Parábolas de seguridad: un acercamiento a las ecuaciones diferenciales lineales desde la geometría analítica

Isaac Lima Díaz

Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
isaacsito@gmail.com

Resumen

Se presenta la etapa final del trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas del autor, bajo la asesoría del profesor Mauricio Bautista, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El trabajo consiste en la elaboración de una unidad didáctica que involucra a estudiantes de undécimo grado de educación media al estudio de las ecuaciones diferenciales por medio de las parábolas de seguridad. Las parábolas de seguridad son la envolvente que genera un objeto cuando es lanzado desde un punto determinado con velocidad inicial v_o, formando un ángulo α con respecto a la horizontal

Presentación

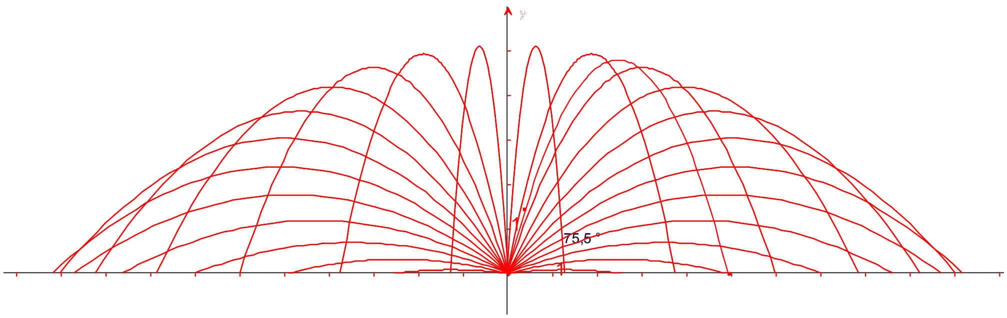
La importancia de las matemáticas en otras ciencias ha tenido gran acogida en el los procesos de enseñanza y aprendizaje durante la educación básica, tanto los docentes como los estudiantes reclaman la posibilidad de aplicar el conocimiento adquirido en otras áreas bajo el contexto de resolución de problemas. Bajo esta afirmación, la física es la rama por excelencia en la cual se pueden ilustrar algunas de las aplicaciones de la teoría estudiada en los diferentes tópicos de la matemática escolar.

Mas concretamente, aplicaciones de la geometría analítica en especial el estudio del concepto de parábola y aplicaciones del cálculo fundamentado en las disertaciones sobre ecuaciones diferenciales son dos de los grandes candidatos para mostrar al estudiante las relaciones existentes entre las matemáticas y otras ramas del conocimiento como lo es la física. A partir de esta idea, y bajo la profundización de estos temas, el estudio de las parábolas de seguridad generadas por la teoría del lanzamiento de proyectiles en el estudio de la cinemática se convierte en una herramienta potente para profundizar en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de educación básica.

Se realiza una unidad didáctica que involucre los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de geometría analítica y de cálculo, de tal manera que se concluya con una aplicación de esas ramas del conocimiento matemático en uno de los temas del estudio de la cinemática en el área de Física, aprovechando las ideas actuales de aplicación matemática en distintas áreas del conocimiento, la relación estrecha entre matemática y física y el auge por la implementación de software educativo en el aula de clase.

Referentes Teóricos:

Un proyectil es lanzado desde el origen con rapidez inicial v_o, formando un ángulo α con respecto a la horizontal, ¿cuáles son los puntos del plano que alcanza?



En primer lugar, la ecuación paramétrica de la parábola que determina la trayectoria del disparo es:

[1] $x = v_o t \cos\theta$

[2] $y = v_0 t \sin\theta - \dfrac{gt^2}{2}$

De dónde se obtiene

[3] $t = \dfrac{x}{v_o \cos\theta}$

De lo cual, reemplazando se deduce

$$[4]\ y = v_o\left(\frac{x}{v_o\cos\theta}\right)\sin\theta - \frac{g\left(\frac{x}{v_o\cos\theta}\right)^2}{2}$$

$$[5]\ y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o{}^2\cos^2\theta}$$

$$[6]\ y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_o{}^2}\left(1+\tan^2\theta\right)$$

Por lo que:

$$[7]\ \frac{gx^2}{2v_o{}^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{gx^2}{2v_o{}^2} = 0$$

$$[8]\ gx^2\tan^2\theta - 2v_o{}^2x\tan\theta + 2v_o{}^2y + gx^2 = 0$$

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para y=0.

$$[9]\ R = \frac{v_o^2\sin(2\theta)}{g}$$

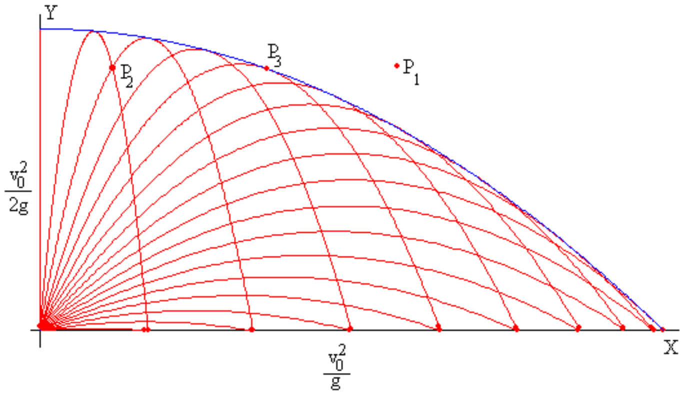
De esta ecuación es posible deducir que el valor máximo se obtiene para $\theta = \frac{\pi}{4}$; de igual manera, la altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con cuando la velocidad del movimiento es cero, eso es:

$$[10]\ H = \frac{v_o^2\sin^2\theta}{2g}$$

Siendo el valor máximo cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La intención ahora es determinar la envolvente de todas las trayectorias descritas por los proyectiles cuyo ángulo de disparo está comprendido entre 0 y 180º Esta denominación hace referencia al hecho de que fuera dicha envolvente se esta está a salvo de los proyectiles disparados con velocidad v_o.

La conjetura inicial hace pensar que se trata de una parábola simétrica respecto del eje y de ecuación $y = ax^2 + b$ que pasa por los puntos $\left(x = \frac{v_o^2}{g}, y = 0\right)$, y $\left(x = 0, y = \frac{v_o^2}{2g}\right)$ tal como se ve en la figura.



Considerando un punto $P(x, y)$ y sustituyendo las coordenadas (x, y) de P en la ecuación de la trayectoria, puede ocurrir:

Que la ecuación de segundo grado en $\tan\theta$ no tenga raíces reales, así P no sería un posible punto de impacto para el proyectil cuya velocidad inicial es v_0. En la figura el punto P_1 no es un posible punto de impacto.

Que la ecuación de segundo grado tenga dos raíces reales, lo que implicará que el punto P puede será impactado por dos lanzamientos, ya que hay dos ángulos de tiro θ_1 y θ_2 cuya trayectoria pasa por P. En la gráfica se observa que P_2 es un posible punto de impacto.

Cuando la raíz de la ecuación tiene una única raíz, en este caso solo hay una trayectoria que pasa por P; en la gráfica únicamente existe una trayectoria que pasa por P_3.

En las ecuaciones [7] y [8] se aseguró que:

:

$$\frac{gx^2}{2v_o^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + y + \frac{gx^2}{2v_o^2} = 0$$

$$gx^2\tan^2\theta - 2v_o^2 x\tan\theta + 2v_o^2 y + gx^2 = 0$$

Y despejando $\tan\theta$:

$$[11]\ \tan\theta = \frac{2v_o^2 x \pm \sqrt{\left(2v_o^2 x\right)^2 - 4\left(gx^2\right)\left(2v_o^2 y + gx^2\right)}}{2\left(gx^2\right)}$$

$$[12]\ \tan\theta = \frac{v_o^2 \pm \sqrt{v_o^4 - g\left(2v_o^2 y + gx^2\right)}}{gx}$$

$$[13]\ \tan\theta = \frac{v_o^2 \pm \sqrt{v_o^4 - 2gv_o^2 y - g^2x^2}}{gx}$$

Lo que significa que existen dos ángulos de disparo para alcanzar un punto de coordenadas (x, y). Si la cantidad dentro del radical es negativa el punto en mención no es alcanzable. La frontera de la región alcanzable y la no alcanzable la constituyen los puntos para los cuales la cantidad dentro del radical de la ecuación es cero, es decir los puntos para los cuales:

$$v_o^4 - 2gv_o^2 y - g^2x^2 = 0$$

$$y = \frac{g^2x^2 - v_o^4}{-2gv_o^2}$$

$$y = \frac{v_o^4 - g^2x^2}{2gv_o^2}$$

$$y = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_o^2}$$

La cual es la ecuación de una parábola simétrica al eje y, conocida como parábola de seguridad. Los puntos de esta parábola están determinados por

$$\tan\theta = \frac{v_o^2}{gx}$$

Metodología

Se elabora una unidad didáctica para estudiantes de último año de secundaria en la cual se puedan integrar tópicos del conocimiento matemático, específicamente el concepto de parábola y el estudio de ecuaciones diferenciales lineales a partir de los conocimientos de los estudiantes, que refleje la importancia de la aplicación de las matemáticas en otras áreas del conocimiento.

En la unidad didáctica se construyen modelos con programas para educación matemática como Cabri Geometre, Descartes y Geogebra, con los cuales los estudiantes pueden interactuar y observar las representaciones gráficas de las ecuaciones con las que se trabajan. Además se hacen interpretaciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus posibles relaciones con una aplicación directa como lo es la física. Se resalta la importancia de la interdisciplinariedad de las matemáticas y el auge por el uso de nuevas tecnologías.

Conclusiones

Profundización en el estudio de tópicos de matemática aplicada, específicamente el concepto de parábola y las nociones básicas del estudio de las ecuaciones diferenciales lineales vistos desde el estudio de las parábolas de seguridad tema de estudio de la cinemática en el área de física a partir de los conocimientos adquiridos en los diferentes cursos del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Integración del estudio de temas de matemáticas escolares (concepto de parábola) con el estudio de matemáticas universitarias (concepto de ecuación diferencial lineal), a partir del análisis de situaciones que pueden ser estudiadas en otras áreas del conocimiento.

Propuesta alternativa de enseñanza de matemáticas universitarias para estudiantes undécimo grado de educación media que involucra herramientas tecnológicas como lo es el uso de software educativo como Descartes, Cabrì Geometre, Derive y Geogebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares y su aplicación en otras áreas del conocimiento

Referentes Bibliográficos

CHOW, Tai L. Classical Mechanics. Editorial Addison Wesley. Nueva York. Estados Unidos. 1995