

Los fractales en la naturaleza: el caso de la hoja de papel

Jorge Edgar Páez Ortigón

jopaez@uni.pedagogica.edu.co

Clara Emilse Rojas Morales

crojas@uni.pedagogica.edu.co

Claudia Patricia Orjuela Osorio

cporjuela@uni.pedagogica.edu.co
Profesores Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Se describe una experiencia de aula en relación con el objeto matemático dimensión, en particular con la dimensión de una hoja de papel y otros objetos de dimensión no entera. Se pretende mostrar la dificultad del concepto de dimensión debido, entre otras razones, a que se le ha atribuido poca importancia, dejando su conocimiento como una idea intuitiva, con poco significado, en donde prevalecen imágenes conceptuales previas, relacionadas con la percepción del mundo físico o a la representación gráfica de objetos.

Palabras Claves: experiencia de aula, dimensión, fractales, naturaleza

Introducción

El siguiente documento exhibe a grosso modo, la descripción y análisis de una experiencia de aula inscrita en un curso electivo de Geometría Fractal, inscrita en el marco de las acciones investigativas del grupo Fractales-DMA-UPN. La experiencia confirma que para los estudiantes romper con sus esquemas mentales previos sobre *dimensión* no es un proceso fácil, pues implica en muchos casos reemplazar y acomodar las imágenes conceptuales o conservar las que ya se tienen. La experiencia inicia con un acercamiento de tipo intuitivo ilustrando a través de los protocolos; vale la pena mencionar que para el desarrollo de esta propuesta se venía trabajando con los estudiantes con relación a:

1. Caracterización conceptual de dimensión: se habían desarrollado sesiones de trabajo con las estudiantes que aportaron elementos que modificaron o robustecieron las imágenes conceptuales, procesos, manejo de proceptos sobre dimensión.
2. Los fractales son en sí mismo objeto de interés para los estudiantes: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevas relaciones o modelos con muchos ejemplos en la naturaleza o en la realidad cotidiana que tienen carácter de fractal, y en su descripción tienen que recurrir a los elementos que definen los fractales.

Estas ideas se vincularon con el concepto imagen de dimensión con relación a objetos de la naturaleza, para el caso, el discutir sobre la dimensión de la hoja de papel.

Si se considera la hoja de papel y se pregunta ¿Cuál es su dimensión? en primera instancia se le considera que es bidimensional, es decir, una figura geométrica que tiene dos dimensiones: largo y ancho. Sin embargo, luego de hacer otro análisis un poco más exhaustivo, se reconoce que tiene espesor, muy pequeño por cierto pero no por ello despreciable, es posible que cambie el juicio anterior y se afirme que se trata de un objeto sólido, algo que tiene largo, ancho y grosor, es decir, tridimensional. Desde luego, tras un examen más minucioso se puede llegar a que la hoja es *porosa* y, por lo mismo, no se trata de un objeto realmente sólido, lo cual contradice lo aprendido durante muchos años de escolaridad.

Sucede exactamente lo mismo cuando se discute sobre el cálculo de la dimensión de objetos como una esponja, un colador, cernidor de arena y/o la sombra de una persona; al realizar un análisis similar, se podrá llegar a la conclusión que su dimensión es mayor que dos pero menor de tres, pues dependiendo del grado de observación (acercamientos que se realicen) nos enfrentamos a un objeto entre un sólido y un plano.

El que un objeto cambie su dimensionalidad dependiendo de la escala en la que se le observa, produce cierta incertidumbre y cuestiona la objetividad de lo que en realidad se está observando. Esta diferencia en la expresión numérica permite por ejemplo, clasificar dos objetos cuyas dimensiones no enteras, la porosidad del objeto haría que la hoja de papel se encontrara más cerca de tres que la esponja: esto es, el primer objeto llena el espacio más compactamente que el segundo. Al realizar un análisis similar, lo mismo sucedería con la mayoría de los objetos que supuestamente consideramos como “tridimensionales” como por ejemplo un automóvil, al igual que en los casos anteriores no es sólido, también es poroso; es decir, con una dimensión mayor a dos pero menor que tres, y finalmente se puede afirmar que no existen objetos con dimensión entera en la naturaleza.

Metodología

En primera instancia, el docente realiza en la sesión un acercamiento de tipo intuitivo para luego hacer una conceptualización a nivel disciplinar del objeto matemático dimensión, utiliza los preconceptos de los estudiantes, donde a partir de sus propias respuestas llega a institucionalizar el saber. Se inicia la discusión a partir de la cuestión de determinar la dimensión de algunos objetos de la naturaleza. Figura 1



Fractales en la Naturaleza

Determina la **dimensión** de los siguientes objetos Hoja de papel

- a. Colador
- b. Esponjilla
- c. Zaranda (cernidor de arena)
- d. Sombra de una persona



Se les da unos minutos para que ellos reflexionen, se escuchan sólo unos murmullos que dicen *¡dos, tres, tres claro!* A continuación se muestran apartados de la socialización en clase, originadas a partir de las pregunta concreta ¿cuál es la dimensión de la hoja de papel?

Protocolo 1:

Prof.: vamos a hacer un caso concreto si uno tiene una hoja de papel, ¿Qué dimensión tiene?

Est: Dos

Prof.: tú dices que una hoja de papel tiene dos dimensiones ¿cierto?

Est: Si.

Prof.: ¿Cómo explicas eso?

Est: Pues digamos yo tome así como tomar esto (señala el largo) y tomar como lo ancho de la hoja

Prof.: ¿Estás mirando aquí el espesor o este ancho?

Est: No el espesor.

Prof.: ¿ancho, el espesor y largo?

Est: Si digamos lo que se ve, la superficie y el espesor, ¿no?

Prof.: es decir que es tres no dos, ¿cómo dijiste antes?

Protocolo 2:

Est: tres.

Prof.: Y si la arrugo y hago una bola de papel, ¿conserva la misma dimensión tres?

Est: No, cambiaria.

Prof.: ¿Por qué?

Est: Porque ella o sea, porque va a tener ciertos patrones que no podemos encajarlos desde esa dimensión, es decir, esas arrugas van a seguir ciertos patrones que no sabemos cómo se vayan a comportar en un momento específico.

Protocolo 3:

Est: Tres porque tiene, largo, ancho y espesor.

Prof.: ¿igualmente es dimensión tres cuando yo la arrugo y hago una bola?

Est: Si claro, pues de por si el espacio o sea el mundo físico en el que nos movemos es dimensión tres.

Prof.: O sea la hoja está en tres.

Est: Si claro, es delgada pero entonces tiene grosor. O sea dimensión dos, dimensión uno, dimensión cero, uno lo ve es en el mundo ideal de las matemáticas que uno supone todo, pero aquí esta en el mundo real.

Protocolo 4:

Prof.: ¿Quién da más? [aludiendo a la pregunta sobre la dimensión de la hoja de papel]

Prof: en un principio le dicen a uno que esto tiene dimensión dos (tomando una hoja en sus manos), ¿y el espesor? entonces no piensen en eso, por que eso tiene dimensión dos, eso es lo que dicen halla en el colegio. Entonces con cuantas hojitas de estas tengo dimensión dos y llego a tener dimensión tres, un bloquecito así, (señala con los dedos un ancho) y si generalizo con ¿cuántas cosas de dimensión dos yo tengo ya la dimensión tres? Esto tiene algo de mentira y algo de verdad.

La hoja no tiene dimensión dos ni dimensión tres por que es... (Interrumpe un estudiante)

Est3: El espesor...

Prof.: Bueno es muy pequeño pero no es cero, ósea tiene algo definitivamente muy pequeño, por ello es lo que es dimensión tres? pero lo que sucede es que esa dimensión es valida en las matemáticas, en los planos, en las figuras, en esto no (señalando a la hoja) por que si uno tiene una curva bien gigantesca uno puede mirar que hay un cuerpo.

Un colador, que puede ser un colador, ya ampliamos el problema y miramos por ejemplo un colador o una malla de esas de cernir, ¿qué dimensión tiene esas mallas de cernir arena?, o de cernir café que dicen.

Est2.: tres...

Prof.: el colador no es un plano y un plano tiene dimensión dos y un sólido tiene dimensión tres, pero el colador tiene muchos huecos... ¿que tiene más dimensión, la malla esa de cernir arena o esta hoja de papel?

Estudiantes: La hoja.

Profesor: A la hoja de papel jaaa jaaaa!

Prof.: miremos otro ejemplo, tienen una esponja de esas de lavar las ollas. [Los estudiantes se rien]

Prof.: ¿qué tiene más dimensión esta esponjilla, la cosa esa de cernir o esta hoja de papel? Primero la esponja es de dimensión tres los sólidos son de dimensión tres, los planos son de dimensión dos. [Los estudiantes responden : siiii...]

Prof.: Los robaron cierto? Nada que exista en la naturaleza es sólido, ni nada es un plano, por que las dimensiones reales de los objetos no son las de las figuras geométricas en si, ya lo estudiamos, lo comprobamos y dijimos eso es verdad. Pero en los objetos reales no!. Entonces volvamos al problema tenemos la hoja de papel y el colador. La malla de cernir y la hoja de papel ¿Quién tiene más dimensión?; ya con lo que dijimos acá ya tienen una idea. Esto es casi un sólido y por ser casi un sólido su dimensión debe estar muy cerca a de tres. [Los estudiantes responden nuevamente, tres]

Prof.: Si yo cojo una malla y trato de darles una dimensiones para no meterle más variables, una malla de esas de cernir ¿Quién se acerca más a un sólido? [los estudiantes responden : la hoja.]

Prof.: La hoja, entonces la dimensión de la malla es menor que la dimensión de la hoja.

Prof.: Uno podría tomar por ejemplo la esponja que tendrá más, uno fácilmente podría mirar esto tiene más dimensión que esto, la esponja y esto, esto tiene más dimensión que la esponja. Cómo lo podemos mirar?

[silencio]

Prof.: pues por ejemplo le echamos agua al colador y vemos cuanta agua se puede caer, por ejemplo si a la esponja le hecho agua, entonces que idea podemos tener ahí sobre dimensión?

Est3: ¿la densidad del objeto?

Prof.: ¿Que significará eso? el cuento de los sólidos o que tan porosa es, que tan densa es en el espacio donde está?, que tan condensadas están las partículas, y entonces y ahora si miremos la definición. Le dicen a uno tengo este segmento y le dicen a uno halle la dimensión, entonces que tanto me ocupa esta línea en un plano, que tanto entonces tengo que mirar de este plano, que tanto me ocupó?, Eso es la dimensión.

El determinar la dimensión de la hoja de papel es una tarea bastante interesante. Dentro de las respuestas que los estudiantes emiten se evidencia que para algunos no es claro determinar la dimensión de la hoja de papel, pues inicialmente reconocen la hoja como un plano y cuando consideran el espesor de la hoja modifican su respuesta, a dimensión tres. Para otros, el cambiar la representación de la hoja de forma plana a la de arrugada en forma de bola, implica un cambio en la dimensión, identifican que es tres sin arrugarla, pero les es imposible determinar una dimensión cuando esta arrugada, a causa de los pliegues que consideran son distintos y no fácil de medirlos. También se encuentran estudiantes que reconocen que la hoja es dimensión tres, pues lo asocia a un objeto real, considerando, de manera general, que cualquier objeto del mundo físico es tridimensional, mientras que los objetos cero y unidimensionales sólo existen en la teoría de las matemáticas.

A manera de conclusión

El concepto de dimensión tiene un significado matemático muy amplio, y por lo tanto consta de una pluralidad de definiciones. La medición de formas fractales ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido.

Por otro lado, se evidencia en los protocolos, que los estudiantes poseen una imagen conceptual asociada a procesos, propiedades, representaciones visuales o experiencias vividas, sin precisar una definición, además caracterizan el concepto de dimensión relacionado con la percepción del mundo físico, en este caso, el determinar la dimensión de la hoja de papel, un objeto de la vida real que convive a diario con el estudiante, y del cual pocas veces, se detiene a analizar y en particular determinar la dimensión.

Referencias bibliográficas

- BARNESLEY, M. (1988). "Fractals Everywhere". Ed. Academic Press. Londres.
- GALINDO, F. (1989). "El Continuo Dimensional: Un Universo Fractal". Conferencia en el Congreso Nacional de Egresados de Física y Matemáticas. La Trinidad Tlaxcala.
- ORJUELA, C y ROJAS, C. 2006. "El concepto de dimensión más que una idea intuitiva". Tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.
- PEITGEN, O y SAUPE, D. et al. (1991). "Fractals for the class room, strategic activities". Vol. 1. New York: Springer Verlag.
- TALL, D. O., VINNER, S. (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". *Educational Studies in Mathematics*, 12(2).pp.151-169.