REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 1, 84-100

EL TANGRAM Y EL PLEGADO: DOS RECURSOS PEDAGÓGICOS PARA APROXIMARSE A LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES PROPIAS

CLARA I. RODRÍGUEZ Y ALVARO SARMIENTO

En este artículo se presentan algunas reflexiones en torno al diseño e implementación de una propuesta en la que se utilizó el tangram y el plegado como recursos pedagógicos, para la enseñanza en grado sexto de las fracciones propias bajo la interpretación de la fracción como relación parte-todo.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, la educación matemática está exigiendo tanto a docentes como a directivos hacer una reflexión en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje que se están llevando en las aulas y a su incidencia en la vida práctica de los estudiantes. Esta exigencia ha ido gradualmente originando cambios en los enfoques de enseñanza de las matemáticas; ahora ya no se presta tanta atención al aprendizaje memorístico y algorítmico que enfatiza la mecanización de procedimientos. Hoy, más bien —como se afirma, por ejemplo, en los *Estándares curriculares* del NCTM (1989)— se intenta exigir y potenciar al estudiante en cuanto a sus capacidades para la resolución de problemas y para la interpretación y argumentación de ideas matemáticas.

Sin embargo, a pesar de que en nuestra labor con los estudiantes de grado sexto del Centro Educativo Distrital Brasilia Bosa se han realizado esfuerzos para poner en práctica acciones más coherentes con las exigencias actuales, la diversidad de tópicos que se pueden abordar en las matemáticas escolares, aunada a la frecuente complejidad de su enseñanza, nos conduce a enfocar dichos esfuerzos en tópicos muy puntuales.

Uno de los temas que pensamos que necesita atención es el relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones propias. En este tópico, los docentes, por ejemplo, solemos no ser tan conscientes de las diversos enfoques conceptuales que pueden guiar su enseñanza o de los diversos errores y dificultades que pueden subyacer a su aprendizaje. Usualmente no prestamos la debida atención a cuáles pueden ser los posibles significados que los estudiantes construyen alrededor de la idea de fracción propia, a qué interpretaciones de los estudiantes suscitan la utilización de las diferentes representaciones o a otras formas de guiarlos en la realización de operaciones aritméticas entre fracciones.

Inquietudes como las anteriores y el intento de aproximarnos a responder estos interrogantes fueron los acicates para trabajar en el diseño e implementación de una propuesta pedagógica, que se apoyó en la utilización del tangram y el plegado para introducir a los estudiantes de grado sexto al concepto de fracción propia. En este artículo se da cuenta de dicha experiencia a través de dos partes: la primera, donde se encuentran algunas consideraciones conceptuales relativas al tópico, y la segunda donde se presentan detalles relativos al diseño, puesta en práctica y análisis de la propuesta.

CONSIDERACIONES CONCEPTUALES

Interpretación de la fracción como relación parte-todo[1]

Al revisar algo de la literatura disponible acerca del tema se puede encontrar que la idea de fracción ha sido abordada desde diferentes perspectivas (ver por ejemplo, Behr, Wachsmuth y Post, 1985; Behr, Post y Wachsmuth, 1986; Llinares y Sánchez, 1988, entre otros). Al parecer, como lo sugiere Orton (1996, p. 19-20), hay consenso en muchos autores, en cuanto a que el concepto y uso de la fracción compromete variados y complejos procesos mentales.

En particular, el concepto de fracción se puede considerar desde la interpretación de la fracción como relación parte-todo. Bajo esta perspectiva, como dice Llinares y Sánchez (1988, p. 55), el tipo de situaciones que ponen en juego su conceptualización se presenta

> cuando un 'todo' (continuo o discreto) se divide en partes 'congruentes' (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de 'objetos'). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios 'todos').

Cuando algún objeto o ente abstracto que va a ser dividido se considera un todo o unidad, éste puede ser relativo a un contexto continuo si alude a superficies, regiones geométricas, rectas, líquidos, etc., o como relativo a un contexto discreto en el caso de conjuntos de elementos. Para que tenga sentido la interpretación de la fracción como relación parte-todo en el contexto

1. Para ver otras posibles interpretaciones de la fracción el lector puede consultar, por ejemplo, Llinares y Sánchez (1988, p. 52- 74),

continuo, se debe suponer que el todo se divide en partes congruentes. Entonces, para ambos contextos se dice que la fracción indica la relación que existe entre un número de partes que se toman y el número total de partes del todo o la unidad.

Para acceder al concepto de fracción bajo la interpretación parte-todo, es necesario que el estudiante desarrolle capacidades como las propuestas por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, citados en Llinares y Sánchez, 1988, p. 80):

- capacidad de dividir el todo en sus partes, la cual implica tener claro que un todo esta compuesto por partes separables; así, una región al igual que un conjunto, son consideradas divisibles y la separación o división se hace en un número determinado de partes;
- capacidad de reconocer el todo cuando las subdivisiones cubren completamente el todo, es decir, donde la reunión de las partes forman nuevamente el todo, lo cual implica la conservación del mismo;
- capacidad de realizar divisiones del todo en partes congruentes o en partes donde el área es equivalente, lo cual no implica que tengan que ser de la misma forma;
- capacidad de reconocer las partes del todo, como en algunas situaciones donde las partes se pueden considerar como totalidad, principalmente en situaciones problemas —por ejemplo en la expresión: 'en un grupo de estudiantes la mitad son futbolistas y $2/3$ del resto son músicos', donde para representar los músicos se debe considerar la mitad de estudiantes como el todo, y los $2/3$ como parte de ese todo, sin embargo, tanto los músicos como los futbolistas hacen parte del todo.

Algunos errores y dificultades

También la revisión de literatura por un lado, y por otro lado la propia experiencia con los estudiantes, nos ha permitido identificar algunos de sus errores más frecuentes con respecto a la interpretación de la fracción propia como relación parte-todo. A continuación haremos una breve descripción de algunos de ellos.

Al pedir que representen gráficamente una fracción propia —por ejemplo, representar $2/3$ en un contexto continuo— no siempre dividen el todo o la unidad en partes congruentes; este error es muy frecuente en los estudiantes principalmente de los grados sexto y séptimo, aunque la imprecisión en la gráfica que generalmente se evidencia a veces puede darse por razón de que ésta es trazada a mano alzada; también encuentran dificultades si utilizan papel cuadriculado y el número de cuadraditos de la unidad no es múltiplo del denominador de la fracción. A juzgar por estos resultados, el estudiante no es consciente de la necesidad de la congruencia en la medida de área cuando trabaja en un contexto continuo, mientras que si trabaja en un contexto discreto el estudiante no presenta esta dificultad a no ser que —como también ocurre cuando se usa el papel cuadriculado— el número de objetos del todo no sea múltiplo del denominador de la fracción.

Los estudiantes usualmente no identifican el todo o la unidad cuando se hace referencia a un contexto particular o a situaciones problemas como por ejemplo: 'Antonio gasta en mercado $70/100$ de su salario', 'Hernando escribió $4/6$ de la obra', 'la jornada de trabajo es $8/24$ del día'. En este tipo de situaciones, al estudiante le es muy difícil imaginarse una representación gráfica para hacer una interpretación del problema, más aún, cuando la situación está compuesta por una serie de datos donde el todo que sirve de referencia cambia a medida que se lee el enunciado, como en el siguiente ejemplo: 'en la mitad del terreno de una finca se siembra pasto, en la tercera parte de lo que queda se siembra café y en las tres quintas partes del resto se siembra maíz; determinar: a) la parte de la finca sembrada de café, b) la parte de la finca sembrada de raíz, y c) la parte de la finca que fue sembrada'. Este tipo de problemas ponen en evidencia las dificultades que tiene el estudiante para comprender el concepto de fracción propia.

Una situación en la que los estudiantes presentan mayores dificultades, es la que hace referencia a tomar diferentes fracciones de una misma unidad para luego operar sobre ellas, como por ejemplo la siguiente: 'una familia destina la mitad de sus entradas mensuales para alimentación, un tercio del resto para vivienda, un sexto de este resto para estudio, y el dinero que sobra lo ahorra; si el ingreso mensual de la familia es de $1.800.000 ¿cuánto deja para ahorro?'. Nótese que la diferencia de este ejemplo con el anterior, no sólo consiste en la aparición de una cantidad total de referencia; ahora se debe tener en cuenta hasta terminar el proceso la doble contabilidad de lo que se gasta en cada rubro y de lo que va quedando del todo.

Otro error está relacionado con la dificultad del estudiante para establecer el significado del numerador y el denominador dentro de la fracción. Con mucha frecuencia los estudiantes invierten, en la interpretación de una gráfica, el numerador y el denominador; en unos casos, pareciera que buscan dividir el número más grande entre el número más pequeño, posiblemente por la dificultad que se presenta en aritmética cuando el dividendo es menor que el divisor o porque existe en ellos la idea de conmutabilidad de la división; en otros casos, aunque la interpretación numérica, por ejemplo de $2/5$

no genera dificultad y la leen como: ‘de cinco partes en que está dividida la unidad tomo dos’, para $5/2$ no comprenden que de dos partes se tomen cinco, por lo que repiten la interpretación hecha para $2/5$.

Otro aspecto en el que se advierten dificultades es en la representación de una serie de fracciones, donde los estudiantes no conservan el tamaño de una unidad patrón; es decir, si están trabajando con la cuadrícula del cuaderno, toman rectángulos de 2, 3, 5 y 7 cuadraditos para representar $1/2$, $1/3$, $1/5$ y $1/7$ respectivamente; igualmente si se utiliza papel sin líneas, amplían o comprimen la unidad de acuerdo al denominador de la fracción. Al respecto se presentan aún más dificultades cuando utilizan otras figuras geométricas, diferentes a rectángulos, para la representación gráfica de las fracciones.

También se evidencian dificultades cuando se les pide a los estudiantes que sobre la representación gráfica de un segmento —que se debe considerar como un todo— representen la fracción propia $1/4$; muchas veces suelen no tomar el segmento como un todo y dividen un pedazo del segmento en cuatro partes congruentes; entonces el segmento queda dividido en cinco partes y la última no es necesariamente congruente con las demás. Igualmente, la asignación del numeral —es decir, del símbolo numérico que define a la fracción (NCTM, 1972, p. 14)— genera confusiones ocasionales en el estudiante.

Consideraciones didácticas

A la luz de las apreciaciones señaladas hasta el momento, parece conveniente abordar en el trabajo de aula con estudiantes, tanto contextos continuos como contextos discretos. Sin embargo, no es claro que haya una opinión unánime en cuanto a cuál contexto puede propiciar más apropiadamente el aprendizaje de la fracción bajo la perspectiva de la relación parte-todo. Por ejemplo, mientras que para Payne (1975) la utilización inicial de contextos discretos puede ocasionar mayores dificultades, Novillis (1976) opina que ambos contextos implican el mismo grado de dificultad.

Sin importar con cual contexto se inicie la enseñanza, y dado que el docente tiene la responsabilidad en la programación y desarrollo del tema, es aconsejable que tenga en cuenta las diversas dificultades que deben enfrentar los estudiantes y en consecuencia considere en su planeación aspectos como los siguientes:

- fortalecer la interpretación de la fracción propia mediante la traducción entre diferentes representaciones (verbal, gráfica, numérica);

- contextualizar la fracción propia en una gran variedad de contextos y situaciones;
- utilizar diferentes recursos pedagógicos que propicien una mejor comprensión de conceptos;
- procurar una atmósfera de trabajo en la que se promueva, para el aprendizaje del conocimiento matemático, la libertad de expresión de pensamiento y la confianza tanto para preguntar como para responder sin temores.

Para abordar el concepto de fracción existen diferentes materiales didácticos que se consiguen en el comercio o que son de fácil construcción. La mayoría de ellos se caracterizan por ser materiales de uso exclusivo para el reconocimiento de las fracciones. El tangram y el plegado son dos recursos pedagógicos que en general no se utilizan para enseñar las fracciones, sino para realizar actividades lúdicas de formación de figuras, con las fichas en el primer caso o haciendo dobleces en el segundo, pero que también le permiten al estudiante acceder al estudio de las fracciones de una manera agradable.

En consonancia con las recomendaciones anteriores, decidimos considerar la utilización del tangram y el plegado, y hacer el diseño de unas guías de trabajo que posibilitaran la implementación de estos recursos pedagógicos en el aula. Para finalizar estas consideraciones, se hará referencia a las principales características de estos recursos.

El Tangram

El tangram es un cuadrado dividido en siete partes: dos triángulos grandes, un triángulo mediano, dos triángulos pequeños, un paralelogramo y un cuadrado (ver la Figura Nº 1). Podríamos decir que el tangram se puede considerar como un contexto discreto pues sus partes son separables, por ejemplo, es posible pensar en que el triángulo más pequeño es una figura patrón a partir de la cual se puede rellenar el cuadrado con 16 de esos triángulos; sin embargo, no parece recomendable pensar el tangram como un contexto discreto, si se acepta que un contexto es discreto cuando se toma como unidad de referencia un conjunto global y se entiende la parte como la cantidad específica de elementos que se toma del conjunto; en realidad, cuando se utiliza el tangram, la atención se puede centrar más en las áreas de los elementos que lo conforman, que en la cantidad de elementos del conjunto, a menos que se recurra a fraccionar físicamente y de manera congruente todas sus partes.

En el tangram, bajo la interpretación de la fracción como relación parte-todo, se toma el todo como el cuadrado que se forma con las siete fichas y se establece que las partes son las siete fichas que lo componen.

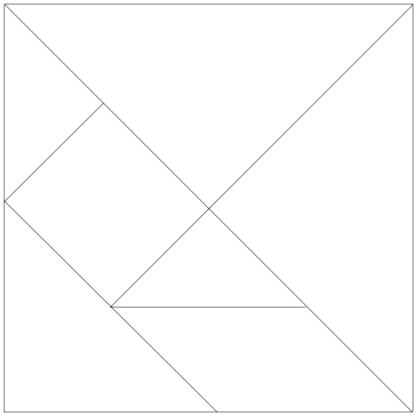

Figura Nº 1. Modelo de un tangram

Fichas	Parte del área del cuadrado unidad
Triángulo grande	$1/4$
Triángulo mediano	$1/8$
Triángulo pequeño	$1/16$
Paralelogramo	$1/8$
Cuadrado pequeño	$1/8$

Tabla Nº 1. Fracción o relación parte-todo de los elementos del tangram

El tangram presenta algunas ventajas y también limitaciones como recurso pedagógico. En cuanto a ventajas se puede mencionar que permite dividir la unidad en partes separables que se pueden manipular fácilmente y trabajar con la unión de ellas; se puede establecer la fracción propia que representa cada una (ver la Tabla Nº 1). Posibilita el comprobar congruencia de áreas por superposición, ya que algunas de las figuras muestran la misma área aunque tengan diferente forma; se pueden conseguir diferentes valores de fracción si se recurre a la unión de figuras; permite abordar los conceptos de superficie, área y equivalencias de cantidades de áreas de figuras de diferente forma. Y en cuanto a desventajas, se puede mencionar que no le permite al estudiante la visualización de cualquier fracción propia y le exige tener una comprensión aceptable acerca del concepto de área.

El plegado

El plegado es claramente un material de contexto continuo que permite trabajar con el área de regiones como partes de la unidad, aunque no se maneje explícitamente el concepto de área.

Algunas ventajas que le vemos a la utilización del plegado son: la manipulación a través de los dobleces que permite el fraccionamiento de la unidad en diferentes formas y la verificación de la congruencia de las partes; la manipulación libre de la unidad con el fin de determinar alguna fracción solicitada, bien sea por superposición de regiones o por medición de áreas; la comprobación de la relación parte-todo de la fracción; la solución de algunos problemas de fracciones mediante la sóla manipulación de la hoja de plegado. Además, el papel es un material accesible a todos los estudiantes por su economía y fácil consecución. En cuanto a desventajas, se tienen que los dobleces usualmente quedan marcados lo que no permite correcciones en la misma hoja; requiere de parte del estudiante habilidades motrices para realizar los dobleces con buena precisión y lograr la congruencia de las partes.

IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Se determinó iniciar el estudio del concepto de fracción propia en dos de los cursos de grado sexto del Centro Educativo Distrital Brasilia Bosa, desde el contexto continuo. Con las actividades propuestas se pretendía observar y dar cuenta de los procesos llevados a cabo en el trabajo de aproximación al concepto de fracción propia, de acuerdo con las guías diseñadas para cada uno de los recursos utilizados, el tangram en un curso y el plegado en el otro.

Propuesta con el tangram

Para propiciar la interacción del estudiante con el tangram y con la conceptualización de la fracción como relación parte-todo, se diseñó una guía que consiste de una serie de once ítems que se dividió en dos secciones. Esperábamos que con base en la manipulación del tangram, el estudiante pudiera desarrollar los ítems.

La primera sección, que presentamos a en la Tabla Nº 2, consiste de seis ítems que tenían como intención que el estudiante reconociera cada una de las fichas como parte del todo.

En el primer ítem se pretendía que el estudiante reconociera mitades de un todo, para ello miramos si el estudiante podía dividir en dos partes iguales el conjunto de figuras. Como pensábamos que el alumno comienza a cono-

1) Divida el tangram en dos figuras con igual área.
2) ¿Cómo se puede asegurar que tienen la misma área?
3) ¿Que parte de la unidad es cada una de las figuras?
4) Divida el tangram en cuatro figuras con igual área.
5) ¿Cómo se puede asegurar que tienen la misma área?
6) ¿Que parte de la unidad es cada una de las figuras?

Tabla Nº 2. Primera parte de la guía propuesta para utilizar el tangram

cer las fracciones en la experiencia cotidiana de su hogar —cuando por ejemplo, se le pide que reparta en dos partes iguales o que parta "por la mitad"— esperábamos que todos desarrollaran este ítem en forma rápida; así sucedió, salvo por el hecho de que a ningún estudiante se le ocurrió por ejemplo, "armar" una mitad utilizando el cuadrado, un triángulo grande y los dos triángulos pequeños.

En el segundo ítem se pretendía que el estudiante trabajara con el concepto de área. En particular, esperábamos que la mayoría de estudiantes utilizara argumentos basados en la superposición de figuras para comparar áreas y establecer su equivalencia y en realidad eso fue lo que observamos. Sin embargo, cabe destacar que, como parte de la argumentación, la superposición de los dos triángulos pequeños sobre el paralelogramo fue menos frecuente.

En el tercer ítem se pretendía que el estudiante le asignara algún numeral a la mitad, aunque la pregunta no lo pedía explícitamente. Para ello miramos la expresión numérica que escribía el estudiante y en general se observó que la representaron como $1/2$.

Los ítems cuarto, quinto y sexto tenían intenciones respectivamente similares a los tres primeros, sin embargo en estos últimos, al pedir que la división del tangram se hiciera en cuatro partes, la tarea se complejizaba. Por ejemplo, en el cuarto ítem considerábamos que para dividir el tangram en cuatro figuras de igual área, el estudiante tendría un poco más de dificultad porque necesitaría entender que las partes consideradas no necesariamente debían tener la misma forma. En efecto, notamos que se presentó esta dificultad pues por un lado, los estudiantes se tardaron más para dar las respuestas que en el caso de la tres primeras preguntas; por otro lado, fueron más recurrentes las argumentaciones en las que los estudiantes trataban de explicar la equivalencia del área de una figura con el área total de otras figuras, como por ejemplo la del paralelogramo y la de los triángulos pequeños, mientras que anteriormente bastaba con explicaciones relativas a la igualdad en la forma de las figuras. Sin embargo, para las figuras más pequeñas los estudiantes pudieron indicar con numerales de fracciones a qué parte del área de la figura total, corresponde el área de ellas, utilizando como patrón el triángulo pequeño. También lograron establecer cuáles figuras tenían la misma área sin tener la misma forma.

La segunda sección de la guía contiene cinco ítems (ver la Tabla Nº 3). En esta sección se pretendía que el estudiante pudiera imaginarse cómo se podría dividir el todo en ocho partes, es decir cómo dividir cada una de las mitades en cuatro partes. Aquí hay que notar, que de manera previa a la presentación de las preguntas aparece una breve explicación que tiene la intención de contarle al estudiante que es imposible dividir físicamente —a menos que se corte el material— el todo en ocho partes de área equivalente, pero que sí es posible dividir una de las mitades en cuatro partes de área equivalente.

Las preguntas séptima y octava pretendían guiar al estudiante para que se imaginará dicha división y la justificara, mientras que las preguntas novena, décima y undécima pretendían, por un lado, que el estudiante relacionara el área de las figuras imaginadas con el área total a partir del triángulo pequeño usado como un patrón de medida, y por otro, que reconociera la fracción propia que representan todas y cada una de las fichas del tangram.

No se puede dividir la figura en ocho partes con igual área, pero si excluimos los dos triángulos más grandes con las figuras restantes podemos tener cuatro figuras de igual área.
7) ¿Cómo se puede asegurar que tienen la misma área?
8) ¿Que parte de la unidad es cada una de las figuras?
9) ¿Con cuántos triángulos de los más pequeños se podría cubrir el cuadrado unidad?
10) ¿Qué parte de la unidad es cada uno de estos triángulos?
11) A qué fracción de la unidad corresponde cada una de las figuras del tangram: triángulo grande, triángulo mediano, cuadrado, paralelogramo, triángulo pequeño.

Tabla Nº 3. Segunda parte de la guía propuesta para trabajar con el tangram

Al implementar esta segunda parte observamos que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para desarrollar varios ítems. En primer lugar, debemos señalar que no resultó tan clara la explicación inicialmente planteada, por ello fue necesaria la intervención de los profesores para aclararla. Luego, al mirar como abordaban los estudiantes la pregunta octava, notamos que no se presentaban argumentaciones que permitieran dar cuenta de que establecían la conexión entre el cuarto de la mitad y el octavo del todo, como las que pensamos que podían darse al contestar esta pregunta. Por ejemplo, había estudiantes que nos podían mostrar que el área de la figura hecha con la unión del triángulo mediano y el paralelogramo era equivalente a la de la figura formada con la unión de los triángulos pequeños y el cuadrado, pero no señalaban que la unión de dos triángulos medianos equivalía a un triángulo grande. Tal vez no lo hicieron porque no había físicamente dos triángulos medianos, pero nos inclinamos a pensar que la verdadera razón se encuentra en la formulación misma de la preguntas que no propiciaron que se notaran hechos como el señalado antes.

Propuesta con el plegado

Para llevar a cabo la propuesta con el plegado se formaron grupos de trabajo de tres estudiantes, a cada grupo se le entregó una guía de preguntas y una hoja en blanco de forma cuadrada. Se dijo que dicha hoja sería considerada como unidad y que se iría doblando de acuerdo a las instrucciones dadas en cada item, previas a las preguntas.

1) Doble la hoja o unidad por la diagonal.
   a. ¿En cuántas partes quedó dividida la unidad? ¿Son iguales estas partes?
   b ¿Cómo probamos que son iguales?
   ....
   h. ¿A que fracción de la unidad equivale la parte coloreada total?

2) Doble nuevamente la unidad, por el lado más largo del triángulo.
   a. ¿En cuántas partes quedó dividida la unidad? ¿Son iguales estas partes?
   ....
   h. ¿A que fracción de la unidad equivale la parte coloreada total?

3) Doble nuevamente la unidad, por el lado más largo del triángulo.
   a. ¿En cuántas partes quedó dividida la unidad? ¿Son iguales estas partes?
   b ¿Cómo probamos que son iguales?
   c. Coloree una de esas partes en color azul
   d. ¿A que fracción de la unidad equivale la parte coloreada de azul?
   e. ¿A que fracción de la unidad equivale la parte en blanco?
   f. A esta parte la llamamos: ___________________________
   g ¿A que fracción de la unidad equivale la parte coloreada en rojo?
   h. ¿A que fracción de la unidad equivale la parte coloreada total?

Tabla Nº 4. Guía propuesta para trabajar con el plegado

En esta guía se presentaba un proceso de varios pasos en cada uno de los cuales se pedía hacer un nuevo doblez de la hoja por el lado que estaba en blanco. Así por ejemplo, cada vez la región resultante se coloreaba de un color distinto.Dada la similitud en las preguntas de las tres items que se propusieron en esta guía, los comentarios acerca de la misma se harán solamente con respecto al tercer ítem, el cual se presenta en la Tabla Nº 4. El enunciado allí comienza pidiendo que se “doble nuevamente la unidad por el lado más largo del triángulo”. Entonces, para realizar esta acción el estudiante debe tener presente la aclaración hecha de que la unidad está representada por la hoja entregada. Al proponer esta acción se pretendía precisar el vocabulario necesario para la manipulación de dobleces de la hoja y recordar si fuera necesario conceptos geométricos como área, cuadrado, diagonal de un cuadrado y congruencia; además, se quería garantizar que el grupo de estudiantes realizara un plegado similar para facilitar la comunicación entre todos.

En la pregunta a. se pretendía que el estudiante reconociera el total de partes en que iba quedando dividida la unidad a medida que realizaba los pliegues propuestos. En este trabajo vimos que los estudiantes notaban que cada vez que se hacía un nuevo pliegue el número de partes se duplicaba.

En la pregunta b. se pretendía que el estudiante reconociera la división en partes congruentes y que justificara el proceso de reconocimiento. Se observó que el estudiante, al realizar la acción, utilizaba argumentaciones basadas en la superposición de partes.

En la pregunta c. se pretendía que el estudiante reconociera que las nuevas regiones producidas al plegar, las cuales se coloreaban, eran nuevos representantes de las partes en que se podía dividir la unidad. Aquí es prudente fijarse en si el estudiante nota que al seguir este proceso, a medida que se hace un nuevo doblez la región que había quedado sin colorear en el paso anterior, queda dividida en dos partes congruentes que corresponden por tanto a la mitad de esa región; este hecho sólo era advertido por unos pocos estudiantes a pesar de que la mayoría lograba reconocer que la nueva región podía dividir la unidad en partes congruentes.

En la pregunta d. se pretendía que el estudiante, además de que reconociera la nueva parte coloreada en el mismo sentido de la pregunta anterior, estableciera una relación entre esta parte y el número total de partes en que hasta el momento había sido dividida la unidad y así poder asignar el numeral a la fracción propia correspondiente. En este punto se observó que los estudiantes que habían seguido con atención el proceso daban una respuesta correcta, sin embargo, algunos interpretaron que la expresión “parte coloreada de” se refería al total de la regiones coloreadas hasta el momento.

En la pregunta e. se pretendía que el estudiante reconociera que la región que iba quedando en blanco era congruente con la región que acababa de colorear y que determinara el numeral respectivo de la fracción propia para dicha región. En general se observó que los estudiantes no tuvieron dificultad para reconocer la congruencia y realizar la asignación del numeral.

En la pregunta f. se pretendía que el estudiante escribiera en palabras lo que representa la fracción propia. En esta parte se observó que algunos estudiantes escribieron expresiones como "un ochoavo", las cuáles eran corregidas por el profesor cuando se detectaban.

En la pregunta g., que como las otras es una pregunta que se repite en los otros items de la guía, se pretendía que el estudiante reconociera la existencia de fracciones equivalentes. Es decir, se quería que se diera cuenta de que a pesar de que el área era una invariante, el numeral de la fracción propia podía asumir valores tales como $1/2$, $2/4$, $4/8$ y $8/16$. En este punto fue interesante observar la reacción de los estudiantes; se advirtió cierta inquietud en muchos de ellos cuando notaban que a veces no coincidían las respuestas entre miembros de un mismo grupo. Esto los obligaba a verificar de nuevo su respuesta volviendo a contar partes en el plegado.

En la pregunta h. se pretendía que el estudiante reconociera la fracción propia que se debía asociar a la parte total coloreada como equivalente a la adición de las fracciones asignadas a las partes coloreadas. Esta intención no se logró pues aunque los estudiantes reconocían y escribían el numeral de la fracción propia correspondiente al número de partes coloreadas en términos de la región generada en el último doblez sobre el total de partes congruentes en que había quedado dividida la unidad, no pudieron asociar esta fracción con la suma de los numerales de las fracciones propias que habían encontrado al colorear las regiones en los dobleces previos. Asociaron dicha fracción con la suma de partes de distinto color.

La hoja entregada [ver Figura Nº 2] representa el terreno de una empresa de flores en la que está construido un almacén y un salón de materiales, además se encuentra una región destinada al cultivo de rosas y han quedado dos zonas libres. ¿Qué fracción del terreno ocupa el cultivo de rosas? ¿Qué fracción del terreno ocupa el almacén? ¿Cuál el parqueadero?, ¿Cuál el salón de materiales? ¿Qué fracción del terreno ha quedado libre?

Tabla Nº 5. Situación planteada a los estudiantes para manejar el plegado.

Para cerrar esta propuesta se planteó, a manera de evaluación, una situación problemática que permitiera a los estudiantes la aplicación de los conceptos trabajados en la guía anterior. Para ello se realizó una actividad en la que se entregó una hoja rectangular con unas regiones coloreadas (ver la Figura Nº 2) y el enunciado presentado en la Tabla Nº 5.

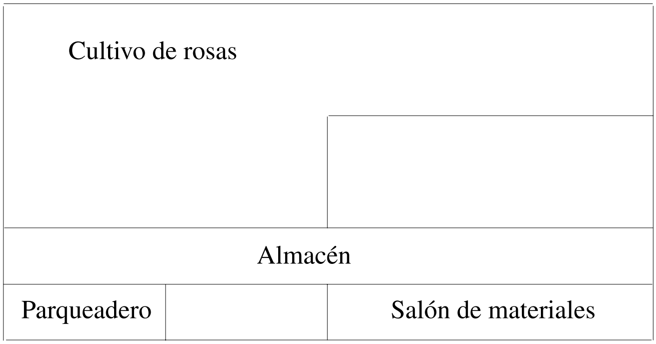

Figura Nº 2. Gráfico del terreno de la situación planteada como evaluación

La situación que se propuso al estudiante pretendía verificar si éste era capaz de solucionar un problema de fracciones a través de la utilización del plegado. Al aplicar esta evaluación se observó que para determinar las fracciones pedidas, algunos estudiantes se dedicaron a mirar la representación del terreno y rápidamente determinaron la fracción propia sin necesidad de plegar y sin justificar su respuesta; dentro de este grupo algunos dieron la respuesta correcta y al pedirles una justificación, nos sorprendió que se presentaron argumentos válidos que se basaban en traslaciones de regiones congruentes con la representación esgrimida, que habían realizado mentalmente. De lo anterior se infiere que el estudiante fue capaz de modificar la forma del todo.

Por otra parte, en general el resto de estudiantes llegaron a una respuesta correcta manipulando el plegado. Se observó que algunos tuvieron que realizar un mayor número de manipulaciones del plegado; no obstante, en la sustentación que dieron todos estos estudiantes se notó precisión, un adecuado uso del lenguaje y la determinación apropiada de numerales para las fracciones.

Comentarios finales

Para aludir a algunas inquietudes adicionales que surgieron como consecuencia del trabajo realizado y hacer un balance final de la implementación del mismo, se presentan a manera de conclusión algunos comentarios. La mayoría de los comentarios hacen alusión a algunos aspectos que se consideraron en la interpretación de la fracción como relación parte-todo, y los dos últimos dejan como mensaje la necesidad de estar alertas tanto al tipo de tareas que les proponemos a los estudiantes, como a la observación detallada de las respuestas de los estudiantes en la implementación de propuestas pedagógicas, como la que fue objeto de reflexión en este artículo.

En el caso de la propuesta del tangram, la mayoría de estudiantes reconocieron el todo al superponer las figuras sobre el cuadro unidad y además advirtieron que al separar las partes y al volver a unirlas, el todo se mantenía; sin embargo, también observamos, pero en menor proporción, estudiantes que luego de que habían desordenado las fichas olvidaban cual era la unidad. En el caso de la propuesta del plegado la imposibilidad de dividir la hoja durante la implementación de la propuesta, nos llevó a suponer que el estudiante no podría —al realizar la actividad posterior de evaluación— concebir algún tipo de variación en la presentación de la forma rectangular dada; sin embargo, los resultados de los estudiantes al argumentar sus respuestas en términos de traslaciones de algunas de las partes sugieren que el supuesto que teníamos no parece tan cierto y merece ser objeto de una revisión más detenida en una futura reelaboración de esta propuesta.

Con respecto a la capacidad de los estudiantes para identificar las fracciones y explicitar los numerales asociados a las representaciones gráficas, observamos que los estudiantes que trabajaron con el plegado, escribían numerales de manera correcta y en tiempos más cortos que los estudiantes que trabajaron con el tangram. Pensamos que el hecho de que en el plegado el estudiante puede observar la división de la unidad de acuerdo a los pliegues de la hoja y puede tener presente la congruencia de las partes, facilita dicha identificación. Infortunadamente, el hecho de no haber programado una actividad de evaluación para la propuesta del tangram, que se hubiera podido contrastar con los resultados de la evaluación del plegado, no permitió recoger más indicios al respecto.

Si bien es cierto que en la propuesta con el tangram los estudiantes presentaban argumentos aceptables basados en la superposición de figuras para comparar áreas y establecer equivalencias de áreas, el hecho de haber observado que con menos frecuencia ellos realizaban superposiciones como la de los dos triángulos pequeños sobre el paralelogramo, parece apoyar la idea de que la equivalencia de áreas más no de formas, le exige al estudiante un reconocimiento más elaborado de las características de las figuras. Hubiera sido deseable que en la propuesta del plegado se propusieran ítems encaminados a encontrar equivalencias entre áreas de regiones de distinta forma, con base en los cuáles se pudieran percibir más detalles o muestras más claras acerca de esta dificultad.

En la implementación de la propuesta del tangram pudimos evidenciar algunos indicios que apoyan el hecho de que el estudiante, utilizando una de las fichas como patrón —el triángulo pequeño—, podría imaginarse un recubrimiento de la unidad y relacionar ésta con cada una de sus partes. En el plegado, por otra parte, se observó en los estudiantes una mayor disposición para realizar el conteo de las partes que forman el todo y de las partes que se iban coloreando, lo cual sugiere que en esta propuesta era más fácil para el estudiante obtener el numerador y el denominador de la fracción.

Por otro lado, en el plegado se quiso propiciar que el estudiante, al realizar divisiones en partes congruentes, pudiera visualizar la posibilidad de llevar a cabo adiciones de fracciones sin recurrir a un algoritmo numérico; los resultados no fueron positivos con respecto a esta intención y en este sentido se ve la necesidad de replantear el tipo de preguntas que apuntan a este propósito específico. En la propuesta del tangram, aunque se hubiera podido propiciar lo mismo no se plantearon preguntas con esa intención.

Un comentario que es más de naturaleza logística que conceptual, pero que no sobra tener en cuenta, es que en el caso del tangram el estudiante se demoró más en el reconocimiento del material que en el caso del plegado, pues debía tomar ficha por ficha y compararlas entre ellas y además tuvo que que imaginarse algunas de las partes congruentes entre sí. Sin embargo, vimos que después de que el estudiante había logrado algún grado de familiaridad con las figuras, le fue más fácil avanzar en lo que se refiere al reconocimiento de fracciones equivalentes.

Para terminar queremos señalar que aunque los estudiantes lograron responder a la mayoría de los puntos propuestos en las guías, bien sea para el caso del tangram manipulando las fichas, superponiéndolas y utilizando como patrón de medida el triángulo pequeño, o bien para el caso del plegado, realizando los diversos dobleces que se indicaban, contando el número de partes que se obtenían y coloreaban, etc., nos dimos cuenta de algo que con frecuencia sucede y de lo que no éramos muy conscientes antes: las tareas que el profesor propone llevaron a realizaciones de los estudiantes que nos sorprendieron por razón de que reflejaban comprensiones que no esperábamos encontrar con motivo de la implementación curricular realizada, pero también que dichas tareas no necesariamente llevaron a la comprensión del estudiante acerca del tema tratado; es decir, en algunas preguntas creemos que la intención específica que tenían no se satisfizo a pesar de que los estudiantes pudieran responderlas correctamente.

REFERENCIAS

Behr, M.L., Wachsmuth, I. y Post, T.R. (1985). Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 120-131.

Behr, M.L., Post, T.R. y Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. En H. L. Shoen y M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones. La relación parte todo*. Madrid: Editorial Síntesis.

NCTM (1972). *Sistemas de numeración para los números racionales*. México: Editorial Trillas.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Novillis, C. F. (1976). An analysis of the fraction concepts into a hierarchy of select subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education,* 131-144.

Orton, A. (1996). *Didáctica de la matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia y Ediciones Morata.

Payne, J.N. (1975). Review of Research on Fractions. En R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement. Papers from a research workshop.* Columbus, OH: ERIC/ SMEAC.

Clara Inés Rodríguez y Alvaro Sarmiento
Centro Educativo Distrital Brasilia Bosa
Cll. 52A sur # 100B-45
Bogotá
Tel: 7830816
Colombia
E-mail: joalsaji@yahoo. com.co