UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN LA ESCUELA A TRAVÉS DE LA INTEGRACIÓN DEL MATERIAL MANIPULATIVO

JEISSON DAVID GUSTIN ORTEGA
Código: 0831015

LINA MARÍA AVIRAMA GUTIERREZ
Código: 0750727

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI – 2014

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN LA ESCUELA A TRAVÉS DE LA INTEGRACIÓN DEL MATERIAL MANIPULATIVO

JEISSON DAVID GUSTIN ORTEGA
Código: 0831015

LINA MARÍA AVIRAMA GUTIERREZ
Código: 0750727

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Y LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS
EN MATEMÁTICAS.

Directora de Trabajo de Grado:
MAG. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI – 2014

AGRADECIMIENTOS

Dedicado especialmente a Dios porque nos dio sabiduría y perseverancia y que nos llevó a cumplir esta meta. A nuestros padres que nos vieron en el procedo de lograr uno de nuestros sueños, por sus esfuerzos, cariño y apoyo.

A nuestra directora de trabajo de grado Ligia Amparo Torres por su orientación, paciencia, apoyo, dedicación y por ayudarnos a culminar. A nuestros dos evaluadores: la profesora Maritza Pedreros y Octavio Augusto Pabón por sus orientaciones, aportes e ideas.

A los estudiantes de grado noveno y directivas del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon de El Placer-Cerrito, por su apoyo, participación y creer en esta propuesta.

A todos nuestros profesores y compañeros que con sus lecciones y conocimientos, contribuyeron a nuestra formación profesional.

Gracias a todas aquellas personas que siempre estuvieron para brindarnos toda su ayuda, que influyeron con sus experiencias en formarnos para los retos de la vida, a cada uno de ellos les dedicamos este trabajo de grado.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ... 9

INTRODUCCIÓN ... 10

CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN ... 13

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ... 13

1.1. OBJETIVOS ... 19

1.1.1. OBJETIVO GENERAL ... 19

1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS ... 19

1.2. JUSTIFICACIÓN ... 20

1.3. ANTECEDENTES ... 22

1.3.1. Materiales Manipulativos y el Álgebra ... 22

1.3.2. Experiencias de aula con materiales manipulativos integrados en el Álgebra ... 24

1.4. CONTEXTO ... 25

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA ... 28

2. ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN ... 28

2.1. PERSPECTIVA MATEMÁTICA ... 29

2.1.1. El concepto de igualdad y las ecuaciones ... 29

2.1.2. Sobre el concepto de ecuación ... 31

2.1.3. Sobre el concepto de ecuación cuadrática ... 33

2.1.4. Sobre la solución de ecuaciones ... 36

2.2. PERSPECTIVA CURRICULAR ... 48

2.2.1. Los Lineamientos Curriculares y el álgebra en la escuela ... 48

2.2.2. El álgebra en los Estándares Básicos de Competencias ... 50

2.3. PERSPECTIVA DIDÁCTICA ... 53

2.3.1. Perspectiva de la resolución de problemas para el tratamiento algebraico ... 59

2.3.2. Sobre la propuesta de secuencia didáctica ... 62

2.3.3. Sobre la integración de materiales manipulativos ... 66

CAPITULO III: UNA SECUENCIA DIDACTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA 72

3. Sobre la secuencia didáctica 72

3.1. Diseño y descripción de la secuencia didáctica 73

3.1.1. Descripción del material manipulativo 75

3.2. SECUENCIA DIDÁCTICA 76

3.3. METODOLOGÍA DE IMPLEMENTACIÓN 90

3.3.1. Población 91

3.3.2. Gestión en el Aula 92

3.4. RESULTADOS Y ÁNALISIS DE RESULTADOS 92

3.4.1. Resultados y análisis de la Situación 1 93

3.4.2. Resultados y análisis de la Situación 2 114

3.4.3. Resultados y análisis de la Situación 3 134

3.5. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA PLENARIA REALIZADA CON LOS ESTUDIANTES. 162

CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS 167

4. Conclusiones Generales 167

4.1. Reflexiones didácticas y recomendaciones 172

BIBLIOGRAFÍA 174

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Procedimientos del primer grupo de estudiantes 56
Tabla 2: Procedimientos del segundo grupo de estudiantes................................. 57
Tabla 3: Procedimientos del tercer grupo de estudiantes 58
Tabla 4: Secuencia de actividades del modelo DECA 66
Tabla 5: Situación 1.. 73
Tabla 6: Situación 2.. 74
Tabla 7: Situación 3.. 74
Tabla 8: Tipos de respuesta P_1, A_1, S_1 94
Tabla 9: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_1 95
Tabla 10: Tipos de respuestas P_3,A_1,S_1 96
Tabla 11: Tipos de respuestas P_4,A_1,S_1 96
Tabla 12: Tipos de respuestas P_5,A_1,S_1 97
Tabla 13: Tipos de respuestas P_{6a},A_1,S_1.. 98
Tabla 14: Tipos de respuestas P_{6b},A_1,S_1.. 99
Tabla 15: Tipos de respuestas P_7,A_1,S_1 100
Tabla 16: Tipos de respuestas P_1,A_2,S_1 102
Tabla 17: Tipos de respuestas P_2,A_2,S_1 103
Tabla 18: Tipos de respuestas P_3,A_2,S_1 104
Tabla 19: Tipos de respuestas P_4,A_2,S_1 105
Tabla 20: Tipos de respuestas P_5,A_2,S_1 106
Tabla 21: Tipos de respuestas P_1,A_3,S_1 107
Tabla 22: Tipos de respuestas P_2,A_3,S_1 109
Tabla 23Tipos de respuestas P_3,A_3,S_1 110
Tabla 24: Tipos de respuestas P_4,A_3,S_1 111
Tabla 25: Tipos de respuestas P_{5a},A_3,S_1.. 112
Tabla 26: Tipos de respuestas P_{5b},A_3,S_1.. 113
Tabla 27: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_2 116
Tabla 28: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_2 117
Tabla 29: Tipos de respuestas P_{3a},A_1,S_2.. 119
Tabla 30:Tipos de respuestas P_{3b},A_1,S_2... 120
Tabla 31: Tipos de respuestas P_{3c},A_1,S_2.. 121
Tabla 32: Tipos de respuestas P_{1a},A_2,S_2.. 122
Tabla 33: Tipos de respuestas P_{1b},A_2,S_2.. 123
Tabla 34: Tipos de respuestas P_{1c},A_2,S_2.. 123
Tabla 35: Tipos de respuestas P_2,A_2,S_2 125
Tabla 36: Tipos de respuestas P_3, A_2, S_2 126
Tabla 37:Tipos de respuestas P_{4a}, A_2, S_2.. 128
Tabla 38: Tipos de respuestas P_{4b}, A_2, S_2... 130
Tabla 39: Tipos de respuestas P_1, A_3, S_2 131

Tabla 40: Tipos de respuestas P_2, A_3, S_2 131
Tabla 41: Tipos de respuestas P_3, A_3, S_2 132
Tabla 42: Tipos de respuestas P_4, A_3, S_2 133
Tabla 43: Tipos de respuestas P_1, A_1, S_3 136
Tabla 44: Tipo de respuesta $P_{2,}$ $A_{1,}$ S_3 136
Tabla 45: Tipo de respuesta $P_3A_1S_3$ 137
Tabla 46: Tipo de respuesta $P_{4a}A_1S_3$ 139
Tabla 47: Tipo de respuesta $P_{4b}A_1S_3$ 139
Tabla 48: Tipo de respuesta $P_5A_1S_3$ 140
Tabla 49: Tipo de respuesta $P_{6a}A_1S_3$ 141
Tabla 50: Tipo de respuesta $P_{6b}A_1S_3$ 142
Tabla 51: Tipo de respuesta $P_{6c}A_1S_3$ 143
Tabla 52: Tipo de respuesta $P_1A_2S_3$ 145
Tabla 53: Tipo de respuesta $P_2A_2S_3$ 145
Tabla 54: Tipo de respuesta $P_3A_2S_3$ 147
Tabla 55: Tipo de respuesta $P_4A_2S_3$ 150
Tabla 56:Tipo de respuesta $P_5A_2S_3$ 150
Tabla 57: Tipo de respuesta $P_1A_3S_3$ 152
Tabla 58: Tipo de respuesta $P_{2a,}$ $A_{3,}$ S_3 153
Tabla 59: Tipo de respuesta $P_{2b,}$ $A_{3,}$ S_3 153
Tabla 60: Tipo de respuesta $P_{3,}A_{3,}S_3$ 154
Tabla 61: Tipo de respuesta $P_{4,}A_{3,}S_3$ 156
Tabla 62: Tipo de respuesta $P_{5a,}A_{3,}S_3$ 157
Tabla 63: Tipo de respuesta $P_{5b,}$ $A_{3,}$ S_3 158
Tabla 64: Tipo de respuesta $P_{5c,}A_{3,}S_3$ 159
Tabla 65: Tipo de respuesta $P_{5d,}A_{3,}S_3$ 160
Tabla 66: Tipo de respuesta $P_{6,}$ $A_{3,}$ S_3 161

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Representación gráfica de una ecuación cuadrática............................. 35
Figura 2: Representación gráfica si $a > 0$ 35
Figura 3: Representación gráfica si $a < 0$ 36
Figura 4: Representación gráfica de $y = 2x^2 - 4x$ 45
Figura 5: Maya conceptual Ecuación cuadrática elaborada por los autores del trabajo 47
Figura 6: Coherencia vertical y horizontal entre estándares relacionados con el pensamiento variacional.. 53
Figura 7: Materiales manipulativos... 69
Figura 8: Puzzle Algebraico.. 75
Figura 9: Expresiones de fichas del Puzzle Algebraico... 76
Figura 10: Representaciones de los estudiantes.. 140
Figura 11: Procedimientos de los estudiantes... 148

RESUMEN

Este trabajo de grado aborda algunos aspectos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes de la Educación Básica colombiana, en relación a las formas tradicionales de abordar las matemáticas en la escuela como exposición del maestro, ejemplos y ejercicios para los estudiantes. Para abordar esta problemática se realizó el diseño e implementación de una secuencia didáctica conformada por tres situaciones problema de las cuales se desprenden una serie de actividades que involucran la resolución de problemas y la integración de materiales manipulativos como el Puzzle Algebraico, el cual es un material compuesto por una colección de piezas planas en forma de cuadrados y rectángulos y con las que se pueden representar expresiones cuadráticas, con el propósito de favorecer un acercamiento a las nociones, conceptos y métodos de solución relacionados con las ecuaciones cuadráticas, por parte de estudiantes de grado noveno del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon de El Placer-Cerrito.

El marco teórico de esta propuesta se aborda desde las perspectivas Matemática, Curricular y Didáctica y fundamenta el diseño de la secuencia didáctica, su implementación y el análisis de resultados.

Palabras claves: Ecuaciones cuadráticas, Secuencia didáctica y Didáctica del álgebra, Material manipulativo, Situaciones problema.

INTRODUCCIÓN

La introducción al *álgebra escolar*[1] puede tomar muchas direcciones diferentes: las reglas para transformar y resolver ecuaciones, a lo que a menudo se reduce el álgebra en la enseñanza actual; la resolución de problemas específicos o clases de problemas, que históricamente ha jugado un papel importante en el desarrollo del álgebra y su enseñanza; la generalización de leyes que rigen los números, un enfoque muy fuerte en ciertos currículos; la más reciente introducción de los conceptos de variable y función, que históricamente aparecieron mucho más tarde y ocupan una posición de creciente importancia en algunos programas; y el estudio de las estructuras algebraicas, que marcó el currículo escolar de los años sesenta bajo la influencia de las matemáticas modernas, (Bednarz, Kieran y Lee, cap. 1. en prensa).

En este sentido, esta propuesta de trabajo de grado se centra fundamentalmente en el aspecto de la resolución de problemas específicos o clases de problemas, en la cual se tiene en cuenta un marco teórico que aborda elementos curriculares, matemáticos y didácticos, y que hace énfasis en la importancia de los *materiales manipulativos*, para el diseño de una secuencia didáctica, como una alternativa estratégica que permita abordar los conceptos algebraicos relacionados con las ecuaciones cuadráticas y que contribuya en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para abordar el problema de investigación en este trabajo de grado se desarrollan cuatro capítulos que se describen a continuación:

En el primer capítulo se hace referencia a la presentación del problema que motiva la realización de este trabajo de grado, así como también se exponen los objetivos generales y específicos que se esperan lograr, además se presenta la justificación sobre la importancia de la realización de este trabajo de grado y finalmente se

[1]En este trabajo de grado se hace referencia a la presencia que juega el álgebra en el Sistema Educativo.

presentan algunos antecedentes que se tienen en cuenta como referentes para abordar el problema de investigación.

En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos que se tienen en cuenta en este trabajo, los cuales se fundamentan bajo tres perspectivas diferentes: una matemática, una curricular y una didáctica. A la luz del marco teórico que aquí se presenta, se realiza el diseño, la implementación y el análisis de los resultados de la secuencia didáctica que se propone en este trabajo de grado, de tal manera que logre convertirse en una herramienta potente que contribuya en la labor docente.

En el tercer capítulo se presenta el diseño de la secuencia didáctica y análisis de resultados correspondientes a su proceso de implementación, a partir de los cuales se identifican algunas dificultades y errores de los estudiantes al realizar operaciones algebraicas, así como también los avances que logran al desarrollar actividades con situaciones problema que involucran materiales manipulativos en la superación de estos errores y dificultades.

Finalmente en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones finales correspondientes a la realización de este trabajo de grado y a los análisis de resultados derivados de la implementación de la secuencia didáctica, además de algunas reflexiones didácticas que surgen en el proceso de diseño e implementación de esta secuencia.

CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta como elemento de partida la problemática: sobre el significado que le dan los estudiantes de grado novenos de la educación básica a las ecuaciones cuadráticas, las cuales abarcan un amplio campo de estudio en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Se presentan también el objetivo general y los objetivos específicos, la justificación y algunos antecedentes relacionados con el desarrollo de esta propuesta, los cuales proporcionan aspectos importantes para el desarrollo teórico y práctico de este trabajo.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante los últimos años el campo de la Educación Matemática se ha desarrollado y fortalecido, a partir de investigaciones realizadas por diferentes autores que se han preocupado por estudiar diversas problemáticas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el álgebra escolar. Sin embargo a pesar de los aportes de estas investigaciones, persisten las dificultades y errores en el acercamiento y apropiación de los objetos matemáticos en la escuela.

Esto se evidencia en nuestro país en los resultados que obtienen los estudiantes de las Pruebas Saber (1991-2012) y resultados de investigaciones en Didáctica de las matemáticas. Tal como, afirma Socas (2007), cuando expresa: Las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas es hoy un foco de estudio e investigación matemática, en el que a pesar de la antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aun no resueltas.

Alguna de las causas de estas dificultades se podría afirmar, desde un punto de vista empírico de la experiencia docente de los autores de esta propuesta de trabajo de grado, se debe a la forma de *enseñanza tradicional*[2], donde el profesor presenta un tema, da algunos ejemplos y deja como trabajo la realización de gran cantidad de ejercicios cuyas soluciones son exactamente igual a los ejemplos presentados en clase. Puesto que no hay una conclusión de un saber ligado a la comprensión conceptual y procedimental de los objetos estudiados de esta forma en clase, pues el profesor es el dueño del saber y su trabajo se limita a transmitir conocimiento.

Otra causa, puede ser el tratamiento de carácter estático que se les da a las matemáticas en las aulas de clases, concebidas como acabadas y con una única representación, lo que no permite un espacio para la reflexión sobre la importancia y utilidad de los objetos matemáticos. Estas maneras de hacer matemáticas en el salón de clase generan actitudes de falta de comprensión, uso, utilidad y actitudes de rechazo en los estudiantes hacia las matemáticas.

Particularmente en el aprendizaje y estudio del álgebra escolar, donde los objetos matemáticos poseen un carácter de mayor abstracción, se presentan dificultades asociadas a la complejidad de objetos de estudio, tal como afirma Filloy & Kieran (1989), "el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones". Entre las dificultades[3] y errores[4] que se presentan en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, se destacan:

- *La concatenación y algunas convenciones de la notación algebraica:* consiste que los estudiantes persisten en ver la concatenación en el álgebra como se ve en aritmética, como adición, es decir, 45 puede significar $40+5$ en términos aritméticos, pero en el álgebra dicha concatenación significa una multiplicación, por ejemplo $5n$ significa $5\times n$ y no $5+n$, esto lleva al estudiante a la malinterpretación de los signos algebraicos.

---

[2] "Esta enseñanza no tiene más ideal que hacer repetir correctamente lo que ha sido correctamente expuesto" (Piaget, 1969)

[3] Tal como lo menciona Mata et al. (2009) las **dificultades** en su uso y tratamiento de las expresiones algebraicas se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos; según el autor el alumno llega a un pensamiento formal cuando puede operar con elementos abstractos y realizar transformaciones algebraicas.

[4] Según Pochulu (2004), **los errores** no son casuales, se basan en conocimientos y experiencias previas, y son motivados por diferentes causas didácticas, epistemológicas, cognitivas o actitudinales.

- *La forma de ver el signo igual:* donde el estudiante que inicia con el estudio del álgebra tiene una idea extendida de que el signo igual es la señal de “hacer algo”, realizar una operación para dar un resultado, noción que se extiende desde la aritmética, rehusándose a ver la equivalencia entre ambos lados de la igualdad, es decir, que no acepta proposiciones del tipo $7+8=12+3$, si no que se encierra en expresiones como $7+8=15$, la cuales le permiten entender ecuaciones del tipo $2x+3=8$, pero no expresiones tales como $2x+3=x+9$. En este sentido el estudiante no acepta expresiones algebraicas como resultado de un proceso, por ejemplo en la expresión $x^2+2=x$, lo que espera el estudiante es que el valor a la derecha del signo igual sea un número, y no una expresión algebraica, lo que lleva a querer seguir operando estas expresiones hasta llegar a un resultado numérico. Otra de las formas en que los estudiantes conciben el signo igual es verlo como un separador entre la secuencia de operaciones y el resultado lo que les lleva a violar las propiedades de simetría y transitividad de la igualdad, por ejemplo: $108+16=124+76=200$.
- *La forma de manipular y resolverlas ecuaciones:* el estudiante en la transición al pensamiento algebraico presenta serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificulta la solución de ecuaciones de tipo lineal y cuadrático.

En este sentido Gallardo & Rojano (1988) en un estudio clínico sobre la operación de la incógnita, encuentran en los estudiantes la no aceptación de las letras como notación de valores simbólicos, pues no parecen referirse a valores numéricos, a esto se le adiciona que el estudiante en la parte operacional debe realizar operaciones con valores simbólicos con signo, en el cual el estudiante puede confundirse entre si el signo se encuentra representado explícitamente o si se encuentra contenido en el valor simbólico, es decir, en la expresión $x+12=6$, el estudiante puede manifestar que la ecuación no tiene solución, ya que para que x sea negativo debe escribirse $-x$ o de lo contrario sería positivo. En este caso el estudiante no ha comprendido que el signo menos está inmerso en el valor de x.

Finalmente otro de los errores más comunes, en la parte operacional, que persiste en la solución de ecuaciones es la inversión de las operaciones, debido a la falta de comprensión de las nociones del opuesto, el inverso, las propiedades de la igualdad y operaciones entre números, en general. Sin la claridad de estas nociones es difícil que el estudiante comprenda y halle el significado de la ecuación y mucho menos logre la comprensión y llegar a una solución de la ecuación. Por ejemplo en la expresión $5x = 10$, el estudiante no tiene conciencia que para poder despejar x debe dividir por 5 o multiplicar por el inverso multiplicativo $\frac{1}{5}$ en ambos lados de la igualdad, es decir, $\frac{1}{5}.5x = 10.\ \frac{1}{5}$, lo cual da como resultado $x = 2$. De la misma forma si se tiene la expresión $x + 8 = 10$, el estudiante no identifica que para este caso debe de operar con el inverso aditivo u opuesto de 8 en ambos lados de la igualdad, es decir, se escribe $x + 8 - 8 = 10 - 8$, de ahí que $x = 2$.

Por otro lado, desde el desarrollo histórico epistemológico de la teoría de ecuaciones, se puede evidenciar una falta de conciencia, tanto de la enseñanza como del aprendizaje, en relación a la importancia que se le brinda a ciertas características de esta teoría, las cuales han sido problema fundamental y que han contribuido a su desarrollo.

Una de estas características, planteada por Cardano, se refiere a la relación que existe entre los coeficientes y las raíces de una ecuación. Esta es una característica la cual tiene poco desarrollo en la clase de álgebra y tampoco es identificada por el estudiante, pues se le dificulta comprender que las raíces de una ecuación son el resultado de la manipulación de sus coeficientes. Por ejemplo en la expresión $x^2 + 6x + 5$, para encontrar las raíces el estudiante, en su proceso de factorización, busca dos números tales que sumados den 6 y multiplicados den 5. Por lo cual escribe $(x + 5).(x + 1)$, donde es fácil notar que $x = -1$ ó $x = -5$. Para que el estudiante pueda hallar estos valores tuvo que haber realizado una manipulación de coeficientes y posteriormente encontrar las soluciones para la ecuación.

Sin embargo, el método de factorización no es el único caso donde se evidencia la manipulación de los coeficientes, esto también se puede notar cuando se emplea la fórmula general de solución de ecuaciones cuadráticas $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde se puede observar claramente, que la solución de la ecuación resulta de la operación entre sus coeficientes. Esta relación entre los coeficientes y las raíces de una ecuación es un aspecto importante que el profesor debe trabajar en clase y que posteriormente el estudiante puede identificar.

Otra de las características que son poco tenidas en cuenta al trabajar con ecuaciones cuadráticas tiene que ver con la naturaleza de las raíces, la cual es también resultado de la manipulación de los coeficientes de la ecuación, y en el que se puede determinar el tipo de solución de las raíces de cada expresión a partir del discriminante de la ecuación $(b^2 - 4ac)$. Si el discriminante es mayor que cero $(b^2 - 4ac > 0)$ la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas, si es igual a cero $(b^2 - 4ac = 0)$ tendrá dos soluciones reales e iguales, y si es menor que cero $(b^2 - 4ac < 0)$ no tendrá soluciones reales. Dado que el trabajo con discriminantes en clase de álgebra es limitado, al estudiante se le dificulta establecer la relación sobre la naturaleza de las raíces, lo cual puede permitirle anticiparse al tipo de solución que va a encontrar.

Otro de los aspectos que casi no se tienen en cuenta, y que son importantes en la manipulación de los coeficientes de la ecuación cuadrática es cuando se trabaja como función $f(x) = ax^2 + bx + c$, pues hay poca conciencia por parte del estudiante en determinar la forma de la parábola y su dependencia de los coeficientes, es decir, el estudiante no nota que cuando $a > 1$ la parábola se comprime hacia el eje de las ordenadas, cuando $a < 1$ la parábola se expande hacia el eje de las abscisas, que b determina la ubicación del vértice de la parábola y c el corte con el eje ordenado. Este es uno de los aspectos donde el estudiante debería distinguir la relación entre la ecuación y sus coeficientes lo cual se evidencia bastante en su representación en el plano cartesiano.

Otra de las dificultades con las ecuaciones cuadráticas hace referencia a la significación de este tipo de ecuaciones. Por un lado el profesor se puede centrar solamente en lo simbólico, operando expresiones y relacionando a x^2 como el área de un cuadrado o un rectángulo; y por otro lado puede hacer la relación de x^2 como magnitud. Desde el primer aspecto el profesor se basa únicamente en los métodos usados por los árabes con al-Khwarizmi, donde se trabaja la relación entre x^2 y las superficies, y no se realiza el salto cualitativo del cual hace mención Descartes, en el que se manifiesta que x^2 no tiene que representar siempre un cuadrado si no que puede ser un número, un segmento o algo de la misma naturaleza.

En el trabajo del álgebra escolar, por ser de carácter más abstracto y por tener una gran predominancia en la manipulación de símbolos, se desconocen herramientas mediadoras que posibilitan el acercamiento y posterior aprendizaje de los conceptos algebraicos. En los últimos años se han desarrollado propuestas pedagógicas y didácticas que valoran el uso de herramientas como mediación para el aprendizaje del álgebra.

Como lo describe Socas (2007), los materiales didácticos[5], cuando son utilizados como representaciones semióticas de los objetos matemáticos, juegan un papel importante en la enseñanza del álgebra. Las transformaciones y conversiones realizadas por el estudiante, de al menos dos representaciones (analógica y digital), facilitan la comprensión del objeto matemático.De acuerdo con lo anterior, en este trabajo se destaca el empleo de materiales didácticos, como materiales manipulativos, que permiten generar un acercamiento al trabajo con ecuaciones cuadráticas y un posterior desarrollo de sus soluciones, en el que se destaca el Puzzle Algebraico. Por tanto es de nuestro interés indagar sobre:

¿Qué tipo de situaciones problemas, que involucran la integración del Puzzle Algebraico favorecen la movilización del reconocimiento y solución de la ecuación cuadrática para estudiantes de grado noveno?

[5] De acuerdo con Socas (2007) los *materiales didácticos* son aquellos materiales que se construyen con fines educativos específicos como los utensilios comunes, los materiales educativos y los juegos.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. OBJETIVO GENERAL

Propiciar un acercamiento al reconocimiento y soluciones de la ecuación cuadrática en grado noveno de la educación básica a través de actividades que involucran la integración del Puzzle Algebraico.

1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Articular los referentes teóricos, desde las perspectivas didáctica, curricular, y matemática, en una propuesta de enseñanza que involucra actividades con el Puzzle Algebraico a través de una secuencia didáctica, para el estudio de la Ecuación Cuadrática.
- Identificar, a través de la implementación de la Secuencia Didáctica, algunos procesos relacionados con la resolución de problemas y la integración del Puzzle Algebraico en la apropiación, por parte de los estudiantes del concepto de ecuación cuadrática y su solución.
- Reconocer la importancia y las limitaciones del Puzzle Algebraico en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

1.2. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de grado, que presenta el diseño e implementación de una secuencia didáctica para movilizar, de manera significativa, el concepto de ecuación cuadrática en estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, aborda un concepto fundamental en el aprendizaje del álgebra en la escuela. Es decir que, el concepto de ecuación, en general, plantea un cambio cualitativo del tratamiento de la cantidad desde lo numérico a lo algebraico, en tanto establece una relación de equivalencia entre dos relaciones que se expresan en forma general ($3x + 2 = x + 7$), lo que implica la comprensión de la igualdad como relación de equivalencia; hecho importante en el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela.

Particularmente, el concepto de ecuación cuadrática amplia el campo de solución de las ecuaciones lineales y el tipo de fenómenos que se pueden modelar a través de la función cuadrática y la ecuación asociada a esta; fenómenos de diferente naturaleza. Especialmente las ecuaciones cuadráticas permiten entender los conceptos de la Cinemática, o los fenómenos relacionados con el movimiento de los cuerpos, como movimientos con aceleración constante, tiros parabólicos y caída libre, los cuales se modelan a partir de ecuaciones cuadráticas. En este sentido, se puede establecer la importancia de desarrollar pensamiento algebraico en los estudiantes, no solo para resolver problemas o situaciones propias de las matemáticas, sino también solucionar problemas de otras áreas de conocimiento y para la comprensión de los conceptos que subyacen de ellos. Por lo tanto este trabajo es importante en tanto asume un concepto del currículo escolar potente para modelar fenómenos cuadráticos.

De otro lado, se trata este concepto de forma articulada a otros conceptos como los de variación, variable, dominio, cambio, etc., en una propuesta de aula como una secuencia didáctica que relaciona en forma ordenada situaciones problema que van desde lo experimental, empírico a conceptos más abstractos representados de diferentes formas. Este trabajo pretende ser una buena estrategia que permita al estudiante tener un mejor acercamiento a los conceptos matemáticos, y cambiar su actitud frente a ellos. Para lograrlo se proponen actividades que permitan la manipulación de dichos conceptos, a partir de representaciones semióticas autosuficientes al integrar materiales manipulativos[6], como el Puzzle Algebraico, los cuales permitan manipular algunos conceptos y representar algoritmos. Esto significa que este trabajo presenta una forma innovadora del tratamiento de lo algebraico al involucrar también materiales manipulativos.

Introducir materiales manipulativos en el trabajo algebraico es un riesgo dado la naturaleza de sus objetos (simbólicos y generales) que puede dejar que las actividades se reduzcan a lo eminentemente operativo. Sin embargo, el interés por la integración de materiales para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general, se observa desde hace muchos años. Pestalozzi por ejemplo en 1819, propone la integración de material manipulativo para el aprendizaje de las matemáticas. Gattegno, en los años 60, muestra que la percepción y la acción son la base del pensamiento matemático, lo que involucra la integración de materiales. Emma Castelnuovo, en los años 70 analiza corrientes psicológicas y pedagógicas que influyen en la enseñanza apoyada en el material concreto, entre otros (Valenzuela, 2012).

En este sentido, es importante distinguir que el trabajo con materiales manipulativos no pretende ser un material para enseñar matemáticas si no para “hacer matemáticas”, es decir que a partir del trabajo experimental el estudiante pueda identificar ciertas características las cuales llevan a la construcción del objeto matemático, siempre con el acompañamiento del profesor.

Por lo tanto la importancia de esta propuesta de trabajo de grado, radica en favorecer un acercamiento significativo a la construcción del concepto de ecuación cuadrática y algunos métodos de solución, a través de una secuencia didáctica[7]compuesta por tres situaciones problema, que involucra actividades con el material manipulativo Puzzle Algebraico, y de esta forma favorecer la

---

[6] De acuerdo con Mink (2010) los *materiales manipulativos* son materiales que permiten ilustrar y modelar ideas y relaciones matemáticas y están diseñados para ser utilizados por los estudiantes en todos los grados escolares. Incluyen casi cualquier objeto físico usado para representar un concepto abstracto y se utilizan para ayudar a los estudiantes a manipular objetos matemáticos y representar algoritmos

[7] Las nociones de Secuencia Didáctica, situaciones problema y actividades se abordaran más adelante en la perspectiva didáctica.

intervención didáctica de los profesores en función de las necesidades y prioridades de los estudiantes para superar los errores y las dificultades que se presentan en la construcción de este concepto.

1.3. ANTECEDENTES

En este apartado se presentan elementos teóricos encontrados durante la revisión bibliográfica los cuales permiten ubicar el problema de investigación en un contexto de aula. Para ello se describe algunos trabajos que muestran experiencias de aula y sus actividades, las cuales permiten la contextualización del material manipulativo en la enseñanza.

1.3.1. Materiales Manipulativos y el Álgebra

Una de las investigaciones que contribuyeron como punto de partida para la realización de este trabajo se titula "Materiales Manipulativos para la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria" de Hernández et al. (2008). En este trabajo se presenta la revisión de algunos materiales didácticos que podrían promover el desarrollo del pensamiento algebraico. Esta revisión presenta diferentes propuestas de materiales para estudiar el álgebra, y los cuales son clasificados en dos grupos: el primero se distinguen materiales para el Álgebra que tienen unos objetivos concretos, que se usan en el ambiente lúdico, como el bingo de ecuaciones, el cuadrado mágico, el dominó algebraico; y el segundo grupo de materiales que pretenden ser autosuficientes para la enseñanza del álgebra, como el Álgebra Tiles, Algeblocks, el Puzzle algebraico.

Por su parte, Velasco (2012) en su trabajo "Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas" realiza, una conceptualización de recursos y materiales didáctico que proporcionan experiencias individuales irrepetibles, que conducen a procesos genuinos de construcción de conocimientos en los que se producen aprendizajes significativos y relevantes, además sugiere una compilación de materiales para el uso en el aula de matemáticas, y en el que se afirma que el recurso en el aula escolar, es una gran ayuda para facilitar el aprendizaje y aumenta la motivación y participación de los estudiantes.

Además, Covas & Bressan (2011) en su trabajo llamado "La enseñanza del álgebra y los modelos de área", hacen un recuento del modelo de área en la enseñanza escolar a través del trabajo del Dr. Zoltán Dienes en colaboración del Dr. Jerome Bruner, de un proyecto realizado con estudiantes de la escuela básica entre los 5 y los 13 años de edad, cuyo objetivo es la enseñanza de estructuras matemáticas apoyándose en el uso de manipulativos especialmente diseñados, con los cuales busca representar en lo más puramente posible los conceptos matemáticos y lógicos que se consideran pueden ser estudiados en esas edades.

A su vez, López (2008) en su trabajo "*Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del colegio de ciencias y humanidades*", propone un diseño didáctico sobre la enseñanza de las matemáticas, con respecto a los temas de productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, para encontrar la manera de reducir el índice de reprobación, tomando como base el programa de estudios de Matemáticas I que se da en el primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Ciudad de México. Se trata pues, de una fundamentación donde la docencia se caracteriza entre la interacción profesor–estudiante, ya que se considera que el proceso de comunicación es un proceso interactivo en el cual el estudiante también emita mensajes hacia el profesor.

En este sentido, el diseño que López (2008) propone es por medio de pruebas estadísticas, para demostrar que el resultado de aplicar un instrumento diagnóstico (examen) a un grupo de estudiantes sin la exposición de cierto material didáctico, es menor a los resultados que se obtienen al aplicar el mismo examen, pero con el conocimiento del material didáctico al mismo grupo.

1.3.2. Experiencias de aula con materiales manipulativos integrados en el Álgebra

Amézquita & Murillo (2007) en su trabajo: “El laboratorio de Matemáticas como mediador en el estudio de la función lineal en la escuela”, proponen, a través de situaciones en el laboratorio de matemáticas, involucrando materiales didácticos, favorecer un acercamiento significativo a elementos conceptuales y procedimentales del álgebra, particularmente en la función lineal. Los resultados de este trabajo se obtienen al aplicar pruebas en el laboratorio matemático por medio de situaciones y entrevistas a 27 estudiantes de grado séptimo de bachillerato de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali, en el cual manifiestan que dicho tratamiento logró comprometer al estudiante en su aprendizaje, de tal manera que se crea un ambiente de libertad al momento de adquirir un conocimiento significativo a través de su propio descubrimiento.

Se concluye también que las situaciones propuestas con estos materiales llevan al estudiante a desarrollar un pensamiento activo, relacionando los elementos de su entorno y estimulando la construcción de nuevos esquemas mentales, además que la manipulación de materiales concretos promueve la modelación de situaciones reales.

Por último Cerón & Gutiérrez (2013) en su trabajo: “La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos”, presentan una aproximación a la construcción del concepto de número natural a través de actividades lúdicas en contexto e involucrando materiales manipulativos. Se toma este trabajo como apoyo para ratificar que los materiales manipulativos permiten ejercitar procedimientos y consolidar las principales nociones matemáticas, siempre y cuando se encuentren articulados en situaciones problema.

1.4. CONTEXTO

El contexto institucional en el cual se aplicó la secuencia didáctica propuesta en este trabajo de grado corresponde al Colegio de Bachillerato Técnico Comercia Hargadon.

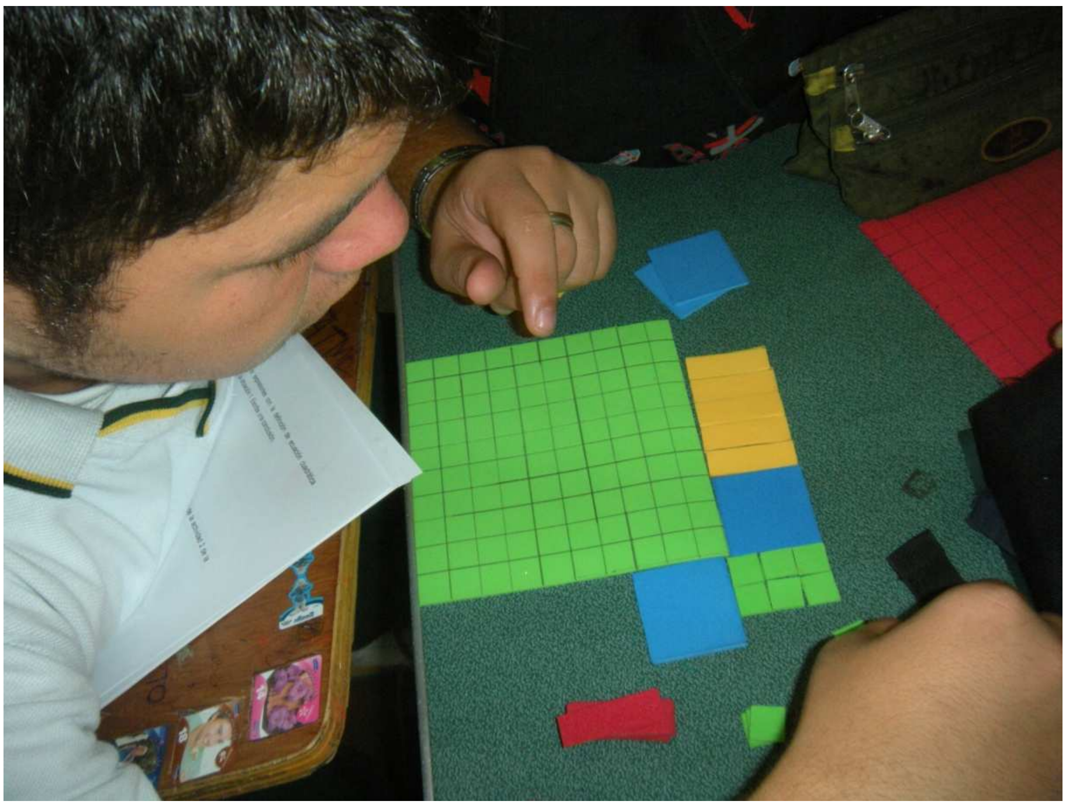
Este colegio es una institución relativamente joven, fundada en el año 1996 ubicado en el corregimiento El Placer en el municipio de El Cerrito, cuenta con dos sedes, en una se encuentran los grados desde jardín hasta grado tercero, y en la sede principal se encuentran los grados de cuarto a once, en esta última se llevó a cabo la aplicación de la secuencia.

El nivel socio-económico que atiende esta institución corresponde a estratos 1 y 2. Un 80% de los padres tienen formación bachiller, un 15% no terminaron su formación y un 5% tienen un nivel de formación académico que va del técnico a profesional. Un 30% de los padres tienen vinculación laboral informal y algunos de los estudiantes son apadrinados.

Ambas sedes cuentan con una sola jornada diurna, el ingreso a la jornada escolar es a las 6:45 am hasta las 12:00 m para los grados de jardín a quinto, hasta la 1:00 pm para grados de sexto a noveno y hasta las 2:00 pm para los grados décimo y once. Para efectos de esta investigación la secuencia didáctica se implementó con el grado noveno conformado por nueve estudiantes entre los 13 y 15 años de edad.

Esta institución educativa fue seleccionada debido la facilidad de acceso al grupo de estudiantes con el cual se trabajó, ya que uno de los autores de este trabajo labora en ella, además de que el grupo de trabajo presenta condiciones ideales para la implementación de la secuencia didáctica, como el número de estudiantes, jornada, y proceso académico, ya que la mayoría de los estudiantes vienen trabajando tres años juntos en la misma institución, solo dos de ellos ingresaron al grupo para este año.

Vale la pena resaltar que estos estudiantes tienen algunas nociones del trabajo con ecuaciones cuadráticas, pues reconocen la fórmula general y otros métodos de solución, los cuales fueron estudiados en el segundo periodo académico, mientras que la implementación de la secuencia didáctica se realizó al final del cuarto periodo.



CAPITULO II: ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que fundamentan este trabajo de grado, los cuales se abordan desde tres perspectivas diferentes: la matemática, donde se encuentran formalmente las nociones de ecuación, ecuación cuadrática y las reglas de transformación que permiten llegar a la solución de una ecuación cuadrática; la curricular, donde se exponen los aspectos que vinculan la ecuación cuadrática y la variación en relación a lo establecido por los Estándares Básicos de Competencia y Lineamientos Curriculares de matemática; y finalmente la perspectiva didáctica que aborda los elementos teóricos que se tendrán en cuenta para el análisis de las actividades propuesta en la secuencia didáctica.

2. ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS PARA LA INVESTIGACIÓN

Como se mencionó anteriormente en el planteamiento del problema, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, se encuentran algunas dificultades, errores y obstáculos[8] que presenta los estudiantes en el acercamiento al concepto de ecuación cuadrática, los procesos de solución y su uso a la hora de resolver problemas. Estos errores y dificultades llevan a concepciones erradas que generan una restricción en el aprendizaje del álgebra por parte de los estudiantes. Para fundamentar esta problemática que existe en cuanto a la conceptualización y resolución de ecuaciones cuadráticas, se ubican los marcos teóricos de referencia a través de tres perspectivas o dimensiones que permitan tener elementos para hacer los análisis de los resultados de la secuencia didáctica y su implementación.

De acuerdo a lo anterior, se tiene en cuenta varios aspectos de estudio que permiten fundamentar y validar la problemática y proveer elementos para el

[8]Como afirma Brousseau (1983) un *obstáculo* se caracteriza como: “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.

análisis de las actividades que realizaran los estudiantes de grado noveno de la Educación Básica, cuando se implementen la secuencia didáctica. Estos aspectos se encuentran organizados de la siguiente manera:

- Perspectiva Matemática
- Perspectiva Curricular
- Perspectiva Didáctica

2.1. PERSPECTIVA MATEMÁTICA

En este apartado se hace alusión a los diferentes significados que se le da al concepto de ecuación en general y se particulariza en las ecuaciones cuadráticas, sus sistemas de representación y los procedimientos utilizados en su solución. Además como punto de partida de esta perspectiva se hace un acercamiento al concepto de igualdad, el cual es punto fundamental en la definición de ecuación.

2.1.1. El concepto de igualdad y las ecuaciones

En el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el álgebra, es de gran importancia reconocer el significado de igualdad para comprender el concepto de ecuación. En este sentido se presentan algunos aspectos matemáticos relacionados con este concepto de igualdad. Una primera descripción de éste concepto podría establecerse como la relación que se define entre números, o aquella relación que establece la equivalencia entre dos entes matemáticos.

Para representar la igualdad se utiliza el símbolo "=" por lo que se dice que$A = B$, es decir, A es igual a B.

Desde la teoría de conjuntos, el concepto de igualdad se establece de acuerdo con el axioma de extensión; el cual se enuncia a continuación: Sean los conjuntos A y B, se dice que estos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, es decir, todo elemento del conjunta A es elemento del conjunto B y todo elemento del conjunto B es elemento del conjunto A.

Lo anterior se escribe en forma simbólica de la siguiente manera

$$A = B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)\ (x \in B \rightarrow x \in A)$$

Otra forma de definir el concepto de igualdad es a partir de la definición de Contenencia entre conjuntos, esta definición establece que un conjunto A está contenido en otro B, si todo elemento de A es elemento de B. En forma de proposición, se tiene que:

$$A \subseteq B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$$

La igualdad entre dos conjuntos se puede definir por doble contenencia, es decir, dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En forma de proposición se expresa de la siguiente manera:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B\ \ B \subseteq A)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta los elementos de un mismo conjunto, se puede decir que dos elementos de este son iguales si cumplen la siguiente condición:

$$\forall\, a, b \in A, \qquad a = b \Leftrightarrow (a < b \wedge b < a)$$

De esta manera se puede observar el tratamiento que se le da a la igualdad desde la perspectiva de la teoría de conjuntos; por un lado, se puede establecer que la igualdad hace referencia a la relación de doble pertenencia de elementos entre dos conjuntos; y por otro lado la igualdad hace referencia a la equivalencia entre los elementos de un mismo conjunto.

De acuerdo con lo anterior se establecen tres propiedades fundamentales que se estructuran en lo que se conoce como *relación de equivalencia* y las cuales determinan la relación ε sobre un conjunto A. Estas propiedades se instauran de la siguiente forma:

$a, byc \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $a = a$
- Simetría: si $a = b, entonces\ b = a$.
- Transitiva si$a = b\ y\ b = c, entonces\ a = c$.

Por otra parte, es importante establecer la diferencia que existe entre el concepto de igualdad y el signo igual, para ello es necesario examinar el significado de cada uno. El primero (igualdad) hace referencia al concepto matemático, abstracto, ideal y asequible a la mente humana. Sin embargo, al igual que los demás conceptos matemáticos como el número, triángulo, línea, función, etc., necesita de una representación que permita su tratamiento en los distintos registros de representación. De esta forma surge la necesidad de dotar de un símbolo a la expresión "es igual a" o "es igual que", el cual permita evocar el concepto de igualdad. A partir de ello es que surge el símbolo "=", el cual da cuenta de lo que es igual, evoca y permite conceptualizar la igualdad en matemáticas (Gonzales & Hurtado 2010). Es decir, que al igual que todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática y se utiliza para representar una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escriben en ambos lados de dicho signo.

2.1.2. Sobre el concepto de ecuación

Partiendo de la teoría de ecuaciones se establece que una ecuación polinómica es aquella que se puede expresar de la siguiente forma general:

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$$

Donde $a_0,\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son coeficientes numéricos cualesquiera pertenecientes al dominio de los reales; n es un número entero el cual indica el grado de la ecuación, siempre y cuando $n > 0\ y\ a_n \neq 0$; finalmente las raíces del polinomio son los valores que puede tomar x, tal que al reemplazar en la ecuación polinómica se obtiene $0 = 0$.

Por otro lado se hace necesario aclarar, de acuerdo a la teoría de ecuaciones, que estas expresiones no solo poseen una variable, si no que pueden encontrarse colecciones finitas de variables. Por esta razón se hace uso de la siguiente notación, haciendo referencia en general a expresiones variables en una colección finita de variables $x, y, z, \dots, w$ por lo cual seescribe $p(x, y, z, \dots w)$, $q(x, y, z, \dots w)$, $f(x, y, z, \dots, w)$, etc, (Pinzón et al., 2010).

De acuerdo a lo anterior se puede expresar una definición más formal:

Sean $\mathrm{p(x, y, z, \dots w), q(x, y, z, \dots w)}$ expresiones variables en $x, y, z, \dots, w$. Una ecuación en dichas variables es una proposición abierta de la forma

$$\mathrm{p(x, y, z, \dots w) = q(x, y, z, \dots w)}$$

Cuando la igualdad anterior se hace válida para todos los valores numéricos de los dominios de las variables se dice que la expresión es una identidad.

Sin embargo, el interés real de esta propuesta son las expresiones de una sola variable x, por lo cual se define las ecuaciones de una sola variable de la siguiente forma:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ expresiones de una sola variable x, una ecuación se define como una proposición abierta de la forma $p(x) = q(x)$. Si se cumple la igualdad para cualquier x perteneciente al dominio de la variable, se dice que la ecuación es una *identidad*. Si por el contrario, hay por lo menos un x en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una *ecuación condicional* (Zil l& Dewar, 2000).

Para expresar la diferencia entre este tipo de ecuaciones se toman algunos ejemplos. Sea la ecuación

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

La cual se satisface con la serie de todos los número reales excepto $x = 1$. Puesto que 1 no pertenece al dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

Sea ahora la ecuación $4x - 1 = 2$ se tiene que 3 se encuentra en el dominio de la variable, sin embargo no satisface la ecuación, puesto que $4(3) - 1 \neq 2$. Por lo tanto es una ecuación condicional (Zill & Dewar, 2000).

Por último, es importante señalar algunas definiciones, no tan formales, que se encuentran comúnmente en textos escolares, módulos y guías que se encuentran en la red, como las siguientes:

- Cualquier afirmación matemática que utiliza el signo igual para establecer que dos expresiones algebraicas representan el mismo número o son equivalentes, se llama *ecuación algebraica* (Camargo, L. et al., 2001).
- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas relacionadas a través de operaciones, números e incógnitas (letras), las cuales representan valores que son necesarios hallar.
- Es una igualdad entre dos expresiones que contiene una o más incógnitas.[9]

Este tipo de definiciones, carecen de la formalidad necesaria para comprender la naturaleza del concepto de ecuación, sin embargo su importancia radica en que a partir de ellas se puede establecer un primer acercamiento, en términos de noción, al concepto de ecuación, que posteriormente adquiere mayor complejidad al mismo tiempo que se trabajan las diferentes propiedades y métodos de solución en los diferentes niveles de estudio.

2.1.3. Sobre el concepto de ecuación cuadrática

En el apartado anterior se definió la ecuación como aquella que puede escribirse de la forma $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$, donde n es un entero no negativo y $a_i = 1, 2, 3, \ldots, n$ son números reales.

[9]Este tipo de definiciones son muy populares en guías y módulos que se encuentran en las diferentes páginas y blogs de la red.

En este orden, una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquella ecuación en la cual una vez simplificada, su máximo exponente es $n = 2$. En términos generales una ecuación cuadrática es aquella que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde $a, b\ y\ c$ son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los reales y $a \neq 0$. Este tipo de ecuación se denomina *ecuación cuadrática completa,* pues tiene un término x^2, un término x y un término independiente de x.

También se pueden encontrar expresiones cuadráticas de la forma:

$$ax^2 + bx = 0\ con\ b \neq 0\ y\ c = 0,$$

$$ax^2 + c = 0, con\ b = 0\ y\ c \neq 0\ y$$

$$ax^2 = 0, con\ b = 0\ y\ c = 0$$

Este tipo de ecuaciones se denominan *ecuaciones cuadráticas incompletas*, pues carecen del término x o del término independiente.

Otra manera de denotar la ecuación cuadrática es a partir de la expresión

$$y = ax^2 + bx + c$$

En este caso se hace referencia a la relación entre una expresión cuadrática y el concepto de *función*, el cual se define como la correspondencia entre dos conjuntos $X\ y\ Y$ no vacios, en el cual para cada elemento del conjunto X le corresponde uno y solo un elemento del conjunto Y. Esta relación entre los elementos $y\ \in Y\ y\ x\ \in X$ se denota de la forma $y = f(x)$.

Es a partir de esta relación entre los conceptos de función y ecuación que se puede establecer una representación gráfica en el plano cartesiano de la ecuación cuadrática, en la cual se establece que una función definida por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se llama *función cuadrática*.

El dominio para la función cuadrática es el conjunto de los reales y su representación gráfica es una curva llamada parábola como se muestra a continuación

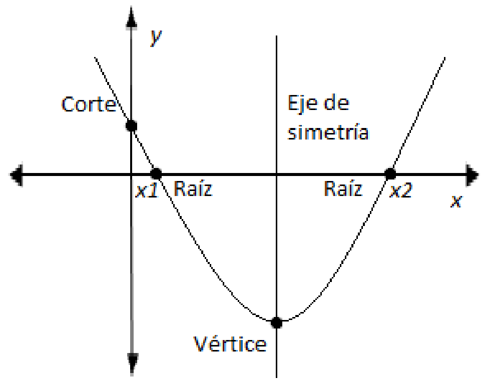


Figura 1: Representación gráfica de una ecuación cuadrática

Como se aprecia en la figura el vértice indica el valor mínimo (o máximo) que alcanza la gráfica; el eje de simetría es una recta perpendicular al eje X el cual permite observar que la parábola es una curva simétrica; el corte indica en qué punto la parábola atraviesa el eje Y (para las ecuaciones cuadráticas se toma la constante c de la expresión cuadrática); por último se encuentran las raíces, las cuales corresponden a los cortes de la parábola con el eje X y representan el conjunto solución de la ecuación cuadrática, es decir, $S = \{x_1, x_2\}$.

Sin embargo, la representación gráfica depende de los coeficientes de la ecuación, para ello se presentan los siguientes casos, cuando el coeficiente a es positivo o negativo: Sea la ecuación $y = ax^2 + bx + c,\ \ si\ \ a > 0$, la gráfica es de la siguiente forma

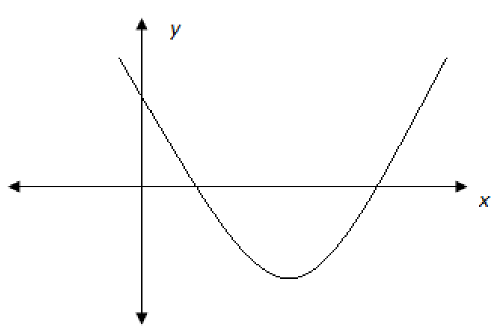


Figura 2: Representación gráfica si $a > 0$

Si $a < 0$, la gráfica cambia

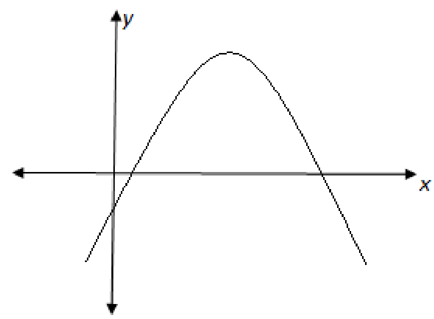


Figura 3: Representación gráfica si $a < 0$

2.1.4. Sobre la solución de ecuaciones

La solución de ecuaciones, se determina por el número de raíces de la expresión polinómica la cual guarda relación con el grado de la expresión. Es decir, para el caso de las ecuaciones cuadráticas cuyo máximo exponente es dos, a lo sumo se pueden encontrar dos soluciones de esta. Sin embargo, antes de abordar el estudio de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, es necesario establecer los criterios de lo que es solucionar una ecuación en general.

Lo que se presenta a continuación es basado en el trabajo de Pinzón et al. (2010).

Sea la ecuación de una variable$x$, $p(x) = q(x)$, se llama solución de esta ecuación a todo número s tal que $p(s) = q(s)$, es una verdadera igualdad numérica.

Al conjunto de todas las soluciones de la anterior ecuación, se llama conjunto solución de la misma, el cual, si se denota con S a tal conjunto se puede escribir que: $S = \{s/p(s) = q(s)\}$

De lo anterior se deduce que resolver una ecuación es dar un conjunto solución.

Para la resolución de ecuaciones es necesario realizar transformaciones que permitan hallar el conjunto solución. Para ello es prescindible basarse en la noción de *ecuación equivalente*, la cual se define, como aquellas ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución e igual dominio.

Para encontrar estas soluciones, es preciso transformar las ecuaciones en otras que sean equivalentes y cuyo conjunto solución sea fácil obtener. Para realizar dichas transformaciones se deben tener en cuenta algunas reglas comúnmente conocidas y que en últimas lo que realmente aplican son las propiedades de igualdad:

- *Regla de transformación I*: sustituir un miembro de la ecuación por una expresión equivalente. En efecto dada la ecuación

$$p(x) = q(x) \qquad [1]$$

Si las expresiones $p(x)\ y\ p*(x)$son equivalentes entonces la igualdad

$$p(x) = p*(x), [2]$$

Es válida para todos los valores numéricos del dominio de x. Por esta razón toda solución de la ecuación [1] es solución de la ecuación $p*(x) = q(x)$.

- *Regla de transformación II*: sumar a los miembros de una ecuación una misma expresión variable en la misma variable de la ecuación.

Caso 1. Cuando se suman a los dos miembros de una ecuación una expresión polinómica siempre se obtiene una ecuación equivalente. Dada la ecuación

$$p(x) = q(x) \qquad [1]$$

Y la expresión polinómica $f(x)$, es claro que toda solución de la ecuación [1] es solución de la ecuación $p(x) + f(x) = q(x) + f(x)$

Caso 2. Cuando se suma a los dos miembros de una ecuación una expresión variable no polinómica, no siempre se obtiene una ecuación equivalente.

Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo: sea la ecuación

$$m^2 - \frac{1}{m} = 2m - \frac{1}{m} [3]$$

Al sumar a ambos miembros de esta la expresión variable no polinómica$-2m + \frac{1}{m}$

Se obtiene la ecuación $m^2 - 2m = 0$ [4]

Como se puede observar el conjunto solución para la ecuación [3] es R – {0}, mientras que toda solución de la ecuación [4] debe pertenecer a R. por lo tanto las ecuaciones [3] y [4] no son ecuaciones equivalentes.

- Regla de transformación III: multiplicar ambos miembros de una ecuación por un mismo número diferente de cero o por una misma expresión variable en la misma variable de la ecuación.

Caso 1. Cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por un mismo número diferente de cero, siempre se obtiene una ecuación equivalente.

Dada la ecuación $p(x) = q(x)[1]$

Y $h \neq 0$ es claro que toda solución de la ecuación [1] es también solución de la ecuación $hp(x) = hq(x)$

Caso 2. Cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por una misma expresión variable en las mismas variables de la ecuación no siempre se obtiene una ecuación equivalente.

Sea la ecuación $p(x) = q(x)$, si se multiplica a los dos miembros de la ecuación la expresión $f(x)$ se obtiene la expresión $p(x)f(x) = q(x)f(x)$

El uso de esta regla de transformación puede llevar a *ganar* soluciones, es decir, cuando los valores numéricos de x que anulan la expresión variable $f(x)$ no son soluciones de la ecuación original se ganan soluciones. Por ejemplo, para el caso de la ecuación

$$\frac{2x}{x-5} = \frac{10}{x-5} \quad [5]$$

Si se multiplica a ambos miembros de la ecuación por la expresión $(x-5)$, se obtiene la ecuación $2x = 10 \quad [6]$

En este paso es posible que se haya ganado la solución 5, pues este es el único número que anula la expresión por la que se multiplicó.

Ahora si se multiplica ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{2}$ se llega a la ecuación $x = 5$, la cual es ecuación equivalente a la ecuación [6], pues tienen el mismo conjunto solución $S = \{5\}$. Sin embargo 5 no es solución de la ecuación [5], pues este valor la indetermina. En conclusión el conjunto solución de la ecuación [5] es $S = \emptyset$.

Sin embargo, al usar esta regla también se pueden *perder* soluciones cuando hay soluciones de la ecuación original que no se encuentran en la expresión $f(x)$. Por ejemplo, la ecuación

$$(m-1)^2(m-3) = (m-1)(m-3) \qquad [7]$$

Donde las soluciones se encuentran en el dominio de R. Ahora si se multiplica en ambos miembros de la ecuación por la expresión $\frac{1}{m-1}$ se llega a la ecuación

$$(m-1)(m-3) = (m-3) \qquad [8]$$

En este momento se pierde la solución 1, pues el dominio de la expresión por la que se multiplicó es R-{1}. Resolviendo la ecuación se tiene

$$(m-1)(m-3)-(m-3) = 0; \quad (m-3)[(m-1)-1] = 0;$$

$$(m-3)(m-2) = 0$$

Luego el conjunto solución de la ecuación [8] es $S = \{2{,}3\}$ y no contiene a 1, sin embargo, el conjunto solución de la ecuación [7] es $S = \{1{,}2{,}3\}$.

- Regla de transformación IV: elevar a una misma potencia n los dos miembros de una ecuación.

Sea $p(x) = q(x)$ [1], elevando a una misma potencia n los dos miembros de esta ecuación se obtiene $p(x)^n = q(x)^n$ [9].

Ahora si s es solución de [1], entonces $p(s) = q(s)$ y por lo tanto

$$p(s)^n = q(s)^n$$

Es decir s también es solución de la ecuación [9].

Por ejemplo sea la ecuación $\sqrt{x-1} = 2 \quad [10]$. Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado se obtiene $x-1=4$, la cual tiene como conjunto solución $S=\{5\}$. Dado que con la transformación se pueden ganar soluciones se verifica si 5 es solución de la ecuación [10]. Sustituyendo por 5 en la ecuación [10], se tiene que $\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2,$ por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación [10] es $S=\{5\}$.

Por otro lado, la resolución de ecuaciones cuadráticas, como se mencionó anteriormente se determina por el número de raíces, y éstas a su vez guardan relación con el grado de la ecuación. Es decir, que las ecuaciones cuadráticas poseen máximo dos soluciones, ya que el máximo exponente de la expresión el cual determina el grado de la ecuación es 2.

Uno de los procesos más comunes empleados para la resolución de ecuaciones es el *método de factorización* el cual de acuerdo con Barnett (1978) se define como el proceso inverso de la multiplicación, el cual establece que un polinomio se encuentra completamente factorizado cuando está escrito como el producto de sus factores primos. Este método se basa en la propiedad de la multiplicación por cero: si $a \; y \; b$ representan números reales y $a \,.\, b = 0,$ entonces $a=0 \;\; o \;\; b=0$ (Zill & Dewar, 2000).

En otras palabras, cuando se tiene la ecuación $x^2+5x+6=0 \;\; [11]$, se puede sustituir dicha ecuación por otra que sea equivalente, para ello el método de factorización permite expresarla como un producto de la siguiente manera

$$(x+a)(x+b)=0$$

Para determinar los valores de $a \; y \; b$ que satisfagan la equivalencia entre las expresiones, es necesario realizar una manipulación de los coeficientes de [11], en la cual se buscan dos valores que sumados den como resultado el valor del coeficiente que acompaña la x y que multiplicados resulten el valor del término independiente. Luego de algunas manipulaciones, que la mayoría de las veces resultan del tanteo, se establecen que los valores para $a \; y \; b$ son 3 y 2. Es decir $a=3 \; y \; b=2$.

Por lo cual se obtiene la ecuación equivalente a [11]

$$(x+3)(x+2)=0 \quad [12]$$

De las cuales se pueden establecer las soluciones para la ecuación igualando cada factor a cero, es decir

$$x+3=0 \;\; y \;\; x+2=0$$

Después se aplica la regla de transformación II, en la cual se suma a ambos miembros de la ecuación para transformarla

$$x+3-3=0-3 \qquad y \qquad x+2-2=0-2$$

De lo que se obtienen las ecuaciones $x=-3 \quad y \quad x=-2$, las cuales son soluciones de la ecuación [11], es decir $S=\{3,2\}$.

Este método permite encontrar las diferentes soluciones de una ecuación cuadrática a través de la manipulación de sus coeficientes, para ello se presentan diferentes casos en los cuales factorizar requiere de ciertas nociones para poder expresar la ecuación en un producto equivalente. Sin embargo, el interés de esta propuesta no es presentar estos casos, si no establecer la relación entre la factorización y la solución de una ecuación cuadrática a través de la manipulación de sus coeficientes.

Por otro lado, uno de los casos más comunes de las ecuaciones cuadráticas son aquellos que poseen la siguiente forma especial

$$x^2=d \; para \; d \geq 0 \qquad [13]$$

Aplicando el método de factorización se tiene que

$$x^2-d=0,$$

$$(x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d})=0,$$

$$x=\sqrt{d} \quad o \quad x=-\sqrt{d}$$

Un método alternativo que se utiliza para resolver la ecuación [13], es el conocido como el *método de raíz cuadrada*, el cual consiste en sacar la raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación (Zill & Dewar, 2000).

Si $x^2=d \; para \; d \geq 0$, entonces $\quad x=\pm\sqrt{d}$

Por ejemplo, sea la ecuación $(w+5)^2 = 3$ [14], la cual haciendo $x = w + 5\ y\ d = 3$ se tiene la forma especial $x^2 = d\ para\ d \geq 0$, luego, sacando la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$(w+5)^2 = 3,$$

$$w + 5 = \pm\sqrt{3}$$

De esto se tiene que $w + 5 = \sqrt{3}\ \ y\ \ w + 5 = -\sqrt{3}$, que al resolverse se obtiene

$$w = -5 + \sqrt{3} \quad y \quad w = -5 - \sqrt{3}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación [14] es $S = \{-5 - \sqrt{3}, -5 + \sqrt{3}\}$.

Otro método conocido que se emplea en la factorización de polinomios es el de *completar cuadrados*, el cual se emplea para expresiones cuadráticas que no pueden ser factorizadas fácilmente y que no tienen la forma especial [13]. Este método se aplica para ecuaciones de la forma:

$$x^2 + Bx + C = 0 \quad [15]$$

Para aplicar el método, se debe reescribir la ecuación de tal manera que los términos que estipulan la variable x estén del lado izquierdo

$$x^2 + Bx = -C$$

Luego se agrega la expresión $(\frac{B}{2})^2$en ambos lados de la igualdad

$$x^2 + Bx + (\frac{B}{2})^2 = -C + (\frac{B}{2})^2$$

De donde se obtiene un cuadrado perfecto

$$(x + \frac{B}{2})^2 = (\frac{B}{2})^2 - C$$

Para ejemplificar este método se propone factorizar la ecuación

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \quad [16]$$

Empleando el proceso de factorización se tiene que

$$(x + a)(x + b)$$

Donde se deben encontrar valores para ay b que sumados de -4 y multiplicados -1, siguiendo el proceso del caso anterior. Sin embargo este caso no se puede emplear, ya que es muy difícil encontrar por la vía del tanteo dos valores que cumplan con las condiciones indicadas. Debido a lo anterior, se aplica el método de completar cuadrados de la siguiente forma:

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = 0 + 1$$

Se adiciona $(\frac{B}{2})^2$= 4, en ambos miembros de la igualdad

$$x^2 - 4x + 4 = 0 + 1 + 4$$

Donde se obtiene un cuadrado perfecto, el cual es factorizable de la siguiente forma: $(x-2)^2 = 5$

Esta última expresión cumple la forma especial $x^2 = d \; para \; d \geq 0,$ la cual se resuelve aplicando el método de raíz cuadrada, donde se obtiene $x - 2 = \pm\sqrt{5}$ Luego despejando x, se obtienen las raíces $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{5}$. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación [14] es $S = \{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$

El caso anterior se puede generalizar para factorizar y hallar las raíces de cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0, \;\; con \;\; a \neq 0.$ Para ello se escribe

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right],$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$= \left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

Esto es $ax^2 + bx + c = (x + a)(x + b)$

Donde $x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En consecuencia las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, están dadas por la fórmula

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta es la fórmula general para la solución de ecuaciones cuadráticas, con la cual se pueden hallar las soluciones para cualquier expresión polinómica de grado 2, a partir de la manipulación de los coeficientes a, b y c. Sin embargo, no solo sirve para encontrar las soluciones, sino que además brinda información sobre la cantidad y naturaleza de estas a través de la expresión $b^2 - 4ac$, el cual es comúnmente conocido como *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si el *discriminante* es mayor que cero ($b^2 - 4ac > 0$) la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas, si es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$) tendrá dos soluciones reales e iguales, y si es menor que cero ($b^2 - 4ac < 0$) no tendrá soluciones reales.

Por último se encuentra el método de *solución gráfica*, en el cual se parte de la relación con el concepto de función, como se mencionó en el apartado anterior. Para este caso se construye la representación gráfica de la ecuación cuadrática y se analizan las intersecciones con el eje x, los cuales corresponden a las raíces de la ecuación. Esto se muestra a continuación a través del siguiente ejemplo:

sea la ecuación $y = 2x^2 - 4x$, al darle valores a la variable x, se obtienen los siguientes resultados:

X	Y
-1	7
0	0
1	-2
2	0
3	7

Representación tabular

Lo anterior se toma como parejas ordenadas que representan puntos en plano cartesiano los cuales al unirlos forman la siguiente parábola

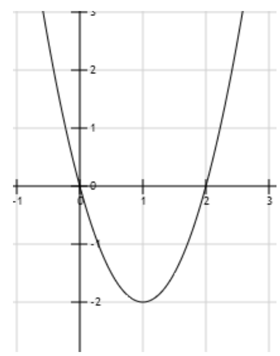


Figura 4: Representación gráfica de $y = 2x^2 - 4x$

Como se observa en la gráfica, la parábola intersecta el eje x en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, es decir al hacer $y = 0$, se tiene que $2x^2 - 4x = 0$, de lo cual se obtiene que: $2x(x-2) = 0$, $donde$ $x = 2$ y $x = 0$. Estos dos valores son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 4x = 0$, es decir $S = \{0,2\}$.

Del método anterior se puede deducir que resolver una ecuación cuadrática es hallar los valores de x que hacen que la igualdad sea válida, es decir, es hallar los puntos de intersección de la función $y = ax^2 + bx + c$ con el eje x (o los ceros de la función) (Caro, O´bonaga & Pérez, 1995).

A continuación se presenta una maya conceptual en la cual se estructura la relación entre los diferentes conceptos y nociones que aluden a la ecuación cuadrática, como definición, propiedades, tipos de solución y relación con el concepto de función, la cual es elaborada por los autores de este trabajo.

Esta maya conceptual parte de las Ecuaciones Cuadráticas, por un lado establece relación con su definición en términos de su forma general, de otro lado se hace referencia a su composición en términos de la igualdad de sus dos miembros y cómo está formado cada uno de ellos. Posteriormente se vinculan las propiedades que se cumplen en el proceso de solución, las cuales derivan en la transposición de términos. Finalmente se hace referencia al número de raíces de las ecuaciones cuadráticas y su dependencia con cada uno de los coeficientes.

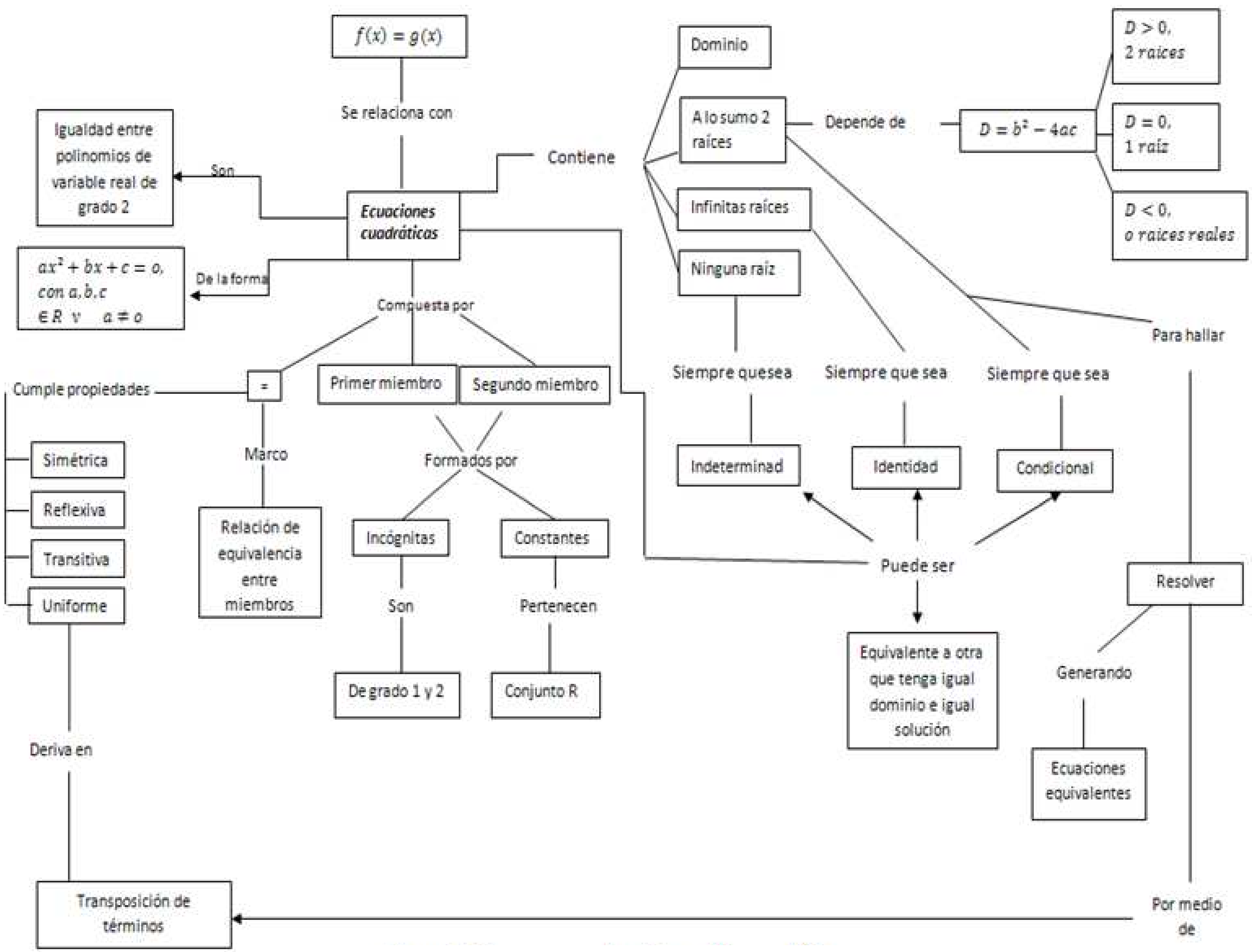


Figura 5: Maya conceptual Ecuación cuadrática elaborada por los autores del trabajo

2.2. PERSPECTIVA CURRICULAR

En esta sesión se presenta los aspectos curriculares relacionados con el álgebra escolar, que direccionan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), como propuestas pedagógicas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales determinan pautas para el diseño curricular en las instituciones educativas y para propuestas de aula en la escuela.

2.2.1. Los Lineamientos Curriculares y el álgebra en la escuela

Desde el establecimiento de los Lineamientos Curriculares, no solo en el área de matemáticas sino en las diferentes áreas del conocimiento, se han presentado cambios en el sistema educativo del país, dichos cambios contribuyeron en la apertura de espacios para la descentralización curricular, proponiendo asumir el diseño de un currículo como un proceso social y culturalmente mediado que se desarrolla en un contexto institucional (Amaya & otros, 2008), se promovió la participación no solo de docentes sino también de estudiantes al utilizar sus conocimientos para asociarlos a conocimientos matemáticos según su contexto, dando significados, lo que genero cambios en los PEI[10] de las instituciones.

Es importante destacar que mediante la Resolución número 2343 del 5 de junio de 1996, se adopta un diseño de lineamientos generales de procesos curriculares del servicio público educativo y se establecen indicadores curriculares para la educación formal. Es en ese momento que después de muchas discusiones y un largo procesos de la formulación de los indicadores de logro, se da los Lineamientos Curriculares para cada una de las áreas de conocimiento.

En relación a esta visión del trabajo matemático, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas muestran elementos conceptuales que sitúan el desarrollo y proceso

[10]El PEI define los énfasis de la institución y orienta la forma como planifican, desarrollan y valoran sus propósitos educativos, los cuales a su vez se insertan en el proyecto de Nación, tal como lo exige nuestra Constitución Política. (MEN, 2006)

de construcción del currículo, para propiciar mayor importancia en el aprendizaje, donde no solo se destaque el aprender procedimientos y conceptos sino también procesos de pensamientos aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

El currículo de Matemáticas en Colombia es dirigido por los Lineamientos Curriculares en Matemáticas los cuales se encuentran organizados en tres ejes fundamentales: Conocimientos Básicos, Procesos Generales y Contextos.

Los ***Conocimientos Básicos*** tienen que ver con procesos que desarrollan el pensamiento matemático con sistemas propios de las matemáticas, en los que se encuentran: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamientos métrico y sistema de medida, Pensamiento aleatorio y sistema de datos, Pensamiento variacional y sistemas algebraico y analíticos.

Este trabajo de grado se inscribe en el desarrollo de conocimientos básicos correspondientes a los sistemas algebraicos y analíticos, ya que hacen referencia al estudio de la variación y representaciones algebraicas, a partir de situaciones problema, sobre escenarios en los que se identifiquen patrones que posibiliten la construcción de expresiones algebraicas.

En ***Los Procesos Generales*** se hace referencia a los cinco procesos generales de la actividad matemáticos: El razonamiento, resolución y planteamientos del problema, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Este trabajo de grado se enfoca en el proceso de*la resolución y planteamiento de problemas*, en el cual se le da la posibilidad al estudiante de desplegar estrategias para resolver problemas, encontrar y verificar resultados y dar la interpretación razonable, a partir de actividades que permitan identificar patrones que posibiliten procesos para la construcción de expresiones algebraicas. Cabe resaltar que no se deja de un lado los otros procesos generales ya que también se involucran en la actividad matemática.

Por último**,** el **Contexto** está representado en las situaciones problemáticas y los ambientes que rodean al estudiante, en el cual se tienen en cuenta tres situaciones: de las mismas matemáticas, de la vida diaria, y de las otras ciencias.

Para efecto de este trabajo se hará énfasis en las situaciones de las mismas matemáticas, sin dejar de lado las otras dos. Es a partir del contexto donde se busca que el estudiante encuentre significado a conocimientos matemáticos, donde se tengan en cuenta el entorno sociocultural, local, y regional en que se desarrollan.

En este trabajo de grado, se pretende dar la posibilidad al estudiante de tener una aproximación tangible de algunos objetos matemáticos, a través de actividades que involucran materiales manipulativos como el Puzzle Algebraico, potenciando el desarrollo de habilidades de razonamiento y comunicación, que le permitan expresar ideas matemáticas, en este caso sobre los conceptos algebraicos.

En este sentido se puede percibir la relación entre el pensamiento variacional con otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y pensamientos propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de fenómenos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones. El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como *constante*, *variable*, *función*, *razón o tasa de cambio, dependencia e independencia* de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones.

2.2.2. El álgebra en los Estándares Básicos de Competencias

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencia, un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad, estos hacen referencia a criterios comunes para las evaluaciones externas, los resultados de estas, y a su vez, posibilitan el monitoreo de los avances en el tiempo y el diseño de estrategias focalizadas de mejoramiento acordes con las necesidades de las regiones e, incluso, de las instituciones educativas (MEN, 2006).

Los Estándares Básicos de Competencia (2006) se estructuran en una coherencia vertical y horizontal en los diferentes niveles educativos. Por un lado en la coherencia vertical se da la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los diferentes niveles o grados; y por otro lado la coherencia horizontal muestra la relación que existe entre un estándar determinado con los estándares de otros pensamientos dentro del mismo conjunto de grados o niveles.

Al igual que en los Lineamientos Curriculares, en los Estándares Básicos de competencia se presentan los cinco procesos generales que se dan en la actividad matemática: Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, comparar; y ejercitar procedimientos y algoritmos. Se organizan también por los cinco tipos de pensamientos matemáticos. En este sentido, al igual como se expresa en el apartado anterior en relación a los Lineamientos Curriculares, se tendrán en cuenta los procesos de *resolución de problemas* y *la modelación* como los procesos de referencia para el desarrollo de esta propuesta de trabajo de grado.

El tratamiento de situaciones de variación y dependencia ocupan un lugar central en el estudio del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos. Esto es particularmente visible en nuestras propuestas curriculares cuando se señala que (MEN, 2006):

> *"En las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo del pensamiento variacional, se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. Esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas –gráficas, tablas, ecuaciones, inecuaciones o*

> *desigualdades, etc.- que permiten tratar con situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas".*

En este sentido, el trabajo con representaciones en distintos sistemas o registros simbólicos, permiten la movilización entre diferentes procesos como la modelación y la resolución de problemas, los cuales posibilitan el desarrollo del pensamiento variacional a la vez que estable la relación con los pensamientos lógico y científico.

En cuanto a la formulación, tratamiento y resolución de problemas, suscitados por una situación problema, permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas (MEN, 2006). En este sentido se ve la necesidad de plantear situaciones que posibiliten el desarrollo de estrategias de solución de diferentes actividades contextualizadas o no, las cuales permitan un cambio de actitud en la medida de resolver completamente un problema, obteniendo resultados más significativos.

En cuanto al proceso de modelación, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias (2006), un modelo se entiende como una construcción o artefacto, material o mental para tratar de comprender una idea o un concepto. En este sentido un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido. Esto va en consonancia con lo que se plantea en este trabajo de grado, al proponer situaciones problema que involucran el uso del material manipulativo Puzzle Algebraico, con el cual se puede representar algunos conceptos algebraicos, como son las ecuaciones cuadráticas, dándole al estudiante la posibilidad de estimar o comprobar las posibles soluciones encontradas en una representación o procedimiento.

A continuación, se muestran la relación de algunos estándares articulados con el estudio de la ecuación cuadrática en el grado noveno. Para objeto de este trabajo se hace referencia a la coherencia horizontal y vertical, del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos con los estándares de otros pensamientos y de él mismo.

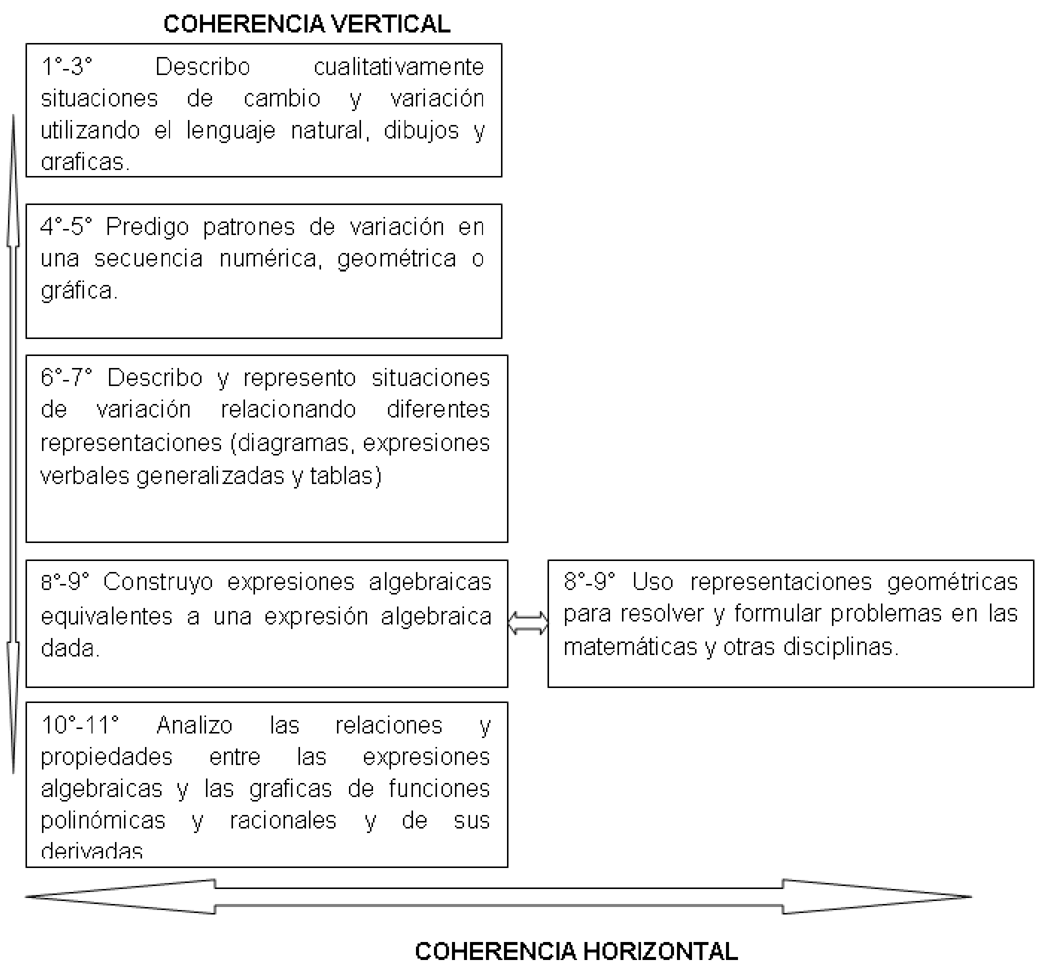


Figura 6: Coherencia vertical y horizontal entre estándares relacionados con el pensamiento variacional.

2.3. PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En este apartado se presentan algunos elementos teóricos relacionados con aspectos didácticos afines con la ecuación cuadrática. De una parte, se hace referencia a los obstáculos y dificultades que poseen los estudiantes en el estudio de álgebra y en particular de las ecuaciones, como también algunos relacionados con el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. De otra parte se expone como se entiende una secuencia didáctica desde algunos referentes conceptuales específicos para tener en cuenta en los diseños de la secuencia didáctica que se propone. Por último, se tienen en cuenta los referentes teóricos correspondientes al material manipulativo Puzzle Algebraico y la importancia de su implementación en las actividades que se proponen en dicha secuencia.

Con relación al primer aspecto, de acuerdo a los resultados de investigaciones, se puede afirmar que existen dificultades para comprender la noción de variable como variación, tal como lo reporta Andrade (1998) en sus trabajos sobre el aprendizaje del álgebra, en la cual indica que los estudiantes cometen errores cuando hacen tareas algebraicas. Como afirma Kieran & Filloy (1989), en Andrade (1998), aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere cambios en el pensamiento, más generales sobre número y operaciones, dichas dificultades se reflejan en la clasificación de algunos errores, los cuales menciona Booth (1988), en Andrade (1998) de la siguiente manera:

- *La clase de relaciones y de métodos usados en aritmética*. Cuando se presentan problemas en la aritmética que nunca se corrigieron, se presentan errores en la generalización de relaciones y procedimientos.

- *El uso de la notación y las convenciones en álgebra.* Se presentan dificultades cuando se interpretan los símbolos haciendo falsas generalizaciones o cuando los símbolos se perciben sintácticamente.

- *El enfoque de la actividad algebraica y la naturaleza de las respuestas.* Donde el objetivo que se presenta general de la aritmética es encontrar una solución numérica, por lo que una de las dificultades se refiere a la incapacidad para aceptar una expresión algebraica como respuesta.

- *El significado de las letras y de las variables.* Las dificultades se presentan cuando las variables se interpretan como símbolos que representan un único valor, en forma similar a los números, como en el caso de la incógnita o del número generalizado, pero no como representación de variación. Esta dificultad se relaciona con la idea de ecuación que pueden construir los estudiantes en tanto la ecuación pueda significar desde esta perspectiva como la igualdad de dos funciones ($f(x) = g(x)$).

Otras dificultades son de tipo cognitivo y se logran visualizar en la medida que no todos los estudiantes tienen un dominio en el desarrollo de los procedimientos aritméticos, en este sentido, tal como lo expresa Ballén (2012),surgen errores como consecuencia del uso abusivo de la generalización; son de tipo actitudinal, ya que muchos consideran que es difícil y que basta con operar aritméticamente unas letras; situaciones que no permiten ver en el lenguaje algebraico, un elemento dinamizador del lenguaje de las matemáticas, donde los estudiantes como consecuencia de esto no encuentran relaciones ni significados a los conceptos enseñados, y solo se limitan a memorizar.

En este sentido se puede hablar de dificultades en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, además de la inversión de las operaciones en la solución de ecuaciones. Afirma Alonso *et al.* (1993) en Mata et al. (2009) que:

> "*el lenguaje algebraico, depende del lenguaje simbólico, del uso correcto de paréntesis y de la aplicación de las propiedades de las operaciones. Las dificultades en su uso y tratamiento de las expresiones algebraicas se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos; el estudiante llega a un pensamiento formal cuando puede operar con elementos abstractos y realizar transformaciones algebraicas*".

Por ello se hace énfasis en la escritura de las expresiones algebraicas, lo cual posibilita la transformación adecuada de expresiones equivalentes y el buen uso de propiedades para llegar a resultados correctos.

De la misma manera, teniendo en cuenta una investigación sobre las dificultades y errores que presentan los estudiantes de los grados décimos y undécimo de los colegios de Cali al resolver un problema de olimpiadas; Figueroa & Suescún

(2011) pudieron observar los errores que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones de tipo cuadrático, para ello se escogió el siguiente problema:

Si x es un número real positivo tal que $\frac{x^4+1}{x^2} = 5$*, determinar el valor de* $\frac{x^6+1}{x^3}$.

A partir de este problema de logró identificar cuatro tipos de procesos de resolución, donde de los cuatro solo el cuarto grupo de estudiantes fueron los que resolvieron correctamente; a continuación se presentan los procedimientos y una explicación en algunos de los grupos, tratando de plantear una hipótesis, sobre los errores y dificultades encontrados en esta investigación (Figueroa & Suescún, 2011):

Primer grupo de estudiante: Se muestran algunos de los procedimientos en los cuales este grupo de estudiantes solamente intentaron resolver la ecuación $\frac{x^4+1}{x^2} = 5$.

A1	A4	A7
$\frac{x^4+1}{x^2} = 5$	$\frac{x^4+1}{x^2} = 5$	$\frac{x^4+1}{x^2} = 5$
$\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} = \sqrt{5}$	$x^2+1 = 5x$ (f)	$x^4+1 = 5x^2$
$\frac{x^2+1}{x} = \sqrt{5}$ (r)	$\frac{x^2}{x} = 5+1$ (t)	$x^4-5x^2+1=0$
$x^2+1 = \sqrt{5}x$	$x = 6$ (v)	$x^2 = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
$1 = \sqrt{5}x + x^2$ (t)		$x = \pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{5}} = x + x^2$ (t)		

Tabla 1: Procedimientos del primer grupo de estudiantes

El estudiante A1 presenta dificultades en el reglón tres con expresiones que contiene radicales, comete error al distribuir el exponente sobre cada factor en procesos aditivos: suma y resta. En el reglón cinco, hace la transposición incorrectamente del término x^2, porque lo suma en el lado derecho de la ecuación en lugar de restarlo, y en el reglón seis de nuevo cometen el error de transposición de términos. Finalmente obtiene una ecuación de tipo cuadrático y no la resuelve, quizá porque no conoce algún método de solución.

Con el estudiante A4 se presenta dificultad en el segundo reglón en la fracción, obtiene una ecuación que no es equivalente a la anterior, en el tercer reglón comete un error en la transposición de términos.

Segundo grupo de estudiantes: estos estudiantes resolvieron, incorrectamente, la ecuación $\frac{x^4+1}{x^2} = 5$ y luego reemplazaron el valor x en la expresión $\frac{x^6+1}{x^3}$.

$A8$	$A11$	$A15$
$\frac{x^4+1}{x^2}=5$	$\frac{x^4+1}{x^2}=5$	$\frac{x^4+1}{x^2}=5$
$x^2+1=5 \quad (f)$	$\frac{x^4}{x^2}=5-1 \quad (t)$	$\frac{x^2+1}{x}=5 \quad (f)\,(e)$
$x^2=5-1$	$x^2=4$	$x+1=5 \quad (f)$
$x=\sqrt{4} \quad (c)$	$x=2 \quad (c)$	$x=5-1$
$x=2$	$\frac{x^6+1}{x^3}=y$	$x=4$
$\frac{x^6+1}{x^3}$	$\frac{2^6+1}{2^3}=y$	$\frac{x^6+1}{x^3}=\frac{x^2+1}{x} \quad (f)\,(e)$
$x^3+1=(2)^3+1 \quad (f)$	$\frac{64+1}{8}=y$	$=\frac{4^2+1}{4}$
$=8+1$	$\frac{64}{8}=y-1 \quad (t)$	$=\frac{17}{4}=4.25$
$=9$	$8=y-1$	
	$9=y$	

Tabla 2: Procedimientos del segundo grupo de estudiantes

Tercer grupo de estudiantes: los estudiantes realizaron procedimientos al interior de la ecuación $\frac{x^4+1}{x^2} = 5$ sin necesidad de despejar el valor de x, para luego hallar el valor de la expresión $\frac{x^6+1}{x^3}$.

$A21$	$A24$	$A23$
$\frac{x^4+1}{x^2}=5$	$\frac{x^4+1}{x^2}=5$	$\frac{x^4+1}{x^2}=5$
$\frac{x^6+1}{x^3}=y$	$x^4-5x^2+1=0$	$\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{3}{2}}$
$\frac{x^{12}+x^3-x^{12}-x^2}{x^5}=5-y \quad (e)$	$x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}$	$\frac{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}{x^3}=5^{\frac{3}{2}}$
$\frac{x^3-x^2}{x^5}=5-y$	$\frac{x^4+1}{x^2}=5$	$\frac{\sqrt[2]{(x^4+1)^3}}{x^3}=5^{\frac{3}{2}}$
$\frac{x^2(x-1)}{x^5}=5-y$	$x^6+x^2=5x^4$	$\frac{\sqrt[2]{x^{12}+3x^8+3x^4+1}}{x^3}=5^{\frac{3}{2}}$
$\frac{x-1}{x^3}=5-y$	$x^6+1=5x^4-x^2+1$	
$\frac{x-1}{x^3}-5=-y$	$\frac{x^6+1}{x^3}=\frac{5x^4-x^2+1}{x^3} \quad (v)$	
$\frac{x-1-5x^3}{x^3}=-y$		
$\frac{-x+1+5x^3}{-x^3}=y \quad (v)$		

Tabla 3: Procedimientos del tercer grupo de estudiantes

El estudiante A21 resta a la ecuación del primer reglón la del segundo reglón y trata de escribir la resta de las fracciones como una sola fracción. En el reglón tres se evidencian las dificultades en el manejo de propiedades de exponentes, porque cuando multiplica potencias que tiene la misma base, multiplica los exponentes en lugar de sumarlos (en el numerador de la fracción). Los seis procedimientos que realiza después son correctos y el estudiante cree que resolvió el problema porque finalmente despeja y. Parece que este estudiante no entendió, que debe hallar un valor numérico para la expresión $\frac{x^6+1}{x^3}$, y no una expresión en términos de x.

El estudiante A24 no presenta errores en su procedimiento pero la respuesta que presenta no es numérica, sino una expresión en términos de x. Este estudiante tiene dificultades con el significado de “valor” de una expresión.

Teniendo en cuenta los procedimientos desarrollados por los estudiantes, Figueroa & Suescún (2011) consideran que algunos de los errores y dificultades que presentan estos estudiantes podrían tener su origen en los procesos de enseñanza y aprendizaje debido posiblemente al uso exagerado de ejercicios rutinarios y de tipo algorítmico en el tema de álgebra. También los estudiantes contribuyen a esta situación ya que generalmente quieren saber “la formula” para resolver los problemas y poco se interesan por los conceptos y el razonamiento que está detrás de un determinado tema.

Por otro lado Cadenas (2007), teniendo en cuenta una investigación realizada a estudiantes de primer semestre de la Universidad de los Andes, menciona que la construcción del conocimiento requiere por parte de los estudiantes una reorganización y ampliación de los conocimientos previos y por parte de los educadores la detección de las carencias, dificultades y los errores que impiden que los conocimientos presentes en los estudiantes sean significativos. En esta investigación se logró identificar algunos errores comunes que se comenten en la solución de expresiones cuadráticas, entre ellas se tiene dos casos:

Sea la expresión $(1-x)^2$, un error frecuente y clásico es dar la solución $1-x^2$, ya que utilizan de forma errónea la linealidad. Otro caso se presenta al calcular las raíces de una ecuación, por ejemplo $x^2-2x+1=0$, siendo una ecuación sencilla de realizar, se encuentra que los estudiantes desconocen la formula general como método de solución, y si la conocen no la saben aplicar adecuadamente, y mucho menos aplican la factorización.

De esta manera se pueden identificar una variedad de dificultades en la resolución de ecuaciones cuadráticas, con las cuales se hace necesario la creación e intervención de diferentes propuestas que contribuyan a la superación de errores de tipo aritmético, procedimental y conceptual. Para ello se propone en este trabajo de grado, la construcción de una secuencia didáctica con actividades que involucren el uso de materiales manipulativos, como alternativa para la superación de los diferentes errores y dificultades que se han identificado en las investigaciones mencionadas anteriormente.

2.3.1. Perspectiva de la resolución de problemas para el tratamiento algebraico

Las actividades de la secuencia didáctica que se presenta en este trabajo de grado, tienen en cuenta los procesos de resolución de problemas propuestos por

Polya (1965), en su libro “como plantear y resolver problemas”, de acuerdo con este autor se entiende la resolución de problemas como la perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que se utilizan y se aplican en cualquier campo de la vida diaria, donde el aspecto relevante es la manera como tratan los problemas, en este sentido y en palabras del autor “lo central en la enseñanza de las matemáticas es desarrollar estrategias en la Resolución de Problemas”.

De acuerdo con lo anterior, Polya (1965) plantea su método de cuatro pasos para resolver un problema, que se describen a continuación:

- Comprender el Problema: etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones y decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes ni contradictorias. Para ello es importante tener en cuenta los siguientes interrogantes: ¿Entiendes todo lo que dice?, ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?, ¿Distingues cuáles son los datos?, ¿Sabes a qué quieres llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña?, ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?
- Concebir un plan: en esta etapa es importante relacionarse con problemas semejantes, también con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar. En este caso es aconsejable tener en cuenta alguna de las siguientes estrategias: utilizar ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura), usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, entre otras.
- Ejecutar el plan: en este caso se Implementan las estrategias escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso. Se examinan todos los detalles y se resalta la diferencia entre percibir que un paso es correcto y demostrar que un paso es correcto.

- Verificar la solución: por último es necesario verificar si los resultados y el razonamiento son válidos y averiguar si se puede obtener el resultado de otra manera.

Siguiendo esta misma idea en forma particular, en relación con la resolución de problemas algebraicos de Polya, respecto a la resolución de problemas, Puig (1998) manifiesta que cuando se conoce el *lenguaje algebraico*, una parte importante del proceso de resolución de un buen número de problemas consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje, es decir, consiste en *poner el problema en ecuaciones*. El problema que hay que resolver se transforma entonces en el problema de *resolver la ecuación*. Una vez resuelta la ecuación falta volver al problema planteado para comprobar el resultado obtenido, y revisar y extender el trabajo realizado.

Para traducir un problema al lenguaje algebraico se deben tener en cuenta además que en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas. Así que se debe buscar cuáles son las cantidades de las que se habla en el enunciado del problema y qué se dice de ellas.

En primer lugar, se analiza el enunciado del problema para averiguar cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas que aparecen en él. También se analizan las relaciones que hay entre esas cantidades. Al hacerlo se reescriben algunas frases para mostrar con claridad la relación entre cantidades. Así, el enunciado del problema ha quedado preparado para traducirlo al lenguaje algebraico, que sólo habla de cantidades.

Sin embargo, la transformación del problema a la ecuación no es inmediata, pues se presentan algunas dificultades, las cuales Puig (1998) clasifica en tres tipos:

- Dificultades para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas.
- Dificultades en la traducción, que corresponden a la asignación de expresiones que representen las cantidades desconocidas y la relación entre ellas.

- Dificultades al escribir la ecuación, que tienen que ver con igualar expresiones que no representan la misma cantidad.

De acuerdo a lo anterior y con el fin de evitar tropezar con estas dificultades el mismo Puig propone su propia regla para poner un problema en ecuaciones la cual esquematiza de la siguiente forma:

1) Comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.

2) Dar nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra.

3) Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra.

4) Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.

5) Comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad.

Si los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad, se ha realizado una traducción adecuada del lenguaje natural al lenguaje algebraico, es decir, se ha puesto el problema en ecuaciones.

En este sentido, las actividades propuestas en la secuencia didáctica de este trabajo de grado, giran en torno a situaciones problema en las cuales el estudiante debe aplicar los pasos del método propuesto por Polya (1965) y lo planteado por Puig (1998), haciendo énfasis en la traducción del enunciado del problema a ecuaciones cuadráticas para poder llegar a la solución de éste.

2.3.2. Sobre la propuesta de secuencia didáctica

El análisis de los resultados concernientes a las actividades que conforman la secuencia didáctica que en este trabajo de grado se propone para el tratamiento de ecuaciones cuadráticas en la escuela, se enmarca en la perspectiva del modelo metodológico para la actividad de aula propuesto por el grupo DECA[11] y sus actividades se articulan con la perspectiva de la resolución de problemas planteado por Polya (1965) y Puig (1998) como se describió anteriormente, para ello se tienen en cuenta aspectos importantes sobre el significado de la secuencia didáctica en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (Guerrero, et al., 2006).

En este sentido, una secuencia didáctica se entiende como un plan de actuación del profesor, y corresponde a lo que afirma Linares (1996), en Guerrero et al. (2006), denomina la fase preactiva, donde se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje.

Para efectos de este trabajo se entiende, en el sentido anotado antes, por secuencia didáctica a ese plan de actuación del profesor, el cual le permita superar los viejos métodos de enseñanza, y de esta manera lograr, lo que Guerrero et al. (2006) llama, una *operativización* de la relación didáctica, sustentada a partir de poner en momentos claramente diferenciados la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes, los roles, la organización del aula, la descripción de las actividades, los materiales didácticos y los referentes teóricos para la actividad.

La secuencia didáctica está conformada por situaciones, que son una especie de modelo de interacción entre el estudiante y un conocimiento dado, a partir del cual el estudiante, guiado por el profesor, tiene la posibilidad de adaptarse a los criterios que plantea la situación, personalizándose de ella y utilizándola como recurso para alcanzar el conocimiento. Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre el estudiante y profesor lo cual se conoce como *contrato didáctico*, y es el que define las reglas de funcionamiento dentro de la situación, como distribución de responsabilidades, asignación de tiempos, permisos o prohibición en el uso de recursos, etc. Gálvez (1994). En este sentido una situación corresponde a un hecho que enfrenta al estudiante a través de ciertas actividades a la movilización de un saber.

[11] GRUPO DECA. (1992).Orientaciones Para El Diseño Y Elaboración De Actividades De Aprendizaje Y De Evaluación. PUBLICADO EN REVISTA AULA, Nº6, PÁGS.: 33-39

Sin embargo, no toda situación es eficiente, en el sentido de permitir alcanzar adecuadamente el conocimiento, para ello afirma Godino (2004) en Guerrero et al. (2006) que en la teoría de situaciones didácticas la elección de buenas situaciones problema es la clave para generar los conocimientos matemáticos pretendidos por el estudiante, noción que se puede proyectar también al modelo DECA.

Se espera que la propuesta de las actividades de las situaciones permitan que los estudiantes explicite y exteriorice sus ideas previas sobre los contenidos que se van a tratar en la secuencia didáctica; se predispongan favorablemente para afrontar el desarrollo de la secuencia didáctica con una actitud positiva; comprueben que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones, y que por tanto, deben ser transformados o ampliados; entre en un conflicto interno cognitivo que le fuerce a un cambio en sus esquemas de conocimiento.

Un aspecto importante que debe ser considerado en este tipo de actividades, es lo que se entiende por *aprendizaje* y el lugar que ocupa en éste la idea de *esquema*, lo cual implica que el cambio de estado cognitivo frente a situaciones nuevas para el estudiante esté determinado por la modificación de esquemas en el tiempo (Guerrero et al., 2006). Otros aspectos importantes que deben ser tenidos en cuenta son la idea de *devolución, consigna y situación adidáctica* dentro del contrato didáctico establecido por el profesor y el estudiante. A partir de ellos es cuando se requiere mirar la gestión de las variables didácticas por parte del profesor para producir la estrategia de base (Guerrero et al., 2006). Para la introducción de estas nociones se examinan las características de las fases según el modelo DECA y la teoría de situaciones didácticas, con el fin de hacer una mejor caracterización de la gestión de aula.

Para ello el grupo DECA (1992) en Guerrero et al. (2006), propone un grupo de actividades el cual se denomina de *desarrollo y reestructuración*, las cuales se toman en cuenta para que el estudiante pueda:

- Tomar contacto, practicar y asimilar los nuevos contenidos.

- Reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones.

- Comparar con los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal.

- Producir el cambio deseado en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo aparecido con las actividades de iniciación.

A continuación se presentan las actividades de *profundización y aplicación*, con la cuales el estudiante pueda desarrollar procesos de transferencia[12] y metacognitivos. En este sentido estas actividades son útiles para:

- Aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos.

- Reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos.

- Ampliar el conocimiento conseguido, para trabajar nuevas situaciones y contextos.

- Facilitar el trabajo en pequeñas investigaciones, relacionadas con los contenidos trabajados.

- Proponer situaciones de carácter opcional, dependiendo del nivel de dificultad y de la situación personal de cada estudiante.

Finalmente se encuentran las actividades de *evaluación*, las cuales deben verse como un continuo dentro de todo el proceso. Estas pretenden revisar el proceso en su conjunto, es decir, valorar la efectividad del trabajo en el aula, así como la pertinencia de la secuencia didáctica, el logro de los objetivos (Guerrero et al., 2006). En este sentido las actividades de evaluación pretenden:

- Conocer el grado de los aprendizajes que los estudiantes han adquirido.

- Permitir que los mismos estudiantes conozcan la utilidad del trabajo realizado y lo que han aprendido.

- Verbalizar algunos aprendizajes. Detectar errores, inexactitudes, fallos.

- Permitir reforzar aprendizajes.

[12]De acuerdo a lo que se conoce de la teoría Piagetiana la transferencia es un proceso cognitivo complejo, el cual supone aprendizajes adaptativos al medio, consecuencia de acomodaciones y asimilaciones sucesivas.

De acuerdo con las actividades planteadas anteriormente y desarrolladas por el modelo metodológico para la actividad del aula propuesto por el grupo DECA, se podría establecer una organización secuencial de estas, como se presentan en la siguiente tabla:

Modelo DECA
Actividades de iniciación e introducción
Actividades de desarrollo y reestructuración
Actividades de profundización y aplicación
Actividades de evaluación

Tabla 4: Secuencia de actividades del modelo DECA

Este marco de referencia guía el diseño e implementación, junto con la resolución de problemas, de las actividades que conforman la secuencia didáctica que se desarrolla en este trabajo de grado, y a partir de él se analizan los resultados encontrados en su implementación.

2.3.3. Sobre la integración de materiales manipulativos

En el diseño de la secuencia didáctica se pretende implementar el uso de materiales didácticos con el objetivo de propiciar acercamientos, que podrían ser de mayor significación, a los conceptos algebraicos. Entre estos materiales se encuentran los materiales manipulativos, los cuales actúan como sistemas de representación de diferentes conceptos matemáticos, relacionados particularmente con el álgebra.

Como punto de partida es necesario hablar de los sistemas de representación semiótica, que desde la perspectiva de la teoría de Duval (1999), se entiende como el medio del cual dispone el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales y hacerlas visibles a otros. Un ejemplo de ello es el uso de diagramas, imágenes y figuras, los cuales desde los antiguos griegos son utilizados para representar, explicar y demostrar resultados matemáticos (Hernández et al., 2008).

En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma (Duval, 1999). Existen diferentes tipos de representaciones que favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos, sin embargo, se manifiesta la constante preocupación entre los matemáticos y lo profesores de matemáticas en que el estudiante confunda los objetos matemáticos con sus representaciones (Socas, 1998), lo que lleva a que se favorezcan los sistemas de representación formales, más que los sistemas de representación visuales o intuitivos.

De acuerdo con Duval (1999), un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- La presencia de una representación identificable (para este caso los materiales didácticos)
- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada (manipulación del material).
- La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (pasar de visualizaciones intuitivas del material a representaciones abstractas).

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa, y por tanto, la comprensión de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. La manipulación de representaciones matemáticas proporciona los medios para construir las imágenes mentales de un objeto matemático y su validez dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado (Socas & Camacho, 1998).

En este sentido es importante entender los materiales manipulativos como sistemas de representación semiótica, a partir de los cuales se representan, explican y demuestran los resultados y conocimientos matemáticos que se pretenden promover, en este caso el de las ecuaciones cuadráticas.

Según lo plantea Hernández et al. (2008), el uso coherente de estos sistemas de representación para el lenguaje algebraico debe estar organizado en torno a: usar registros de representación, usar sistemas de representación semióticos autosuficientes, usar diferentes fuentes de significado, articular situaciones de enseñanza, que partiendo de situaciones reales, permitan desarrollar procesos enlazados de matematización.

De acuerdo a lo anterior, se propone la vinculación de materiales (ver figura 8) que permitan dar cumplimiento a las características mencionadas, para ello se toma como referencia el uso de materiales manipulativos, condicionados en situaciones reales que puedan llamar la atención del estudiante y que provoquen la necesidad de resolver los problemas que se planteen. De esta manera promover el acercamiento a los conceptos algebraicos, tal como lo afirma Domínguez, citado por Hernández et al. (2008), "nuestros propios experimentos de enseñanza ponen de manifiesto que los materiales manipulativos utilizados como representaciones semióticas pueden ofrecer un papel importante en la introducción del álgebra, debido a que:

1) Facilitan la manipulación y conceptualización del símbolo y de la cantidad desconocida o general.
2) Proporciona una interpretación geométrica a símbolos y operaciones.
3) Mejora el discurso de la clase de álgebra.
4) Facilitan las conversiones entre el lenguaje algebraico y el natural.
5) La manipulación de varias representaciones por el estudiante le permite construir imágenes mentales adecuadas de un objeto matemático".

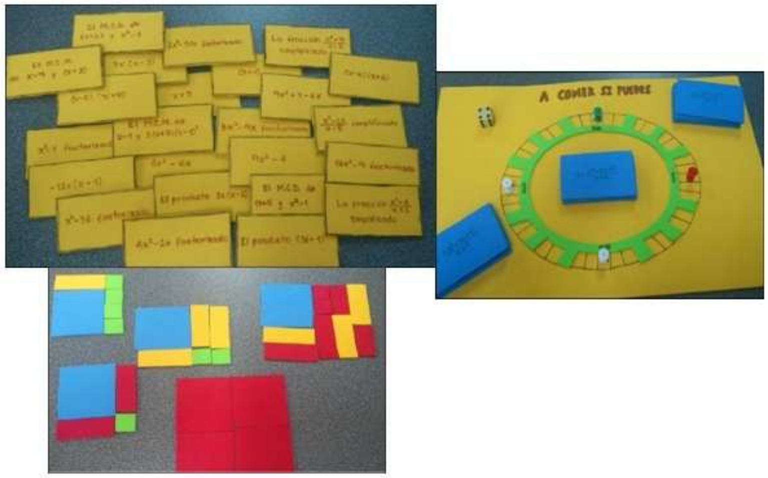


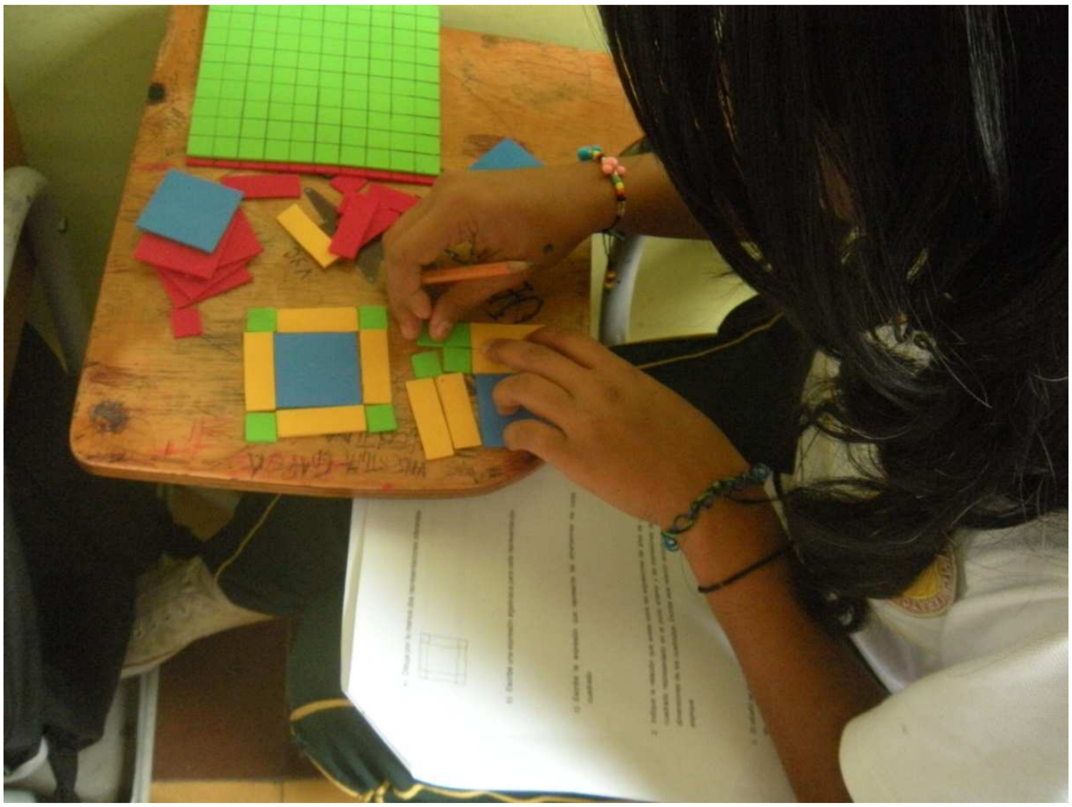
Figura 7: Materiales manipulativos

Los *materiales manipulativos* permiten ilustrar y modelar ideas y relaciones matemáticas y están diseñados para ser utilizados por los estudiantes en todos los grados escolares (Burns & Sibley, 2000, citado por Mink, 2010). Incluyen casi cualquier objeto físico usado para representar un concepto abstracto y se utilizan para ayudar a los estudiantes a manipular objetos matemáticos y representar algoritmos. En este sentido Arce (1999) afirma lo siguiente

> *"El uso del material manipulativo, juega un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas. Su correcta utilización constituye una importante base de adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos que posibilita un aprendizaje activo de acuerdo a la evolución intelectual del participante".*

Sin embargo, a pesar de las ventajas que se adquieren al trabajo con este tipo de materiales, es claro que estos no pueden lograr por si mismos enseñar matemáticas, pues son un medio para la enseñanza. Para poder utilizar estos materiales en un proceso de enseñanza y aprendizaje, es necesario realizar una transformación adaptativa en el que se articule, con coherencia, el material didáctico como un registro de representación semiótico para un objeto matemático dado, configurándose así como un registro de representación autosuficiente (Hernández et al., 2008).

A partir de estos fundamentos se pretende implementar el diseño de una nueva propuesta que permita comprender, analizar e interpretar los fenómenos ligados al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, particularmente de la ecuación cuadrática. Al mismo tiempo que sea una herramienta para el profesor que le contribuya a su labor docente. De esta forma el estudiante puede tener la oportunidad de interactuar con otro tipo de contextos, de situaciones donde se involucren elementos que le permitan tener un buen acercamiento a los objetos matemáticos, de tal manera que pueda tener una mejor comprensión de éstos.



CAPITULO III:

UNA SECUENCIA DIDACTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

CAPITULO III: UNA SECUENCIA DIDACTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

En este capítulo se presentan los aspectos relacionados con el diseño de la secuencia didáctica sobre la construcción del concepto de ecuación cuadrática en estudiantes de grado noveno, tales como la descripción general de su diseño, la estructura de las situaciones, así como también los contenidos matemáticos y expectativas de desempeño que se espera que los estudiantes alcancen en cada una de las actividades. Posteriormente se exponen los resultados y respectivos análisis de implementación y proceso de aplicación de cada una de las actividades.

3. Sobre la secuencia didáctica

La secuencia didáctica que se presenta a continuación pretende propiciar un acercamiento significativo al concepto de ecuación cuadrática. Esta secuencia está conformada por tres situaciones problema que a través de las actividades propuestas pretenden acercar al estudiante a la conceptualización de la ecuación cuadrática a partir de la resolución de problemas, y la integración de materiales manipulativos, con los cuales se busca darle al estudiante la posibilidad de observar algunas regularidades asociadas al concepto y sus características generales.

Esta secuencia se encuentra dirigida a estudiantes de grado noveno del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon del Placer-Cerrito. En ella se articulan los referentes teóricos enunciados en el Capítulo II, en un plan de trabajo coherente y organizado que presenta las tensiones entre el estudiante, el saber y el entorno a través de situaciones problemas en torno a la construcción del concepto de ecuación cuadrática.

Para su diseño se tuvieron en cuenta la integración del material manipulativo (Puzzle Algebraico), los cuales actúan como sistemas de representación semiótica, que permiten al estudiante observar diferentes formas de representación del concepto de ecuación cuadrática y de esta manera poder comprenderlo, tal como lo menciona Duval (1993) la comprensión de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva.

3.1. Diseño y descripción de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica sobre la ecuación cuadrática propuesta en este trabajo de grado, se conforma de tres situaciones, que a su vez, se componen en actividades. Cada situación integra unos propósitos, contenidos y expectativas de desempeño que se van complementado en la medida que se desarrolla el trabajo de implementación con los estudiantes, y finalmente se identifican algunos aspectos generales de la ecuación cuadrática. A continuación se presentan las actividades y propósitos de cada situación:

Situación 1			
	Actividad de iniciación	Actividad de desarrollo y reestructuración	
Actividad	Actividad 1: Comprendo el problema	Actividad 2: Pongo el problema en ecuaciones	Actividad 3: Solucionando el problema
Cantidad de preguntas	7	5	5

Tabla 5: Situación 1.

Propósito de la situación 1: Introducir el concepto de ecuación cuadrática a partir de una situación problema, donde el estudiante pueda identificar y clasificar los datos conocidos y desconocidos de este, representarlo en una ecuación, identificar las características principales de las expresiones cuadráticas, y las propiedades utilizadas en los procesos de solución.

Situación 2			
	Actividad de desarrollo y reestructuración	Actividad de profundización y validación	
Actividad	Actividad 1: Representación de expresiones algebraicas cuadráticas	Actividad 2: Enchapando el apartamento	Actividad 3: Validando lo aprendido
Cantidad de preguntas	3	3	4

Tabla 6: Situación 2.

Propósito de la situación 2: Identificar diferentes sistemas de representación, establecer la relación entre figuras geométricas y sus expresiones algebraicas, identificar expresiones algebraicas equivalentes, establecer la relación que existe entre las ecuaciones cuadráticas y el área como una de las representaciones de este concepto, reconocer la equivalencia entre la expresión cuadrática de un cuadrado y un rectángulo y sus respectivas dimensiones.

Situación 3			
	Actividad de profundización y validación	Actividad de evaluación	
Actividades	Actividad 1: De las representaciones a la ecuación cuadrática	Actividad 2: Diferenciando métodos	Actividad 3: Validando los métodos
Cantidad de preguntas	6	5	6

Tabla 7: Situación 3.

Propósito de la situación 3: En este grupo de actividades el estudiante tiene la posibilidad de reconocer y proponer situaciones problema relacionados con expresiones y ecuaciones cuadráticas, las cuales se resuelven con los métodos trabajados en las actividades anteriores, y donde se puede identificar la pertinencia de aplicar cada uno de ellos.

3.1.1. Descripción del material manipulativo

El Puzzle Algebraico es un material que consta de 132 fichas distribuidos por diferentes colores, dimensiones, que se representan con expresiones algebraicas positivas y negativas[13], las cuales se representan en: cuadrados pequeños denominados unidad (color verde), fichas rectangulares denominados x (color amarilla) y cuadrados grandes denominados x^2 (color azul). Además consta también de piezas con expresiones algebraicas negativas que se representan de la misma manera a las fichas positivas, anteriormente mencionadas, con la diferencia de que todas sus fichas son de color rojo. Como se muestra a continuación en la figura 9:

Figura 8: Puzzle Algebraico

Para trabajar con este material es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Las unidades tienen que estar en un único bloque (cuadrada o rectangular).
2. Los cuadrados que representan el x^2 deben estar situados de forma diagonal con respecto al bloque de unidades. No pueden estar en la misma fila o columna.
3. Los rectángulos positivos y negativos no pueden estar combinados en un mismo bloque.

Cada una de las piezas del Puzzle Algebraico hace referencia a una expresión según sea su forma. Cuadrados de lado x, rectángulos de base x, y una unidad de altura y cuadrados de lado igual a la unidad.

[13] En este contexto se entiende como negativo lo que es opuesto.

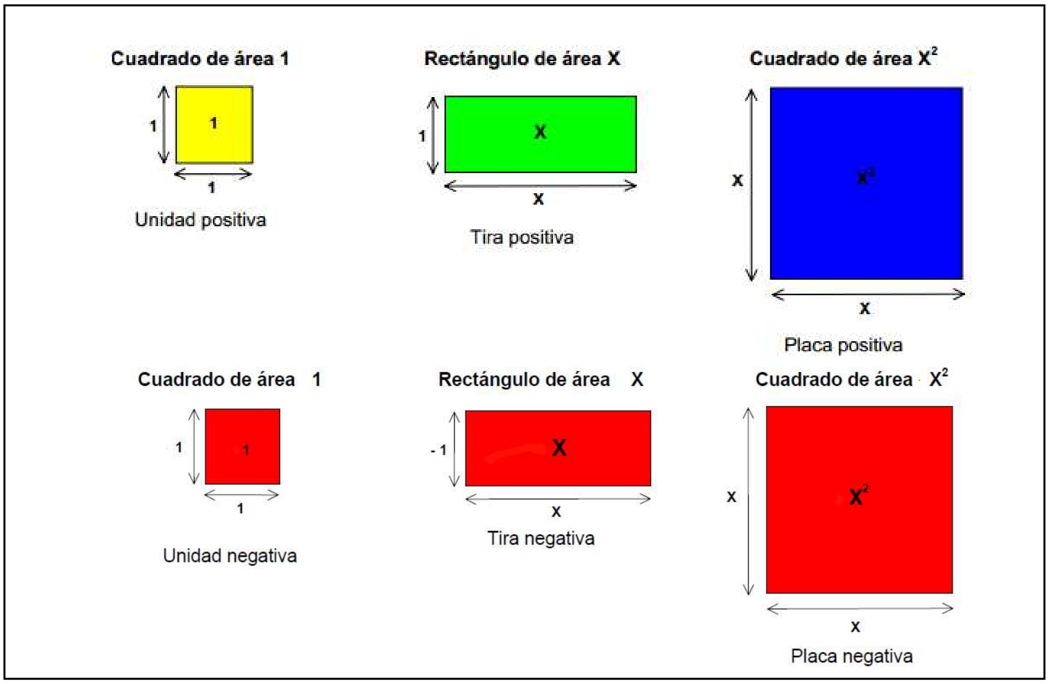


Figura 9: Expresiones de fichas del Puzzle Algebraico

Contenidos Matemáticos: El Puzzle Algebraico permite trabajar la propiedad distributiva, operaciones con polinomios, factorización de polinomios y resolución de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas. Además permite la modelización de la multiplicación como área, pero solo manejando piezas con signo positivo. Para el desarrollo de este trabajo se presenta una situación que permita representar expresiones de segundo grado, con las piezas del material, a partir de la construcción de cuadrados y rectángulos, y que lleve a establecer la relación con el área de los mismos y las magnitudes de sus lados, es decir la equivalencia entre dos expresiones cuadráticas.

3.2. SECUENCIA DIDÁCTICA

SITUACIÓN 1

Propósito: Introducir el concepto de ecuación cuadrática a través de la resolución de problemas.

Descripción de las Actividades: En este grupo de actividades se pretende lograr que los estudiantes sean capaces de reconocer los contenidos matemáticos, identificar cantidades conocidas y desconocidas, establecer relaciones entre cantidades a partir de una situación problema.

Contenidos matemáticos involucrados: forma general de las ecuaciones cuadráticas, propiedad distributiva, propiedad uniforme, solución de una ecuación cuadrática por el método de factorización.

Expectativas de desempeño: Con este grupo de preguntas se busca que el estudiante muestre sus habilidades para relacionar los elementos involucrados en un problema y asignar representaciones algebraicas, además de reconocer y aplicar las propiedades de uniformidad en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Lea atentamente el siguiente problema y realice las actividades propuestas.

Un apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho. ¿Cuáles son las medidas de las dimensiones del apartamento si su área es 105 m^2*?*

Actividad 1: Comprendo el problema

1. Escriba las cantidades o datos conocidos y los desconocidos del problema anterior.
2. Indique cuántos metros más tiene la medida del largo del apartamento en relación con la medida del ancho.
3. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 5 m. Encuentra la medida del largo.
4. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 6 m. Encuentra la medida de su largo.
5. Indique si las dimensiones del apartamento encontradas en los puntos 3 y 4, corresponden a las condiciones del problema (área del apartamento dada). Explique su respuesta.

6. Complete la siguiente tabla de acuerdo a las condiciones del problema:

Medida del ancho del apartamento	4	5	6	7	8	9
Medida del largo del apartamento	12			15		
Área del apartamento		65	84			

a. De acuerdo a la tabla, ¿cuáles son las dimensiones del apartamento que cumplen "todas" las condiciones del problema?

7. Si x es la longitud del ancho del apartamento, escriba una expresión que permita calcular la medida del largo del apartamento en función de x.

Actividad 2: Pongo el problema en ecuaciones

1. Teniendo en cuenta lo realizado hasta el momento, complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	**Lenguaje algebraico**
Medida del ancho del apartamento	x
Medida del largo del apartamento	
Área del apartamento	
Valor del área del apartamento	

2. Lina afirma que: "la expresión que permite calcular la longitud del ancho del apartamento es $x.(x+8)=105$".

   ¿Es válida esta afirmación? Justifique su respuesta.

3. Encuentre una ecuación equivalente a la dada por Lina aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

$$x.(x+8)=105$$

Las expresiones obtenidas en el punto 3:

$x^2 + 8x = 105 \quad o \quad x^2 + 8x - 105 = 0$

Se conocen como ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.

En términos generales una ecuación cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b \ y \ c$ son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los reales y $a \neq 0$.

4. De acuerdo a lo anterior señale cuales son los coeficientes $a, b \ y \ c$ de la ecuación obtenida en el punto 3.
5. De dos ejemplos diferentes de ecuaciones cuadráticas.

Actividad 3: Solucionando el problema

Samuel tomó la ecuación que dio Lina para resolver el problema del apartamento, y encuentra la solución de éste hallando el valor de x que corresponde a la medida del ancho del apartamento, así:

$x^2 + 8x = 105$	
$x^2 + 8x - 105 = 105 - 105$	Paso 1
$x^2 + 8x - 105 = 0$	Paso 2
$(x + 15)(x - 7) = 0$	Paso 3
$x + 15 = 0 \quad ó \quad x - 7 = 0$	Paso 4
$x + 15 - 15 = 0 - 15 \quad ó \quad x - 7 + 7 = 0 + 7$	Paso 5
$x = -15 \quad ó \quad x = 7$	Paso 6

1. Ayude a Samuel a determinar cuál de los dos valores de $x$corresponden a la medida del ancho del apartamento y explique su respuesta.

2. Indique que operación realizó Samuel en el paso 1 del problema y por qué se puede hacer esto.
3. Samuel afirma que para ir del paso 2 al paso 3, él factorizó la expresión $x^2 + 8x - 105 = 0$. ¿Qué significa esto?
4. Explique por qué para pasar del paso 3 al 4 se debe aplicar la siguiente propiedad:

$$\boxed{Si\ a.b = 0, donde\ a, b \in R\ \rightarrow a = 0\ \text{ó}\ b = 0}$$

5. Aplique el proceso utilizado por Samuel para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 6x + 8 = 0$

b. $x^2 - 5x = 0$

SITUACIÓN 2

Propósitos: Establecer la relación entre figuras geométricas y expresiones algebraicas e identificar expresiones algebraicas equivalentes. Establecer la relación entre las expresiones del área y las dimensiones de una figura geométrica.

Descripción de las Actividades: las actividades de esta situación pretenden que el estudiante logre identificar otros sistemas de representación asociados a las expresiones y ecuaciones cuadráticas, como son los geométricos, a partir de la manipulación de las fichas del Puzzle Algebraico, y los utiliza para resolver situaciones problema.

Contenidos matemáticos involucrados: expresiones algebraicas correspondientes a las ecuaciones cuadráticas, características de las ecuaciones cuadráticas y la equivalencia entre ecuaciones.

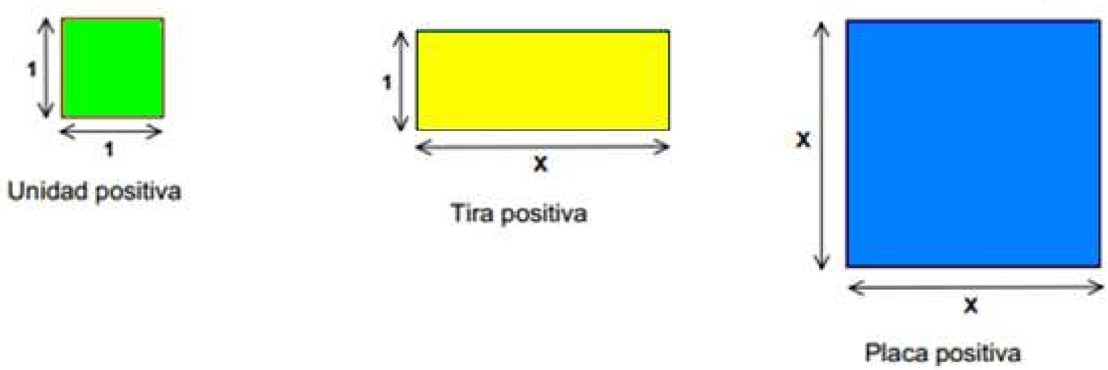
Expectativas de Desempeño: (*representar*) con este grupo de preguntas se busca que el estudiante muestre sus habilidades para reconocer representaciones algebraicas, y las relaciones entre los elementos involucrados en un problema. También identificar expresiones algebraicas equivalentes, poniendo en juego propiedades numéricas formales.

El material manipulativo Puzzle Algebraico es una colección de piezas con la que se puede representar geométricamente expresiones y ecuaciones cuadráticas.

Descripción del Puzzle algebraico

El Puzzle algebraico es una colección de figuras geométricas planas, formada por cuadrados y rectángulo con las siguientes características:

- El cuadrado de dimensiones 1 x 1, que denominaremos unidad positiva.
- El rectángulo de dimensiones 1 x x, que denominaremos tira positiva.
- El cuadrado de dimensiones xx x que denominaremos placa positiva



Para representar cualquier expresión cuadrática, con términos positivos y/o negativos se completa la colección con las versiones negativas de las piezas descritas anteriormente, las cuales se diferenciaran de las demás fichas porque son de color rojo. Para este contexto se entienden las expresiones algebraicas negativas como la resta o la suma de lo opuesto.

Reglas para trabajar con el Puzzle Algebraico

Para trabajar con este material es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

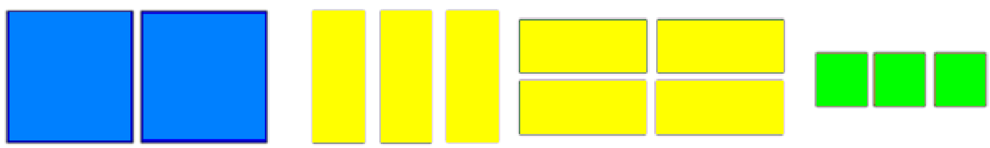
1. Las unidades tienen que estar en un único bloque (cuadrada o rectangular).
2. Los cuadrados que representan el x^2deben estar situados de forma diagonal con respecto al bloque de unidades. No pueden estar en la misma fila o columna.

3. Los rectángulos positivos y negativos no pueden estar combinados en un mismo bloque.

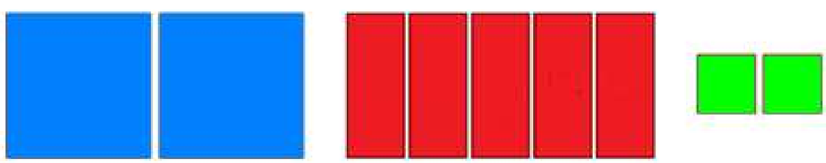
Teniendo en cuenta la descripción del Puzzle Algebraico presentada anteriormente realice las siguientes actividades:

1. Escriba la expresión algebraica que permita calcular el área total representada en cada conjunto de fichas.

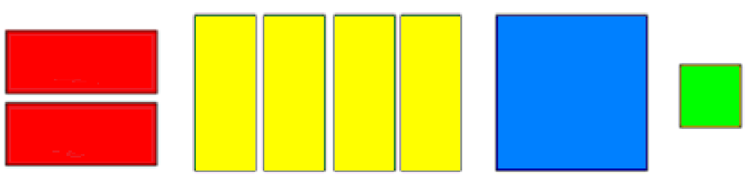
a)



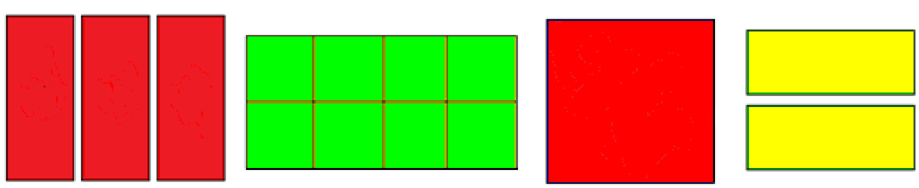
b)



c)



d)



2. Compare estas expresiones con la definición de ecuación cuadrática presente en la situación 1. Escriba una conclusión.
3. Utilizando las fichas del Puzzle Algebraico:
   a) Representa la expresión obtenida en el punto 3 de la actividad 2 de la situación 1.

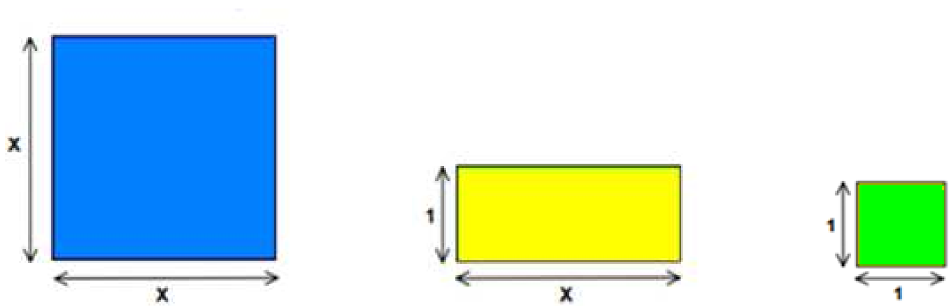
b) Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos lineales.

c) Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos constantes.

Todas las expresiones obtenidas en el punto 3 de esta situación son expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $a, b\ y\ c$ son coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los números reales (R) $y\ \ a \neq 0$.

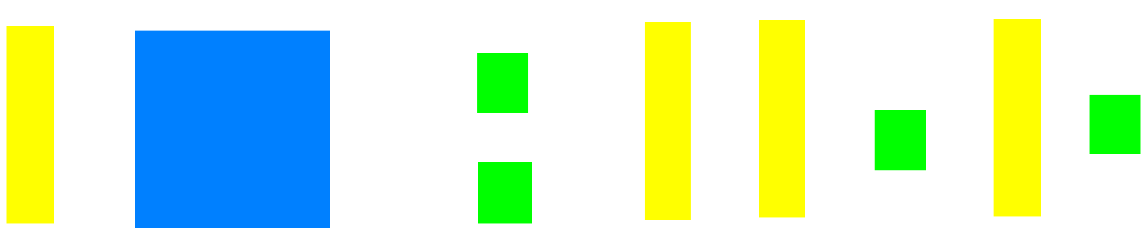
Actividad 2: Enchapando el apartamento

Lina quiere arreglar su apartamento y decide empezar enchapando el baño, para ello contrata un albañil que le haga el trabajo. Para este arreglo Lina compra baldosas con las siguientes características.



Baldosa tipo a. Baldosa tipo b. Baldosa tipo c.

1. Utilizando el Puzzle Algebraico ayuda al albañil a hacer una organización que permita utilizar todas las baldosas siguientes para enchapar una de las paredes del baño de forma cuadrada (tenga en cuenta las reglas del Puzzle Algebraico).



a) Dibuja por lo menos dos representaciones diferentes

b) Escribe una expresión algebraica para cada representación

c) Escriba la expresión que representa las dimensiones de cada cuadrado

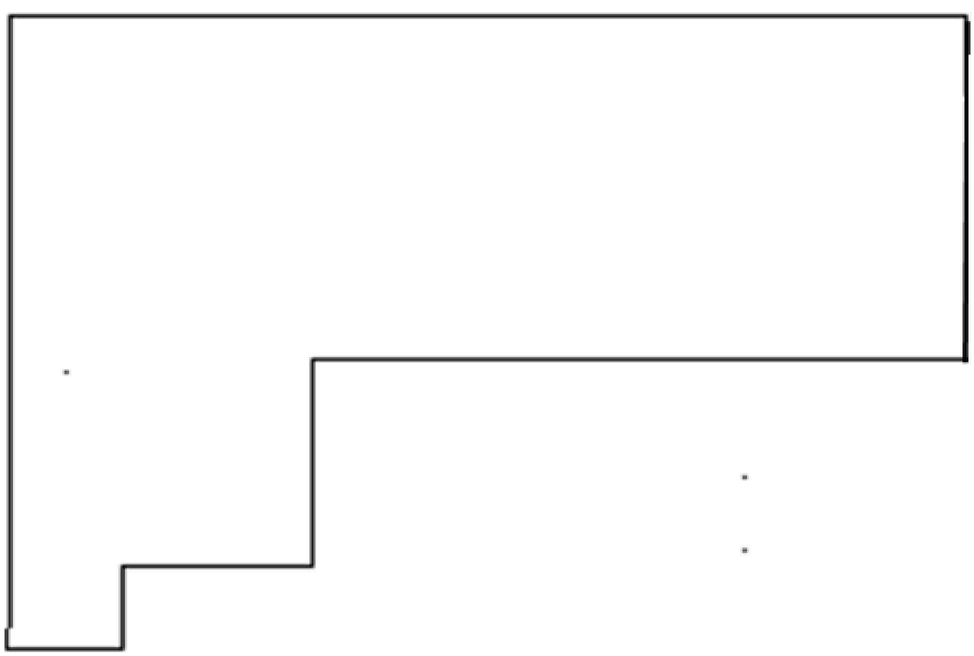
2. Indique la relación que existe entre las expresiones del área de cada cuadrado representado en el punto anterior y las expresiones de las dimensiones de los cuadrados. Escriba esta relación simbólicamente y explique.
3. El albañil se da cuenta que el área de la pared es de 25 dm^2. Encuentra en la expresión que halló en el literal c del punto 1, el valor de las dimensiones de todas las baldosas.
4. Si Samuel tiene la expresión $x^2 + 4x + 4$, que permite calcular las dimensiones de las baldosas cuando el área de la pared mide 16 dm^2

a) Utiliza el Puzzle Algebraico y ayuda a Samuel a calcular esos valores

b) Explica como calculaste los valores de las dimensiones de las baldosas.

Actividad 3: validando lo aprendido

El albañil debe enchapar la siguiente superficie de pared, cuya área es de 367cm^2, con las baldosas (representadas con las fichas del Puzzle Algebraico), sin necesidad de cortar ninguna.



1. Indique cuántas baldosas tipo a, tipo b y tipo c, se necesita para enchapar la pared y cómo se acomodarían.
2. Escriba cuál es la ecuación que corresponde al área de la pared enchapada con las baldosas.
3. Determine las dimensiones de cada una de las baldosas de acuerdo con la ecuación del punto 2, utilizando el método de Samuel en la situación 1.
4. Determine cuál es la medida del perímetro de la pared.

SITUACIÓN 3

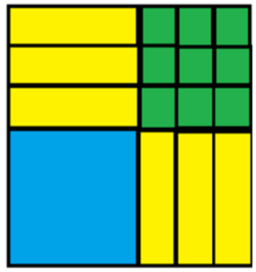
Propósito: Reconocer y proponer situaciones problema relacionados con expresiones y ecuaciones cuadráticas, las cuales se resuelven con los métodos trabajados en las actividades anteriores.

Descripción de las Actividades: En este grupo de actividades se pretende que el estudiante aplique los procesos y utilice diferentes registros de representación para solucionar situaciones problema, identificando el método de solución más conveniente.

Contenidos matemáticos involucrados: expresiones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas, ecuaciones equivalentes, fórmula cuadrática.

Expectativas de desempeño: Este último grupo de actividades tiene como objetivo que el estudiante muestre sus habilidades, adquiridas en las actividades anteriores, en la representación de expresiones cuadráticas de forma geométrica y las utilice para solucionar situaciones problema, además de que logre distinguir y aplicar de forma correcta los métodos de solución de ecuaciones.

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas, que tienen las mismas características de las baldosas de la actividad 2, situación 2, que debe emplear en una pared de 144 cm^2de área, utilizando la siguiente configuración:



Actividad 1: De las representaciones a la ecuación cuadrática

1. Teniendo en cuenta la configuración de la pared complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico
Medida del ancho de la pared	
Medida del largo de la pared	
Área de la pared	
Valor del área de la pared	144 cm^2

2. Escriba la ecuación que permite calcular el valor de las dimensiones de los lados, según la tabla anterior.
3. Samuel afirma que para encontrar dimensiones de las baldosas, se debe hallar el valor de x de la expresión $(x+3)^2 = 144$. Explica la validez de la afirmación que hace Samuel.
4. Para encontrar ese valor, Samuel propone el siguiente procedimiento:

$$(x+3)^2 = 144$$

$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{144}$	Paso 1
$x+3 = 12$	Paso 2
$x+3-3 = 12-3$	Paso 3
$x = 9$	Paso 4

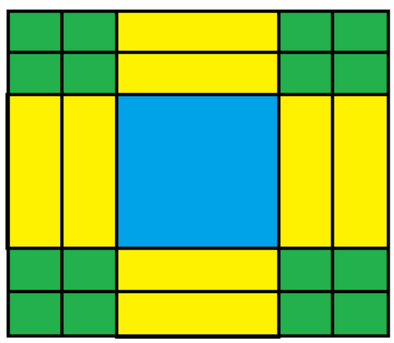
a) Explica lo que realizo Samuel en el paso 1.

b) Indica lo que realizo Samuel en el paso 3.

5. Teniendo el valor de x, encuentra las dimensiones de cada baldosa y su área.
6. Lina decide utilizar 4 baldosas tipo a, 4 baldosas tipo b y solo una baldosa tipo c, para enchapar una pared cuadrada de área de 169 cm^2.
   a) Utilizando el Puzzle algebraico y teniendo en cuenta sus reglas, dibuja una representación de la pared enchapada.
   b) Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de los lados de las baldosas.
   c) Aplica el método utilizado por Samuel en el punto 4, para encontrar las dimensiones de las baldosas.

Actividad 2: Diferenciando métodos

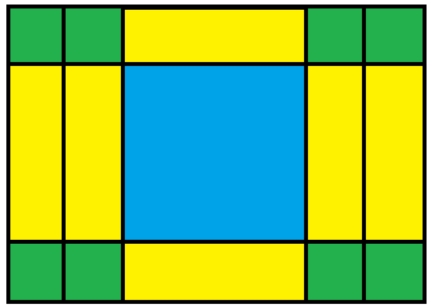
Dada las siguientes configuraciones de baldosas, las cuales cumplen con las características mencionadas en la actividad 1 de la situación 3, resuelve:



1. Plantea un problema que se pueda representar mediante la configuración anterior, asignándole un área de 400 cm^2.
2. Escriba la ecuación que permita resolver el problema que propuso.
3. Encuentra las dimensiones de las baldosas empleando el método 1 que utilizó Samuel en la situación 1 y el método 2 que utilizó en el punto 4 de esta situación.

Método 1	Método 2

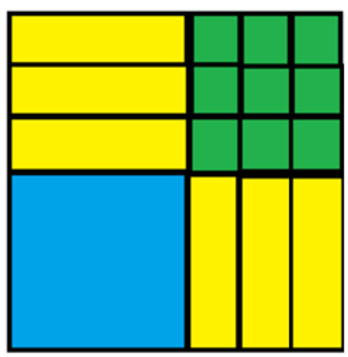
El albañil debe enchapar el mesón de la cocina de área 224 cm^2, de acuerdo con la siguiente configuración:



4. Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de las baldosas.
5. Halle las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos empleados por Samuel.

Actividad 3: Validando los métodos

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas que debe emplear en otras paredes utilizando solamente la siguiente configuración.



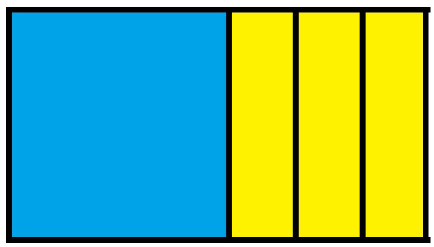
1. Escriba la expresión que representa la medida del área de la pared.
2. Ayude a Lina a encontrar los valores de las dimensiones de las baldosas y las áreas que pueden enchapar, llenando la siguiente tabla:

   a)

Medida del lado		3		7			10
Área de la pared	16		64		144		

b) Indica como encontraste cada valor.

3. Indique la relación que existe entre la expresión del punto 1 y los valores encontrados en la tabla del punto 2. Escriba esta relación simbólicamente y explique.
4. Si el área de la pared es de 256 dm^2, determine los valores de las dimensiones y las áreas de cada baldosa.
5. Samuel se encuentra con la siguiente configuración de baldosas la cual cubre una pared de área 12 dm^2 :



a) Escribe la ecuación cuadrática que representa este problema.
b) Determine si es posible calcular las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos trabajados anteriormente. Explique su respuesta.

Una forma general de resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{ax^2}+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, es a partir de la fórmula $\boldsymbol{x}=\frac{-\boldsymbol{b}\pm\sqrt{\boldsymbol{b^2}-\boldsymbol{4ac}}}{\boldsymbol{2a}}$, donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente lineal y $\boldsymbol{c}$ es el término independiente.

c) Escribe los valores de los coeficientes de la ecuación del literal a.
d) Aplique la formula cuadrática para determine los valores de las dimensiones de las baldosas.
6. Explique en qué casos se pueden aplicar cada uno de los métodos trabajados en esta situación.

3.3. METODOLOGÍA DE IMPLEMENTACIÓN

Para la realización de esta secuencia se contó con 5 sesiones, cada una con una duración de 2 a 3 horas, las situaciones se realizaron en la jornada de la mañana en el Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon de El Placer-Cerrito.

Las actividades planeadas integraron el material manipulativo Puzzle Algebraico, fichas y plenarias, las cuales se realizaron de manera individual. Las personas que dirigieron las actividades fueron los autores de este trabajo de grado, de modo que uno de ellos realiza la implementación y la otra toma los registros audiovisuales. Permitiendo que participen los estudiantes de manera activa y den a conocer su opinión frente a la multiplicidad de aspectos en torno a la concepción de la ecuación cuadrática, después de terminar cada situación, se implementan preguntas consignadas de cada actividad. Los registros fueron de tres tipos, principalmente se privilegian los registros escritos consignados por los estudiantes, el audiovisual en el cual se implementó una cámara digital para realizar filmaciones y registros fotográficos; y la toma de nota, realizada por los investigadores en donde se consigan las opiniones y acciones de los estudiantes en el desarrollo de las actividades y los registros escritos de los estudiantes.

La secuencia didáctica sobre la Enseñanza del Concepto de Ecuación Cuadrática en grado noveno se implementó en el periodo comprendido entre el 25 de noviembre y 13 de diciembre. En la implementación, los autores realizan un acompañamiento a los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas, en el cual se resuelven dudas sobre las diferentes formas de pregunta.

En este sentido, la gestión del profesor en la implementación de la secuencia didáctica en el aula, es contribuir al estudiante en la construcción del conocimiento sobre la ecuación cuadrática, movilizar las actividades mismas a través de las preguntas, orientar a los estudiantes, proponer la reflexión sobre posibles conflictos cognitivos, etc. Asimismo al movilizar la secuencia didáctica lograr alcanzar los propósitos de cada situación problema y el cumplimiento de los objetivos planteados en este trabajo.

En este apartado se presentan los principales aspectos, relacionados con la población y la metodología de trabajo de aula que se realizó en este trabajo de grado.

3.3.1. Población

La secuencia didáctica fue aplicada a 8 estudiantes, 4 mujeres y 4 hombres de grado noveno del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon, los cuales se encuentran entre los 13 y 15 años de edad, en este grupo no hay estudiantes repitentes, siete de ellos vienen juntos desde grado octavo. Dos estudiantes se integraron a este grupo, una estudiante a principio de año y la otra estudiante en el mes de septiembre finalizando el tercer periodo, ambas con algunas deficiencias en aspectos algebraicos, como operaciones con polinomios y factorización. Sin embargo, las estudiantes cumplieron con un plan de mejoramiento que permitió nivelarse con el resto de sus compañeros.

Es importante tener en cuenta que estos estudiantes no han tenido continuidad con el profesor, pues en grado octavo trabajaron con un profesor distinto, con una intensidad de cuatro horas de clase a la semana, sin horas adicionales para trabajar otras ramas de las matemáticas como geometría y estadística, situación que se repite para grado noveno.

En este grupo se presentan algunas particularidades en relación con el desarrollo de las matemáticas, debido a que el colegio es de carácter técnico comercial, se trabaja el área de contabilidad en el cual se acostumbra a llevar cuentas que involucran el manejo de fórmulas y llenado de tablas. Además ocho estudiantes del grupo fueron capacitados por el Servicio Nacional de Aprendizaje SENA en un curso de 40 horas de Matemática financiera, el cual aprobaron, este aspecto ha favorecido el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas.

3.3.2. Gestión en el Aula

El desarrollo de cada una de las situaciones y actividades de la secuencia, se realizó de forma individual. Las personas encargadas de dirigir las actividades de la secuencia didáctica sobre la enseñanza del concepto de ecuación cuadrática, fueron los autores de este trabajo. Es importante destacar que también se hizo uso de toma de notas por parte de los autores, con el fin de analizar detalladamente los procedimientos registrados.

3.4. RESULTADOS Y ÁNALISIS DE RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en la secuencia didáctica aplicada a los estudiantes de grado noveno del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon de El Placer – El Cerrito. Organizados por situación (S_1, S_2, S_3), actividad (A_1, A_2, A_3), y pregunta (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6), para ello se tipifican las respuestas de cada estudiante por medio de descripciones de los resultados, teniendo como referentes principales los registros escritos de cada uno de los estudiantes y algunos registros audiovisuales.

Se utilizan las siguientes notaciones para la identificación de las tablas correspondientes a los análisis de cada una de las actividades:

S(n): Significa n situaciones, donde n= 1, 2, 3. Por ejemplo: S_1, corresponde a la Situación1.

A(n): Significa n actividades, donde n= 1, 2, 3. Por ejemplo: A_1, corresponde a la Actividad 1.

P(n): Significa n preguntas, donde n= 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por ejemplo: P_1, corresponde a la Pregunta 1.

3.4.1. Resultados y análisis de la Situación 1

- **Descripción general de la aplicación de la Situación 1**

La Situación 1, consta de tres actividades, las cuales fueron aplicadas en dos sesiones los días 25 y 26 de noviembre del 2013. Las sesiones desarrolladas se llevaron a cabo en la mañana. En toda la implementación de esta secuencia se usan los mismos horarios.

La actividad 1 comienza con una presentación y explicación de toda la secuencia. A continuación, los estudiantes se organizan en sus puestos individualmente, registran sus apreciaciones, indican lo conocido y desconocido, indican dimensiones, completan tabla, y escriben la expresión, todo lo anterior relacionado con el problema de la situación. Esta actividad tuvo una duración de 40 minutos.

Para el desarrollo de la actividad 2, los estudiantes completaron de manera individual la tabla propuesta con lo realizado hasta el momento y justifican sus respuestas de acuerdo a lo entendido por el problema. Esta actividad tuvo una duración de 40 minutos.

En el desarrollo de la actividad 3, los estudiantes registran sus respuestas individualmente, y hacia el final de la sesión, se realizó una plenaria para discutir acerca de lo obtenido por cada estudiante. Cabe resaltar que esta sesión duro aproximadamente una hora.

Esta situación pretendía que el estudiantes se familiarizaran con los contenidos matemáticos que se van a trabajar. El tipo de actividades que se desarrollan hacen parte de las actividades introductorias o de inicio planteadas por el modelo DECA, mencionadas en el marco teórico de este trabajo de grado, donde se le da la posibilidad al estudiante de exteriorizar sus ideas previas sobre los contenidos matemáticos trabajados en la secuencia y de esta manera se predisponga para el desarrollo de esta con una actitud positiva.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 1

Población: 8 estudiantes.

Lea atentamente el siguiente problema y realice las actividades propuestas. *Un apartamento tiene como medida del largo 8metros más que la medida de su ancho. ¿Cuáles son las medidas de las dimensiones del apartamento si su área es 105 m^2?* **P_1:** Escriba las cantidades o datos conocidos y los desconocidos del problema anterior.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican como cantidad conocida el área y como desconocidas el largo y ancho del apartamento.	4	50%
T_2:Estudiantes que indican las cantidades del problema algebraicamente ($x,\ \ x+8,\ \ 105\ m^2$)	1	12,5%
T_3: Estudiantes que dan como conocido los 8 metros más de la medida del ancho y el área, y como cantidades desconocidas las medidas de las dimensiones del apartamento. Algunos en forma numérica y otros en forma verbal.	3	37,5%

Tabla 8: Tipos de respuesta P_1, A_1, S_1

De acuerdo con los resultados registrados en la tabla anterior se puede observar que con relación al 50% de los estudiantes que responden de la forma T1, se puede observar que logran identificar el valor del área como la única cantidad conocida y los valores de las dimensiones de los lados como las cantidades desconocidas, lo que significa que reconocen las cantidades conocidas como los valores numéricos que no dependen de otros valores y las cantidades desconocidas como los valores que no aparecen en el problema o que dependen de otros valores (ver anexo 1).

De otra parte, un estudiante expresa las cantidades en forma general, reconociendo el ancho del apartamento como la cantidad que permite expresar el largo, asignándole el valor de x y expresando el resto en función de esta variable. De acuerdo a lo anterior se puede decir que este estudiante relaciona los elementos del problema utilizando un lenguaje más abstracto, al denotar las cantidades correspondientes a las dimensiones del apartamento de forma algebraica.

Finalmente, en los estudiantes que contestaron de la forma T3 se observa que dan como cantidades conocidas el valor de 8 que corresponde a la relación entre el largo del ancho, es decir, “La medida del largo es 8 metros más que la medida del ancho” y el valor del área, lo que permite afirmar que para este tipo de estudiantes lo conocido al parecer corresponde a un valor numérico determinando. Sin embargo este hecho no siempre se cumple, puesto que en una situación pueden estar escritas las cantidades desconocidas en términos de las conocidas y no ser conocidas.

De lo anterior, se puede decir que la mayoría de los estudiantes logran identificar claramente las cantidades conocidas y desconocidas del problema, algunos lo hacen de forma verbal y otros en forma algebraica, sin embargo, existe una dificultad en algunos estudiantes que asocian las cantidades conocidas a aquellas en las que se expresa un valor numérico, sin determinar que estas cantidades pueden estar dependiendo de otro valor. Esto sugiere la necesidad de trabajar actividades que permitan una mayor reflexión sobre la naturaleza de las cantidades y las relaciones entre ellas.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 2, 3 y 4

P_2: Indique cuántos metros más tiene la medida del largo del apartamento en relación con la medida del ancho.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que el largo del apartamento tiene 8 metros más que el ancho. Lo indican en forma verbal o numérica.	8	100%

Tabla 9: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_1

P_3: Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 5 m. Encuentra la medida del ancho.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que el largo del apartamento corresponde a la suma del ancho más 8, realizan o no la operación obteniendo 13.	6	75%
T_2: Estudiantes que parten de la expresión algebraica que indica la relación entre el largo y el ancho $(x + 8)$ y sustituye 5 para obtener 13.	1	12,5%
T_3: Estudiantes que dan como respuesta incorrecta 40(multiplicando el largo por la condición, 5 m x 8 m = 40).	1	12,5%

Tabla 10: Tipos de respuestas P_3,A_1,S_1

P_4: Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 6 m. Encuentra la medida de su largo.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que el largo del apartamento corresponde a la suma del ancho más 8, realizan o no la operación obteniendo 14.	6	75%
T_2: Estudiantes que parten de la expresión algebraica que indica la relación entre el largo y el ancho $(x + 8)$ y sustituye 6 para obtener 14.	1	12,5%
T_3: Estudiantes que dan como respuesta incorrecta 48(multiplicando el largo por lo indicado 6 m x 8 m = 48).	1	12,5%

Tabla 11: Tipos de respuestas P_4,A_1,S_1

Con respecto a la tabla 9, se puede observar que todos los estudiantes logran identificar la relación entre el largo y el ancho del apartamento de acuerdo con el enunciado, lo que es significativo para la comprensión del problema.

Por otro lado, en las tablas 10 y 11 se puede observar que el 75% de los estudiantes logran asociar la operación suma a la relación entre las dimensiones del apartamento y de esta manera encuentran el valor de largo de acuerdo con las condiciones establecidas en la pregunta (ver anexo 1). Un estudiante además (12.5%), establece esta relación de manera algebraica escribiendo la expresión

$x + 8$ que corresponde a la medida del largo, esto significa que estos estudiantes además de recocer la relación entre las dimensiones del apartamento logran aplicarla para encontrar valores en casos particulares, lo cual es un paso importante en el acercamiento a la solución del problema.

Solo un estudiante asoció la operación del producto a la relación entre las dimensiones del apartamento, lo que no permitió calcular los valores pedidos, lo anterior puede deberse al parecer porque el estudiante asocia esta relación con la fórmula que permite calcular el área de un rectángulo en este caso del apartamento.

De acuerdo a lo anterior, en términos de la resolución de problemas, se puede afirmar que los estudiantes, al reconocer la primera relación entre el largo y el ancho del apartamento, avanzan en la comprensión del problema para su puesta algebraica, es decir, se predisponen a pasar del lenguaje natural a un lenguaje algebraico. Sin embargo, no todos los estudiantes logran comprenden completamente esta relación, debido a que no asocian la operación adecuada, lo que sugiere el acompañamiento del profesor en el que se logre hacer una mayor reflexión sobre las condiciones establecidas en el problema.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 5

P_5: Indique si las dimensiones del apartamento encontradas en los puntos 3 y 4, corresponden a las condiciones del problema (área del apartamento dada). Explique su respuesta.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que los valores de las dimensiones presentadas en los puntos 3 y 4 no corresponden a las condiciones del problema, debido a que con ellos se calculan valores del área diferentes al dado en el enunciado.	8	100 %

Tabla 12: Tipos de respuestas P_5,A_1,S_1

Con relación a las respuestas de la tabla 12, se aprecia que todos los estudiantes reconocen que las dimensiones encontradas en los puntos 3 y 4 no coinciden con las condiciones dadas por el problema, precisando que no son las dimensiones del apartamento porque el área que se obtiene utilizando estos valores no corresponden con el valor expresado en el enunciado (ver anexo 2).

Con respecto a lo anterior se puede observar que el 100% de los estudiantes reconocen que la relación entre las dimensiones del apartamento no solo es una relación entre su largo y su ancho, sino que tiene que ver también con el área, inclusive un estudiante acude a la fórmula del área de un rectángulo para explicar la relación. Esto significa que los estudiantes van mejorando cada vez más en la comprensión de las relaciones establecidas en las condiciones del problema, lo cual permite acercarse cada vez más a su solución.

En este sentido, se puede decir que los estudiantes logran identificar cuando una respuesta corresponde o no a las condiciones establecidas en un problema, sin embargo, esto no significa todavía que puedan hallar la respuesta correcta. Esto muestra que los estudiantes reconocen que en la resolución de problemas se debe cumplir todas las condiciones de este para encontrar soluciones correctas.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 6a

P_{6a}: Complete la siguiente tabla de acuerdo a las condiciones del problema:

Medida del ancho del apartamento	4	5	6	7	8	9
Medida del largo del apartamento	12			15		
Área del apartamento		65	84			

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que completan todos los valores de la tabla en forma correcta.	6	75%
T_2: Estudiantes que completan algunos de los valores de la tabla de manera incorrecta.	2	25%

Tabla 13: Tipos de respuestas P_{6a},A_1,S_1

En la tabla 13, se aprecia que el 75% de los estudiantes completan la tabla correctamente, lo cual indica que aún con otro tipo de representación, como el tabular, los estudiantes terminan de diferenciar cada una de las cantidades, las relaciones entre las dimensiones ya establecidas y el área en forma precisa. El 25% de los estudiantes no completan de forma correcta la totalidad de la tabla, debido a que en una de las columnas obtienen un valor errado con respecto al largo del apartamento y que eventualmente lleva a calcular un valor incorrecto del área, sin embargo, a pesar de haberse equivocado solo sucede en una de las columnas, lo que al parecer puede ser resultado de un error de suma en uno de los casos particulares.

A pesar que dos de los estudiantes cometieron errores para calcular los valores pedidos en algunas casillas de la tabla, se puede decir que la mayoría logró establecer correctamente la relación que existe entre las dimensiones de acuerdo a las condiciones del problema y la relación con el área. De lo anterior se puede afirmar que el cambio de representación no altera el hecho de que los estudiantes pueden reconocer y comprobarlos datos y representaciones del problema, sino que además el registro tabular permite visualizar cada dato y relacionarlo en forma concreta.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 6b

P_{6b}: De acuerdo a la tabla, ¿cuáles son las dimensiones del apartamento que cumplen “todas” las condiciones del problema?		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que dan las dimensiones del apartamento en forma correcta, medida del largo y medida del ancho (7m y 15m).En forma verbal o numéricamente.	4	50%
T_2: Estudiantes que indican las dimensiones del apartamento en forma incorrecta, (medida del largo y medida del ancho (7 m, 10 m),(5 m,6 m) .y (7 m, 1 m)).	4	50%

Tabla 14: Tipos de respuestas P_{6b},A_1,S_1

Con relación a las respuestas de la tabla 14 se observa que el 50% de los estudiantes dan las dimensiones del apartamento correctamente, relacionando los valores hallados en la tabla de la pregunta 6a, por otro lado el resto de los estudiantes se equivocan a la hora de identificar las dimensiones correctas del apartamento que cumplen con todas las condiciones del problema, a pesar que la mayoría completó la tabla de la pregunta anterior de forma correcta y de manifestar su compresión por las relaciones entre las dimensiones y el área del apartamento en las preguntas anteriores.

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta pregunta y pesar de manifestar una comprensión por las relaciones entre las dimensiones y el área del apartamento, solo la mitad de los estudiantes logran seguir en consonancia con los resultados registrados en las respuestas de las preguntas anteriores, al dar los valores correctos de dichas dimensiones. Para el resto de estudiantes, a pesar de haber calculado los valores en la tabla del punto anterior, se les dificulta concretar el problema.

Situación1: Actividad 1, Pregunta 7

P_7: Si x es la medida del ancho del apartamento, escriba una expresión que permita calcular la medida del largo del apartamento en función de x.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que expresan de forma algebraica la medida del largo del apartamento como $x+8$.	3	37,5%
T_2: Estudiantes que indican que la expresión que permite calcular la medida del largo del apartamento como $x+y$,$x+z$ ó $x.(x+8)$	3	37,5%
T_3: Estudiantes que indican la medida del largo como $x = 4*12+5*13$	2	25 %

Tabla 15: Tipos de respuestas P_7,A_1,S_1

Con respecto al 37.5% de los estudiantes que responden de la forma T1, se observa escriben la expresión que permite calcular la medida del largo del apartamento en función de x en forma correcta, aunque vale la pena resaltar que esta expresión la habían representado en algunas respuestas de las preguntas anteriores, lo que significa que este grupo de estudiantes se familiariza mejor con el lenguaje algebraico que el resto de sus compañeros.

Otro 37.5% de estudiantes escriben la expresión correspondiente a la medida del largo del apartamento en función de dos variables, sin especificar a que corresponde cada una de ellas, o hace la relación $x.(x+8)$correspondiente al producto entre las dimensiones, mientras que el 25% restante escriben la siguiente operación $x = 4 * 12 + 5 * 13$, para indicar la medida del largo del apartamento. De esta manera, se puede decir que existe una dificultad por parte de la mayoría de los estudiantes para analizar el enunciado del problema y realizar la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Sin embargo, a pesar de lo anterior y conforme a lo planteado por Puig (1998) en su regla de cómo poner un problema en ecuaciones, se puede afirmar que en el desarrollo de esta actividad se han analizado las cantidades conocidas y desconocidas y se ha establecido la relación entre estas cantidades para finalmente dejar el problema preparado para traducirlo al lenguaje algebraico.

Situación1: Actividad 2, Pregunta 1

P_1: Teniendo en cuenta lo realizado hasta el momento, complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	**Lenguaje algebraico**
Medida del ancho del apartamento	x
Medida del largo del apartamento	
Área del apartamento	
Valor del área del apartamento	

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que completaron la totalidad de la tabla correctamente $(x\ ; x+8;\ x(x+8);\ 105)$	3	37,5%
T_2: Estudiantes que completan la tabla indicando (x; x+8 o 7; x+y, x+z, o x . y; 105)	4	50%

T_3: Estudiantes que en la medida del largo del apartamento escribieron $x + 8 = 105$, y en el área del apartamento $x^2 + 8 - 105 = 0$	1	12,5%

Tabla 16: Tipos de respuestas P_1,A_2,S_1

De acuerdo a lo anterior, sobresale el 37.5% de los estudiantes que logran completar correctamente la tabla, de acuerdo con lo planteado por Puig (1998), este grupo de estudiantes logra representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones existentes entre ellas, lo que favorece el planteamiento de la ecuación que representa el problema.

Con relación al 50% de estudiantes que forman parte del segundo tipo de respuesta, se observa que no ponen en relación las expresiones del largo y el ancho para determinar el área del apartamento, lo que parece indicar que al llenar la tabla desconocen que el área de un rectángulo es el producto de su las dimensiones, o simplemente consideran que esta área, algebraicamente, debe expresarse en forma general sin tener en cuenta la forma algebraica del largo y el ancho. Esto dificulta el proceso de traducción del problema a una expresión ecuación (ver anexo 3).

En el estudiante que expresa como la medida del largo $x + 8 = 105$ y como área $x^2 + 8 - 105 = 0$, se observa una tendencia a no aceptar expresiones abiertas para las dimensiones o área del apartamento, pues las iguala a un valor numérico. Esto deja ver la dificultad de ir construyendo la ecuación paso a paso, y que puede tener sus orígenes en la existencia de tendencias comunes de la escuela, donde hay un forzamiento por llegar a la ecuación de forma inmediata, pues el estudiante es consciente que es con esta que se calculan los valores solicitados en el problema.

A pesar que el 37.5% de los estudiantes lograron completar correctamente la tabla y de acuerdo a lo planteado por Puig (1998) en cuanto a poner un problema en ecuaciones, se puede afirmar que existe una dificultad relacionada con la traducción del problema, lo cual se evidencia en las respuestas de la mayoría de los estudiantes, donde se observa que no logran representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones existentes entre esas cantidades, además de un arraigamiento por parte de un estudiante por igualar las expresiones a un valor numérico, lo que podría desencadenar en un error al igualar dos expresiones que no representan la misma cantidad.

Situación1: Actividad 2, Pregunta 2

P_2: Lina afirma que: "la expresión que permite calcular la medida del ancho del apartamento es $x.(x+8)=105$". ¿Es válida esta afirmación? Justifique su respuesta.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que reconocen como válida la afirmación de Lina y no justifican esta respuesta.	3	37,5%
T_2: Estudiantes que indican que no es válida la afirmación de Lina, porque dicha expresión lo que permite calcular es el área del apartamento y no para encontrar la medida del ancho de este.	5	63,5%

Tabla 17: Tipos de respuestas P_2,A_2,S_1

Los resultados anteriores dejan apreciar que sólo el 37.5% de los estudiantes, que también reconocen en el punto anterior cada parte de la ecuación, aprecian que la expresión $x.(x+8)=105$ permite calcular el valor de x que corresponde al ancho del apartamento, dato básico para hallar el valor del largo y poder comprobar el valor del área dada en el problema.

Es importante anotar que la mayoría de los estudiantes están de acuerdo en que la expresión dada corresponde a la del área, pero no reconocen que esta permite, al resolverla, calcular el ancho del apartamento. Esta dificultad parece no ser sobresaliente si después la utilizan para calcular el ancho del apartamento y por ende las demás condiciones del problema.

De lo anterior se puede decir que sólo el 37.5% de los estudiantes reconocen las variables e identifican condiciones del problema lo que indica una predisposición al uso del lenguaje algebraico en el cual se establece un primer acercamiento al planteamiento del problema en términos de una ecuación, mientras que el resto de estudiantes se le dificulta todavía establecer la relación de forma algebraica.

Situación1: Actividad 2, Pregunta 3

P_3: Encuentre una ecuación equivalente a la dada por Lina aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. $x.(x+8)=105$		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplican la propiedad distributiva de forma correcta y encuentran una ecuación equivalente ($x.(x+8)=x^2+8x=105$).	7	87.5%
T_3: Estudiantes que indican la ecuación equivalente de forma incorrecta como $x.(x+8)=x+8x+105=0$ ó $x.(x+8)=\ x^2+8+105x=0$.	1	12,5%

Tabla 18: Tipos de respuestas P_3,A_2,S_1

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes (87.5%) reconocen las propiedades numéricas y las aplican a expresiones algebraicas, hecho que es importante para el proceso de solución de ecuaciones (ver anexo 3). Con este tipo de actividades, el estudiante comprueba la utilidad de sus conocimientos previos y la necesidad de trabajarlos, en este caso para identificar y hallar el significado de las ecuaciones equivalentes.

Por otro lado uno de los estudiantes aplica la propiedad obteniendo dos casos diferentes de respuestas, en el primero escribe $x.(x+8)=x+8x+105=0$, donde se observa que el estudiante comete el error al no aplicar las propiedades de potencia respecto al producto de dos expresiones con igual base, además aplica la propiedad uniforme directamente donde escribe 105 al otro lado de la igualdad pero con signo positivo, llevando a lo que se conoce como una falsa igualdad. En el otro caso escribe $x.(x+8)=\ x^2+8+105x=0$, donde se evidencia ahora la correcta aplicación de las propiedades de potencia, sin embargo realiza la multiplicación de x por el número incorrecto, 105 en vez de 8, y reitera lo que se evidenció en el primer caso al dejar expresada una falsa igualdad.

En este sentido se puede afirmar que existe una dificultad por parte de uno de los estudiantes respecto a la aplicación de las propiedades numéricas lo cual no permite la plena identificación de expresiones equivalentes a la expresión dada, y que puede dificultar el proceso de solución de la ecuación.

Situación1: Actividad 2, Pregunta 4

P_4: De acuerdo a lo anterior señale cuales son los coeficientes $a, b\ y\ c$ de la ecuación obtenida en el punto anterior.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1:Estudiantes que indican los coeficientes de forma correcta $(a = 1, b = 8\ y\ c = -105)$	2	25%
T_2: Estudiantes que indican los coeficientes $a\ y\ b$ de forma correcta $(a = 1, b = 8)$ y el coeficiente constante $(c = 105)$	1	12,5%
T_3: Estudiantes que indican los coeficientes de la ecuación obtenida en la pregunta 3 junto con la incógnita $(a = 1x^2, b = 8x, c = -105)$.	5	62,5%

Tabla 19: Tipos de respuestas P_4,A_2,S_1

De acuerdo a las tabla 19, respecto al primer grupo (25%) se puede observar que los estudiantes logran identificar en forma correcta cada uno de los coeficientes de la ecuación, lo que indica una apropiación de la definición cuadrática en cuanto a que reconocen los coeficientes como valores numéricos que acompañan al término cuadrático, el término lineal o corresponden al término independiente (ver anexo 4).

Por otro lado, un solo estudiante se equivoca en la identificación del término constante, en el cual escribe el valor con el signo incorrecto, lo que parece indicar que este estudiante no relaciona el signo que antecede al valor numérico a un coeficiente negativo, sin embargo, los demás coeficientes los escribe de forma correcta.

El último grupo de estudiantes (62.5%) presenta una dificultad en cuanto a la identificación de los coeficientes de la expresión cuadrática, donde al parecer asocian estos valores con los términos de la expresión y no los separan del término cuadrático y del término lineal, esto significa que no conciben el significado de coeficiente como un valor que acompaña la variable si no como cada uno de los términos que sumados forman la expresión cuadrática.

En este sentido, se puede decir que existe una dificultad en la mayoría de los estudiantes para diferenciar los coeficientes de una expresión con los términos de esta, lo que indica que no reconocen los coeficientes como números que acompañan las variables si no como monomios que forman una expresión algebraica, lo que significa que no hay una apropiación completa de la definición y significado de la ecuación cuadrática.

Situación1: Actividad 2, Pregunta 5

P_5: De dos ejemplos diferentes de ecuaciones cuadráticas.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican ejemplos de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde los coeficientes son negativos o positivos. ($x^2 + 2x + 1 = 0, x^2 - 8x + 3 = 0,$)	6	75%
T_2: Estudiantes cuyos ejemplos son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y en función de otra variable.$ay^2 + by + c = 0$; $az^2 + bz + c = 0$)	2	25 %

Tabla 20: Tipos de respuestas P_5,A_2,S_1

Conforme los resultados de la tabla 20 posible afirmar que la mayoría de los estudiantes (75%) logran identificar expresiones cuadráticas estableciendo relación con la definición y su forma general, además de que asignan valores positivos y negativos a los coeficiente de sus expresiones, lo cual parece indicar que reconocen estos coeficientes como valores numéricos pertenecientes al conjunto de los números reales y no solo como valores positivos.

Por otro lado un el 25% restante asocian los ejemplos de expresiones cuadráticas a la realización de cambios de variables y no de coeficientes. A pesar de que los ejemplos mantienen la forma general de la expresión cuadrática no se podría establecer si estos estudiantes reconocen si una expresión es cuadrática o no en casos particulares.

Con relación a lo anterior, se evidencia la reflexión sobre las características fundamentales de los contenidos trabajados lo que podría facilitar la identificación de ecuaciones algebraicas en su forma completa e incompleta y los métodos de solución que permiten resolver cada uno de los diferentes casos en que se presenta una ecuación cuadrática. De igual manera es importante destacar la necesidad de un mayor acompañamiento del profesor en el que se pueda superar las dificultades y errores que se van identificando.

Situación1: Actividad 3, Pregunta 1

Samuel tomó la ecuación que dio Lina para resolver el problema del apartamento, y encuentra la solución de éste hallando el valor de x que corresponde a la medida del ancho del apartamento, así:

$$
\begin{array}{cl}
x^2 + 8x = 105 & \\
x^2 + 8x - 105 = 105 - 105 & \text{Paso 1} \\
x^2 + 8x - 105 = 0 & \text{Paso 2} \\
(x + 15)(x - 7) = 0 & \text{Paso 3} \\
x + 15 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 7 = 0 & \text{Paso 4} \\
x + 15 - 15 = 0 - 15 \quad \text{ó} \quad x - 7 + 7 = 0 + 7 & \text{Paso 5} \\
x = -15 \quad \text{ó} \quad x = 7 & \text{Paso 6}
\end{array}
$$

P_1: Ayude a Samuel a determinar cuál de los dos valores de x corresponde a la medida del ancho del apartamento y explique su respuesta.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que justifican su respuesta de forma verbal, indicando que 7 es el valor que corresponde al ancho del apartamento, expresan 8+7=15 correspondiente al largo, y argumentando que el resultado no debe ser negativo.	8	100%

Tabla 21: Tipos de respuestas P_1,A_3,S_1

De acuerdo con la tabla 21, el 100% de los estudiantes contestaron correctamente, todos lograron identificar la medida del ancho del apartamento mediante el procedimiento que hace Samuel, indicando que el valor correcto es 7, y argumentando que la medida del ancho del apartamento no puede ser negativa, debido a que una longitud siempre es positiva (ver anexo 5).

De lo anterior se puede afirmar que existe una conciencia, por parte de todos los estudiantes, en cuanto a reconocer que una longitud es únicamente positiva, además de que una solución negativa carecería de sentido al momento de comprobar las condiciones del problema. Esto entraría en consonancia a las actividades de desarrollo planteadas en el modelo DECA, en cuanto a que los estudiantes comparan conocimientos previos, comprueban sus ventajas y los incorpora a experiencias y situaciones nuevas. En este caso se toma un conocimiento previo y se utiliza para decidir cuál solución es la correcta.

Es importante anotar también que los estudiantes ya tenían un conocimiento previo sobre los valores que cumplen las condiciones del problema, pues en la pregunta 6 de la actividad 1 se identificaron estos valores al completar una tabla; sin embargo en este punto se refuerza este conocimiento, pero desde una perspectiva algebraica y en el que los estudiantes pueden decidir la respuesta correcta con argumentos lógicos diferentes al de cumplimiento de las condiciones del problema.

Situación1: Actividad 3, Pregunta 2

P_2: Indique que operación realizó Samuel en el paso 1 del problema y por qué se puede hacer esto.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que Samuel resta 105 a los dos lados de la ecuación.	1	12,5%
T_2: Estudiantes que indican que en el paso 1 se realiza una resta para igualar a cero, pero sin anotar que esta operación se realiza en ambos miembros de la ecuación.	6	75%

T_3: Estudiantes que indican que en el paso 1 se construye una expresión y la transforman a una ecuación cuadrática.	1	12,5%

Tabla 22: Tipos de respuestas P_2,A_3,S_1

De acuerdo con los resultados de la tabla 22, es notable que la mayoría de los estudiantes identifican la operación realizada en el paso 1, el 12.5 % indica la operación y escribe el valor por el cual se restó en ambos lados de la ecuación, por otro lado el 75% indican solo la operación que se realiza, y el resto de estudiantes manifiestan que en el paso 1 se realiza una transformación de la ecuación a su forma cuadrática.

Conforme a los resultados anteriores se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes logran identificar la operación que se realiza en el paso 1, expresándolo de forma verbal y numérica, sin embargo no hacen referencia a la propiedad uniforme como la propiedad aplicada para la solución de ecuaciones. Solo uno de los estudiantes indica que la operación se realiza en ambos lados de la igualdad y del cual se podría decir que es el que más se acerca a la identificación de la propiedad (ver anexo 5).

Finalmente, uno de los estudiantes manifiesta que la operación se realiza para transformar la ecuación a una ecuación cuadrática; en este caso parece ser que el estudiante solo identifica que una ecuación es cuadrática cuando esta se encuentra únicamente en su forma general, dejando de un lado los demás casos en los que estas ecuaciones se pueden presentar.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que por el momento la mayoría de los estudiantes no hacen una plena identificación de las propiedades generales aplicadas en la solución de ecuaciones cuadráticas, a pesar de utilizarlas. Al parecer no se dan cuenta del traslado de las propiedades numéricas al lenguaje algebraico lo que sugiere una mayor reflexión con los estudiantes sobre la identificación y aplicación de estas propiedades.

Situación1: Actividad 3, Pregunta 3

P_3: Samuel afirma que para ir del paso 2 al paso 3, él factorizó la expresión $x^2 + 8x - 105 = 0$. ¿Qué significa esto?		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que para ir del paso 2 al paso 3, se busca un número que sumado de 8 y multiplicado de -105.	6	75 %
T_2: Estudiantes que explican la factorización, mencionando que se busca un número que sumado de 105 y multiplicado 8.	2	25 %

Tabla 23Tipos de respuestas P_3,A_3,S_1

De acuerdo con la tabla anterior, con el primer tipo de respuesta se puede observar que la mayoría de los estudiantes reconocen que en el proceso de factorización aplicado en los pasos 2 y 3 del procedimiento, lo que se realiza es la manipulación de los coeficiente lineal y constante de la expresión cuadrática, que permite la transformación de esta expresión en el producto de dos términos lineales (ver anexo 6). Dicha manipulación de coeficientes consiste en encontrar 2 valores numéricos que cumplan con dos condiciones específicas, y es que al sumarse den como resultado el valor del coeficiente del término lineal y que multiplicados resulten en el valor del coeficiente constante o término independiente.

Por otro lado 2 de los estudiantes también reconocen que en el proceso de factorización se realiza una manipulación de coeficientes, sin embargo en su justificación argumentan de forma contraria respecto a las condiciones del proceso. Para ello manifiestan que se deben encontrar valores que multiplicados den como resultado el coeficiente del término lineal y sumados resulten el valor del término constante.

En este sentido se puede afirmar que, a pesar de que dos de los estudiantes confunden las operaciones de la factorización, todos logran identificar que en este proceso existe la manipulación de los coeficientes lineal y constante de la expresión cuadrática que permiten transformar una expresión de este tipo a otra en forma del producto de términos lineales. Sin embargo esto no indica que logren aplicar correctamente el proceso para cualquier caso.

Situación1: Actividad 3, Pregunta 4

P_4: Explique por qué para pasar del paso 3 al 4 se debe aplicar la siguiente propiedad: $Si\ a.b = 0, donde\ a,b\ \in R\ \rightarrow a = 0\ ó\ b = 0$		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican verbalmente que se aplica la propiedad, porque para que el resultado de cero alguno de los dos términos debe ser cero o indican que se realiza para que se elimine el paréntesis y la ecuación quede en términos lineales.	6	75%
T_3: Estudiantes que manifiestan que al sumar o multiplicar los valores el resultado debe ser cero.	2	25 %

Tabla 24: Tipos de respuestas P_4,A_3,S_1

En la tabla anterior se puede observar que la mayoría de los estudiantes logran justificar por qué se aplica la propiedad mencionada, el 75% indican que como la ecuación del paso 3 se encuentra igualada a cero entonces uno de los factores debe ser cero, manifestando además que el uso de la propiedad se aplica para disolver los paréntesis y la ecuación quede expresada de forma lineal, esto significa que estos estudiantes reconocen esta propiedad, posiblemente por trabajarla en actividades anteriores, y establecen el objetivo de aplicarla mencionando que se hace una transformación para dejar la ecuación en términos más sencillos y que permitan llegar fácilmente a su solución.

El resto de estudiantes (25%) realiza una interpretación equivocada de la propiedad y asocian la suma y el producto de los valores a cero. En este caso, de acuerdo con la justificación, parece ser que no reconocen que uno de los factores o ambos debe ser cero, si no que por el contrario, obligan a que el resultado sea cero independientemente del valor de cada factor.

De acuerdo a los resultados se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes logran asociar las propiedades presentadas con los procedimientos desarrollados en el método, además de que identifican el objetivo de aplicar dichas propiedades para dejar la ecuación en términos de resolución más sencillos. Sin embargo, el 25% interpreta de forma equivocada la propiedad, lo que sugiere una mayor reflexión sobre su significado.

En este caso es importante destacar que la mayoría de estudiantes logran asociar el proceso realizado en los pasos 3 y 4 con la propiedad presentada en la pregunta, lo cual permite afirmar que, en términos de las actividades de desarrollo y profundización planteadas en el modelo DECA, se realiza una comparación entre situaciones particulares y propiedades generales, lo cual permite un cambio en los esquemas mentales de los estudiantes modificando de forma positiva su conocimiento y lo prepara para enfrentar nuevas situaciones.

Situación1: Actividad 3, Pregunta 5a y 5b

P_{5a}: Aplique el proceso utilizado por Samuel para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplican el proceso de forma análoga al desarrollado en la actividad.	7	87,5%
T_2: Estudiantes que no terminan de completar el proceso utilizado por Samuel para encontrar la solución de la ecuación.	1	12,5%

Tabla 25: Tipos de respuestas P_{5a},A_3,S_1

P_{5b}: Aplique el proceso utilizado por Samuel para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones: $x^2 - 5x = 0$		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplican el proceso utilizando factor común, llegando a respuestas correctas.	4	50%
T_2: Estudiantes que aplican factor común sin dar respuesta $(x.(x -$	2	25%

$5) = 0$).		
T_3: Estudiantes que no responden.	2	25%

Tabla 26: Tipos de respuestas P_{5b},A_3,S_1

Como se puede observar en las tablas 25 y 26, un 87,5% de los estudiantes utilizan bien los procesos utilizados por Samuel cuando la ecuación es de forma completa, solo un estudiante no termina de completar el proceso para encontrar la solución de la ecuación planteada en P_{5a}.Por otro lado, en la pregunta P_{5b}, un 50% de los estudiantes reconocen el proceso utilizado por Samuel y sacan factor común, el otro 50% no contesta o llegan hasta un punto del procedimiento y no terminan.

De acuerdo con los resultados anteriores se puede decir que existe una apropiación del método, utilizado en esta actividad, por parte de la mayoría de los estudiantes (87.5%), y en el que se aplican cada una de la propiedades identificadas en las preguntas anteriores, sin embargo esto sólo se evidencia en ecuaciones que se encuentran escritas de la misma forma que la ecuación del problema y no para casos donde la ecuación es incompleta. Esto se evidencia en que el 50% de los estudiantes no lograron aplicar el método en ecuaciones de este tipo.

Lo anterior indica que a los estudiantes se les dificulta adaptar y aplicar propiedades desarrolladas en el método presentado a expresiones que no se encuentran de forma idéntica a la forma general de las ecuaciones cuadráticas.

En el desarrollo de esta actividad se notan aspectos relacionados con la resolución de problemas que van en consonancia con lo planteado por Polya (1965) y Puig (1998), en las cuales el estudiante como primera medida debe reconocer y entender el problema, identificando las características y cantidades conocidas y desconocidas y establecer las relaciones entre estas.

En un segundo momento el estudiante debe concebir un plan para resolver el problema, para ello se basa en los procedimientos aplicados en las actividades anteriores y utiliza el material el cual manipula para encontrar las expresiones algebraicas relacionada con las cantidades conocidas y desconocidas.

Seguido de lo anterior, el estudiante debe ejecutar el plan, plantear la ecuación adecuada y aplicar los métodos trabajados anteriormente, para encontrar los valores de las cantidades desconocidas. Finalmente, se debe comprobar que los resultados cumplen con las condiciones del problema, sin embargo este último no es muy evidente de acuerdo con lo manifestado en los resultados.

Conforme a lo desarrollado alrededor de esta situación se puede decir que los estudiantes realizan un buen acercamiento al concepto de ecuación cuadrática, en el que se identifican y representan cantidades conocidas y desconocidas de una situación problema que permiten su posterior representación en una ecuación, y en la cual en su proceso de solución se identifican característica y propiedades generales de las ecuaciones cuadráticas, dando cumplimiento a los propósitos establecidos en el inicio de la situación.

3.4.2. Resultados y análisis de la Situación 2

- **Descripción general de la aplicación de la Situación 2**

La situación 2 consta de tres actividades las cuales fueron realizadas en una sola sesión de 2 horas secuencia se realizó de forma individual, donde cada estudiante conto con un juego completo de fichas del Puzzle Algebraico con los cuales resolvieron cada una de las actividades.

En la actividad 1 se trata de familiarizar al estudiante con el material utilizado, es decir, con las fichas del Puzzle Algebraico, de tal manera que logre identificar sus características y reglas para poder aplicarlas a situaciones problemas. En la actividad 2 se toma una situación problema en la cual se plantean una serie de preguntas que el estudiante va resolviendo con ayuda del material, y donde se identifican propiedades algebraicas de la solución de ecuaciones cuadráticas. Finalmente en la actividad 3, se aplica lo trabajado en las actividades anteriores, empleando los métodos desarrollados y el material para resolver una situación problema.

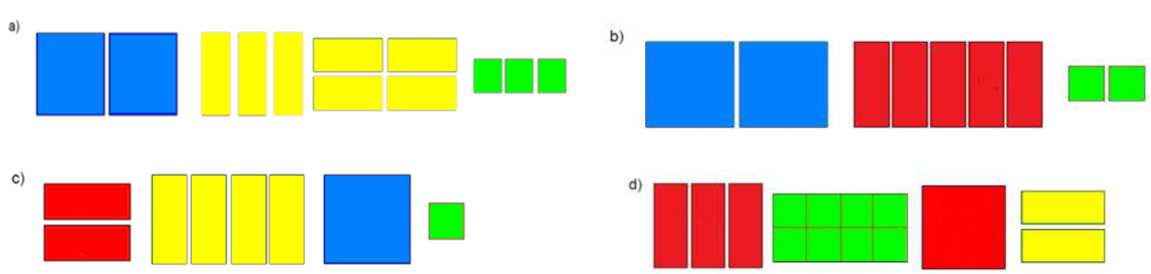
Las actividades trabajadas en esta situación hacen parte de las actividades de introducción y de desarrollo y reestructuración, de acuerdo con el modelo DECA, y con las que se busca que los estudiantes reconozcan otros sistemas de representación inherentes a las ecuaciones cuadráticas, entren en conflicto cognitivo y modifiquen sus esquemas de conocimiento.

Es importante mencionar que en el desarrollo de las situaciones 2 y 3 se cuenta con la participación de seis estudiantes, dos menos que los que desarrollaron la situación 1, por causa de factores externos al desarrollo de la secuencia, donde los estudiantes no asisten a clase debido a que los padres de familia optan por no enviarlos al colegio por inconvenientes económicos con la institución.

Situación 2: Actividad 1, Pregunta 1 ($S_2A_1P_1$)

Población: 6 estudiantes

P_1: Escriba la expresión algebraica que permita calcular el área total representada en cada conjunto de fichas.



Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron correctamente todas las expresiones, realizando las sumas, o no, entre los términos semejantes positivos y negativos	3	50%
T_2: Estudiantes que escribieron correctamente dos de las expresiones y confundieron los términos lineales negativos con el	1	16.7%

término cuadrático (c y d)		
T_3: Estudiantes que escribieron todas las expresiones de forma incorrecta. Por ejemplo: $x^3 + x^8 + 1 = 2$	2	33.3%

Tabla 27: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_2

De acuerdo con la tabla 27, se puede observar que los estudiantes que dieron su respuesta de la forma T1 logran relacionar las áreas asociadas a cada ficha del Puzzle Algebraico con su representación algebraica, lo que significa, de una parte que asimilaron las características del material, y de otra que asocian las dimensiones de cada ficha con el área correspondiente, facilitando que se escriban las expresiones de forma correcta.

Vale la pena destacar la respuesta de un estudiante (16.7%) que al escribir las expresiones algebraicas en correspondencia con la representación geométrica de la situación se equivoca asociando los términos cuadráticos a las primeras fichas, sin tener en cuenta que éstas representan términos lineales. Esto parece indicar que en este estudiante prevalece el orden asociado a la forma general de expresiones cuadráticas, sin tener en cuenta que la posición de los términos de la expresión es independiente de la forma general (ver Anexo 7). En este sentido, parece que la propiedad conmutativa de la suma de números no se transfiere a este tipo de representaciones.

El último grupo de estudiantes (33.3%), al escribir las expresiones correspondientes a las representaciones de los literales c y d, cometen errores como el siguiente: $x^3 + x^8 + 1 = 2$, donde parece que asocian los valores de los exponentes y los coeficientes con el número de fichas. En este caso parece ser que los estudiantes no reconocen todavía las características fundamentales de las expresiones cuadráticas, en cuanto a los exponentes de cada uno de sus términos, además pareciera que estos estudiantes sienten la necesidad de igualar la expresión a un valor numérico, cuando la situación no lo requiere.

Todo lo anterior deja apreciar que el paso de una representación verbal (S1), geométrica y métrica a lo algebraico no es obvia, requiere acciones constantes de acompañamiento por parte del profesor donde se reconozcan unidades significativas de las representaciones geométricas para pasar a las algebraicas. Sin embargo este esfuerzo debe realizarse a largo plazo ya que no es suficiente con el desarrollo de una sola actividad.

Situación 2: Actividad 1, Pregunta 2

P_2: Compare estas expresiones con la definición de ecuación cuadrática presente en la situación 1. Escriba una conclusión.		
Tipos de preguntas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que concluyen que las expresiones obtenidas cumplen o tienen similitud en su primer miembro con la expresión general de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, pero en este caso las expresiones obtenidas en el punto 1 no están igualadas a cero.	4	66.6%
T_2: Estudiantes que compararon término a término, una de las expresiones con la expresión general de la ecuación cuadrática. $ax^2 \to 2x^2,\ bx \to 7x, c \to 3$	1	16.7%
T_3: Estudiantes que concluyen que las expresiones obtenidas no son similares a la expresión general de la ecuación cuadrática debido a la posición de los términos.	1	16.7%

Tabla 28: Tipos de respuestas P_2,A_1,S_2

Al realizar la comparación entre las expresiones obtenidas en el punto 2 y la definición de ecuación cuadrática se observó que la mayoría de los estudiantes encontraron similitud o semejanza con la expresión general de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$. En cuanto a los estudiantes que respondieron de la forma T1, se puede decir que encuentran relación entre la expresión general de la ecuación cuadrática con las expresiones obtenidas en el punto anterior, sin embargo hacen énfasis en que estas expresiones, asociadas a las representaciones de las fichas, no se encuentran igualadas a cero, esto significa que estos estudiantes parecen distinguir entre una expresión cuadrática y una ecuación cuadrática.

Uno de los estudiantes (16.7%) comparó término a término una de las expresiones del punto anterior con el primer miembro de la expresión general de la ecuación cuadrática, por medio de flechas, sin embargo, no hace alusión sobre la igualdad a cero. Esto parece indicar que este estudiante no logra establecer la diferencia exacta entre una expresión cuadrática y una ecuación cuadrática, lo que significa la necesidad de una reflexión sobre las características de estos conceptos que permita diferenciarlos.

Por otro lado, un estudiante encuentra similitud entre una de las expresiones obtenidas y la expresión general de la ecuación cuadrática, sin embargo manifiesta que en las expresiones asociadas a las representaciones de los literales c y d no se cumple esta relación debido a que el término cuadrático no se encuentra en la primera posición como lo sugiere la expresión general. En este sentido, se manifiesta una dificultad con este estudiante asociada a la identificación de la propiedad conmutativa, en la cual no realiza la transferencia de esta propiedad de los números a expresiones algebraicas, debido el posible arraigamiento a que las expresiones cuadráticas deben de escribirse de manera idéntica a la forma general $ax^2 + bx + c,$ sin dar lugar al cambio de posición de cada uno de los términos.

De acuerdo con los resultados anteriores, se puede decir que la mayoría de los estudiantes logran identificar las expresiones cuadráticas como expresiones que cumplen con unas características generales y las asocian a una forma general, manifestándolo de dos maneras diferentes, una verbal en la cual indican las similitudes término a término, y otra simbólica en la que comparan cada uno de los términos de las expresiones por medio de líneas o flechas. Sin embargo se presentan dificultades, de una parte asociadas a la diferenciación entre expresión y ecuación, y de otra en cuanto a la transferencia de las propiedades numéricas a las expresiones algebraicas, lo que sugiere un mayor acompañamiento por parte del profesor en cuanto al planteamiento de actividades que permitan vincular estas propiedades a expresiones más generales.

En relación a los resultados de las preguntas 1 y 2 de esta actividad, se manifiestan algunas características que van en consonancia con las actividades de iniciación propuestas por el modelo DECA, en el momento en que llevan a los estudiantes a entrar en conflicto con conocimientos previos, que pudieron ser desarrollados en la situación anterior, y lo llevan a plantearse nuevos esquemas de conocimiento interactuando y asimilando los nuevos contenidos.

Situación 2: Actividad 1, Pregunta 3a

P_{3a}: Utilizando las fichas del Puzzle Algebraico: Representa la expresión obtenida en el punto 3 de la actividad 2 de la situación 1. $x^2+8x-105$		
Tipos de preguntas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que representaron correctamente la ecuación con el Puzzle Algebraico	3	50%
T_2: Estudiantes que representaron la ecuación , pero confundieron el color de las fichas del término constante (verde, en vez de rojo que corresponde a los negativos)	1	16.7%
T_3: Estudiantes que no colocaron la totalidad de las fichas del término lineal $(x^2+\boldsymbol{6x}-105)$	2	33.3%

Tabla 29: Tipos de respuestas P_{3a},A_1,S_2

De acuerdo con la tabla29, en cuanto al primer grupo de estudiantes (T1), se observa que no tienen dificultad para representar expresiones cuadráticas con la ayuda del Puzzle algebraico, lo que significa una apropiación de las características y reglas del material. Por otro lado uno de los estudiantes (16.7%) tiene la dificultad en asociar el color de las fichas con la naturaleza de los términos, en la que utiliza fichas que corresponden a términos positivos (color verde) para representar el término constante que es un número negativo. En este caso parece haber dificultad en el reconocimiento de la totalidad de características del material, sin embargo no es muy evidente ya que los demás términos de la expresión se representaron correctamente.

Finalmente, a pesar de utilizar el color correcto de las fichas del Puzzle para representar la expresión, dos de los estudiantes (33,3%) tuvieron dificultad al colocar el número correcto de fichas asociadas al término lineal, sin embargo, esta dificultad parece deberse únicamente a un mal conteo de fichas.

En este caso es importante mencionar que para la representación del término constante (-105), se emplearon dos fichas, de colores rojo y verde, de mayor tamaño que representa 100 unidades, lo que permitió una mejor manipulación del material para representar la expresión (ver Anexo 8).

De acuerdo a lo anterior se puede decir que hay una apropiación de las características y reglas del material por parte de la mayoría de los estudiantes, sin embargo, existen dificultades, al parecer no tan sobresalientes, sobre algunas de estas características, donde el estudiante se confunde con el color de las fichas que debe emplear, pero no en todos los términos de la expresión. Esto sugiere la implementación de actividades que permitan una mayor manipulación del material y que permita reconocer la totalidad de sus reglas y características.

Situación 2: Actividad 1, Pregunta 3b y 3c

P_{3b}: Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos lineales.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que representaron 2 combinaciones correctas cumpliendo las condiciones solicitadas.	4	66.68%
T_2: Estudiantes que representaron dos combinaciones, añadiendo fichas de términos constantes	2	33.34%

Tabla 30:Tipos de respuestas P_{3b},A_1,S_2

P_{3c}: Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos constantes.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que representaron 2 combinaciones correctas cumpliendo las condiciones solicitadas.	4	66.7%
T_2: Estudiantes que representaron dos combinaciones, añadiendo fichas de términos lineales.	2	33.3%

Tabla 31: Tipos de respuestas P_{3c},A_1,S_2

En las tablas anteriores se puede observar que el 66.7% de los estudiantes lograron representar de forma adecuada las combinaciones, siguiendo los requerimientos planteados en las preguntas y el resto de los estudiantes representaron las expresiones añadiéndoles una condición más.

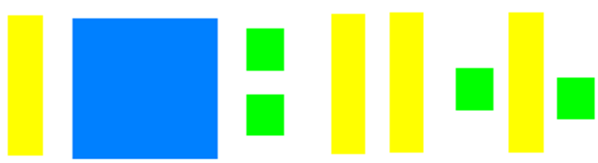
En cuanto a los estudiantes delas repuestas T1 de ambas tablas, se observa que logran representar sus combinaciones correctamente, atendiendo a las condiciones establecidas en las preguntas, lo que ratifica lo planteado en los análisis anteriores en cuanto a la apropiación de las reglas y características del Puzzle Algebraico (ver Anexo 8). Por otro lado, el 33,3% de los estudiantes, en ambos casos, añadieron una condición más a sus representaciones, lo que parece indicar que sienten la necesidad de representar expresiones cuadráticas en forma completa, es decir, donde se utilizan fichas que representen el término cuadrático, lineal y constante, dejando de lado las expresiones cuyos valores de los coeficientes b y c puedan ser cero.

De acuerdo con los resultados anteriores se puede afirmar que todos los estudiantes logran representar de forma adecuada expresiones cuadráticas con la ayuda del material Puzzle Algebraico. La mayoría de los estudiantes cumplen con las condiciones planteadas en el problema y el resto le añaden términos lineales o constantes según sea el caso, lo cual a pesar de no estar especificado en cada pregunta no significa que sea incorrecto o que la representación propuesta este errada, pues cumplen con la forma general de las expresiones cuadráticas. Sin embargo, estos estudiantes dejan de lado los casos para los cuales los coeficientes b y c de las expresiones cuadráticas pueden ser iguales a cero, lo que indica la necesidad de trabajar más las representaciones de expresiones del tipo $ax^2 + bx$ y $ax^2 + c$.

Esta pregunta hace parte de las actividades de desarrollo y reestructuración planteadas por el modelo DECA y que forman parte del marco teórico de este trabajo de grado, ya que el estudiante puede reflexionar sobre la utilidad del material a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones, de comparar los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal. Además, los estudiantes pueden lograr un cambio en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación de conflictos cognitivos que aparecen en actividades trabajadas anteriormente.

Situación 2: Actividad 2, Pregunta 1a, 1b y 1c

Utilizando el Puzzle Algebraico ayuda al albañil, contratado por Lina (S1), a hacer una organización que permita utilizar todas las baldosas siguientes para enchapar una de las paredes del baño de forma cuadrada (tenga en cuenta las reglas del Puzzle Algebraico).



P_{1a}: Dibuja por lo menos dos representaciones diferentes

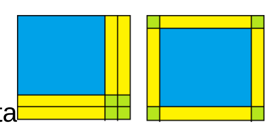
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que dibujaron las representaciones de forma correcta 	6	100%

Tabla 32: Tipos de respuestas P_{1a},A_2,S_2

P_{1b}: Escribe una expresión algebraica para cada representación

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la expresión de cada representación en forma correcta: $x^2 + 4x + 4$	5	83.33%
T_2: Estudiantes que escribieron las expresiones en forma incorrecta: $2x^2 + 4x - 1$	1	16.67%

Tabla 33: Tipos de respuestas P_{1b},A_2,S_2

P_{1c}: Escriba la expresión que representa las dimensiones de cada cuadrado		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la expresión de las dimensiones en forma correcta: $x + 2$	5	83.33%
T_2: Estudiantes que escribieron la expresiones de las dimensiones de forma incorrecta	1	16.67%

Tabla 34: Tipos de respuestas P_{1c},A_2,S_2

Como se puede notar en el literal 1a, todos los estudiantes logran representar, a través de diferentes configuraciones y con el apoyo del Puzzle Algebraico, las condiciones planteadas en el problema. Esto se evidencia en que todos representan la pared de forma correcta y con la totalidad de la fichas, cumpliendo con las reglas del Puzzle, lo que muestra una avance en cuanto a la apropiación de las características y reglas de este material. En este sentido, y en consonancia con lo planteado en el marco teórico sobre el uso de materiales manipulativos, se puede decir que los estudiantes logran exteriorizar sus representaciones mentales a través de diferentes configuraciones que realizan con la ayuda del Puzzle Algebraico, identifican la presencia de diferentes representaciones y hacen transformaciones con ellas.

Por otro lado, el 83.3% de los estudiantes logran identificar las expresiones asociadas al área de la pared y sus dimensiones de forma correcta, lo que significa que la manipulación de las fichas del Puzzle Algebraico contribuye notablemente en la identificación del paso de una representación geométrica a una algebraica, donde se observa que los estudiantes realizan conversiones de la representación en otro registro, sin perder el significado de la representación inicial.

Finalmente, solo un estudiante, a pesar de haber presentado dos configuraciones asociadas a la pared de forma correcta, tiene la dificultad de relacionar las representaciones geométricas realizadas con el material con su representación algebraica, donde se nota que el estudiante no identifica la expresión asociada al área con la suma de la fichas utilizadas en la configuración, y tampoco que la expresión asociada a las dimensiones de la pared corresponde a la suma de los lados de las fichas(ver Anexo 8). Esto podría deberse a que el estudiante no ha identificado completamente las características del Puzzle Algebraico lo que posiblemente no le permitiría establecer relación entre las diferentes representaciones de expresiones cuadráticas.

En relación a los resultados anteriores, se puede decir que hay un avance notable en cuanto a la apropiación de las características y reglas del Puzzle Algebraico por parte de la mayoría de los estudiantes, lo que permite una mejor apreciación del paso de una representación geométrica a una representación algebraica. Sin embargo, solo uno de los estudiantes tiene dificultad en reconocer completamente las características del material, lo que sugiere un mayor acompañamiento por parte del profesor que permita una mejor identificación de estas características.

Situación 2: Actividad 2, Pregunta 2

P_2: Indique la relación que existe entre las expresiones del área de cada cuadrado representado en el punto anterior y las expresiones de las dimensiones de los cuadrados. Escriba esta relación simbólicamente y explique su respuesta.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que ambas expresiones son equivalentes y lo expresan de manera simbólica	4	66.7%
T_2: Estudiantes que indican que al multiplicar las dimensiones de los lados$(x+2).(x+2)$ da como resultado la expresión x^2+4x+4	2	33.3%

Tabla 35: Tipos de respuestas P_2,A_2,S_2

Con base en los resultados de la tabla anterior se puede observar que el 66.7% de los estudiantes encuentran la relación entre las expresiones asociadas a las dimensiones de la pared y la expresión que representa el área, e identificando estas expresiones como equivalentes, lo que significa que logran reconocer las expresiones cuadráticas en dos de sus formas, que va desde lo lineal, como el producto de las dimensiones de los lados, a la forma cuadrática general. Lo anterior indica la identificación del significado de ecuaciones equivalentes por parte del estudiante.

Por otro lado, El 33.34% de los estudiantes establecen la relación asociando la expresión del área como el resultado del producto de las expresiones que corresponden a las dimensiones de la pared, lo que parece indicar que reconocen el significado de equivalencia como la transformación de una expresión a otra, a partir de la aplicación de operaciones.

De lo anterior se podría decir que la mayoría de los estudiantes logran establecer la relación que existe entre las expresiones asociadas al área y a las dimensiones de la pared, lo que permite identificar la equivalencia entre las expresiones cuadráticas escritas en su forma general y como el producto de dos expresiones lineales. Finalmente, se puede decir que este tipo de actividades, que van en consonancia con las actividades de desarrollo y reestructuración planteadas por el grupo DECA, permiten al estudiante reflexionar sobre las características de los contenidos que está trabajando, en este caso la transformación de las diferentes formas en que se puede presentar una expresión cuadrática.

Situación 2: Actividad 2, Pregunta 3

P_3: El albañil se da cuenta que el área de la pared es de 25 dm^2. Encuentra en la expresión que halló en el inciso c del punto 1, el valor de las dimensiones de todas las baldosas.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que igualan $(x+2)^2=25$ y pasan directamente a la expresión $x+2=5$, luego despejan x y llegan al valor $x=3$, pero no encuentran los valores de las dimensiones de las baldosas.	3	50%
T_2: Estudiantes que igualaron $(x+2)^2=25$ y hallaron el valor de x por ensayo y error de tal manera que se mantuviera la igualdad $(3+2)^2=25$, pero no encuentran los valores de las dimensiones de las baldosas.	1	16.67%
T_3: Estudiantes que no lograron expresar la ecuación y no encontraron un valor para x.	2	33.34%

Tabla 36: Tipos de respuestas P_3, A_2, S_2

De acuerdo con los estudiantes que responden de la forma T1, se observa que aplican procedimientos que ya trabajados y con los cuales encuentran el valor de x, entre ellos se evidencio el uso del método por raíz cuadrada, el cual se pudo emplear porque los estudiantes aplicaron propiedades de potencia a la expresión asociada a las dimensiones de los lados de la pared, dado que era de forma cuadrada, las dimensiones de los lados eran iguales ($(x+2).(x+2)=(x+2)^2=25$) y donde se nota una nueva transformación de la expresión inicial a otra equivalente. Aunque en sus procedimientos ninguno de los estudiantes identifico de forma escrita que el método de raíz cuadrada era el procedimiento aplicado, realizaron el paso directo a la ecuación ya de forma lineal ($x+2=5$).

En este tipo de actividades y como se manifiesta en los propósitos, se hace énfasis en la escritura de las expresiones algebraicas, lo cual posibilita la transformación adecuada de expresiones equivalentes y el buen uso de propiedades para llegar a resultados correctos.

Por otro lado, uno de los métodos comúnmente utilizados en la escuela es el de ensayo y error, utilizado por uno de los estudiantes y en el cual para poder aplicarlo expresó, al igual que sus compañeros, la ecuación en forma de potencia, pero a diferencia de ellos le asigno valores a x hasta encontrar el valor que mantuviera la igualdad. En este caso se evidencia el arraigamiento, por parte del estudiantes, al uso de procedimientos aritméticos, lo cual a pesar de ser válidos, puede llevar al surgimiento de errores de tipo actitudinal, donde el estudiante crea que basta solamente con asignarle valores a la incógnita lo que no permite ver en el lenguaje algebraico un elemento dinamizador del lenguaje de las matemáticas, y donde como consecuencia de esto el estudiante no encuentre las relaciones ni significados de los conceptos enseñados.

Finalmente 2 de los estudiantes no lograron escribir correctamente la ecuación y solamente la dejaron expresada. En este caso uno de los estudiante no logro representar la expresión asociada al área en forma de potencia, como lo realizaron sus demás compañeros, esto pudo dificultar la aplicación de los métodos de solución para hallar los valores de x. Por su parte, el otro estudiante no logró escribir la ecuación de forma correcta, lo que se puede atribuir a que en el punto 1 de esta actividad no logró escribir correctamente las expresiones asociadas al área y a las dimensiones de la pared (ver Anexo 8).

Es importante resaltar que ningún estudiante encontró las dimensiones de las baldosas, solamente hallaron el valor de$x$que corresponde a una de las dimensiones, pero no continuaron en el cálculo de los demás valores, tal como lo especifican las condiciones del problema.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que la mayoría de los estudiantes logran hacer uso de conocimientos previos los cuales permiten enfrentarse a nuevas situaciones problema, entre ellos se evidencia la aplicación de métodos de solución que a pesar de ser válidos, algunos se alejan del aspecto algebraico, como es el caso del método de ensayo y error, sin embargo dejan explorar al estudiante sobre la conveniencia de emplear dichos métodos en las diferentes situaciones. Por otro lado es importante mantener el acompañamiento sobre los estudiantes que se les dificulta reconocer completamente las características del material y de esta manera puedan asociar las diferentes representaciones de una expresión cuadrática. De otra parte, es importante hacer caer en cuenta a los estudiantes sobre el cumplimiento de las condiciones planteadas en un problema, y que no se reduzca la solución únicamente a encontrar el valor de una incógnita o cantidad desconocida.

Situación 2: Actividad 2, Pregunta 4a

P_{4a}: Si Samuel tiene la expresión $x^2 + 4x + 4$, que permite calcular las dimensiones de las baldosas cuando el área de la pared mide 16 dm^2. Utiliza el Puzzle Algebraico y ayuda a Samuel a calcular esos valores

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que se apoyan en la representación del Puzzle para factorizar la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 16$,y emplean el método de raíz cuadrada y calcular el valor $x = 2$.	4	66.6%
T_2: Estudiantes que se apoyan en la representación del Puzzle para factorizar la ecuación$x^2 + 4x + 4 = 16$,y emplean el método de raíz cuadrada, pero calculan un valor incorrecto.$x = 14$.	1	16.7%
T_3: Estudiantes que dibujaron la representación de la pared con el Puzzle Algebraico correctamente, pero no realizaron procedimientos	1	16.7%

Tabla 37:Tipos de respuestas P_{4a}, A_2, S_2

Como se observa en los resultados de la tabla, respecto al 66.6% de los estudiantes que calcularon el valor de x que satisface la ecuación, se evidencia una apropiación del material en cuanto que permite realizar manipulaciones que llevan a la factorización de la ecuación dada en el problema. A pesar de que esta factorización se realiza en el punto anterior, los estudiantes toman mayor conciencia de la aplicación de este proceso a partir de la manipulación de las fichas.

Por su parte uno de los estudiantes a pesar de haber realizado la factorización de la ecuación apoyándose en el material, no logra aplicar correctamente la propiedad uniforme que corresponde a sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación $(x+2)^2 = 16$, por lo que escribe $x + 2 = 16$, y en consecuencia obtiene un valor incorrecto de x. Esto parece indicar que este estudiante asocia la propiedad uniforme únicamente a las operaciones de suma y resta y deja de lado las demás operaciones que pueden aplicarse a ambos lados de la igualdad.

Finalmente, un estudiante logra representar correctamente la pared con la ayuda del Puzzle Algebraico, sin embargo, no establece relación con sus representaciones algebraicas, lo que no permite que logre aplicar procedimientos que ayuden resolver la ecuación de la misma forma como lo hicieron sus compañeros (ver Anexo 9). Por otro lado, es necesario resaltar, al igual que en el punto anterior, que ninguno de los estudiantes calcula las dimensiones de cada tipo de baldosa, dejando el problema solamente hasta la solución de la ecuación, lo que parece indicar que para los estudiantes es suficiente con encontrar el valor de la incógnita y no con que se cumplan todas las condiciones del problema.

En este punto se observa un avance, por parte de los estudiantes, en cuanto a la representación del problema en forma geométrica utilizando el Puzzle Algebraico, y en la identificación y aplicación de los métodos de solución, en este caso el de raíz cuadrada, siguiendo de forma análoga los procedimientos aplicados en el punto anterior. Sin embargo, todavía se presentan errores a la hora de aplicar la propiedad uniforme en uno de los estudiantes, lo que sugiere la implementación de actividades que permitan vincular todas las operaciones numéricas a esta propiedad(suma, multiplicación radicación, logaritmación, entre otras), y donde se puedan observar las transformaciones en ambos miembros de una ecuación al aplicarla.

De igual manera es importante insistir a los estudiantes sobre el reconocimiento de las condiciones establecidas en un problema, y de esta forma caigan en cuenta en que no es suficiente con que se resuelva únicamente una ecuación, pues algunos valores solicitados en el problema dependen del valor encontrado.

Situación 2: Actividad 2, Pregunta 4b

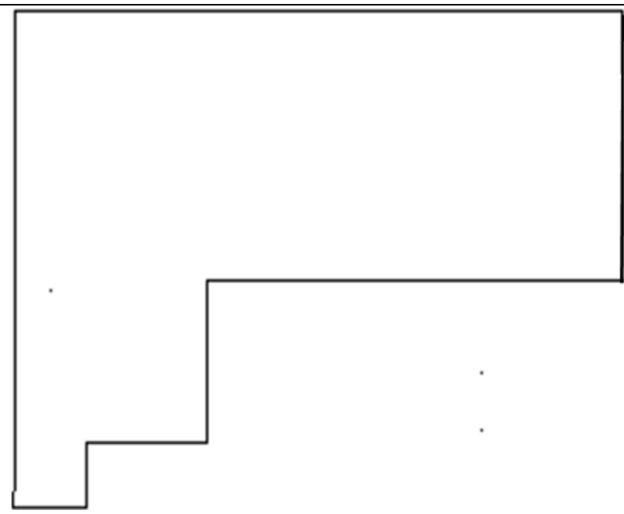
P_{4b}: Explica como encontró los valores de las dimensiones de las baldosas.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que se realiza un tratamiento a la expresión $x^2 + 4x + 4$, se iguala a 16, se saca la raíz a ambos lados de la igualdad para obtener $x + 2 = 4$ y posteriormente obtener $x = 2$	1	16.7%
T_2: Estudiantes que explican el proceso en forma parcial aludiendo a algunos pasos.	5	83.3%

Tabla 38: Tipos de respuestas P_{4b}, A_2, S_2

En relación a la tabla 38, se observa que un estudiante (16.7%) explica completamente cada uno de los pasos que le permiten calcular el valor de x, se puede notar que al parecer, éste posee una conciencia sobre cada uno de los pasos que permiten calcular el valor de la incógnita, lo que significa una apropiación de los métodos de solución y la interpretación paso a paso de los procedimientos aplicados, sin embargo para el resto de los estudiantes esto no es tan claro, ya que solamente hacen referencia sobre algunos de los pasos aplicados en el método y no en forma ordenada. Esto puede deberse a que el estudiante no logra manifestar de forma verbal los procedimientos algebraicos que aplica, lo que puede ser una dificultad en cuanto a que los estudiantes no logran pasar del lenguaje algebraico al lenguaje natural.

Situación 2: Actividad 3, Pregunta 1 y 2

El albañil debe enchapar la siguiente superficie de pared, cuya área es de 367cm^2, con las baldosas (representadas con las fichas del Puzzle Algebraico), sin necesidad de cortar ninguna.



P_1: Indique cuántas baldosas tipo a, tipo b y tipo c, se necesita para enchapar la pared y cómo se acomodarían.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que utilizan las fichas del Puzzle Algebraico y las superponen en la figura que representa la pared e indican que se necesitan 2 baldosas tipo a, 6 baldosas tipo b y 7 baldosas tipo c.	6	100%

Tabla 39: Tipos de respuestas P_1, A_3, S_2

P_2: Escriba cuál es la ecuación que corresponde al área de la pared enchapada con las baldosas.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la ecuación que corresponde al área de la pared enchapada con las baldosas $2x^2 + 6x + 7 = 367\ cm^2$	3	50%
T_2: Estudiantes que escribieron una expresión correspondiente al área de la pared pero no la igualan a su valor. $(2x^2 + 6x + 7)$	3	50%

Tabla 40: Tipos de respuestas P_2, A_3, S_2

Como se puede notar en las tablas 39 y 40, todos los estudiantes logran identificar y acomodar la misma cantidad de fichas sobre la pared, además de asignarle la expresión correspondiente al área, la mitad escribe solo la expresión y la otra mitad la ecuación completa (ver Anexo 11).

De los resultados anteriores se puede decir que los estudiantes logran emplear de forma adecuada el material para representar expresiones cuadráticas, de esta manera pueden identificar a través de diferentes sistemas de representación un mismo objeto matemático como son las ecuaciones cuadráticas, proporcionando una interpretación geométrica a símbolos y operaciones.

Por otro lado, en relación a la segunda pregunta, se puede observar que la mitad de los estudiantes logran representar la ecuación correspondiente al problema apoyándose con las fichas del material, sin embargo, se puede identificar una dificultad que corresponde a la diferencia entre escribir la expresión y escribir la ecuación, lo cual se evidencia en que la otra mitad de los estudiantes no igualan la expresión al valor del área, esto indica la necesidad de realizar una mejor reflexión sobre los contenidos trabajados, en este caso las definiciones de expresión y ecuación cuadrática. Sin embargo, esta dificultad parece no ser tan sobresaliente si eventualmente los estudiantes escriben la ecuación correctamente cuando se pide calcular los valores desconocidos.

Situación 2: Actividad 3, Pregunta 3

P_3: Determine las dimensiones de cada una de las baldosas de acuerdo con la ecuación del punto 2, utilizando el método de Samuel en la situación 1.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que emplearon factorización y hallaron el valor correcto de x para encontrar las dimensiones de las baldosas	4	66.7%
T_2: Estudiantes que emplearon el método 1, pero no sacaron factor común (2) en uno de los pasos del procedimiento, lo cual llevo a otros valores de x que no corresponde a la ecuación.	2	33.3%

Tabla 41: Tipos de respuestas P_3, A_3, S_2

Si bien en el punto anterior la mitad de los estudiantes solo escribieron la expresión asociada al área de la pared y no igualaron al valor de esta, para poder realizar este punto todos escribieron la ecuación de forma correcta y procedieron a aplicar el método trabajado en la situación 1 (ver Anexo 12), esto indica que los estudiantes logran ampliar y aplicar los conocimientos adquiridos en otras actividades a la hora de trabajar nuevas situaciones y contextos y logran corregir sus propios errores.

El 66.7% de los estudiantes aplican correctamente cada uno de los pasos del método de factorización trabajado en la situación 1, llegando a los valores de x que cumplen con las condiciones del problema, lo que significa la apropiación de este método y su adherencia en los esquemas mentales de conocimiento que se van creando o modificando en los mismos estudiantes. El resto de estudiantes (33.3%) tuvieron dificultades en uno de los procesos de factorización, pues debían sacar factor común en uno de los pasos para dejar la expresión en términos lineales y que permitieran encontrar los valores de x, sin embargo, a pesar del error, logran aplicar de forma adecuada la propiedad uniforme y de esa manera encontrar valores para x.

A pesar de que algunos estudiantes cometen errores en los procesos de factorización, se puede notar un avance respecto a la aplicación de operaciones de manera uniforme en ambos miembros de una ecuación, lo que parece indicar que los estudiantes van creando una conciencia sobre sus propios procedimientos y van superando poco a poco sus dificultades, en este sentido se evidencia un cambio en los esquemas mentales de los estudiantes que se van manifestando en la medida que logran superar conflictos cognitivos que surgen en las actividades anteriores o que ya venían desde antes.

Situación 2: Actividad 3, Pregunta 4

P_4: Determine cuál es la medida del perímetro de la pared		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1:Estudiantes que hallaron el valor del perímetro sumando los valores de las medidas de los lados.	4	66.7%
T_2: Estudiantes que ubicaron las dimensiones en el esquema que representa la pared sin realizar procedimientos.	2	33.3%

Tabla 42: Tipos de respuestas P_4, A_3, S_2

Respecto a los resultados anteriores se pude decir que los estudiantes asocian el valor del perímetro con los lados de un polígono, sin embargo no todos logran efectuar la operación correspondiente y de manera correcta. Por un lado el 66.7% de los estudiantes efectuaron la operación pero no sumaron la cantidad correcta de lados lo cual lleva a que el valor del perímetro fuera diferente en la mayoría de los casos. Por otro lado, el 33.3% dejan solo expresado la longitud en cada lado de la pared y no efectúan la suma de estos valores, lo que puede significar que al parecer estos estudiantes no reconocen completamente la operación suma como la que permite calcular el valor del perímetro de un polígono.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que existe la necesidad de trabajar actividades que permitan reflexionar sobre el significado de algunos conceptos vinculados a las figuras geométricas, como el de perímetro, donde se logren asociar con las condiciones establecidas en una situación problema y se puedan aplicar las operaciones correspondientes de forma adecuada.

Conforme a lo desarrollado en las actividades de esta situación, y apoyándose en el Puzzle Algebraico, se logra que los estudiantes puedan establecer la relación entre representaciones geométricas y representaciones algebraicas, que identifiquen expresiones algebraicas equivalentes y la relación entre expresiones asociadas a las dimensiones y el área de figuras geométricas, dando cumplimiento a los propósitos establecidos desde un principio.

3.4.3. Resultados y análisis de la Situación 3

- **Descripción general de la aplicación de la Situación 3**

La Situación 3 consta de tres actividades diseñadas para trabajarse de forma individual y con la ayuda del Puzzle Algebraico, la aplicación de esta situación se realizó en una sesión de dos horas entre las 9:00 am y las 11:00 am, donde cada uno de los estudiantes contó con un número determinado de fichas del material con los que se apoyaron para responder las preguntas.

En la actividad 1 se plantea una situación problema en la que se desconfigura una representación geométrica en cada uno de sus componentes, como longitudes de los lados y el valor del área, con el objetivo de llegar a una representación en lenguaje algebraico, posteriormente se presenta uno de los procesos de solución de ecuaciones cuadráticas donde el estudiante debe identificar algunas propiedades aplicadas y resolver el problema.

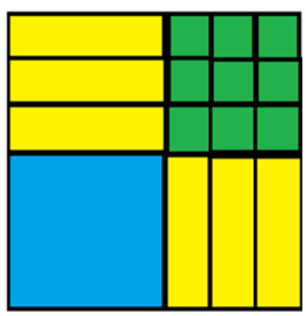
En la actividad 2 se plantean dos situaciones problema donde se presentan dos configuraciones geométricas, una en forma de cuadrado y otra en forma rectangular, elaboradas con las fichas del Puzzle Algebraico, en los que se requiere de la utilización de los procedimientos trabajados y dan la posibilidad al estudiante de determinar en qué casos aplicar cada uno de ellos.

En la última actividad se presentan situaciones problema en las cuales se deben evaluar la pertinencia de los diferentes procedimientos trabajados a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica y finalmente se plantea una situación que requiere únicamente de la aplicación de la fórmula cuadrática.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 1 y 2

Población: 6 estudiantes

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas, que tienen las mismas características de las baldosas de la actividad 2, situación 2, que debe emplear en una pared de 144 cm^2 de área, utilizando la siguiente configuración:



P_1: Teniendo en cuenta la configuración de la pared complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico
Medida del ancho de la pared	
Medida del largo de la pared	
Área de la pared	
Valor del área de la pared	144 cm^2

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escriben $x+3$ para identificar la medida del ancho y largo y expresan el área de la pared como el producto de las dimensiones $(x+3).(x+3)$ o en forma de potencia $(x+3)^2$	5	83.34%
T_2: Estudiante que llena la tabla escribiendo expresiones la expresión asociada al largo de la pared de forma correcta y las expresiones del largo y ancho en forma incorrecta	1	16.67%

Tabla 43: Tipos de respuestas P_1, A_1, S_3

P_2: Escriba la ecuación que permite calcular el valor de las dimensiones de los lados, según la tabla anterior.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la ecuación que permite calcular el valor de las dimensiones de los lados de la forma $(x+3)^2$=144	6	66.68%

Tabla 44: Tipo de respuesta $P_{2,}$ $A_{1,}$ S_3

De acuerdo con lo anterior es importante resaltar que el 83.3% de los estudiantes ha avanzado en el proceso de asociar a configuraciones geométricas que representan longitudes y áreas, expresiones algebraicas mediados por el material manipulativo que permite hacer este tipo de representaciones de situaciones cotidianas, lo que significa que estas que estas expresiones tienen un significado en este contexto particular para los estudiantes. Además estos estudiantes pueden discriminar los datos de la configuración y de la situación en general, en una tabla, lo que permite un aporte al proceso de poner un problema en ecuaciones y aportar al paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Sin embargo, uno de los estudiantes no manifiesta una adecuada apropiación de las reglas y características del Puzzle Algebraico, lo que no le permite escribir las expresiones asociadas a las dimensiones y áreas de la configuración en forma correcta. Esto sugiere en que el a actividad algebraica en la escuela, un mayor acompañamiento del profesor que contribuya en el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Por otro lado, en la tabla 44 se puede notar que el 100% de los estudiantes logran escribir la ecuación que permite calcular la longitud de cada uno de lados de la pared, incluso el estudiante que en la pregunta anterior escribió expresiones incorrectas logra escribir la ecuación del problema de forma correcta.

De lo anterior, se puede deducir que a pesar de que pasar de un lenguaje natural a un lenguaje algebraico es un proceso complejo, pues se requiere una claridad conceptual con relación a elementos de las ecuaciones, tener en cuenta el significado de igualdad, y la representación una ecuación cuadrática, los estudiantes logran escribir la ecuación requerida. En este sentido, vale la pena resaltar lo que mencionan Filloy y Kieran en Andrade (1998) , respecto a que aprender algebra no es hacer explícito lo que está implícito en la aritmética, sino que se requiere de un cambio de pensamiento más general sobre números y operaciones, en este caso particular sobre relaciones métricas y geométricas.

Todo lo anterior permite ver que los estudiantes van de la configuración a la expresión, y a la organización de estas expresiones a una ecuación. Desde la perspectiva de la resolución de problemas aún no se ha resuelto el problema planteado en la situación.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 3

P_3: Samuel afirma que para encontrar las dimensiones de las baldosas, se debe hallar el valor de x de la expresión $(x+3)^2 = 144$. Explica la valides de la afirmación que hace Samuel.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que la afirmación de Samuel es válida, debido a que x representa la cantidad desconocida en la expresión y representa una de la longitud de una de las baldosas.	4	66.7 %
T_2: Estudiantes que afirman que la ecuación permite encontrar las dimensiones de los lados de la configuración.	2	33.3 %

Tabla 45: Tipo de respuesta $P_3A_1S_3$

Aunque en la pregunta 2 todos los estudiantes plantearon de forma adecuada la ecuación correspondiente a la situación presentada, se evidencia dos formas diferentes de interpretarla. El 66.7% de los estudiantes justifican que al resolver la ecuación $(x+3)^2 = 144$ y calcular el valor de x se encuentra la medida desconocida de uno de los lados de las baldosas representadas en las fichas del Puzzle Algebraico, lo que entra en correspondencia con la afirmación de Samuel expuesta en la pregunta. Por su parte, el otro 33.3% de los estudiantes afirman que la ecuación lo que permite es calcular la longitud de uno de los lados de la pared, al aplicar la operación de raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación obteniendo $x + 3 = 12$, lo cual también es una afirmación correcta, sin embargo no entra en consonancia con la afirmación que se hace en la pregunta, que se refiere a las dimensiones de las baldosas.

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que a pesar que todos los estudiantes logran escribir la ecuación correspondiente a la situación problema, no todos la interpretan de la misma forma, y aunque sus justificaciones son válidas desde el punto de vista matemático, sólo el 66.7% logra establecer concordancia con las condiciones expuestas en la pregunta. Todo esto permite ver avances en relación a la interpretación que se le puede dar a una ecuación de acuerdo con las diferentes configuraciones geométricas que se presentan y en cuanto a la apropiación de los procesos que permiten representar expresiones algebraicas y asociarlas con cantidades conocidas y desconocidas de una situación problema.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 4a y 4b

P_{4a}: Para encontrar ese valor, Samuel propone el siguiente procedimiento:

$(x+3)^2 = 144$	
$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{144}$	Paso 1
$x + 3 = 12$	Paso 2
$x + 3 - 3 = 12 - 3$	Paso 3
$x = 9$	Paso 4

Explica lo que realizo Samuel en el paso 1

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que Samuel saco la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación	6	100 %

Tabla 46: Tipo de respuesta $P_{4a}A_1S_3$

P_{4b}: Indica lo que realizo Samuel en el paso 3.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que Samuel restó 3 en ambos lados de la igualdad	6	100%

Tabla 47: Tipo de respuesta $P_{4b}A_1S_3$

En las preguntas anteriores se identifica que todos los estudiante reconoce las operaciones aplicadas en cada uno de los pasos, todos manifiestan que para ir del paso 1 al 2 del procedimiento se saca raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, en este caso para cancelar en término cuadrático; por otro lado, los estudiantes manifiestan que en el paso 3 se resta, con el mismo valor, en ambos lados de la igualdad con el objetivo de dejar la cantidad desconocida (x) sin ningún término que la acompañe.

De acuerdo a los resultados anteriores se puede observar que todos los estudiantes logran reconocer dos operaciones fundamentales en la solución de este problema, por un lado identifican la extracción de las raíces en ambos miembros de la ecuación para eliminar el término cuadrático, pues es necesario trabajar con expresiones más sencillas; por otro lado, reconocen el despeje de los términos que acompañan a x ya que de esta manera puede obtener su valor.

Es importante resaltar también que los estudiantes identifican un procedimiento para pasar de una ecuación a otra equivalente, sin dejarlo como algo arbitrario, por el contrario los estudiantes reconocen y trasladan propiedades y operaciones de los números al lenguaje algebraico, dándole un significado más general.

Con relación a lo anterior, se puede afirmar que todos los estudiantes logran enfrentarse a procesos de solución, reconociendo propiedades y operaciones numéricas aplicadas en los procedimientos presentados, para transformar las ecuaciones en otras equivalentes más sencillas que facilitan el cálculo del valor de la cantidad desconocida.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 5

P_5: Teniendo el valor de x, encuentra las dimensiones de cada baldosa y su área.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que identifican las dimensiones de cada baldosa y calculan sus áreas como el producto entre ellas.	6	100%

Tabla 48: Tipo de respuesta $P_5A_1S_3$

Según los resultados expuestos en la pregunta anterior el 100% de los estudiantes logran discriminar las dimensiones de cada una de las baldosa y calcular las áreas asociadas a cada una de ellas. Sobresalen algunos estudiantes que realizan la representación de cada tipo de baldosa, ubican sus dimensiones y efectúan el producto de ellas para hallar el valor de cada área (ver Anexo 15).

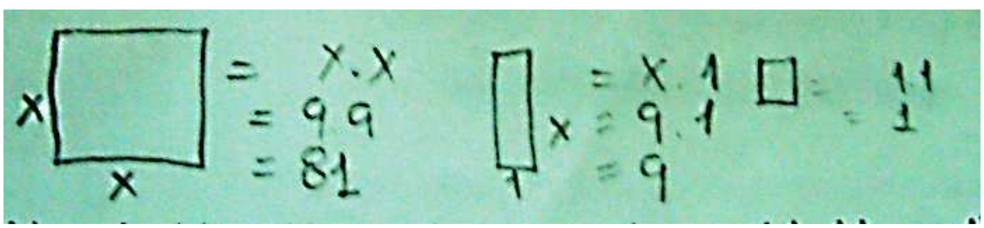


Figura 10: Representaciones de los estudiantes

Como se observa en la figura, los estudiantes representan geométricamente cada una de las baldosas y establecen la relación con la expresión algebraica que corresponde a cada una de las dimensiones, en este sentido se observa la relación que establecen los estudiantes entre representaciones geométricas y expresiones algebraicas, por otro lado, se nota que el estudiante sustituye cada uno de los valores de x y aplica la operación del producto para calcular el valor del área en cada caso, esto evidencia que el estudiante logra comprender el significado de las expresiones para resolver la situación problema.

Es importante resaltar que los estudiantes logran dar respuesta completa a las condiciones del problema, ya que en situaciones anteriores llegan solamente hasta la solución de la ecuación, en este sentido se evidencia un avance respecto a la solución de problemas, en la medida que los estudiantes logran resolver de forma adecuada el problema cumpliendo con cada una de las condiciones de este.

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que los estudiantes logran una compresión y dan significado a los diferentes tipos de representaciones geométricas y algebraicas de las situaciones problema planteadas en esta secuencia didáctica, avanzado significativamente en el proceso de resolución de problemas, en la medida que utiliza estas representaciones para darle solución y cumplimiento a todas las condiciones establecidas en el problema. Es importante resaltar el trabajo de algunos estudiantes que representan la relación entre las configuraciones geométricas y las expresiones algebraicas asociadas a ellas y con el cual se evidencia la apropiación de las características del material manipulativo y el papel que juega en la compresión de los conceptos algebraicos.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 6a y 6b

<table>
<tr><td colspan="3">PP_{6a}: Lina decide utilizar 4 baldosas tipo a, 4 baldosas tipo b y solo una baldosa tipo c, para enchapar una pared cuadrada de área de 169 cm^2.

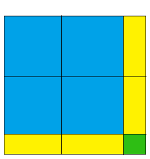
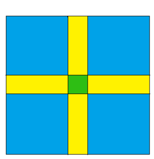
Utilizando el Puzzle algebraico y teniendo en cuenta sus reglas, dibuja una representación de la pared enchapada.</td></tr>
<tr><td>Tipos de respuestas</td><td>Número de estudiantes</td><td>%</td></tr>
<tr><td>T_1: Estudiantes que representaron la pared apoyados en las fichas de Puzzle algebraico y cumpliendo con las reglas del material
 </td><td>6</td><td>100%</td></tr>
</table>

Tabla 49: Tipo de respuesta $P_{6a}A_1S_3$

P_{6b}: Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de los lados de las baldosas.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la ecuación como la suma de los términos asociados a cada baldosa de la forma $4x^2 + 4x + 1 = 169$	1	16.7%
T_2: Estudiantes que escribieron la expresión que permite calcular el área de la pared como el producto de sus lados, en forma de producto y de potencia$(2x + 1).(2x + 1)\ o\ (2x + 1)^2$	5	83.3%

Tabla 50: Tipo de respuesta $P_{6b}A_1S_3$

Respecto a las respuestas de la tabla 49, se puede observar que el 100% de los estudiantes logran representar a través de dos configuraciones geométricas diferentes, cumpliendo con las reglas y características del material, lo planteado en el enunciado del problema, para este caso son los propios estudiantes quienes arman las configuraciones de acuerdo a las condiciones establecidas en la situación logrando pasar de un enunciado verbal a una representación geométrica. Este ir y venir entre pasar de una representación a otra, es lo que permite al estudiante comprender el significado de cada representación, y esto lo posibilita el trabajo con actividades que involucran el Puzzle Algebraico.

De acuerdo con los resultados de la tabla 50, se observa que solo un estudiante (16.7%) escribe la ecuación del problema en forma correcta, igualando la expresión asociada al área de la pared, como la suma de las áreas de cada tipo de baldosa representadas en las fichas del Puzzle Algebraico, con el valor del área dado en el enunciado. Esto significa que el material contribuye al estudiante a representar de forma algebraica las condiciones del problema, basándose en las características (dimensiones y áreas) de cada una de sus fichas, lo que implica de buena manera, acercarse cada vez más a la solución.

En relación a los estudiantes que responden de la forma T2, se puede observar que al igual que el otro estudiante, se apoyan en el Puzzle algebraico y en las configuraciones geométricas de la pregunta anterior para representar el problema en forma algebraica, sin embargo, y como sucede en preguntas anteriores, estos estudiantes escriben únicamente la expresión asociada al área de la pared en forma factorizada, pero no la igualan con el valor dado en el enunciado, lo que significa que todavía no logran diferenciar entre escribir la ecuación y la expresión asociada al problema.

A pesar de la dificultad que se presenta en la mayoría de los estudiantes en diferenciar entre una expresión y una ecuación, se resalta el papel que juega el Puzzle Algebraico en la representación de las condiciones del problema en el lenguaje algebraico, pues aunque la mayoría de los estudiantes no igualan la expresión con el valor del área, esta se escribe en forma factorizada y correctamente. Además, se nota que todos los estudiantes logran apropiarse de las características del material, logran pasar de una representación a otra comprendiendo el significado de cada representación y se apoyan en ellas para dar solución a situaciones problema, mostrando un avance con respecto a resultados anteriores.

Situación 3: Actividad 1, Pregunta 6c

P_{6c}: Aplica el método utilizado por Samuel en el punto 4, para encontrar las dimensiones de las baldosas.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que utilizaron correctamente el procedimiento aplicado en el punto 4 y hallaron el valor correcto de $x = 6$	4	66.7 %
T_2: Estudiantes que no realizaron este punto dejando solo escrita la ecuación $(2x+1)^2 = 169$	2	33.3 %

Tabla 51: Tipo de respuesta $P_{6c}A_1S_3$

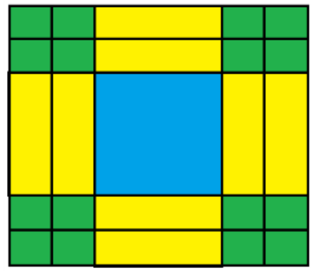
En este punto se observa nuevamente que los estudiantes escriben de forma correcta la ecuación correspondiente al problema, a pesar de que en el punto anterior algunos estudiantes escriben solamente la expresión asociada con el área de la pared, esto significa que los estudiantes logran escribir correctamente la ecuación cuando se les pide calcular el valor de cantidad desconocida, pues al parecer es en esa situación que consideran que se debe igualar la expresión con el valor numérico del área dado en el problema.

Sin embargo, a pesar de lo anterior, sólo el 66.7% aplica el método de solución llegando al valor correcto de x, mientras que el 33.3% restante no realiza el procedimiento. Con respecto a los estudiantes que emplean el método se observa que logran aplicar de forma análoga cada uno de los pasos de este, además incluyen un paso en el que aplican la transposición de términos donde pasan a dividir de un lado a otro de la ecuación en valor que acompaña a x en forma de producto ($2x$). Sin embargo, se observa nuevamente que llegan solo hasta la solución de la ecuación, pero no calculan las dimensiones de las baldosas tal como lo sugiere el problema, lo que al parecer significa que los estudiantes se conforman únicamente con la solución de la ecuación y no profundizan en las condiciones o requerimiento que se presentan en la situación problema, esto se puede atribuir al uso excesivo de actividades descontextualizadas en la escuela, en las que solamente se trabajan la aplicación de procedimientos matemáticos sin abordar su aplicación en contextos o situaciones cotidianas.

De acuerdo con lo anterior se puede afirmar, por un lado que todos los estudiantes logran representar correctamente la ecuación relacionada con una situación problema cuando se les pide calcular el valor de la cantidad desconocida, por otro lado se evidencia la apropiación de los procesos de solución por parte de la mayoría de los estudiantes, además de que incluyen operaciones que complementan dichos procesos. Finalmente, a pesar de que en la pregunta 5 de esta actividad se nota un progreso con respecto a la superación de esta dificultad, se puede afirmar que este avance se presenta cuando la pregunta no incluye procedimientos anteriores, como la solución de la ecuación, esto implica la necesidad de preguntas después del cálculo de la cantidad desconocida, en las que el estudiante pueda completar la solución de las condiciones del problema.

Situación 3: Actividad 2, Pregunta 1 y 2

Dada las siguientes configuraciones de baldosas, las cuales cumplen con las características mencionadas en la actividad 1 de la situación 3, resuelve:



P_1: Plantea un problema que se pueda representar mediante la configuración anterior, asignándole un área de 400 cm^2.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que siguieron el modelo de las situaciones planteadas en la secuencia didáctica utilizando el mismo contexto	3	50%
T_2: Estudiantes que utilizaron el modelo de las situaciones planteadas en la secuencia didáctica, pero utilizan otros contextos (cuarto o terreno)	2	33.34%
T_3: Estudiantes que no plantearon el problema de forma correcta	1	16.67%

Tabla 52: Tipo de respuesta $P_1A_2S_3$

P_2: Escriba la ecuación que permita resolver el problema que propuso.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la ecuación en forma de trinomio $x^2 + 8x + 16 = 400o\ (x+4)^2 = 400$	3	50 %
T_2: Estudiantes que escribieron la expresión que permite calcular el área del problema propuesto en forma de trinomio y en forma factorizada $x^2 + 8x + 16o\ (x+4)^2$	3	50%

Tabla 53: Tipo de respuesta $P_2A_2S_3$

Con respecto a los resultados de tabla 52, correspondientes a la primera pregunta se nota la familiaridad por situaciones parecidas o que manejan el mismo contexto a las planteadas en la secuencia didáctica, esto se evidencia en que el 50% de los estudiantes optan por proponer situaciones similares a las propuestas en actividades anteriores en forma adecuada, y que se puedan resolver apoyadas con las reglas y características del Puzzle Algebraico (ver Anexo 16). Por otro lado, el 33.3% de estudiantes se arriesgan a cambiar el contexto de la situación a problemas de terrenos, planteando las condiciones del problema de manera similar alas situaciones ya trabajadas, y que de igual forma se puedan apoyar en el material para poder resolverlas.

Por otro lado, un estudiante (16.7%) propone una situación problema manejando el mismo contexto de enchapar baldosas propuesto en las situación anteriores, sin embargo, las condiciones del problema no son las adecuadas para el objetivo de la actividad, debido a que da los valores de las medidas del largo y el ancho de la configuración, sin establecer una cantidad desconocida y una relación entre las cantidades. Esto indica que el estudiante presenta dificultades para pasar de un sistema de representación geométrico al lenguaje natural, proceso inverso a las situaciones anteriores en el que se pasa del lenguaje natural a la representación geométrica y algebraica, en la medida que no lora proponer de forma adecuada las condiciones del problema.

En este sentido se puede evidenciar, que la mayoría de los estudiantes logran pasar sobre diferentes sistemas de representación en este caso de una representación geométrica a una situación problema en lenguaje natural, dando la posibilidad de plantear las cantidades conocidas y desconocidas y establecer las relaciones entre ellas apoyándose en las reglas y características del Puzzle Algebraico. Sin embargo, se presenta la dificultad en uno de los estudiantes para pasar de este tipo de representaciones al lenguaje natural, lo que sugiere mayor acompañamiento del profesor en el que se reflexione sobre las condiciones que se deben presentar en una situación problema.

Con relación a los resultados de la tabla 53, se nota nuevamente la dificultad de algunos estudiantes por escribir correctamente la ecuación correspondiente al problema. Todos los estudiantes se basan en las características del Puzzle algebraico para representar la expresión correspondiente al área de la configuración propuesta, lo que evidencia el paso de una representación geométrica de una situación problema a una representación algebraica de esta misma, sin embargo, solo la mitad de los estudiantes igualan esta expresión con el valor del área formando así la ecuación, mientras que la otra mitad no lo hace.

A pesar de que las expresiones propuestas por todos los estudiantes son correctas, la mitad de ellos todavía escriben únicamente la expresión sin igualar al valor numérico para formar la ecuación, por lo que se puede decir que esta es una dificultad persistente en algunos estudiantes, sin embargo, y como se nota en los análisis anteriores, todos los estudiantes escriben correctamente la ecuación cuando se pide calcular los valores de las dimensiones de las baldosas, por lo que se puede afirmar que a pesar de ser persistente no es una dificultad muy significativa pero que de igual forma debe superarse.

Situación 3: Actividad 2, Pregunta 3

P_3: Encuentra las dimensiones de las baldosas empleando el método 1 que utilizo Samuel en la situación 1 y el método 2 que utilizó en el punto 4 de esta situación.

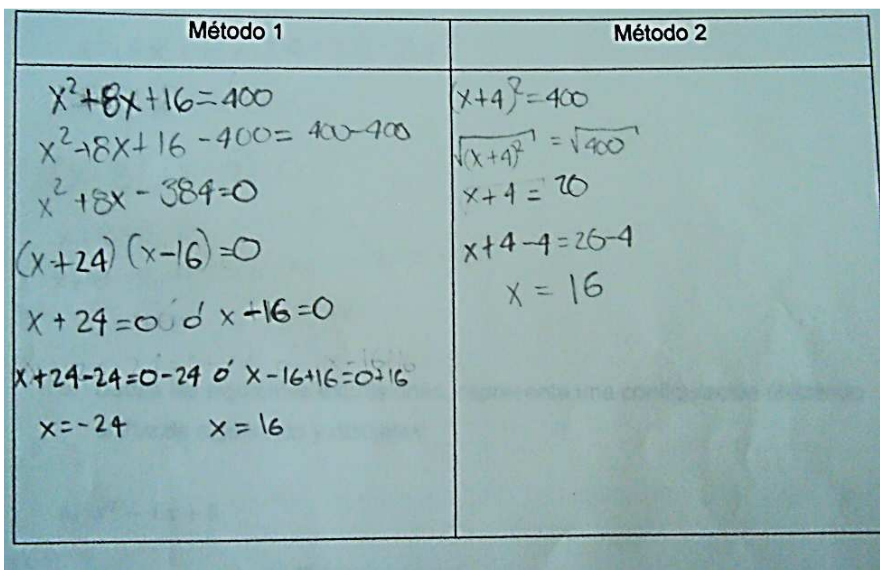
Método 1	Método 2

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplican los procedimientos en forma correcta y calculan los valores de x.	5	83.3%
T_3: Estudiantes que aplican los procesos del método 2 en forma correcta y en el método 1 aplican la factorización de forma incorrecta.	1	16.7%

Tabla 54: Tipo de respuesta $P_3A_2S_3$

Con respecto al primer método de solución, presentado en la tabla anterior, que corresponde a la factorización de la expresión cuadrática se puede observar que la mayoría de los estudiantes logran aplicar en forma adecuada las operaciones y propiedades numéricas en ambos miembros de la ecuación, pasando de la ecuación cuadrática a otra equivalente en forma factorizada, posteriormente aplican una de las propiedades numéricas en la que igualan cada uno de los factores a cero y finalmente aplican la propiedad uniforme correspondiente a la suma para despejar x e igualarla a su valor numérico. Solo uno de los estudiantes efectúa en forma incorrecta la factorización de la expresión cuadrática, lo que lleva al cálculo de valores de x que no satisfacen la ecuación, sin embargo aplican el resto de propiedades de en forma correcta.

Para el segundo método todos los estudiantes efectúan cada uno de los procesos en forma análoga al procedimiento presentado en la actividad anterior, primero escriben la ecuación en forma factorizada y como potencia ($(x+4)^2 = 400$), posteriormente aplican la operación de raíz cuadrada para eliminar el término cuadrático en ambos miembro de la ecuación para pasar a otra equivalente pero en términos lineales, finalmente aplican la propiedad uniforme respecto a la suma para despeja x e igualarla a su valor.



Método 1	Método 2
$x^2+8x+16=400$	$(x+4)^2=400$
$x^2+8x+16-400=400-400$	$\sqrt{(x+4)^2}=\sqrt{400}$
$x^2+8x-384=0$	$x+4=20$
$(x+24)(x-16)=0$	$x+4-4=20-4$
$x+24=0$ ó $x-16=0$	$x=16$
$x+24-24=0-24$ ó $x-16+16=0+16$	
$x=-24$ $x=16$	

Figura 11: Procedimientos de los estudiantes

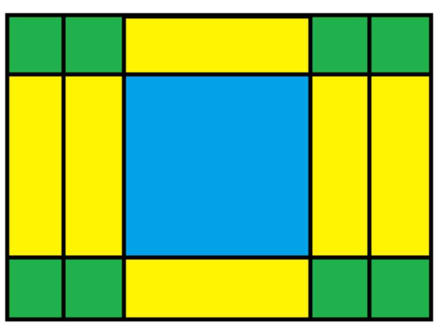
Sin embargo, y a pesar de que todos los estudiantes logran calcular el valor de x correspondiente al valor desconocido de una de las dimensiones de las baldosas por cualquiera de los dos procedimientos, ninguno halla las dimensiones de las baldosas, lo que indica que a pesar de que los estudiantes logran apropiarse de los procesos de solución para resolver ecuaciones cuadráticas, todavía persiste la dificultad de dar cumplimiento a todas las condiciones del problema, lo que al parecer podría tener origen en la misma escuela, donde el profesor presenta actividades descontextualizadas que se reducen a la ejercitación mecánica de procedimientos y que no aportan en la comprensión del significado del concepto algebraico, en este caso el de la ecuación cuadrática, por esta razón parecería que el estudiante tiende a pensar que la solución de un problema se reduce únicamente a calcular el valor de la cantidad desconocida.

De acuerdo con los resultados anteriores se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes logran apropiarse de los métodos de solución presentados en las situaciones propuestas en el desarrollo de la secuencia didáctica, donde aplican las operaciones y propiedades básicas de los números al lenguaje algebraico dándole un significado más general, lo que representa un avance significativo en relación a la resolución de problemas. Solo uno de los estudiantes presenta dificultad en la factorización de expresiones cuadráticas lo que lleva a encontrar valores incorrectos de la cantidad desconocida x, sin embargo, logra calcular este valor a través del método de raíz cuadrada.

Por otro lado persiste la dificulta en todos los estudiantes en dar cumplimiento a todas las condiciones del problema, lo que podría superarse con la implementación de preguntas complementarias que estén separadas de los procedimientos de solución de la ecuación, tal como se sugiere en análisis anteriores y como se presenta en la pregunta 5 de la actividad 1 de esta situación.

Situación 3: Actividad 2, Pregunta 4 y 5

P_4: El albañil debe enchapar el mesón de la cocina de área 224 cm^2, de acuerdo con la siguiente configuración:



Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de las baldosas.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la ecuación correspondiente a la situación en forma correcta, sin factorizar $(x^2 + 6x + 8 = 224)$	4	66,7%
T_2: Estudiantes que escribieron la expresión de forma factorizada e incorrecta $(x + 2)^2$	2	33.3%

Tabla 55: Tipo de respuesta $P_4A_2S_3$

P_5: Halle las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos empleados por Samuel.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplicaron el método de factorización empleado de manera correcta y encontraron los valores de x que permiten hallar las dimensiones de las baldosas	5	83.3 %
T_2: Estudiantes que aplicaron el método de raíz cuadrada y llegaron a valores incorrectos de x	1	16.67%

Tabla 56:Tipo de respuesta $P_5A_2S_3$

En relación a la tabla 55, y respecto a los estudiantes que escribieron la ecuación del problema teniendo en cuenta la configuración, se puede decir que logran realizar el paso de la representación geométrica a la algebraica de forma adecuada, apoyándose en las características del Puzzle Algebraico, pues este permite representar, a partir de las características de sus fichas, cada uno de los términos de la expresión asociada al área.

Por otro lado, en los estudiantes que escribieron la expresión $(x + 2)^2$ para referirse a la ecuación del problema, se puede observar que tienen en cuenta solo uno de los lados de la configuración que representa el mesón de la cocina, esto al parecer puede deberse a que el estudiante se acostumbra a trabajar con un solo tipo de configuración como es la cuadrada, donde las expresiones que representan las dimensiones de los lados son iguales, y no se da cuenta de las diferencias presentes en otros tipos de configuración, en este caso la rectangular, donde las expresiones asociadas a las longitudes de sus lados son diferentes y por lo tanto la ecuación del problema también es diferente.

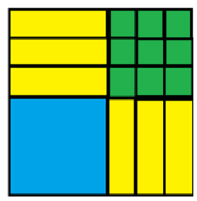
De acuerdo con los resultados de la tabla 56, se puede observar que el 83.3% de los estudiantes aplican el método de factorización de forma adecuada para calcular el valor de x que permite hallar las dimensiones de las baldosas, esto significa que estos estudiantes logran identificar de manera adecuada en que situaciones aplicar este tipo de procedimientos, para el cual las dimensiones de los lados son diferentes (ver Anexo 18). Además, a pesar de que en la pregunta 4, dos estudiantes escribieron la expresión $(x+2)^2$ refiriéndose a la ecuación del problema sólo uno de ellos corrige dicha expresión y escribe la ecuación correcta en la pregunta 5 realiza el procedimiento y calcula el valor de la cantidad desconocida, en este caso se evidencia que al parecer el estudiante logra darse cuenta de la diferencia entre las longitudes de las dimensiones de la configuración y procede a corregir la ecuación.

Por su parte el otro estudiante continua utilizando la expresión $(x+2)^2$ de la pregunta 4, y la iguala con el valor del área, de esta manera la ecuación queda de la forma $(x+2)^2 = 224,$ lo que le permite aplicar el método de raíz cuadrada, sin embargo los valores de x que encuentra no corresponde a las condiciones del problema. A pesar de lo anterior vale la pena resaltar que este estudiante aplica correctamente los procedimientos sobre la ecuación que escribe y encuentra valores para$x$, lo que indica la apropiación de este tipo de procedimientos, que aunque no corresponde a las condiciones del problema logra aplicarlo correctamente.

De acuerdo con lo anterior se puede decir que la mayoría de los estudiantes logran escribir la ecuación de una situación problema representada en una configuración geométrica de forma rectangular, algunos estudiantes presentan la dificultad de escribir esta ecuación por la costumbre de trabajar con configuraciones de forma cuadrada, sin embargo, algunos se percatan de la diferencia entre las dimensiones de los lados y proceden a corregir y escribir la ecuación correcta. Solo un estudiante permanece con esta dificultad lo que lo lleva a aplicar el método de solución incorrecto, calculando valores de x que no satisfacen las condiciones del problema. En este caso se puede afirmar que los mismos estudiantes, apoyados en las representaciones del Puzzle algebraico, se dan cuenta de sus propios errores y proceden a corregirlos, lo que lleva a resolver de forma adecuada el problema.

Situación 3: Actividad 3, Pregunta 1

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas que debe emplear en otras paredes utilizando solamente la siguiente configuración.



P_1: Escriba la expresión que representa la medida del área de la pared.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron la expresión asociada al área de la configuración en forma factorizada y correcta, teniendo en cuenta las características de las fichas del Puzzle algebraico: $(x+3)^2$	6	100 %

Tabla 57: Tipo de respuesta $P_1A_3S_3$

Como se aprecia en la tabla el 100% de los estudiantes escriben la expresión asociada al área de la pared, todos lo realizan en la forma factorizada apoyándose en las dimensiones de los lados de las fichas del Puzzle Algebraico utilizadas en la configuración y no la escriben como la suma de los términos asociados a cada una de las fichas (x^2+6x+9). En este sentido se puede decir que al parecer los estudiantes se saltan la expresión en la forma cuadrática general y escriben inmediatamente la expresión asociada al área de la configuración en forma factorizada antecediéndose posiblemente al planteamiento de alguna condición que exija la solución de una ecuación asociada a esta expresión.

Es importante destacar también, que en este punto todos los estudiantes escriben solamente la expresión asociada al área de la pared dando cumplimiento con las condiciones del problema y no se nota la necesidad por igualarla a un valor numérico. La dificultad radica cuando se pide a los estudiantes escribir la ecuación y donde si es necesario igualar la expresión asociada al área con el valor numérico de esta.

Situación 3: Actividad 3, Preguntas 2a, 2b y 3

P_{2a}: Ayude a Lina a encontrar los valores de las dimensiones de las baldosas y las áreas que pueden enchapar, llenando la siguiente tabla:

Medida del lado		3		7			10
Área de la pared	16		64		144		

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que completan la tabla asignando los valores numéricos sugeridos en cada casilla en forma correcta.	6	100%

Tabla 58: Tipo de respuesta P_{2a}, A_3, S_3

P_{2b}: Indica como encontraste cada valor.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que le sacan la raíz cuadrada a los valores del área y restan 3 al resultado para hallar las dimensiones de los lados y para hallar el valor del área sustituyen el valor numérico correspondiente a la medida del lado en la expresión $(x+3)^2$	6	100%

Tabla 59: Tipo de respuesta P_{2b}, A_3, S_3

P_3: Indique la relación que existe entre la expresión del punto 1 y los valores encontrados en la tabla del punto 2. Escriba esta relación simbólicamente y explique.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que por medio de la expresión$(x+3)^2$se puede hallar el valor del área y las medidas de los lados de la configuración, pero no escriben la relación simbólicamente	5	83.3 %
T_2: Estudiantes que indican que por medio de la expresión $(x+3)^2$se puede hallar el valor del área y la medida de los lados de la configuración, y escriben la relación simbólicamente $A=(x+3)^2$	1	16.7%

Tabla 60: Tipo de respuesta $P_{3,}A_{3,}S_3$

De acuerdo con los resultados de la pregunta 2,se observa que todos los estudiantes completan la tabla correctamente, además logran argumentar los procesos que realizan para hallar cada uno de los valores pedidos en la tabla, manifestando que para calcular el valor de área de la pared sustituyen el valor correspondiente a la medida del lado en la expresión $(x+3)^2$que corresponde al área de la configuración, y para calcular el valor de los lados sacan raíz cuadrada al valor del área y al resultado le restan 3.En relación con lo anterior se puede observar que los estudiantes aplican el procedimiento presentado en la actividad 1 de esta situación de manera directa, debido ejecutan cada uno de los pasos aplicados pero de forma mental.

Es importante reconocer que en las representaciones de tipo tabular, el estudiante logra un acercamiento a los conceptos relacionados con la variación, en la medida que se puede notar cómo cambia el área de la pared dependiendo de la longitud de sus lados. Por otro lado, en relación a lo anterior, se evidencia que los estudiantes, apoyándose en el Puzzle Algebraico, logran identificar las expresiones asociadas a las dimensiones de los lados y las utilizan para calcular los valores de áreas y dimensiones de una superficie, lo que indica que logran emplear expresiones generales para el cálculo de valores en casos particulares.

Respecto a los resultados de la pregunta 3, se puede observar que todos los estudiantes establecen la relación entre la expresión del punto 1 y los valores calculados en la tabla del punto 2, estableciendo que a partir de la expresión se calculan los valores de la tabla, de una manera sustituyendo los valores de x, correspondientes a las medidas de los lados, y resolviendo las operaciones para calcular el valor del área, de otro lado, despejan el valor de x según el valor del área dada para calcular la medida del lado. Sin embargo, el 83.3% de los estudiantes no expresan esta relación simbólicamente, solo uno de los estudiantes escribe esta relación de la forma $A = (x+3)^2$, indicando que A representa cada uno de los valores numéricos.

Es importante resaltar que todos los estudiantes logran explicar de forma verbal los procedimientos realizados para calcular cada uno de los valores de la tabla, y también logran establecer la relación existente entre la expresión y cada uno de estos valores, lo cual indica un avance respecto al paso del lenguaje algebraico al lenguaje natural, en la medida que justifican con argumentos válidos los procedimientos y operaciones realizadas algebraicamente.

Lo anterior entra en consonancia con lo que expresa Domínguez, citado por Hernández et al. (2008), cuando manifiesta que el uso de materiales manipulativos, utilizados como representaciones semióticas, facilitan las conversiones entre el lenguaje algebraico y el natural, y que la manipulación de varias representaciones por parte del estudiante permite construir imágenes mentales adecuadas de un objeto matemático, en este caso el de la ecuación cuadrática. En este sentido y de acuerdo con lo expresado por el grupo DECA en las actividades de evaluación, se logra conocer los aprendizajes que los estudiantes han adquirido y transformado, y su capacidad de verbalizar y reforzar estos aprendizajes.

Situación 3: Actividad 3, Pregunta 4

P_4: Si el área de la pared es de 256 dm^2, determine los valores de las dimensiones y las áreas de cada baldosa.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que determinan el valor correcto de x y encuentra las dimensiones de cada baldosa.	1	16.7 %
$T_{2:}$ Estudiantes que determinan el valor correcto de x, correspondiente al lado desconocido de las baldosas.	4	66.7 %
T_2: Estudiantes que no calculan los valores de las dimensiones	1	16.67%

Tabla 61: Tipo de respuesta $P_{4,}A_{3,}S_3$

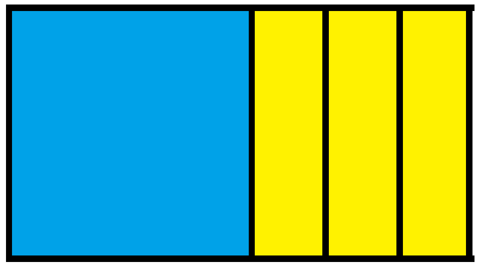
En la tabla anterior se observa que la mayoría de los estudiantes logran encontrar el valor de x, pero solo uno encuentra las dimensiones de cada tipo de baldosa. Por otro lado un estudiante deja expresada la ecuación del problema pero no calcula el valor de la cantidad desconocida.

Para calcular la cantidad desconocida los estudiantes aplican los procedimientos correspondientes al método presentado en la actividad 1 de esta situación, donde se debe a extraer la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación y aplicar la propiedad uniforme que permite despejar el valor de x. Hasta este momento es notable la apropiación de los métodos de solución trabajados a lo largo de la secuencia por parte de la mayoría de los estudiantes, lo cual se evidencia en que logran calcular los valores de las cantidades desconocidas en casi cualquier situación en las que se utiliza el Puzzle Algebraico, esto muestra una de las ventajas de trabajar con este tipo de material, en la medida que los estudiantes a partir de situaciones problemas que integran o que se pueden representar por medio de las fichas logran asociar el método de solución más conveniente para resolver el problema.

De acuerdo a lo anterior se puede decir que las actividades propuestas en este trabajo de grado, apoyadas en la utilización del Puzzle Algebraico y sus características, han permitido la manipulación de diferentes representaciones de un mismo concepto matemático, como es la ecuación cuadrática, proporcionando los medios para construir imágenes mentales adecuadas sobre ese concepto y que puedan ser utilizadas para resolver situaciones problema.

Situación 3: Actividad 3, Pregunta 5a

Samuel se encuentra con la siguiente configuración de baldosas la cual cubre una pared de área 12 dm^2 :



P_{5a}: Escribe la ecuación cuadrática que representa este problema.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron correctamente la ecuación pero sin aplicar propiedad uniforme $x^2 + 3x = 12$	3	50%
T_2: Estudiantes que escribieron correctamente la ecuación y aplicaron propiedad uniforme para transformarla en otra equivalente $x^2 + 3x - 12 = 0$	3	50%

Tabla 62: Tipo de respuesta $P_{5a,}A_{3,}S_3$

Con relación a los resultados anteriores se observa que todos los estudiantes logran escribir en forma correcta la ecuación asociada a la configuración que representa la pared de área 12 dm^2, apoyándose en las dimensiones de las fichas del Puzzle Algebraico. Por un lado el 50% de los estudiantes escriben la ecuación igualando la suma de los términos asociados a las fichas del material que forman la configuración, con el valor del área. El otro 50% de los estudiantes además, aplican la propiedad uniforme con el cual se realiza una transformación de la ecuación a otra equivalente en términos de su forma general. Lo anterior indica un avance en cuanto a la aplicación de las propiedades numéricas en procedimientos algebraicos y una predisposición para la aplicación estos procedimientos en la solución de una ecuación.

En este sentido se puede decir que todos los estudiantes logran apropiarse de las características y reglas del Puzle algebraico y las aplican en la representación de ecuaciones cuadráticas asociadas a una configuración geométrica de una situación problema. Además, el trabajo con este material permite reconocer y aplicar de mejor manera los métodos de solución (factorización y radicación) de ecuaciones cuadráticas sencillas vinculadas a superficies de área cuadrada y rectangular con dimensiones de valores enteros.

Situación 3: Actividad 3, Pregunta 5b

P_{5b}: Determine si es posible calcular las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos trabajados anteriormente. Explique su respuesta.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que no es posible debido a que no se pueden encontrar valores enteros que al manipularlos den el término lineal y el término constante.	5	83.3 %
T_2: Estudiantes que indican que si es posible con los dos métodos	1	16.7 %

Tabla 63: Tipo de respuesta $P_{5b,}$ $A_{3,}$ S_3

De acuerdo con los resultados de la tabla 63, se puede observar que el 83.3% de los estudiantes indican que en la ecuación del punto 5a no se pueden aplicar los procedimientos trabajados en las actividades anteriores, debido que no se pueden hallar valores enteros que al manipularlos se puedan obtener los términos lineal y constante de la expresión cuadrática, por otro lado un solo estudiante afirma que si es posible aplicar estos métodos de solución.

Respecto a los estudiantes que afirman que no es posible aplicar los procedimientos trabajados anteriormente, se puede decir que logran identificar los casos en los cuales estos procedimientos no son suficientes para resolver algunas situaciones problema que involucra una ecuación cuadrática, esto al parecer significa que existe una conciencia en el estudiante en la que se reconocen las características principales de cada uno de los procesos de solución que llevan a la identificación de las situaciones en las que se pueden aplicar(ver Anexo 21).Con relación al estudiante que afirma que si es posible aplicar estos métodos para resolver la ecuación del punto 5a, se puede afirmar que existe una dificultad en la identificación de las limitaciones de cada uno de ellos, posiblemente porque este estudiante tiende a pensar que son los únicos o que simplemente se pueden aplicar en cualquier situación problema.

De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes reconocen las limitaciones y los casos posibles en que se pueden aplicar los procedimientos trabajados en el desarrollo de la secuencia, dando argumentos válidos que justifican que estos métodos se aplican para los casos en que las raíces o soluciones de la ecuación son números enteros, de esta manera le asignan una característica principal para la identificación y aplicación de ambos procesos, por otro lado, todavía permanece la dificultad en uno de los estudiantes en la cual no identifica esta característica.

Situación 3: Actividad 3, Preguntas 5c y 5d

P_{5c}: Escribe los valores de los coeficientes de la ecuación del literal a.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que escribieron los coeficientes $a = 1,\ b = 3\ c = -12$ de forma correcta	5	83.33%
T_2: Estudiantes que escribieron los términos de la expresión $(a = 1x^2,\ b = 3x,\ c = -12)$	1	16.67%

Tabla 64: Tipo de respuesta $P_{5c,}A_{3,}S_3$

Una forma general de resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $\boldsymbol{a \neq 0}$, es a partir de la fórmula $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente lineal y $\boldsymbol{c}$ es el término independiente.

P_{5d}: Aplique la formula cuadrática para determinar los valores de las dimensiones de las baldosas.

Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que aplican correctamente la formula cuadrática y dejan expresado el valor de x en forma de raíz $\frac{-3\pm\sqrt{57}}{2}$, pero no calcularon los valores de las dimensiones de las baldosas.	5	83.3 %
T_2: Estudiantes que reemplazaron correctamente los coeficientes en la fórmula cuadrática pero no resolvieron correctamente el radical	1	16.7%

Tabla 65: Tipo de respuesta $P_{5d,}A_{3,}S_3$

De acuerdo con los resultados anteriores se puede observar que el 83.3% de los estudiantes escriben los coeficientes de la ecuación $x^2+3x-12=0$de forma correcta, además sustituyen estos valores en la fórmula general, lo que permite calcular el valor de x. Solo un estudiante escribe los coeficientes sin separarlos del término cuadrático y de término lineal, además sustituye los valores en la fórmula cuadrática, pero efectúa la operación del radical en forma incorrecta.

Con relación a los estudiantes que escriben de forma correcta los coeficientes y los sustituyen en la formula general se puede afirmar que logran comprender y aplicar este método de solución efectuando las operaciones de forma correcta. Solo uno de los estudiantes escribe los coeficientes sin separarlos de los términos lineal y cuadrático, sin embargo sustituye en la formula general con los coeficientes correcta, pero efectúa mal la operación del discriminante, lo que indica que en este estudiante se presenta una dificultad más de tipo aritmético que algebraico.

De acuerdo a lo anterior se puede establecer que la mayoría de los estudiantes logran aplicar de forma adecuada el procedimiento correspondiente a la fórmula cuadrática, separando los coeficiente de la expresión cuadrática y sustituyéndolos en la formula general, sin embargo, a pesar de efectuar las operaciones y calcular los valores de la cantidad desconocida, dejan expresada la respuesta en términos de un número irracional y no calculan los valores de las dimensiones de las baldosas como lo sugiere la pregunta. En este sentido pareciera que los estudiantes se les dificulta realizar operaciones con números irracionales, que es una dificultad más de tipo aritmético, sin embargo, también puede deberse a que los estudiantes tienden a dejar la solución del problema solo hasta la solución de la ecuación y no terminan de resolver todas las condiciones del este tal y como se analizó en actividades anteriores.

En consecuencia se puede decir que existen dificultades de tipo aritmético en la aplicación del método de la fórmula cuadrática general, debido a que algunos estudiantes no logran efectuar operaciones dentro de los radicales e identificar propiedades y operaciones de los números racionales.

Situación 3: Actividad 3, Pregunta 6

P_6: Explique en qué casos se pueden aplicar cada uno de los métodos trabajados en esta situación.		
Tipos de respuestas	Número de estudiantes	%
T_1: Estudiantes que indican que el primer método se aplica en ecuaciones con expresiones factorizables, el segundo cuando la configuración es un cuadrado y el tercero se aplica para cualquier ecuación cuadrática.	3	50%
T_2: Estudiantes que indican que el método 1 se aplica en ecuaciones cuadráticas factorizables, el método 2 en ecuaciones con expresiones con cuadrados perfectos y el último método no lo describen.	2	33.3%
T_3: Estudiantes que no respondieron	1	16.67%

Tabla 66: Tipo de respuesta $P_{6,}\ A_{3,}\ S_3$

Respecto al primer método, los estudiantes lo relacionan al caso en que se debe realizar factorización, donde se hallan valores que al sumarlos dan como resultado el coeficiente del término lineal y al multiplicarlos dan el valor del coeficiente del término constante. Por otro lado en el método de raíz cuadrada los estudiantes manifiestan que se aplica para el caso en que se presentan cuadrados perfectos o donde la configuración geométrica correspondiente al problema es un cuadrado, en este caso los estudiantes se apoyan en las representaciones realizadas con el Puzzle Algebraico Para determinar qué proceso aplicar.

Finalmente, solo el primer grupo de estudiantes (50%) indican que el método de la fórmula general se aplica para cualquier caso en que haya una ecuación cuadrática incluyendo los casos anteriores, el resto de los estudiantes (33.3%) no identifica en qué casos se aplica este último método. Solo un estudiante no realiza el punto, pues al parecer no logra diferenciar cuando aplicar cada método de solución.

De acuerdo con los resultados anteriores se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes tienen mayor familiaridad con los métodos de factorización y de raíz cuadrada, el 50% identifica correctamente cuando aplicar todos los procedimientos desarrollados en la secuencia, y solo un estudiante no logra diferenciar en que situaciones aplicar cada uno de ellos. A pesar de esto se nota un avance significativo con respecto a la solución de problemas, ya que los estudiantes logran comprender el significado de la ecuación cuadrática e identificar los procedimientos más convenientes a la hora de resolver una situación problema que tenga relación con este tipo de ecuaciones.

3.5. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA PLENARIA REALIZADA CON LOS ESTUDIANTES.

Finalizada cada situación de la secuencia didáctica se procede a la realización de la plenaria, donde se discuten cada una de las actividades propuestas, con la participación activa de todos los estudiantes.

En primer lugar se socializan los procedimientos aplicados por los estudiantes en la solución de las situaciones didácticas, donde cada estudiante expone en forma verbal o a través de representaciones gráficas en el tablero lo realizado en cada una de las actividades. Además, se discuten algunos errores más de tipo aritmético que cometen los estudiantes al aplicar los procedimientos de solución de las ecuaciones cuadráticas, como la mala aplicación de la propiedad uniforme respecto a la suma y al producto en el despeje de la cantidad desconocida, finalmente se resuelven algunas dudas de los estudiantes respecto a la utilización del Puzzle Algebraico.

En segundo lugar se discuten las ventajas de trabajar con materiales manipulativos, particularmente con el Puzzle algebraico, donde los estudiantes resaltan que el trabajo con este material facilita de manera significativa el reconocimiento de expresiones algebraicas a partir de la identificación y apropiación de las reglas y características de cada una de sus fichas, las cuales representan términos cuadráticos lineales y constantes. A continuación se presenta un protocolo donde se discuten estos aspectos:

P: profesor

E1: estudiante 1

E2: estudiante 2

E3: estudiante 3

P: (mira a todos los estudiantes y pregunta) bueno, pregunto, ¿en que contribuye el Puzzle Algebraico para la compresión de la ecuación cuadrática?, ¿les facilitó algo o se complicaron más para resolver las actividades?

Dos estudiantes levantan la mano y se la seden a E1

E1: pues, a mí me pareció más fácil, pues en algunas, porque se podía relacionar la expresión larga, con la de los paréntesis.

E2 interrumpe y agrega

E2: ¡la de factorización!

E1: ¡eso!, porque pues los lados del cuadrado al multiplicarlos dan la expresión ehh... la del área de la pared.

P: listo, pero… ¿en qué creen realmente que contribuye este material?

E2: Pues ayuda a colocar el enunciado en una ecuación, dependiendo de los valores que aparecen en el problema

P: ¿y cómo lo hace?, A ver usted, ¿qué puede decir? (señala a otro estudiante)

E3: pues eso tiene que ver con lo que representa cada ficha ¿no?

P: a ver y ¿cómo es eso?

E3: pues sí, es que pues, uno mira el dibujito de la pared

Interrumpe P

P: la configuración de la pared con las fichas

E3: eso, entonces uno lo que hace es sumar las fichas que tienen la misma forma sean positivas o negativas y ahí sale la expresión. E1: y ahí pues se factoriza mas fácil con lo lados, y pues se iguala, y se hace el resto del procedimiento.

Como se evidencia en el anterior protocolo los estudiantes reconocen que el Puzzle Algebraico contribuye de alguna manera en la identificación de las expresiones cuadráticas asociadas a las actividades propuestas en la secuencia. Manifiestan también que este material permite la identificación de expresiones cuadráticas equivalentes a partir de establecer la relación entre la expresión asociada al área de una configuración como la suma de las fichas que la conforman con la expresión asociada al producto de las dimensiones de los lados de dicha configuración, lo que contribuye en la aplicación de procedimientos que llevan a la solución de la ecuación.

También facilita la identificación de la ecuación cuadrática vinculada a una situación problema, a partir de la manipulación de sus fichas, en este caso se resalta la importancia de este material debido a que contribuye en la conversión de un enunciado en lenguaje natural a otro en lenguaje algebraico y viceversa.

De otra parte, los estudiantes expresan que el Puzzle algebraico contribuye a determinar qué proceso de solución de una ecuación cuadrática es más conveniente aplicar en una situación problema, a partir de las diferentes formas en que se puede representar una configuración geométrica, y en el cual se asocia el proceso en que se aplica raíz cuadrada a las representaciones donde la configuración es un cuadrado, y el proceso en el que se aplica factorización para las configuraciones cuadradas y rectangulares.

También, se discute una dificultad relacionada con la manipulación del material, y tiene que ver con la comprensión de las reglas y características del Puzzle Algebraico por parte de algunos estudiantes, en la que se hace difícil asociar la expresión algebraica a la configuración geométrica o de otra parte asociar las dimensiones de la configuración con las dimensiones de las fichas del material, sin embargo, esta dificultad disminuye en la medida que se trabajan las diferentes actividades donde se presentan diferentes tipos de configuraciones.

Además, se discuten los aspectos generales relacionados con la implementación de la secuencia didáctica para la comprensión del concepto de ecuación cuadrática, donde los estudiantes manifiestan que el desarrollo de la secuencia propone un ambiente más dinámico en el que se puede manipular y visualizar de forma diferente conceptos algebraicos que en las clases normales de matemáticas son difíciles de comprender, además de que las situaciones problema propuestas dejan ver la aplicabilidad de estos conceptos en contextos cotidianos.

Finalmente, por parte de los autores de este trabajo se resalta el papel de la secuencia didáctica en la medida que contribuye de manera significativa en la compresión del concepto de ecuación cuadrática a partir de situaciones problema que involucran la implementación de materiales manipulativos, además de que permite identificar errores y dificultades de algunos estudiantes en los procesos de solución que están relacionados con la aplicación de propiedades y operaciones de los números lo que permite clasificar estas dificultades como más de tipo aritmético que algebraico.

CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

A continuación se presentan algunas conclusiones generales y reflexiones didácticas, las cuales surgen del proceso de diseño e implementación de la Secuencia Didáctica sobre la enseñanza de la Ecuación Cuadrática a través de la integración del material manipulativo Puzzle Algebraico, aplicada a los estudiantes de grado noveno del Colegio de Bachillerato Técnico Comercial Hargadon, para la consignación de las conclusiones y reflexiones didácticas, es pertinente mencionar que la toma de nota, la plenaria y grabaciones fueron punto clave para ello.

4. Conclusiones Generales

Las conclusiones generales que se muestran a continuación, se presentan en concordancia con los objetivos planteados en este trabajo de grado.

En relación con el primer objetivo específico, a partir del cual se pretendía la identificación y apropiación de los referentes teóricos desde la perspectiva matemática, curricular y didáctica de las ecuaciones cuadráticas, es posible concluir que:

- Desde la perspectiva matemática se toman en consideración para el diseño de la secuencia didáctica aspectos fundamentales del álgebra como la definición de ecuación cuadrática con una variable en relación con el teorema fundamental del álgebra, se tiene en cuenta la identificación de los coeficientes numéricos de los términos de la ecuación cuadrática, se trabajan las ecuaciones completas e incompletas, con relación a los métodos de solución se hace énfasis en casos sencillos como el de factorización y raíz cuadrada y se usan las reglas de transformación de una ecuación a partir de la aplicación de propiedades numéricas. Vale la pena resaltar que no se hace énfasis en establecer la relación entre el concepto de ecuación cuadrática y el de función cuadrática, debido a las situaciones problema que se privilegiaron, sin embargo, se podría potenciar en el desarrollo de otras propuestas de investigación donde se pueda trabajar con tecnología.

- Desde la perspectiva curricularse fundamenta el diseño de situaciones problemas contextualizadas que entran en consonancia con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, se hace énfasis en el proceso de resolución y planteamiento de problemas a partir de los diferentes sistemas de representación como el geométrico, el simbólico y el tabular, permitiendo la identificación de patrones que posibilitan la construcción de expresiones algebraicas. Se toma en cuenta el contexto desde las mismas matemáticas y de la vida diaria considerando el entorno sociocultural del estudiante que le permita encontrar significado a los conocimientos matemáticos.
- Desde la perspectiva didáctica se toman en consideración aspectos relacionados con dificultades comunes que presentan los estudiantes en el estudio del álgebra, a partir de las cuales se proponen actividades con el fin de superarlas, se presentan elementos teóricos correspondientes a la secuencia didáctica, se toman en cuenta aspectos de la resolución de problemas en consonancia con los planteamientos de Polya, Puig y el modelo metodológico propuesto por el grupo DECA, que permiten el diseño de actividades que evidencian procesos de aprendizaje significativos con relación a la enseñanza de la ecuación cuadrática. Se consideran aspectos relacionados con los materiales manipulativos que logran relacionar elementos asociados al concepto de ecuación cuadrática, a partir de representaciones de tipo geométrico que actúan como mediadores que permiten representar ecuaciones algebraicas relacionadas con una situación problema.

Respecto al segundo objetivo sobre la identificación de aspectos fundamentales de la puesta en ecuaciones de situaciones didácticas por parte de los estudiantes en la apropiación del concepto de Ecuación Cuadrática se puede concluir que:

- Los estudiantes logran relacionar las magnitudes de los lados de las configuraciones realizadas con el Puzzle algebraico con expresiones algebraicas lineales, y las magnitudes asociadas al área con una expresión cuadrática, establecen la relación entre estas expresiones y finalmente determinan su equivalencia.
- Los estudiantes representan configuraciones geométricas y métricas y las asocian a representaciones en lenguaje algebraico, donde se evidencian las conversiones en dos sistemas de representación semiótica diferentes en el que se puede encontrar una ecuación cuadrática.
- En relación a la resolución de problemas los estudiantes logran poner un problema en ecuaciones, en la medida que comprenden el enunciado del problema identificando las cantidades conocidas y desconocidas, así como las relaciones entre ellas, en este caso representadas en las magnitudes de los lados de las configuraciones geométricas; representan las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre las cantidades; logran escribir la igualdad entre dichas expresiones y las cantidades conocidas formando una ecuación, finalmente comprueban que los miembros de la igualdad representan la misma cantidad.
- Respecto a los procesos de solución de ecuaciones cuadráticas los estudiantes realizan el traslado de propiedades y operaciones de los números a procedimientos algebraicos, dotándolos de características más generales, y a partir de los cuales logran realizar transformaciones de una ecuación en otras equivalentes que poco a poco se convierten en ecuaciones más sencillas que permiten despejar la cantidad desconocida y poder igualarla al valor numérico que cumple con las condiciones establecidas en una situación problema.
- Los estudiantes logran avances significativos en relación a la resolución de problemas en la medida que logra pasar de una situación problema escrita en lenguaje natural a otro sistema de representación como el algebraico, además se evidencia también el proceso inverso, donde a través de representaciones algebraicas y geométricas los estudiantes logran pasar al lenguaje natural, en

el cual proponen situaciones que se ajustan a las expresiones y a configuraciones geométricas y verbalizan los procedimientos aplicados en los procesos de solución de ecuaciones cuadráticas.

- Finalmente se manifiestan algunas dificultades respecto a la solución de las condiciones establecidas en una situación problema, debido a que la mayoría de los estudiantes llegan solamente hasta la solución de la ecuación asociada al problema, a pesar de que aplican operaciones y propiedades de forma correcta y calculan el valor se la cantidad desconocida, no encuentran los valores solicitados en la situación. Lo anterior se puede atribuir probablemente a la constante realización de actividades descontextualizadas en la escuela, donde solo se requiere de la aplicación de procedimientos para el cálculo de una cantidad desconocida, privando al estudiante de comprender el significado de la ecuación cuadrática.

Respecto al tercer objetivo específico, en el que se pretendía reconocer las ventajas y limitaciones en el trabajo con materiales manipulativos, como el Puzzle Algebraico, en la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática se puede concluir que:

- El material manipulativo Puzzle Algebraico crea un ambiente dinamizador que potencian el desarrollo de estrategias de solución en algunos casos de ecuaciones cuadráticas, ya que actúa como mediador en el paso de lo concreto a lo abstracto, posibilitando ejercitar procedimientos, y el reconocimiento de representaciones geométricas y algebraicas de ecuaciones cuadráticas en relación con el área de una superficie.
- El trabajo con el Puzzle algebraico permite a los estudiantes exteriorizar representaciones mentales a través de la manipulación de fichas que permiten elaborar configuraciones geométricas, y que contribuyen notablemente en el paso de una representación geométrica a una algebraica, donde se observa que los estudiantes realizan conversiones de la representación de un registro a otro, sin perder el significado de la representación inicial.

- El puzle algebraico contribuye notablemente en la identificación de expresiones equivalentes a partir de la relación entre el número de fichas utilizadas en una configuración cuadrada o rectangular y las dimensiones de los lados de dicha configuración.
- El Puzzle Algebraico juega un papel importante en la identificación de las condiciones de un problema, pues permite visualizar de mejor manera las cantidades conocidas y desconocidas y las relaciones entre estas cantidades, a través de representaciones geométricas que actúan como mediadores que permiten representar expresiones algebraicas relacionadas con una situación problema, contribuyendo de manera significativa en el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico.
- El material manipulativo necesita de un trabajo de identificación de reglas y características que se anteceda al desarrollo de actividades que movilicen algún concepto matemático, de esta manera prevenir el surgimiento de conflictos relacionados con la manipulación del material y que pueden generar mayores dificultades de tipo cognitivo.
- El Puzzle algebraico permite representar los casos sencillos en que puede presentarse la ecuación cuadrática, como situaciones problema relacionadas con áreas o superficies que puedan ser representadas con las fichas del material y que obedezcan las reglas de uso. No es posible representar situaciones de variación que permita establecer la relación entre el concepto de ecuación cuadrática y el de función cuadrática limitando la posibilidad de representar una ecuación cuadrática a través de una curva geométrica.
- Una de las limitaciones más evidentes del Puzzle Algebraico es el trabajo con expresiones con cantidades negativas, a pesar de que la manipulación de la fichas de color rojo permiten representar expresiones algebraicas negativas es muy arriesgado proponer situaciones problema con este tipo de expresiones, debido a que puede alimentar la falsa creencia de algunos estudiantes que x representa un valor positivo y $-x$ representa únicamente

un valor negativo. Debido a esto se hace la aclaración en la presentación del material de que este tipo de fichas se toman como representaciones correspondientes a la resta o la suma del opuesto de una expresión algebraica.

4.1. Reflexiones didácticas y recomendaciones

Las reflexiones que se presentan a continuación surgen del proceso de implementación y los análisis de resultados de la secuencia didáctica sobre la ecuación cuadrática, donde sobresale:

- Es importante crear un ambiente dinamizador entre los estudiantes y las actividades propuestas, donde cree la necesidad de resolver las situaciones problema que se plantean a través de consignas que vinculan contextos conocidos por los estudiantes.
- Es necesario la articulación de actividades en forma coherente que puedan desarrollar un aprendizaje integral, además de tener en cuenta diversas consignas que requieran del esfuerzo de los estudiantes para enfrentarse a situaciones problema cada vez más complejas.
- El diseño de propuestas de aula debe tener en cuenta diferentes enfoques teóricos de tipo curricular, matemático y didáctico que se puedan complementar entre sí en forma coherente para lograr aprendizajes significativos.
- Es importante tener en cuenta que los materiales manipulativos no movilizan, por si solos, conocimientos matemáticos, por lo cual se hace necesario la transformación adaptativa en el que se articule , con coherencia, el material manipulativo como un registro de representación semiótico para un objeto matemático dado, configurándose así como un registro de representación autosuficiente.
- El tiempo es un factor importante en la implementación de situaciones problema que integran materiales manipulativos, debido a que los estudiantes

deben realizar mayores reflexiones sobre las características y reglas de uso de material, por lo que es importante asignar un tiempo estimado de 90 minutos para cada situación en el que se puedan realizar dichas reflexiones y resolver la totalidad de las preguntas.

- Es importante tener en cuenta los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes, pues representan un saber que da significado a las actividades propuestas, y desde ese saber contribuyen a las reflexiones, permitiendo que el diseño e implementación de la secuencia didáctica fluya con naturalidad y los estudiantes se apropien de las situaciones que se plantean.
- Se deben involucrar actividades que permitan establecer la relación entre el concepto de ecuación cuadrática y el de función cuadrática y de esta manera realizar el salto a otro tipo de representación gráfica a través de la curva geométrica. Esto puede lograrse vinculando situaciones de variación que puedan representarse a través de programas tecnológicos como Geogebra.
- Es importante resaltar el papel del profesor en la implementación de la secuencia didáctica, debido a que moviliza las actividades mismas a través de las preguntas, orienta a los estudiantes, propone la reflexión sobre posibles conflictos cognitivos, etc.

Finalmente este trabajo se constituye un aporte a los profesores de la educación básica que se interesan por movilizar en el aula conceptos matemáticos en los grados superiores, mostrando la posibilidad de implementar materiales manipulativos en estos niveles de la escuela, dejando de lado los estigmas que hacen referencia a que este tipo de materiales solo movilizan conocimientos en los primeros niveles de educación y que pierden valor en los grados superiores. De esta manera se puede enriquecer las prácticas educativas que se llevan a cabo en el aula de clase a la vez que los estudiantes reciben la atención apropiada para alcanzar su aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

Amaya, T., López, A., Rambauth, G., & Soto, R. (2008). *Articulando estándares de competencias y lineamientos curriculares de matemáticas*. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

Amézquita, N., y Murillo, J (2007).*El laboratorio de Matemáticas como mediador en el estudio de la función lineal en la escuela.* Tesis de grado. Área de educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Cali, Colombia

Andrade, C (1998). Dificultades en el aprendizaje de la Noción de variación. Revista EMA, VOL. 3, Nº 3, 241-253

Arce, J. (1999). *Laboratorio de matemáticas*. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Bachelard, G. (1938). La formation de l´espritscientifique. Paris Vrin 1975

Ballén, J (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Tesis de Magister. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Barnett, R. (1978). *Álgebra y trigonometría*. México: McGraw - Hill.

Bednarz, N. Kieran, C. & Lee, L. (en prensa). *Aproximaciones al Álgebra*. Perspectivas para la investigación y enseñanza. Cap. 1. Traducción realizada en la universidad el valle, Área de Educación Matemática.

Brousseau, G. (1983). “Les obstaclesepissemoloqiques et les problemas en Mathematiques”. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4.2.

Cadenas, R. (2007). “*Carencias, Dificultades y Errores en los Conocimientos Matemáticos en alumnos del primer semestre de la Escuela de educación de la universidad de los Andes*”. http://revistaorbis.org.ve/6/6Art4.pdf [Consulta 19 Junio 2013]

Camargo, L & Otros. (2001). *Nuevo Alfa 8. Serie de Matemáticas con énfasis en competencias*. Bogotá: Grupo editorial Norma. pp. 67

Cerón, C & Gutiérrez, L. (2013). *La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos.*Tesis de Grado. Área de educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Caro, V. O´bonaga, E. & Pérez, J. (1995). *Matemática 8, Álgebra y Geometría.*Ingema Ediciones Ltda, Primera edición, pp, 377.

Covas, M &Bressan, A. (2011). *La enseñanza del álgebra y los modelos de área.*

Duval, R, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle.

Figueroa, J & Suescún, D. (2011). *Dificultades y errores que presentan los estudiantes de los grados décimos y undécimo de los colegios de Cali al resolver un problema de olimpiadas.* http://redalyc.org/articulo.oa?id=84922625030 [Consulta 10 Junio 2013]

Gálvez, G. (1994). *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Capítulo2. Editorial: Paidós Educar.

Gallardo, A. & Rojano, T., (1988). *Áreas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético - algebraico.* Recherches en didactique des mathématiques.

GRUPO DECA. (1992).Orientaciones Para El Diseño y Elaboración de Actividades de Aprendizaje y de Evaluación. PUBLICADO EN REVISTA AULA, Nº6, PÁGS.: 33-39

Guerrero, F. Sánchez, N. Lurduy, O. (2006). *La práctica Docente a partir del modelo DECA y la Teoria de las Situaciones Didácticas*. V Festival Internacional de Matemática.

Gonzales, L & Hurtado, C. (2010). *Significados del Signo Igual en la Resolución de Ecuaciones de Primer Grado*. Tesis de Grado. Área de educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Hernández, J., *Muñoz, M., Palarea, M., Ruano, R.,Socas, M. (2008). Materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria*, pp. 115-145

Kieran, C. &Filloy, Y. (1989). “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica”. Investigación y experiencias didácticas. University of London, Institute of Education, Inglaterra. Traducción de Luis Puig. Recuperado en http://ddd.uab.es/pub/ edlc/02124521v7n3p229.pdf

López, E (2008). *Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del colegio de ciencias y humanidades*. Tesis de Grado. Educación Media Superior en el campo de las matemáticas. Facultad de Estudios Superiores Acatlán. Universidad Nacional Autónoma de México.

Mata, L. E., Ramírez Arballo, M. G., Porcel, E. A., Siwert, P (2009). *Deficiencias en la transición de la aritmética al álgebra [En linea].* II Jornada de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 28 al 30 de octubre de 2009, La Plata. Un espacio para la reflexión y el intercambio de experiencias. Disponible en: http:/www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.608/ev.608.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Colombia, Santafé de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.*Colombia, Santafé de Bogotá.

Mink, D. (2010).*Strategies for Teaching Mathematics.* Huntington Beach: Shell Education. pp. 71

Palarea, M & Socas, M. (1994). *Algunos obstaculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraic*. I Seminario Nacional sobre lenguaje y matemática. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Piaget, J. (1969) *Psicología y Pedagogía*. (Ariel: Barcelona).

Pinzón, M, Vásquez, D & Otros. (2010). *Matemática Fundamental (con aplicaciones*). Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Pochulu, M. (2004). *“Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad.”* OEI Revista Iberoamericana de Educación. En línea http://www.rieoei.org/did_mat28.htm

Pólya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas.

Puig, L. (1998). *Cómo poner un problema en ecuaciones.* Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Socas, M. (2007) *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.*pp. 19-52

Valenzuela, M. (2012). *Uso de Materiales Didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile*. Trabajo final de Master. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Velasco, E. (2012). *Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas.* Tesis de grado.Escuela Universitaria de Magisterio. Universidad de Valladolid.

Zill, D &Dewar, J. (2000). *Álgebra y Trigonometría.* Mc Graw Hill. Segunda Edición revisada.

ANEXOS

Anexo 1

Situación 1, Actividad 1

COLEGIO TECNICO COMERCIAL DE BACHILLERATO HARGADON	**UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA**	Universidad del Valle

Nombre: Nathalia Morales

SITUACIÓN 1.

Lea atentamente el siguiente problema y realice las actividades propuestas.

Un apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho. ¿Cuáles son las medidas de las dimensiones del apartamento si su área es 105 m^2?

Actividad 1: Comprendo el problema

1. Escriba las cantidades o datos conocidos y los desconocidos del problema anterior.

   Datos conocidos.
   area 105 M^2

   Datos desconocid
   Dimenciono
   largo
   ancho.

2. Indique cuántos metros más tiene la medida del largo del apartamento en relación con la medida del ancho.

   Tiene 8 Metros Mas.

3. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 5 m. Encuentra la medida del largo.

   $5 + 8 = 13.$

4. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 6 m. Encuentra la medida de su largo.

   $6 + 8 = 14.$

Anexo 2

Situación 1, Actividad 1

5. Indique si las dimensiones del apartamento encontradas en los puntos 3 y 4, corresponden a las condiciones del problema (área del apartamento dada). Explique su respuesta.

No ninguna de las condiciones coinciden. Porque no tienen el mismo ancho. y no son equivalentes.

6. Complete la siguiente tabla de acuerdo a las condiciones del problema:

Medida del ancho del apartamento	4	5	6	7	8	9
Medida del largo del apartamento	12	13	14	15	16	17.
Área del apartamento	48.	65	84	105	128.	153.

a. De acuerdo a la tabla, ¿cuáles son las dimensiones del apartamento que cumplen "todas" las condiciones del problema?

Medida del ancho.= 7
Medida del largo.= 15.
Area del apartamento= 105.

7. Si x es la medida del ancho del apartamento, escriba una expresión que permita calcular la medida del largo del apartamento en función de x.

$X + y = $ Cargo.

Anexo 3

Situación 1, Actividad 2

	UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA	Universidad del Valle

Nombre: Nathalia Morales Molina

Actividad 2: Pongo el problema en ecuaciones

1. Teniendo en cuenta lo realizado hasta el momento, complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico
Medida del ancho del apartamento	x
Medida del largo del apartamento	x + 8
Área del apartamento	X x Y
Valor del área del apartamento	105

2. Lina afirma que: "la expresión que permite calcular la medida del ancho del apartamento es $x.(x+8) = 105$".

   ¿Es válida esta afirmación? Justifique su respuesta.

Si es valida porque esta expresando la base x altura.

3. Encuentre una ecuación equivalente a la dada por Lina aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

$$x.(x+8) = 105$$

$x^2 + 8x = 105$

Anexo 4

Situación 1, Actividad 2

Las expresiones obtenidas en el punto 3:

$$x^2 + 8x = 105 \quad o \quad x^2 + 8x - 105 = 0$$

Se conocen como ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.

En términos generales una ecuación cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los reales y $a \neq 0$.

4. De acuerdo a lo anterior señale cuales son los coeficientes a, b y c de la ecuación obtenida en el punto 3.

coeficiente a = 1
coeficiente b = 8
coeficiente c = -105

5. De dos ejemplos diferentes de ecuaciones cuadráticas.

$x^2 + 2x + 3 = 0.$

$5^2 + 3x + 4 = 0.$

Anexo 5

Situación 1, Actividad 3

COLEGIO TÉCNICO COMERCIAL DE BACHILLERATO HARGADON	UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA	Universidad del Valle

Nombre: Nathalia Morales

Actividad 3: Solucionando el problema

Samuel tomó la ecuación que dio Lina para resolver el problema del apartamento, y encuentra la solución de éste hallando el valor de x que corresponde a la medida del ancho del apartamento, así:

$x^2 + 8x = 105$	
$x^2 + 8x - 105 = 105 - 105$	Paso 1
$x^2 + 8x - 105 = 0$	Paso 2
$(x + 15)(x - 7) = 0$	Paso 3
$x + 15 = 0$ ó $x - 7 = 0$	Paso 4
$x + 15 - 15 = 0 - 15$ ó $x - 7 + 7 = 0 + 7$	Paso 5
$x = -15$ ó $x = 7$	Paso 6

1. Ayude a Samuel a determinar cuál de los dos valores de x corresponde a la medida del ancho del apartamento y explique su respuesta.

   x = 7 Porque no puede ser negativo.

2. Indique que operación realizó Samuel en el paso 1 del problema y por qué se puede hacer esto.

   el realizo. una resta

Anexo 6

Situación 1, Actividad 3

3. Samuel afirma que para ir del paso 2 al paso 3, él factorizó la expresión $x^2 + 8x - 105 = 0$. ¿Qué significa esto?

el busco un numero que somado der los x multiplicado 8.

4. Explique por qué para pasar del paso 3 al 4 se debe aplicar la siguiente propiedad:

$$\boxed{Si\ a.b = 0, donde\ a, b \in R\ \rightarrow a = 0\ ó\ b = 0}$$

Porque si al sumarlos o multipli debe ser 0.

5. Aplique el proceso utilizado por Samuel para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 6x + 8 = 0$

b. $x^2 - 5x = 0$

- $x^2 - 6x + 8 = 0.$

$(x - 4)(x - 2) = 0.$

$x - 4 = 0$ ó $x - 2 = 0.$

$x - 4 - 4 = 0 - 4$ ó $x - 2 + 2 = 0 + 2.$

$x = -4$ ó $x = 2.$

- $x^2 - 5x = 0$

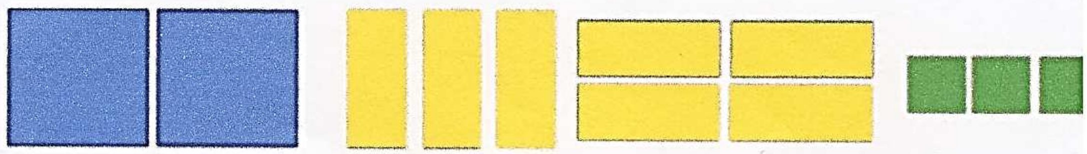
$x(x - 5) = 0.$

Anexo7

Situación 2, Actividad 1

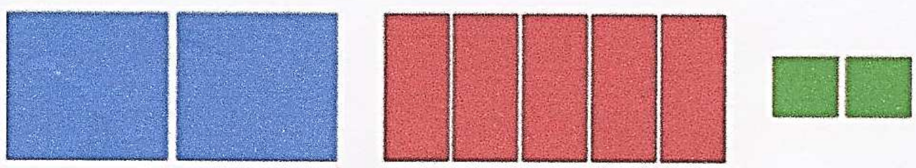
1. Escriba la expresión algebraica que permite calcular el área total representada en cada conjunto de fichas.

a)



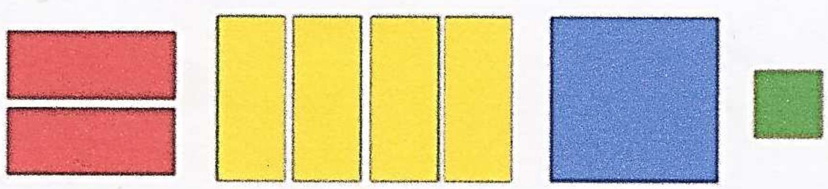
$2x^2 + 3x + 4x + 3$

b)



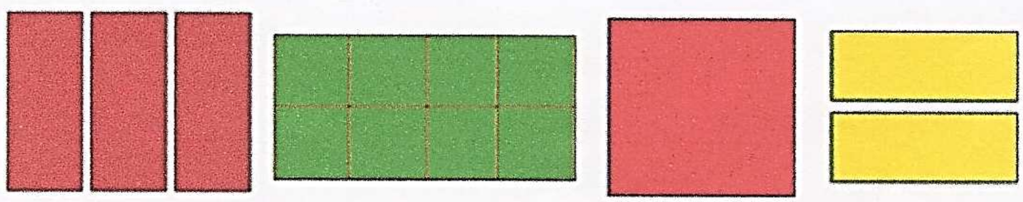
$2x^2 + 5x + 2$

c)



$-2x^2 + 4x + 1x + 1$

d)



$-3x^2 + 8x - 1x + 2.$

Anexo 8

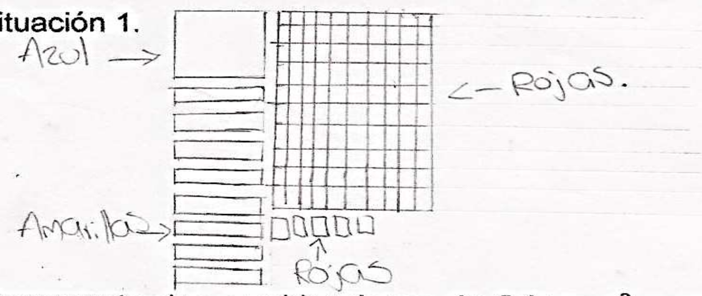
Situación 2, Actividad 1

2. Compare estas expresiones con la definición de ecuación cuadrática presente en la situación 1. Escriba una conclusión.

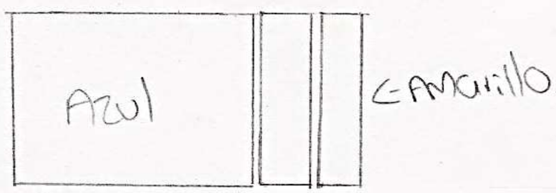
Que son muy similares, pero el resultado no va a dar Cero.

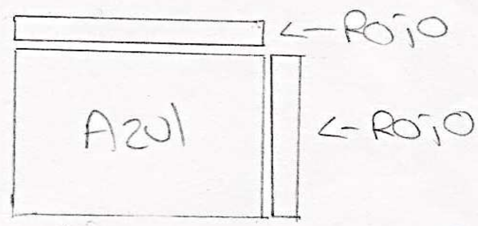
3. Utilizando las fichas del Puzzle Algebraico:

   a) Represente la expresión obtenida en el punto 3 de la actividad 2 de la situación 1.

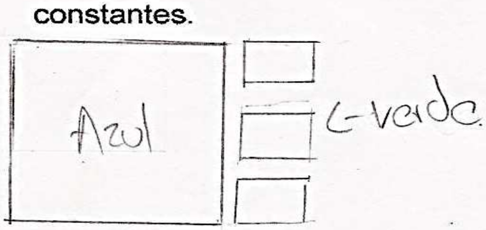


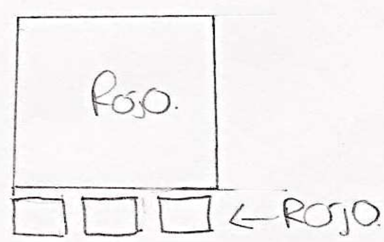
   b) Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos lineales.





   c) Represente dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos constantes.



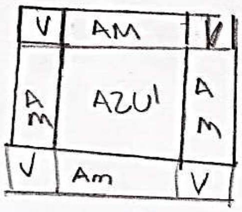


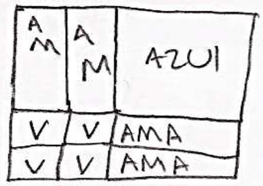
Todas las expresiones obtenidas en los puntos 3 y 4 de esta situación son expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los números reales (R) $y\ a \neq 0$.

Anexo 9

Situación 2, Actividad 2

a) Dibuja por lo menos dos representaciones diferentes





b) Escribe una expresión algebraica para cada representación

$2x^2 \times 4x - 1$ $\quad$ $2x^2 \times 4x - 1$

c) Escriba la expresión que representa las dimensiones de cada cuadrado

$\frac{1+1+x}{1+x^2} = 2x \times 1x^2$ $\quad$ $\frac{4x^2+4x+x}{4x+4x^2+x}$

2 Indique la relación que existe entre las expresiones del área de cada cuadrado representado en el punto anterior y las expresiones de las dimensiones de los cuadrados. Escriba esta relación simbólicamente y explique.

Que la expresion $2x^2+4x-1$ y en la otra expresion nos
dar cuenta de cuanto es la base y la altura

3 El albañil se da cuenta que el área de la pared es de 25 dm². Encuentra en la expresión que halló en el inciso c del punto 1, el valor de las dimensiones de todas las baldosas.

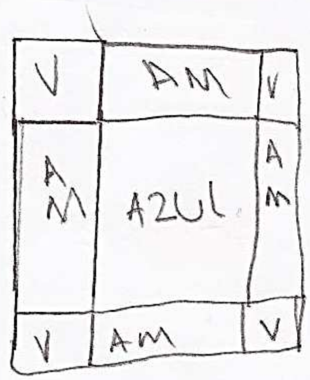
$\frac{4x^2+4x+x}{2x \times 1x^2} =$

Anexo 10

Situación 2, Actividad 2

4. Si Samuel tiene la expresión $x^2 + 4x + 4$, que permite calcular las dimensiones de las baldosas cuando el área de la pared mide 16 dm^2

a) Utiliza el Puzzle Algebraico y ayuda a Samuel a calcular esos valores



b) Explica como

Por la expresion de la situacion es donde puede encontra la respuesta

Anexo 11

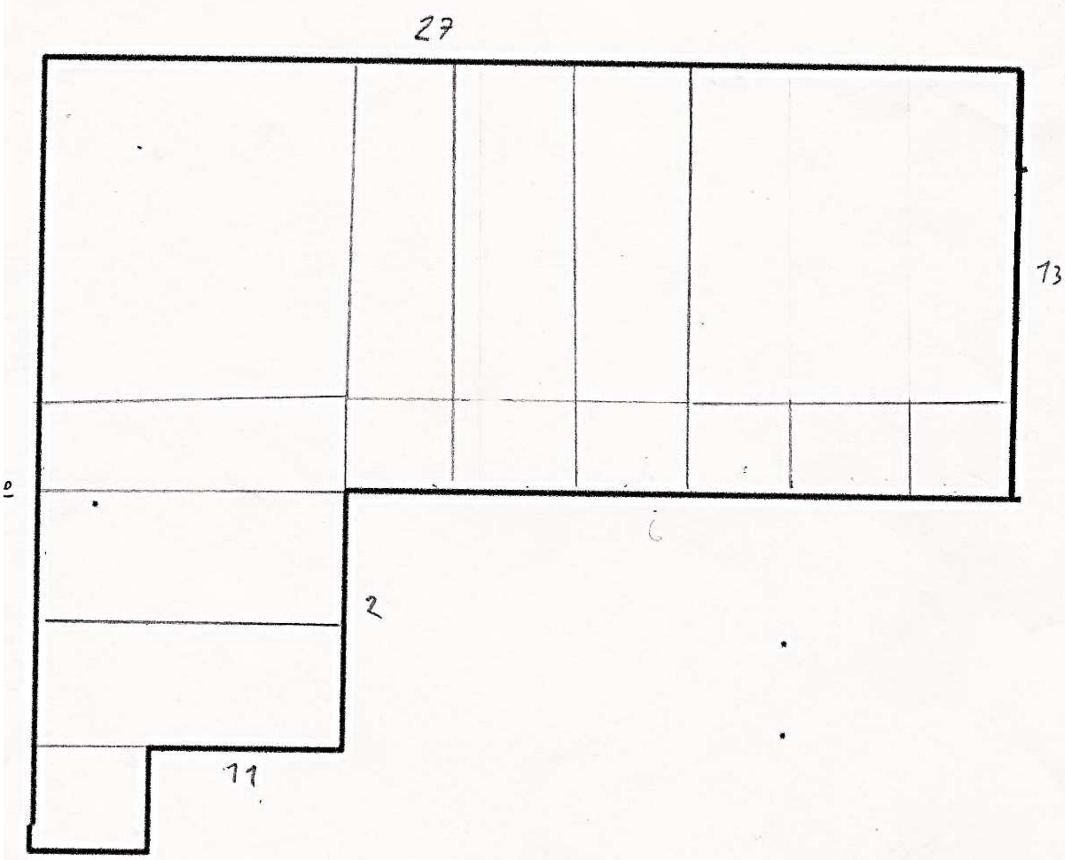
Situación 2, Actividad 3

	UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA	Universidad del Valle

Nombre: Luis Alfonso Manzano

Actividad 3: Validando lo aprendido

El albañil debe enchapar la siguiente superficie de pared, cuya área es de 367cm^2, con las baldosas, sin necesidad de cortar ninguna.



Anexo 12

Situación 2, Actividad 3

1. Indique cuántas baldosas tipo a, tipo b y tipo c, se necesita para enchapar la pared y cómo se acomodarían.

$a = 2$
$b = 6$
$c = 7$

2. Escriba cuál es la ecuación que corresponde al área de la pared enchapada con las baldosas.

$2x^2 + 6x + 7$

3. Determine las dimensiones de cada una de las baldosas de acuerdo con la ecuación del punto 2, utilizando el método de Samuel en la situación 1.

$2x^2 + 6x + 7 = 367$
$2x^2 + 6x + 7 - 367 = 367 - 367$
$2x^2 + 6x - 360 = 0$
$x^2 + 3x - 180 = 0$
$(x - 12)(x + 15) = 0$
$x - 12 = 0$ ó $x + 15 = 0$
$x - 12 + 12 = 12$ ó $x + 15 - 15 = -15$
$x = 12$ ó $x = -15$

4. Determine cuál es la medida del perímetro de la pared

$P = 27 + 13 + 2 + 11 + 1 = 72$

Ya que el perímetro es la suma de todos los lados

Anexo 13

Situación 3, Actividad 1

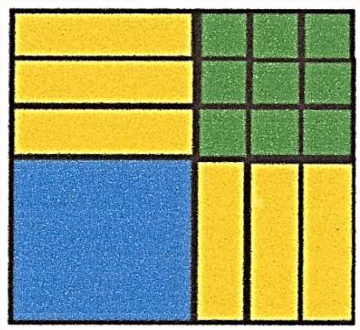
UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Universidad del Valle

Nombre: Jimena Yela

SITUACIÓN 3

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas, que tienen las mismas características de las baldosas de la actividad 2, situación 2, que debe emplear en una pared de 144 cm^2 de área, utilizando la siguiente configuración:



Actividad 1: De las representaciones a la ecuación cuadrática

1. Teniendo en cuenta la configuración de la pared complete la siguiente tabla:

Lenguaje Natural	Lenguaje algebraico
Medida del ancho de la pared	$x+3$
Medida del largo de la pared	$x+3$
Área de la pared	$(x+3)^2$
Valor del área de la pared	144 cm^2

Anexo 14

Situación 3, Actividad 1

2. Escriba la ecuación que permite calcular el valor de las dimensiones de los lados, según la tabla anterior.

$(X+3)^2 = 144$

3. Samuel afirma que para encontrar dimensiones de las baldosas, se debe hallar el valor de x de la expresión $(x+3)^2 = 144$. Explica la valides de la afirmación que hace Samuel.

Si, Porque "X" representa Desconocidos en la Expresion.

4. Para encontrar ese valor, Samuel propone el siguiente procedimiento:

$(x+3)^2 = 144$	
$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{144}$	Paso 1
$x + 3 = 12$	Paso 2
$x + 3 - 3 = 12 - 3$	Paso 3
$x = 9$	Paso 4

a) Explica lo que realizó Samuel en el paso 1.

saco Raiz, y lo hizo en Ambas partes para continuar con la igualdad

b) Indica lo que realizó Samuel en el paso 3.

Igual, Resto el 3 en Ambos partes para continuar con la igualdad

Anexo 15

Situación 3, Actividad 1

5. Teniendo el valor de x, encuentra las dimensiones de cada baldosa y su área.

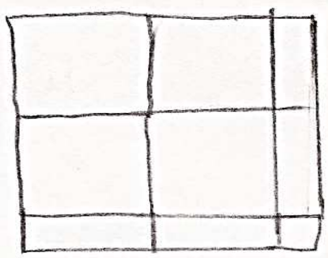
x · x: $= x \cdot x = 9 \cdot 9 = 81$

x · 1: $= x \cdot 1 = 9 \cdot 1 = 9$

$= 1 \cdot 1 = 1$

6. Lina decide utilizar 4 baldosas tipo a, 4 baldosas tipo b y solo una baldosa tipo c, para enchapar una pared cuadrada de área de 169 cm^2.

a) Utilizando el Puzzle algebraico y teniendo en cuenta sus reglas, dibuja una representación de la pared enchapada.



b) Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de los lados de las baldosas.

$(2x+1)^2$

c) Aplica el método utilizado por Samuel en el punto 4 de esta situación, para encontrar las dimensiones de las baldosas.

$(2x+1)^2 = 169$

$\sqrt{(2x+1)^2} = \sqrt{169}$

$2x+1 = 13$

$2x+1-1 = 13-1$

$2x = \frac{12}{2}$

$x = 6$

Anexo 16

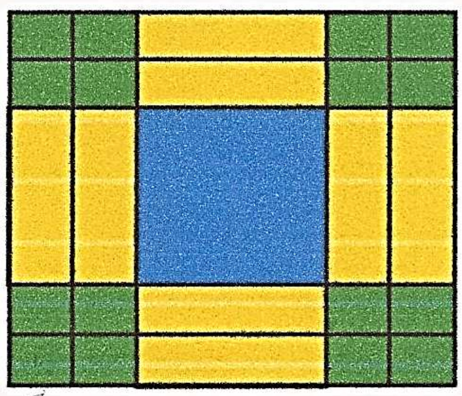
Situación 3, Actividad 2

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Nombre: Jhoan Stiven lopez

Actividad 2: Diferenciando métodos

Dada la siguiente configuración de baldosas, las cuales cumplen con las características mencionadas en la actividad 1 de la situación 3, resuelve:



1. Plantea un problema que se pueda representar mediante la configuración anterior, asignándole un área de 400 cm^2.

   Simón nesesita saber cuanto mide el Ancho y largo de su cuarto sabiendo que su area es de 400 cm^2.

2. Escriba la ecuación que permitaresolver el problema que propuso.

   $X^2+8x+16.$

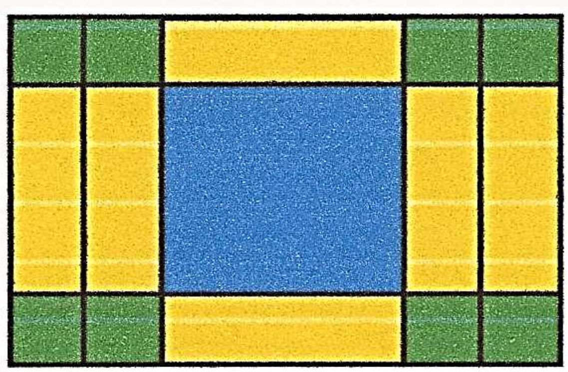
Anexo 17

Situación 3, Actividad 2

3. Encuentra las dimensiones de las baldosas empleando el método 1 que utilizó Samuel en la situación 1 y el método 2 que utilizó en el punto 4 de esta situación.

Método 1	Método 2
$x^2+8x+16=400$ $x^2+8x+16-400=400-400$ $x^2+8x+16-400=0.$ $x^2+8x-384=0$ $x=16$ ó $x=24.$	$(x+4)^2=400$ $\sqrt{(x+4)^2}=\sqrt{400}$ $x+4=20.$ $x+4-4=20-4$ $x=16.$

El albañil debe enchapar el mesón de la cocina de área 224 cm^2, de acuerdo con la siguiente configuración:



4. Escriba la ecuación que permite calcular las dimensiones de las baldosas.

$x^2+8+6x=224.$

Anexo 18

Situación 3, Actividad 2

5. Halle las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos empleados por Samuel.

Metodo 1.

$$x^2 + 8 + 6x = 224.$$

$$x^2 + 8 + 6x - 224 = 224 - 224.$$

$$x^2 + 6x - 216 = 0.$$

$$(x+18).(x-12)$$

$$x + 18 = 0 \quad ó \quad x - 12 = 0.$$

$$x + 18 - 18 = -18 \quad ó \quad x - 12 + 12 = 12$$

$$x = -18 \quad ó \quad x = 12.$$

Anexo 19

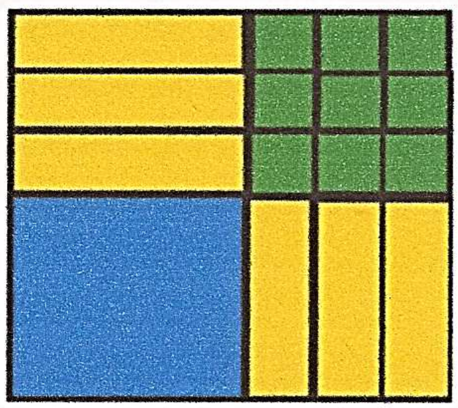
Situación 3, Actividad 3

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Nombre: Duvan Esteban Mosquera M.

Actividad 3: Validando los métodos

Lina desea saber cuáles deben ser las dimensiones de las baldosas que debe emplear en otras paredes utilizando solamente la siguiente configuración.



1. Escriba la expresión que representa la medida del área de la pared.

$(x+3)^2$

2. Ayude a Lina a encontrar los valores de las dimensiones de las baldosas y las áreas que pueden enchapar, llenando la siguiente tabla:

a)

Medida del lado	1	3	5	7	9	2	10
Área de la pared	16	36	64	100	144	25	169

Anexo 20

Situación 3, Actividad 3

b) Indica como encontraste cada valor.

sacandole raiz a el area de la pared. y en la otra se le eleva a la medida del lo

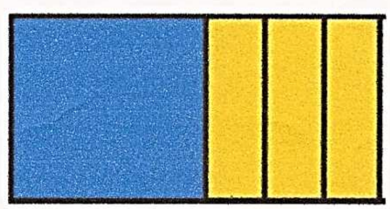
3. Indique la relación que existe entre la expresión del punto 1 y los valores encontrados en la tabla del punto 2. Escriba esta relación simbólicamente y explique.

con $(x+3)^2$ se hayo el area

4. Si el área de la pared es de 256 dm^2, determine los valores de las dimensiones y las áreas de cada baldosa.

13 cm.

5. Samuel se encuentra con la siguiente configuración de baldosas la cual cubre una pared de área 12 dm^2 :



a) Escribe la ecuación cuadrática que representa este problema.

$x^2+3x=12$

$x^2+3x-12=0$

Anexo 21

Situación 3, Actividad 3

b) Determine si es posible calcular las dimensiones de las baldosas utilizando alguno de los métodos trabajados anteriormente. Explique su respuesta.

No con ninguno de los 2 metodos porque hay que tener el metodo lineal.

Una forma general de resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, es a partir de la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a es el coeficiente de x^2, b es el coeficiente lineal y c es el término independiente.

c) Escribe los valores de los coeficientes de la ecuación del literal a.

$a = 1$
$b = 3$
$c = -12$

d) Aplique la formula cuadrática para determinar los valores de las dimensiones de las baldosas.

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} \qquad X = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{2}$$

6. Explique en qué casos se pueden aplicar cada uno de los métodos trabajados en esta situación.

Metodo 1
operaciones cuadraticas
Metodo 2
operaciones elevadas
Metodo 3