P(\alpha)] \circ \overleftarrow{BA}$ es una rotación.

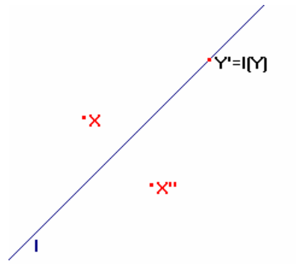
Lo anterior muestra que si al conjunto de las rotaciones denotado por **Rot** se une el de las translaciones, la composición en este nuevo conjunto es una operación binaria y se determina la estructura ($\tau \cup$ **Rot**, $\circ$).

La estructura ($\tau \cup$ **Rot**, $\circ$) es semigrupo, ya que la asociatividad se deduce de la asociatividad de (***R***, $\circ$). Por otro lado, la isometría inversa de una rotación $[P(\alpha)]$ es una rotación con el mismo centro, y ángulo dirigido igual al inverso aditivo de α, es decir $[P(\alpha)]^{-1} = [P(-\alpha)]$. En consecuencia, ($\tau \cup$ **Rot**, $\circ$) tiene estructura de grupo.

Reflexiones Axiales

Una reflexión axial sobre una recta l (eje de la reflexión axial) se define como una función sobre Π

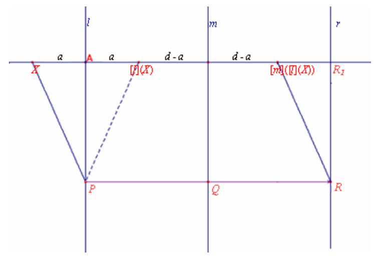
$$[l] : \Pi \to \Pi$$
$$X \to [l]\,(X)$$



donde

1. Si $X \in l$, entonces $[l](X) = X$.
2. Si $X \notin l$, entonces l es la bisectriz perpendicular de $\overline{X[l](X)}$.

La composición de reflexiones axiales no es una operación binaria en el conjunto, pero el comportamiento de esta relación es muy especial, ya que las isometrías definidas hasta el momento pueden expresarse como composición de dos reflexiones axiales.



Si el eje de simetría l y m de dos reflexiones axiales son rectas paralelas, entonces $[m] \circ [l] = \overrightarrow{PR}$, donde la dirección de P a R es la dirección de l a m sobre la perpendicular y a través de una distancia igual a $2d(l,m)$. Si los ejes de simetría l y m de las reflexiones axiales $[l]$ y $[m]$ son perpendiculares, $[m] \circ [l] = [P]$ donde P es el punto de intersección entre m y l. Ahora, cuando los ejes de simetría de las reflexiones axiales forman ángulos α y β, la composición de las dos reflexiones axiales $[m]$ y $[l]$ es una rotación con centro en el punto de intersección de las dos rectas y la medida del ángulo igual a $\gamma = 2\cdot\text{Min}\{|\alpha|,|\beta|\}$, en dirección de l a m, es decir que $[m] \circ [l] = [P(\gamma)]$ donde $P = l \cap m$. En el caso en que $2\cdot\text{Min}\{|\alpha|,|\beta|\}$ sea mayor que 180º, entonces $\gamma = 360º - 2\cdot\text{Min}\{|\alpha|,|\beta|\}$.

Existen otros subgrupos de ($\boldsymbol{R}$, ○) que se mostrarán sucintamente en la presentación.

Metodología

La conferencia se desarrollará bajo un ambiente participativo, en el cual se mostrarán construcciones realizadas en el software regla y compás para que los asistentes realicen conjeturas e induzcan las propiedades de las isometrías y sus subgrupos, estas conjeturas serán empleadas en la formalización de conceptos y propiedades.

Conclusiones

Al finalizar la conferencia, se espera que con los asistentes se llegue a las siguientes conclusiones:

- La composición de traslaciones es cerrada y conmutativa
- La composición de reflexiones centrales y translaciones es una reflexión central, mientras que la composición de dos reflexiones centrales es una traslación.
- Dados dos puntos *X* y *Y* y sus respectivas imágenes por una isometría *X'*, *Y'*:
  La transformación aplicada es una translación si existe el paralelogramo *XX'Y'Y*; es una reflexión central si existe el paralelogramo *XYX'Y'*; es una rotación si la mediatriz de los segmentos *XX'* y *YY'* se intersecan en un punto *P* ó es una reflexión axial si los segmentos *XX'* y *YY'* tienen la misma mediatriz.

Referencias bibliográficas

COXETER, H. (1968). Geometric transformations group and other topics. Mathematical association of America. En: CUPM geometry conference.

FONSECA, J. SÁNCHEZ, B (2004). Tutorial de Presentación Acerca de Algunas Aplicaciones del los Grupos Cociente. Trabajo de grado. Universidad Pedagógica Nacional.

GUGGENHEIMER, H. (1967). Plane Geometry and its Groups. Holden day.

PÉREZ, E. Manuscrito Aplicaciones de transformaciones rígidas.