REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 2, 127-170

UNA ORGANIZACIÓN DE LOS PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

VICENÇ FONT

En nuestra opinión, los diversos programas de investigación que se han propuesto en la Didáctica de las Matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) una ontología general, 2) una epistemología general, 3) una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas y 6) una metodología de investigación. En este trabajo analizamos el posicionamiento sobre algunos de estos seis puntos de algunos de los principales programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico. Adicionalmente, presentamos algunos intentos de síntesis entre enfoques.

INTRODUCCIÓN

La Didáctica de las Matemáticas, entendida como disciplina científica, tiene en la actualidad una posición consolidada en muchos países. Prueba de ello son los departamentos universitarios de Didáctica de las Matemáticas, las tesis de doctorado defendidas sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los proyectos de investigación financiados con fondos públicos, la constitución de sociedades de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, la existencia de institutos de investigación específicos, la publicación de revistas de investigación, la realización periódica de congresos internacionales, etc.

Esta consolidación convive con una gran variedad de marcos teóricos y metodológicos. Con relación a los métodos de investigación se ha pasado del predominio de un enfoque psicoestadístico en la década de los 70 y parte de los 80, a la proliferación de métodos en las investigaciones actuales. Sin que el enfoque psicológico haya perdido peso específico, se están desarrollando también investigaciones dentro de enfoques diversos como el interpretativo, el etnográfico, el antropológico, el crítico, etc.

Cada uno de estos enfoques hace su aporte a la investigación. Por este motivo, hay autores que defienden el uso de una variedad de enfoques y métodos en la investigación en Didáctica de las Matemáticas, considerando esta situación como beneficiosa, dada la parcialidad de los mismos. Pero esto origina una fuerte confusión entre las diversas comunidades de investigadores, haciendo a menudo improductivos los esfuerzos. Según Godino (2000a) la variedad de enfoques, teorías y métodos está reclamando la realización de investigaciones que pongan un cierto orden y estructura en el panorama del componente científico de la Didáctica de las Matemáticas. En esta dirección, durante los últimos veinte años, un cierto número de investigadores han estado reflexionando sobre las características, problemas, métodos y resultados de la Didáctica de las Matemáticas. Una preocupación central, al menos para una parte de estos investigadores, ha sido la clarificación de la propia naturaleza de las matemáticas, realizando investigaciones más bien propias de la filosofía de las matemáticas. Otra preocupación, ha llevado a algunos investigadores a posicionarse en la controversia explicación versus comprensión que ha sacudido a las ciencias sociales. Esta controversia se relaciona con el problema de si la construcción teórica es intrínsecamente un mismo género de empresa tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales. En esta polémica la noción de significado ocupa un papel central.

En nuestra opinión, los diversos enfoques que se han propuesto en la Didáctica de las Matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos:

1) Una *ontologí*a general: una teoría de la existencia relativa a la consideración (status) del mundo y de lo que lo habita.

2) Una *epistemología* general que comprende:

    a. Una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento subjetivo.

    b. Una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento objetivo.

    c. Una teoría del significado y de la verdad, implicada por las teorías sobre el conocimiento subjetivo y el objetivo.

3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas.

4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza, que comprende:

    a. Una teoría general sobre el aprendizaje (cómo se forma el conocimiento personal).

   b. Una teoría específica sobre el aprendizaje de las matemáticas (cómo se forma el conocimiento matemático personal).
   c. Una teoría de la enseñanza (los medios para facilitar el aprendizaje).
   d. Una teoría de la enseñanza de las matemáticas (los medios para facilitar el aprendizaje de las matemáticas).
5) Una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas.
6) Una metodología de investigación.

Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global (numerales 1 y 2), si problematiza y se posiciona sobre la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semilocal (numeral 3), y si sólo se posiciona en los últimos tres numerales hablaremos de programa local. Esta clasificación desarrolla la propuesta por Ernest (1994).

En este trabajo pretendemos comentar el posicionamiento de algunos de los principales programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas sobre algunos de los seis numerales de la lista anterior.

EL ENFOQUE COGNITIVO

Para este enfoque, trataremos aspectos relativos a: su objeto de investigación, sus ideas respecto del aprendizaje y dos de sus líneas de investigación más prominentes (*Pensamiento matemático avanzado* y *Teoría de campos conceptuales*). Luego presentaremos una visión global del enfoque respecto de los seis aspectos explicitados en la introducción.

Acerca del objeto de investigación

El principal foco de atención de las investigaciones de tipo cognitivo es el individuo; sus elementos de análisis (v.g., aprendizaje significativo, representaciones mentales, valores, roles, actitudes, motivaciones, etc.) son importados de la psicología. En un primer momento las investigaciones cognitivas se centraron en el aprendizaje del alumno para posteriormente ampliar su campo de investigación al pensamiento del profesor. De esta manera, al intentar explicar la complejidad del proceso de enseñanza–aprendizaje teniendo en cuenta también aspectos relacionados con el profesor (v.g., su conocimiento matemático, su punto de vista sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje, sus representaciones, actitudes, valores, etc.) se amplió la problemática didáctica. A pesar de esta ampliación del campo de investigación, el proceso de enseñanza–aprendizaje se considera a partir de propiedades del alumno o del profesor tales como representaciones, valores, etc. La totalidad (profesor y alumno interactuando) es un montón sumatorio más que una totalidad diferente de la suma de sus partes. Estos dos temas de investigación, que se pueden considerar el punto de vista clásico en la Didáctica de las Matemáticas, tienen por objeto primario de sus investigaciones las representaciones mentales de los alumnos y de los profesores. Para esta didáctica clásica aquello que es problemático es únicamente el pensamiento matemático del alumno (o del profesor) y cuando estudia este objeto, lo hace sin cuestionarse ni reinterpretar los conocimientos (psicológicos, pedagógicos, matemáticos, etc.) que utiliza para llevar a término este estudio.

Este tipo de estudios es cuestionado tanto por las últimas versiones positivistas (teoría antropológica y teoría de las situaciones didácticas), como por partidarios de la teoría crítica y —más en general— por todos los partidarios de considerar la dimensión social en el proceso de enseñanza–aprendizaje. Una de las críticas más importantes se basa en el hecho de que la tradición psicologista no tiene suficientemente en cuenta el aspecto social. El cambio hacia lo social en la investigación en Didáctica de las Matemáticas está principalmente asociado con el ofrecimiento de "teorías que conciben la creación de significado, el pensamiento y el razonamiento como productos de una actividad social" (Lerman, 2000a, p. 23). Las teorías actuales sobre la naturaleza de las matemáticas y de la educación matemática reemplazan una visión básicamente individualista del proceso de aprendizaje matemático, por una visión que enmarca lo individual en una institución social, sin la cual no podría haber aprendizaje.

Las críticas a las investigaciones de tipo psicológico, realizadas desde el punto de vista interpretativo o desde la teoría crítica, se basan en que la afirmación "las acciones humanas tienen significado", implica muchas más cosas que procesos mentales ocultos en las personas, ya que esta afirmación requiere tener presente el contexto social dentro del cual adquieren sentido estas acciones. Desde la teoría crítica el desacuerdo con este tipo de investigación se formula en los siguientes términos:

> [...] Además han limitado su estudio al ámbito de lo individual y, por lo tanto, han perdido cualquier sentido de las estructuras sociales, de raza, de género y de clase dentro de las cuales se constituyen los individuos. (Valero, 2000, p. 2)

Las limitaciones del cognitivismo para tratar las situaciones humanas de interacción son asumidas en parte por destacados cognitivistas:

> Gran parte del estudio de los procesos cognitivos ha sido el estudio de la persona aislada […] Por lo que sé, poco se ha hecho […] para examinar los procesos cognitivos del individuo cuando se emplean dentro de situaciones interactivas. Pero, debido a que el modo normal de funcionamiento del ser humano es interactuar, los estudios de memoria, lenguaje, resolución de problemas y toma de decisiones llevados a cabo individualmente tan sólo tratan parte de los mecanismos de la cognición humana. (Norman, 1987, p. 334)

La crítica que realiza la teoría de las situaciones o la teoría antropológica, aunque en algún caso también destaca el olvido del aspecto social, se centra fundamentalmente en el olvido de *lo matemático* entre las causas que este tipo de investigaciones contempla.

Acerca del aprendizaje

En el enfoque psicológico se entiende que el aprendizaje es significativo cuando el nuevo contenido se integra en un esquema cognitivo ya existente en la mente del sujeto. Entre los diferentes programas cognitivos de tipo general se destaca el *procesamiento de la información*. Este programa de investigación se basa en la aceptación de la analogía entre el funcionamiento de la mente humana y el funcionamiento de un computador, y se ha centrado, fundamentalmente, en el estudio de la memoria. Concretamente, analiza cómo se organiza nuestra representación proposicional en la memoria a largo plazo. Para realizar este estudio se han propuesto dos representaciones hipotéticas sobre la manera de organizar en la memoria nuestro conocimiento proposicional: las *redes semánticas* y la teoría de los *esquemas*.

Las redes semánticas son representaciones hipotéticas de nuestras estructuras de conocimiento que permiten explicar las reglas de uso de los conceptos y las relaciones entre ellas. Por esto son útiles para estudiar al mismo tiempo los procedimientos y sus principios subyacentes. Los nódulos y las relaciones son las partes fundamentales de la red, la cual puede contener muchas afirmaciones, cada una de ellas en la forma nódulo–relación–nódulo. Actualmente se ha pasado de las redes a unidades de conocimiento más extensas: los esquemas. Los esquemas han tenido una notable aceptación y han sido usados en diversas áreas de investigación, pero el prototipo entre las diversas teorías de los esquemas es la teoría proposicional desarrollada por Norman, Rumelhart y sus colaboradores (1975), la cual permite explicar al mismo tiempo el *saber qué* y el *saber cómo*.

Dos líneas de investigación

El enfoque cognitivo ha sido asumido por muchas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, las cuales se han propuesto investigar los esquemas mentales de los alumnos o de los profesores. Si bien dentro de este enfoque hay muchas líneas de investigación, se destacan, por una parte, la línea de investigación *Pensamiento matemático avanzado* en la que sobresalen la *Teoría APOS* (acción, proceso, objeto y esquema) y la *Teoría de la definición del concepto y la imagen del concepto* y, por otra parte, la *Teoría de los campos conceptuales.*

Pensamiento matemático avanzado

Mientras los psicólogos cognitivistas discutían cuáles eran los elementos contenidos en los esquemas archivados en la memoria de largo plazo, dentro del campo del pensamiento matemático avanzado se formuló una propuesta de esquema que tiene unas características propias. Vinner (1991) considera que cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, algo es evocado en nuestra memoria. Aquello que evocamos no es el *concept definition* sino el *concept image*[1] (Tall y Vinner, 1981). Vinner (1991, p. 68) considera que:

> La imagen conceptual es algo no–verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que éste tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. Aparecen en una fase posterior. Por ejemplo, cuando escuchamos la palabra “mesa”, una figura de una cierta mesa puede evocarse en nuestra mente […] Cuando escuchas la palabra “función”, por otra parte, puedes evocar la expresión “$y = f(x)$”, puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como $y = x^2$ o $y = \text{sen}\, x$, $y = \ln x$, etc.

Vinner postula la existencia de dos celdas diferentes en nuestra estructura cognitiva; una celda es para la definición del concepto y la otra es para la imagen conceptual. Para él, puede haber alguna interacción entre las dos celdas, aunque también se pueden formar de manera independiente. Además,

1. En este artículo hemos traducido los términos “concept definition” y “concept image”, acuñados por Vinner, como “definición del concepto” e “imagen conceptual”, respectivamente.

considera que a la definición del libro le corresponde una definición personal, mientras que los ejemplos y símbolos del libro generan sus imágenes mentales respectivas. Estas imágenes mentales son consideradas los elementos que forman la imagen conceptual, junto con todas las propiedades y procedimientos que caracterizan el concepto (Tall y Vinner, 1981).

Otra característica en la propuesta de Vinner es el papel secundario que juega el contexto. Si bien en la propuesta de imagen conceptual de Vinner se tiene en cuenta la importancia del contexto, porque considera que según el contexto se evoca una parte u otra de la imagen conceptual (Vinner, 1991; Tall y Vinner, 1981), éste no tiene el papel central que le dan otras propuestas.

La propuesta formulada por Vinner y Tall de distinguir entre la imagen conceptual y la definición del concepto ha tenido una fuerte resonancia entre quienes investigan sobre el pensamiento matemático avanzado. Durante los años 80 y 90 se han desarrollado muchas investigaciones que han intentado estudiar la estructura de la imagen conceptual de los alumnos (o de los profesores) para diferentes conceptos. Uno de los proyectos que más ha trabajado en esta dirección ha sido el proyecto *Procesos de pensamiento matemático avanzado* desarrollado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Las investigaciones del grupo de la UAB (Azcárate, 1990, 1992, 1995, 1997; Delgado, 1998; Moreno y Azcárate, 1997; Moreno, 2001; Romero, 1997) han desarrollado y enriquecido tanto la manera de entender la imagen conceptual y la definición del concepto, que podríamos decir que su propuesta de imagen conceptual es considerablemente diferente de la propuesta inicial formulada por Vinner (1991). Para el grupo de la UAB: la investigación está centrada sobre la imagen conceptual y no sobre la definición del concepto; éstas no son celdas diferentes en la memoria de las personas, y consideran la definición del concepto como el concepto institucional; la idea de *esquema conceptual* es una evolución de la idea de imagen conceptual; existe una mayor preocupación por clarificar cuáles son los componentes de los esquemas conceptuales; y, hay una aceptación implícita de la importancia del contexto.

De otra parte, en el campo del pensamiento matemático avanzado se han realizado diferentes investigaciones en torno a la idea de que las representaciones mentales no se pueden considerar desligadas del proceso de abstracción y, más en general, de los procesos cognitivos movilizados por los contenidos matemáticos. Dubinsky (1991, 1996) ha intentado aplicar, después de una revisión, algunas de las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La principal dificultad que ha encontrado en este intento ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Dubinsky (1996) considera que un problema importante para la Didáctica de las Matemáticas consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los computadores se pueden utilizar para este propósito. Adicionalmente, considera que, para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular una hipótesis mentalista, ya que considera que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones. (pp. 32-33)

Para Dubinsky una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo. Un individuo que solamente puede entender una transformación como una acción, sólo puede realizarla reaccionando a indicaciones externas que le proporcionen detalles precisos sobre los pasos que tiene que hacer. Cuando una acción se repite y el alumno puede reflexionar sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla, y hasta puede llegar a invertir los pasos. A diferencia de la acción, el individuo percibe el proceso como algo interno y bajo su control, en lugar de ser una respuesta a indicaciones externas. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho estas transformaciones, está pensando en este proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el transcurso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular el objeto y volver al proceso del cual se obtuvo a fin de usar sus propiedades y manipularlo. Por último los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas.

Teoría de los campos conceptuales

La teoría de los campos conceptuales utiliza las nociones cognitivas de *esquema* e *invariante operatorio*. Para Vergnaud (1990) un esquema es la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas. Considera que es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos–en–acto y los teoremas–en–acto constituyentes de los esquemas operatorios. A su vez considera que los esquemas son los elementos que sirven de base a las competencias matemáticas. Un esquema es una totalidad organizada que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Comporta los siguientes componentes: (i) invariantes operatorios (conceptos–en–acto y teoremas–en–acto) que dirigen el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación y la recogida de información sobre la situación a tratar; (ii) anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales; (iii) reglas de acción del tipo si … entonces … que permiten generar la serie de acciones del sujeto; (iv) inferencias (o razonamientos) que permiten *calcular* las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Desde esta perspectiva un esquema está asociado a una clase de situaciones, entendidas como tareas, mientras que los conceptos son considerados como un conjunto de invariantes utilizables en la acción y el sentido de una determinada tarea, significante, situación o problema, es el conjunto de esquemas que dichos invariantes pueden evocar en el sujeto individual.

Vergnaud entiende por campo conceptual un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar un conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, estrechamente interconectados. Se trata de una noción que surge por el interés de extender los estudios generales de Piaget sobre la psicogénesis de los conocimientos al problema de la adquisición y el desarrollo de conocimientos y destrezas específicas, en particular de conocimientos y destrezas matemáticas. Para Vergnaud, esta noción resulta necesaria porque: (i) es difícil estudiar separadamente la adquisición de conceptos interconectados, dependientes entre sí desde el punto de vista matemático y que aparecen simultáneamente en los problemas más elementales; (ii) desde el punto de vista del desarrollo y de la evolución de los conocimientos en un largo período de tiempo, es conveniente establecer dominios amplios de conocimientos relacionados entre sí, que cubran una amplia variedad de situaciones y que admitan diferentes niveles de análisis; y, (iii) en el dominio de una misma clase de problemas se mezclan procedimientos, concepciones y representaciones simbólicas diferentes que hacen posible la existencia de distintos niveles o grados de dominio sobre subclases de problemas y que permiten estudiar la evolución de los conocimientos.

Visión global

Aun a pesar de ser muy reduccionistas y no recoger toda la amplitud y matices de la investigación realizada desde el enfoque cognitivo, podemos decir que en su mayoría las investigaciones realizadas desde el punto de vista cognitivo se presentan como un paradigma local. Esto es, aceptan la epistemología tradicional relativa al conocimiento y sólo intentan explicar las representaciones del conocimiento de los individuos. No problematizan, por tanto, ni la ontología ni la epistemología del realismo científico. Implícitamente se posicionan en un marco desde el cual no problematizan la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado; su epistemología es el representacionismo, su teoría de la *verdad* es la de *correspondencia* y su teoría sobre el significado es de tipo referencial. La naturaleza de las matemáticas es un tema que no suelen problematizar y cuando lo hacen se inclinan a considerar que éstas son una construcción que es el resultado de la experiencia humana, pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas. Los aspectos en los que explícitamente se posicionan son los siguientes: adoptan un punto de vista constructivista casi trivial con relación a la génesis del conocimiento individual, por lo que su teoría del aprendizaje general es la constructivista. Su teoría de la enseñanza se interesa por las condiciones que posibilitan un aprendizaje significativo. El objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas que proponen son las representaciones mentales de las personas. La metodología suele ser de tipo interpretativo, procurando en todo momento asegurar que la subjetividad del investigador no afecte a la investigación.

EL CONSTRUCTIVISMO RADICAL

Para este enfoque, presentaremos aspectos relativos a: las bases que lo sustentan y la mirada acerca de la enseñanza y el aprendizaje. Luego expondremos una visión global del enfoque respecto de los seis aspectos explicitados en la introducción.

Sus bases

El constructivismo radical ha sido desarrollado en términos epistemológicos por von Glasersfeld (1995), quien propone dos principios básicos que toman como punto de partida la experiencia del sujeto: (i) el conocimiento es activamente construido por el sujeto; y (ii) la función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad trascendente. El constructivismo radical, si bien propone un punto de vista de tipo constructivista–pragmático corre el peligro de caer en el solipsismo tal como argumentan sus críticos.

La incidencia de este punto de vista en la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha sido importante (v.g., von Glasersfeld, 1991; Steffe y Kieren, 1994; Confrey, 1994, 1995a, 1995b), especialmente en los Estados Unidos. A diferencia del enfoque cognitivo, tratado en el apartado anterior, el constructivismo radical es un paradigma global ya que sus afirmaciones más fuertes las hace en el campo de la ontología y de la epistemología general. Confrey (1994) considera que las bases del constructivismo radical son:

1) *La epistemología genética de Piaget.* De ella recoge, entre otras, la idea de que la construcción del conocimiento ocurre a través del tiempo; para comprender una idea uno necesita examinar su construcción teniendo en cuenta la ontogénesis y la filogénesis.

2) *Una epistemología radical.* Ésta le lleva a: (i) objetar una teoría representacionista del conocimiento, es decir, rechazar que estamos progresando hacia una visión cada vez más exacta de la *manera en que las cosas realmente son*; (ii) imponer el requisito de que conocer algo es actuar sobre ello, de modo que el conocimiento consiste en acciones y reflexión sobre esas acciones; (iii) considerar que el conocimiento que se supone verdadero es aquel que es útil o viable para permitirnos dar sentido a nuestras experiencias y hacer predicciones; y, (iv) considerar siempre la presencia del observador en la observación, es decir, advertir que cuando pretendemos hablar de cognición, educación, resolución de problemas, matemáticas, o aprendizaje y enseñanza, debemos tener particular cuidado en reconocer el papel del observador en la descripción y análisis del problema.

3) *Los esquemas*. Para el constructivista radical, la unidad de análisis es un esquema con su génesis y modificación. Los esquemas evolucionan, y mediante la adaptación llegan a acoplarse mejor con el mundo experiencial del sujeto. Los esquemas se dividen y ramifican, y algunos se extinguen. Por otra parte, el propio organismo como un todo, se adapta al mundo de sus experiencias, en cierta medida por medio de la adaptación

de sus esquemas. De la aceptación de los esquemas se sigue que el niño avanza a través de etapas de desarrollo en donde los constructos pueden no reflejar los de los adultos. Las visiones de los niños no son miniaturas de las visiones de los adultos; sus visiones no son meramente piezas que faltan; no son inadecuadas para los propósitos para los cuales han sido construidas. Las visiones de los niños son construidas de forma diferente, porque la tarea completa de la situación puede ser vista de forma diferente, y porque el mundo sensorio–perceptual de un niño para construir conceptos es diferente al de los adultos. El mundo sensorial y perceptual de un niño responde al mundo que ha construido, a las experiencias que ha tenido, y a las teorías que ha creado. La implicación de esto es que cuando los adultos examinan las representaciones, expresiones, preferencias o formas de hablar de un niño, no deben suponer que sus propias visiones de conocimiento proporcionan suficiente o adecuada preparación para comprender a ese niño. Esto sugiere también que el conocimiento del niño proporciona legítimas —y útiles— alternativas al conocimiento del adulto.

4) *La modelización y la construcción de otros*. El constructivismo radical considera que permanecemos dentro de nuestros confines subjetivos, construyendo modelos viables de los otros en nuestro medio ambiente a través de la experiencia. Cuando un sujeto siente o dice que *comprende a otro*, implica que las estructuras cognitivas que el sujeto ha atribuido a *su modelo del otro* han resultado hasta ahora, o una vez más, viables en la interpretación de la experiencia del sujeto sobre el otro. Los investigadores en la tradición constructivista han insistido en que tales modelos son el único producto posible de las investigaciones sobre la construcción del conocimiento matemático de los sujetos. No se puede pretender conocer cómo es realmente el conocimiento matemático de los sujetos, sólo se puede aspirar a tener modelos viables.

Acerca de la enseñanza y el aprendizaje

El constructivismo radical ha contribuido significativamente a entender la enseñanza de las matemáticas de una manera diferente a la tradicional al poner en primer plano la necesidad de considerar la diversidad de los alumnos en el proceso de enseñanza–aprendizaje. Por otra parte, el constructivismo radical ha puesto de manifiesto que la comprensión de lo que los niños dicen y hacen requiere descender de una perspectiva adulta e imaginar cómo las acciones y expresiones de un niño tienen sentido desde la perspectiva del niño. Y al hacerlo, las matemáticas han llegado a ser un asunto de comunicación e interpretación, y no sólo de justificación lógica.

Finalmente, los constructivistas han superado el aprendizaje pasivo, incorporando al proceso de enseñanza–aprendizaje, entre otros, el uso de materiales, problemas contextualizados, grupos de trabajo, uso de diferentes representaciones, etc.

Visión global

El constructivismo radical se presenta como un paradigma global ya que pone en cuestión la ontología y la epistemología tradicional relativa al conocimiento. Propone un modelo de mundo en el que se pueden tener experiencias, pero no cognoscible en ningún sentido; es similar al entorno o mundo que rodea a un animal: por una parte resiste las acciones de las personas y por otra parte las restringe, pero no es posible conocerlo en sí mismo, no podemos aspirar más que a conseguir una mejor organización de nuestro mundo de experiencias. El constructivismo radical no hace ninguna suposición de tipo ontológico sobre la existencia de un mundo más allá del dominio subjetivo de experiencia y su epistemología es decididamente falibilista, escéptica y antiobjetivista. Su teoría de la verdad no es la de correspondencia sino la del encaje y su teoría sobre el significado tiene un fuerte componente pragmatista. Su punto de vista sobre la naturaleza de las matemáticas es el falibilismo. Con relación al aprendizaje adopta un punto de vista constructivista complejo y radical, lo cual le lleva, según sus críticos, a planteamientos muy individualistas. Su teoría de la enseñanza es muy respetuosa con la construcción de los alumnos; éstos son animados a articular y desarrollar sus puntos de vista y a explicar sus razonamientos, siendo el profesor un mero facilitador de las construcciones de los alumnos. El objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas que propone, son las construcciones de los sujetos. La metodología suele ser de tipo interpretativo y cualitativo, pero en este caso la subjetividad del investigador está claramente contemplada ya que sólo se puede aspirar a conseguir una construcción personal del investigador —un modelo— sobre la construcción del alumno o profesor.

EL CONSTRUCTIVISMO SOCIAL

En la presentación de este enfoque haremos algunos señalamientos acerca de tres de sus líneas de pensamiento que lo sustentan y estructuran. Luego presentaremos una visión global en torno a los seis aspectos reportados en la introducción.

Sus sustentos

El constructivismo social se puede considerar un intento de síntesis de diferentes líneas de pensamiento. Por una parte, hay que considerar una línea que ha reflexionado sobre la naturaleza de las matemáticas destacando tanto su falibilismo como su relación con la construcción social; en esta perspectiva epistemológica, el constructivismo social ha sido desarrollado por Ernest (1991, 1992, 1998). Por otra parte hay que considerar todos los trabajos de tipo antropológico que han puesto de manifiesto cómo las diferentes sociedades construyen diferentes matemáticas (Bishop, 1999). Por último, hay que considerar toda la reflexión que ha generado en el campo de la psicología el redescubrimiento de la obra de Vygotsky (Wertsch, 1988; Vygotsky, 1987).

Perspectiva epistemológica

Ernest (1998) explica la actividad matemática a partir del constructivismo social. Este punto de vista filosófico aplicado a las matemáticas se basa en:

1) La lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos (1978) basada en la prueba y la refutación. Ernest interpreta que Lakatos propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación.
2) Los trabajos de Wittgenstein (1983, 1987). Ernest recoge de este autor la certeza y la necesidad de que las matemáticas derivan de la aceptación de unas *reglas de juego* que se encuentran en una *forma de vida* socialmente preexistente.
3) La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. El conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y no como un conocimiento personal, privado o construcción individual ni tampoco como un conocimiento externo, absoluto o trascendente. Dicho de otra manera, no se considera que la intervención constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento lleve a verdades necesarias ni que la objetividad dependa de la adecuación isomórfica del conocimiento a un mundo trascendente.
4) La interpretación de las matemáticas como algo básicamente conversacional. El constructivismo social entiende las matemáticas como algo básicamente lingüístico, textual y semiótico, pero inmerso en el mundo social de la interacción humana.

El constructivismo social de Ernest no pone en cuestión la existencia del mundo de la vida (tanto el físico como el social) ya que presupone su existencia tal como nos lo sugiere nuestro sentido común. No necesita partir de un sujeto que experimenta estas dos esferas de la realidad sino que parte de una intersubjetividad histórica previa que ordena y da significado al mundo de la vida del sujeto.

Perspectiva antropológica

Para Bishop (1999), existen seis actividades sociales esenciales (contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar) que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas propias de cada cultura. Él considera que, si bien "todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas como respuesta a las *demandas* del entorno experimentadas a través de estas actividades" (Bishop, 1999, p. 83), como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, han surgido las "Matemáticas", la disciplina internacionalizada que conocemos hoy y que tiene su principal foco de crecimiento en la tecnología.

Para Bishop las Matemáticas, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica, también son portadoras, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados: racionalismo, objetivismo, control, progreso, apertura y misterio. Este punto de vista antropológico ha mostrado interés en la investigación de los problemas que tienen las personas que aprenden matemáticas en situaciones de *conflicto cultural*, es decir, donde su cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que están en una situación minoritaria o bien inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Perspectiva psicológica

Vygotsky propone una teoría del desarrollo intelectual que sostiene que los factores socioculturales son esenciales en el desarrollo de la mente debido a que el sujeto emerge a partir de un contexto sociocultural. Todo el desarrollo intelectual —incluyendo significado, memoria, atención, pensamiento, percepción y consciencia— evoluciona partiendo de lo interpersonal (social) hacia lo intrapersonal (individual). Para Vygotsky todas las funciones mentales superiores son relaciones sociales internalizadas y la verdadera identidad de la persona emerge de las relaciones socioculturales. Vygotsky distingue dos líneas de desarrollo, la natural y la sociocultural, que se entrecruzan; y para él es la sociocultural la que distingue a los humanos de los demás animales.

Otro elemento importante en la teoría de Vygotsky, de acuerdo con la tradición marxista, es el papel central que ocupa el trabajo en el desarrollo cultural. Es a través del trabajo —es decir, a través de las transformaciones de objetos utilizando herramientas— que las propiedades esenciales de los objetos y las situaciones se descubren. Para él las herramientas, como medios de transformación del trabajo, juegan un papel central tanto en la organización del trabajo como en la cultura del momento. Vygotsky considera que si a un niño se le cambian las herramientas de pensamiento disponibles, su mente tendrá una estructura radicalmente diferente, y sostiene que sólo se puede comprender el desarrollo del lenguaje —que es una actividad práctica que permite la comunicación con los otros— teniendo en cuenta la actividad práctica del uso de herramientas.

Vygotsky llega a proponer que el lenguaje —y más en general, los sistemas de signos— es una herramienta psicológica útil para el pensamiento ya que juega un papel mediático análogo al de las herramientas en el trabajo. La capacidad específicamente humana para el lenguaje capacita a los niños a proveerse de herramientas auxiliares en la solución de tareas difíciles, a superar la acción impulsiva, a planificar una solución a un problema, y a dominar su propia conducta. Los signos y las palabras sirven a los niños primero, y ante todo, como un medio de contacto social con otra gente. Las funciones cognitivas y comunicativas del lenguaje llegan a ser entonces la base para una nueva y superior forma de actividad en los niños, distinguiéndolos de los animales. Vygotsky ofrece una visión del lenguaje interno de las personas como eslabón semiótico entre lo social y lo individual. Los símbolos mentales (palabras pensadas, imágenes mentales, etc.) son considerados como signos mediadores entre lo social y lo individual por una parte y, por otra, como mediadores entre el estímulo y la respuesta.

La teoría de Vygotsky hace varias contribuciones importantes a la comprensión del desarrollo intelectual en general y, en particular, al desarrollo del conocimiento matemático. La primera es que señala la importancia de las instituciones en las que el alumno está inmerso y explica cómo éstas inciden en la formación de las funciones psicológicas superiores. Esta explicación era la que necesitaban las posiciones epistemológicas que consideraban las matemáticas como una construcción social para explicar cómo las instituciones generan las construcciones del individuo. Así, para el constructivismo social el sujeto construye sus conocimientos con base en su experiencia y luego éstos se ajustan al ser sometidos a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad. El conocimiento subjetivo se convierte en objetivo cuando es sometido a las reglas y condiciones que establece la comunidad matemática. A su vez, las instituciones matemáticas dirigen la construcción de cada sujeto.

Otro de los muchos aportes de Vygotsky que cabe destacar es su teoría de la *zona de desarrollo próximo*. Para él, lo que un alumno es capaz de aprender por sí mismo viene determinado por su nivel de desarrollo evolutivo y por sus conocimientos previo; además, considera que hay que diferenciar esta capacidad de aprendizaje de la capacidad de aprender con la ayuda y el estímulo de otras personas (no sólo los profesores, también los amigos, padres, compañeros, etc.). La diferencia entre estos dos niveles de capacidad es lo que Vygotsky llama la zona de desarrollo próximo. Así pues, la enseñanza más eficaz es aquella que parte del desarrollo efectivo del alumno no para amoldarse a él, sino para hacerlo progresar a través de la zona de desarrollo próximo, y de esa manera generar nuevas zonas de desarrollo próximo.

Visión global

La incidencia del constructivismo social, lo mismo que la del constructivismo radical, ha sido importante en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Al igual que el constructivismo radical —y a diferencia del enfoque cognitivo— el constructivismo social es un paradigma global ya que sus afirmaciones más fuertes también las hace en el campo de la ontología y de la epistemología general. El constructivismo social adopta una ontología relativista moderada en la línea que propone la fenomenología social, ya que supone un mundo compartido y socialmente construido, en el que se forma el sujeto. No pone en cuestión el mundo de la vida, pero este mundo es el resultado de una construcción social. Este tipo de constructivismo se basa en una epistemología falibilista que asume el conocimiento objetivo como aquel que es aceptado socialmente. Las matemáticas se consideran como una construcción social de tipo falibilista. La teoría del aprendizaje asociada es constructivista y pone el énfasis en la importancia del lenguaje y de la interacción social. Con relación a la enseñanza ha puesto el énfasis en el papel que juega el contexto y la interacción social en la construcción social realizada en el aula; y también en la importancia que tienen en esta construcción social los valores, las emociones, la discusión, la colaboración y la negociación de significados compartidos, la semiosis, etc. El objetivo de la investigación de la Didáctica de las Matemáticas es la construcción social realizada en el aula y la metodología de investigación es de tipo interpretativo o bien es una investigación–acción.

EL ENFOQUE SISTÉMICO

Para las últimas versiones positivistas, los enfoques centrados en las representaciones mentales de los individuos —sean éstos alumnos o profesores— presentan limitaciones importantes que llevan a renunciar, implícitamente, a la ambición de construir la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina científica autónoma ya que, al interpretarla como una aplicación de otras disciplinas —como la psicología— ésta se convierte en un simple saber técnico que tiene su justificación en otras disciplinas ajenas a la Didáctica de las Matemáticas.

A continuación presentamos dos perspectivas francesas que abogan por la constitución de la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina científica autónoma. Luego, como en los anteriores apartados, exhibiremos una visión global de este enfoque.

La perspectiva sistémica de Brousseau

Un nuevo enfoque en la Didáctica de las Matemáticas nació cuando Brousseau (1986) señaló la necesidad para la Didáctica de las Matemáticas de utilizar un modelo propio de *actividad matemática escolar* que permitiese derivar o modificar los conceptos necesarios que eran importados de otras disciplinas:

> [...] ¿Los saberes importados de disciplinas fundamentales permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente los unos de los otros, explicar fenómenos de enseñanza y producir de forma controlada las modificaciones deseadas? ¿Por el contrario, es necesario, crear conceptos nuevos, un campo de conocimiento y métodos cercanos (próximos a dichas disciplinas), para estudiar las situaciones didácticas? (Brousseau, 1986, p. 39)

El nuevo punto de vista de la didáctica fundamental, iniciado por Brousseau al principio de los años 70, amplía radicalmente la problemática didáctica considerando, en primer lugar, como problemático el saber matemático en sí mismo y no tan sólo el conocimiento matemático del alumno. Esto significa que para estudiar los fenómenos ligados al aprendizaje de cualquier contenido matemático, y antes de estudiar y explicar los diversos tipos de errores que comete el alumno en la utilización e interpretación del contenido en cuestión, es necesario partir de un modelo epistemológico de la organización matemática que contiene el contenido que se pretende enseñar. Dicho en otras palabras, hay que problematizar el contenido matemático a enseñar.

El nuevo objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas, que incluye al de la didáctica clásica, es la producción y la comunicación de los conocimientos matemáticos. El énfasis se pone en el polo del conocimiento matemático (dentro de la relación didáctica ternaria conocimiento–alumnos–profesor), en el marco de un enfoque unitario y sistémico de la didáctica donde el objeto básico de estudio es el *sistema didáctico*. Brousseau empieza estudiando los fenómenos ligados a la transposición didáctica (efecto Topaze, efecto Jourdain, el desplazamiento metacognitivo, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de las situaciones didácticas). El siguiente paso es explicar estos fenómenos a partir de considerar la enseñanza como la devolución de una situación de aprendizaje por el profesor al alumno. Su teoría de las situaciones (situación didáctica, situación a–didáctica, situaciones fundamentales, diferentes tipos de situaciones, contrato didáctico, etc.) modeliza esta devolución como la negociación de un contrato y permite en gran parte explicar estos fenómenos y predecir la existencia de otros. Por último, el resultado de este enfoque lo lleva a considerar la situación escolar como un *sistema* y a modelizar las relaciones entre dos de sus subsistemas: el sistema *enseñante* y el *sistema enseñado* a partir de las relaciones entre ellos, se trata entonces de "describir precisamente estos subsistemas por las relaciones que mantienen en el juego" (Brousseau, 1986, p. 75).

Brousseau opta claramente por un enfoque sistémico como alternativa al punto de vista clásico en Didáctica de las Matemáticas. Pero además lo hace de una forma bastante radical, ya que opta por un punto de vista sistémico que deja poco juego a los procesos intrapsíquicos de interiorización. Al hacer esta opción consigue, por una parte, alejarse de la psicología y, por la otra, obtiene un objeto que puede ser estudiado por una nueva disciplina científica: la didáctica fundamental.

Una de las características específicas de la didáctica fundamental es la hipótesis de que los *hechos didácticos*, una vez interpretados como *fenómenos*, pueden ser utilizados para contrastar y modificar los modelos del desarrollo del saber matemático y para reinterpretar todos aquellos conceptos que la didáctica clásica importaba de otras disciplinas científicas. De esta manera no se acepta el carácter meramente tecnológico y se reivindica un carácter científico, fundamental, para el saber didáctico. Esto significa postular un nuevo campo de conocimientos, la existencia de fenómenos didácticos no reducibles a simples fenómenos psicológicos, sociales o matemáticos y, en consecuencia, la necesidad de teorías didácticas autónomas.

La perspectiva sistémica de Chevallard

Chevallard (1997) también considera que la aplicación del punto de vista sistémico a las situaciones escolares nos lleva a un objeto preexistente e independiente de nosotros, que puede y ha de ser estudiado por una nueva disciplina científica.

> Para ello conviene partir de muy lejos: de la posibilidad misma de la existencia de una ciencia que llamamos "la didáctica de las matemáticas". Toda ciencia debe asumir, como primera condición, pretenderse ciencia de un "objeto", de un objeto real, cuya existencia es independiente de la mirada que lo transformará en un objeto de conocimiento. Es la posición materialista mínima […] Pero ¿cuál es en realidad ese objeto? El didacta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza —tal como lo puede observar, y luego recons-

> truir, en nuestras clases concretas— entre un "docente", los "alumnos" y un "saber matemático ". Tres lugares, pues: es el "sistema didáctico". (1997, pp. 12-15)

Una de las principales características del enfoque sistémico de Chevallard es el papel tan importante que juega la relación del sistema con el entorno. Para Chevallard, los sistemas didácticos son sistemas abiertos, es decir, no se comprende lo que ocurre en su interior si no se tiene en cuenta su exterior. Los sistemas didácticos son formaciones que aparecen cada año hacia el mes de septiembre: alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa), se forma un contrato didáctico que toma este saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza–aprendizaje que une a docentes y alumnos en un mismo lugar. El entorno inmediato de un sistema didáctico está constituido inicialmente por el sistema de enseñanza, que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tiene a su disposición un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico y que intervienen en este proceso en diversos niveles. A su vez, el sistema de enseñanza tiene su propio entorno, que es la sociedad. En este entorno, de una gran complejidad, están los matemáticos, los padres y las autoridades educativas. La parte más próxima al sistema de enseñanza es el lugar donde se encuentran los representantes del sistema de enseñanza con los representantes de la sociedad (los padres, los especialistas en la disciplina y las autoridades educativas); para esta instancia Chevallard utiliza el nombre de *noosfera*. La importancia que da Chevallard a la relación entre el sistema didáctico y su entorno lo lleva a afirmaciones como la siguiente:

> ¡El sistema didáctico no existe sino para ser compatible con su entorno; y esta compatibilización pasa por una disminución de la consciencia del entorno por parte de los agentes del sistema! (1997, p. 18)

Para este investigador, la relación entre el sistema y su entorno pasa por la transposición didáctica. Chevallard (1997) considera que los contenidos que forman parte del conocimiento matemático han sufrido un proceso de descontextualización para poder incorporarse al corpus matemático. Este corpus se llama *saber sabio*. Para que el saber sabio pueda ser enseñado por el profesor, es necesario que el docente tenga los conocimientos necesarios para poderlo enseñar. Aquello que ha de saber el profesor para poder enseñar el saber sabio se llama *saber que se quiere enseñar*. Por último, aquello que realmente es enseñado recibe el nombre de *saber enseñado*. Para que un concepto del saber sabio se convierta en saber enseñado es necesaria una adaptación didáctica que permita un aprendizaje significativo de los alumnos. Chevallard llama *transposición didáctica* al proceso que convierte el saber sabio, primero en saber que se quiere enseñar, y después, en saber enseñado. Este proceso implica que el profesor recontextualice y repersonalice los conocimientos para presentarlos al alumno, de manera que los conceptos aparezcan como la respuesta más idónea a la situación concreta (contexto) presentada por el profesor. Para cerrar el proceso, la apropiación del concepto por parte del alumno requiere necesariamente que éste vuelva a redescontextualizar y redespersonalizar el saber, a efectos de identificarlo como un saber integrado en el corpus científico de la comunidad cultural a la cual pertenece.

Visión global

El punto de vista sistémico es un programa que se sitúa en la frontera entre los programas locales y los semilocales ya que considera importante para la Didáctica de las Matemáticas ampliar su reflexión teórica problematizando las matemáticas que se tienen que enseñar. Este punto de vista lleva a tener que reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas, que son consideradas como una actividad que se ocupa de resolver problemas. En nuestra opinión no se llega a problematizar en demasía la naturaleza de las matemáticas, las cuales se consideran el saber sabio de partida. Con relación a la ontología este enfoque normalmente tampoco cuestiona la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, pero introduce la suposición de la existencia de sistemas. Su epistemología sigue siendo básicamente el representacionismo, su teoría de la *verdad* es la de *correspondencia* y su teoría sobre el significado es de tipo referencial —especialmente la teoría de las situaciones didácticas ya que postula la existencia de una situación fundamental que da sentido al contenido matemático. Adopta un punto de vista constructivista cuasi–trivial con relación a la génesis del conocimiento individual, por lo que su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista. Su teoría de la enseñanza se limita a considerar que el trabajo del profesor consiste en realizar la transposición didáctica de manera que se facilite la apropiación de la situación por parte del alumno. El objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de los fenómenos ligados a la producción y la comunicación de los conocimientos matemáticos en los sistemas didácticos. La metodología que proponen es de tipo positivista ya que suponen que los fenómenos didácticos se pueden explicar de manera causal y que las causas fundamentalmente son de tipo matemático; particularmente se ha propuesto como metodología de investigación la *ingeniería didáctica*. Esta metodología (Artigue, 1994, 1995) se caracteriza por un esquema experimental basado en las *realizaciones didácticas en el aula*, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de actividades de enseñanza–aprendizaje.

EL ENFOQUE ANTROPOLÓGICO

En este apartado presentamos algunas características que definen al enfoque antropológico y que lo diferencian del enfoque sistémico —con el cual tiene semejanzas y relaciones. Al final, expondremos una visión global en torno a los seis asuntos en cuestión.

Características generales

La transposición didáctica relaciona un elemento del sistema didáctico (saber en el sistema didáctico) con un elemento exterior al sistema (el saber sabio). Esto quiere decir que la relación más importante entre el sistema y su exterior es una relación entre dos objetos que tienen un status ontológico problemático. El punto de vista sistémico de Chevallard deja abierto un problema que se puede describir por las preguntas: ¿Qué tipo de existencia tiene el saber sabio? ¿Cómo se genera el saber sabio?

Las primeras formulaciones de Chevallard basadas en análisis sistémicos y en la transposición didáctica han dejado paso a un nuevo enfoque en Didáctica de las Matemáticas: el enfoque antropológico. Las causas de este cambio de enfoque, a nuestro entender, son básicamente dos: (i) un cuestionamiento implícito de los planteamientos sistémicos y (ii) la constatación de que era necesaria una reflexión profunda sobre el saber sabio y sobre su génesis, ya que no basta sólo con una reflexión sobre la transposición de este *saber sabio* en *saber a enseñar* y en *saber enseñado*, ni era suficiente la distinción entre objetos matemáticos, paramatemáticos y protomatemáticos. Mientras que esta segunda causa es muy evidente en la propuesta antropológica de Chevallard, la primera no lo es tanto y sólo se puede detectar en el uso de un nuevo lenguaje en el que los términos sistémicos han perdido peso.

El enfoque antropológico en Didáctica de las Matemáticas propuesto por Chevallard (1992) propugna que la actividad matemática se ha de interpretar como una actividad humana y no se ha de considerar únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. El enfoque antropológico de Chevallard considera que las cosas materiales, las personas, las ideas, las instituciones, los conceptos, etc., son objetos. Él supone que el mundo de nuestras experiencias está formado por objetos, que todo aquello que podemos ver, tocar, pensar, etc., es objeto. Chevallard resuelve el problema de la existencia de los objetos matemáticos postulando que su existencia no se puede considerar independientemente de las personas o de las instituciones. La antropología cognitiva propuesta por Chevallard permite resolver el problema de la existencia de los objetos matemáticos de la manera siguiente: un objeto matemático existirá si las personas (individualmente o bien organizadas en instituciones) consideran que existe. Dicho de otra manera, el problema no es si existen o no los objetos matemáticos sino entender cómo las instituciones matemáticas o las personas —como resultado de su actividad— llegan a considerar que éstos tienen algún tipo de existencia. Este enfoque necesita elaborar un modelo de cómo se producen las matemáticas en las instituciones, que incluya la enseñanza–aprendizaje escolar de las matemáticas como una actividad matemática institucional particular.

Para la teoría antropológica, poder estudiar la actividad matemática en el aula exige estudiar primero qué es la actividad matemática en sí, porque se presupone que existe una *actividad matemática* prototipo. Este punto de vista presupone que se puede hallar un criterio de demarcación entre lo que es *actividad matemática* y aquello que no lo es. La aplicación de este criterio de demarcación permite saber en qué instituciones escolares se hace *verdadera* actividad matemática y en cuáles no.

La teoría antropológica (Chevallard 1992 y 1999; Chevallard, Bosch y Gascón 1997) postula la necesidad de un modelo explícito de *actividad matemática*: el modelo epistemológico. El análisis de la actividad matemática requiere la utilización de nociones apropiadas que permitan describir sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción. Se obtiene entonces un *modelo epistemológico* de la actividad matemática, es decir de lo que se entiende por hacer matemáticas y por producir conocimiento matemático. Los componentes del modelo, que conforman, por así decirlo, la *anatomía* de la actividad matemática, deben corresponderse con los componentes del *saber matemático* entendido como organización teórica que emerge de la actividad matemática a la vez que la instrumenta. Una organización matemática es una entidad compuesta por: tipos de *problemas* o tareas problemáticas, tipos de *técnicas* que permiten resolver los problemas; *tecnologías* o discursos (*logos*) que describen y explican las técnicas y una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. La anatomía debe articularse con un modelo de la *fisiología* de la actividad, esto es con las condiciones bajo las cuales se realiza y evoluciona, ya sea para crear nuevo saber matemático (la investigación pura o aplicada) o para reconstruir dicho saber (lo que constituye la actividad didáctica propiamente dicha).

La teoría antropológica propone aquí un modelo del *proceso de estudio* de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Dentro de este modelo, *hacer matemáticas* consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el *saber hacer*), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente *saber*). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas. *Enseñar y aprender matemáticas* corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza–aprendizaje puede formularse en términos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

Otra característica importante de la teoría antropológica es que considera de manera unitaria el conjunto de existentes del universo que uno quiere estudiar, descartando a priori las distinciones y aproximaciones que nos sugiere la cultura. En particular, no se distinguen los objetos matemáticos de los no matemáticos. Los objetos de una institución y las relaciones entre ellos emergen de un sistema de *prácticas* realizadas por los miembros de la institución. Las prácticas consisten en la utilización de una *técnica* que moviliza determinados objetos y puede hacer emerger otros nuevos. La palabra técnica se utiliza en la teoría antropológica como una *manera de hacer*. Dentro de una institución las *tareas* son aquellas actividades que los sujetos de la institución pueden y deben de hacer. Por lo tanto, la actividad dentro de una institución consiste en la realización de tareas que pueden estar articuladas en un sistema. A cada tarea le corresponde, como mínimo, una técnica, y al sistema de tareas un sistema de técnicas. Una técnica solamente puede vivir en una institución si hay un discurso (*logos*), llamado *tecnología*, que la justifica y la hace comprensible. La institución dedica una parte de su actividad a construir el marco tecnológico que permite controlar y justificar las técnicas institucionales. La existencia de una técnica en una institución está parcialmente condicionada por la existencia de una tecnología que la justifique y explique y, aún más, por la posibilidad de invocar una *teoría* que garantice la validez de la tecnología.

Chevallard y sus colaboradores (Chevallard, 1992; Gascón, 1998) consideran que su enfoque antropológico es un programa de investigación diferente del programa sistémico propuesto inicialmente, pero lo consideran una consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica. En cambio, en nuestra opinión hay suficientes diferencias para considerarlos dos programas de investigación distintos y con una clara ruptura entre ellos. El enfoque sistémico inicial está inmerso en el lenguaje objetivista, ya que su pretensión es conseguir una disciplina científica, mientras que el enfoque antropológico propone un juego de lenguaje diferente en el cual el objetivo es explicar la actividad matemática en las instituciones (que ya no son sistemas). Un cambio de juego de lenguaje de estas características tendría que ser más explícito y explicar claramente qué reglas del primer juego de lenguaje han sido abandonadas o modificadas y cuáles se han mantenido. En nuestra opinión este cambio de juego de lenguaje implica, entre muchas otras cosas, el abandono de la creación de una disciplina científica que tenga por objeto de estudio el *sistema didáctico*.

La pérdida de peso del punto sistémico a manos del punto de vista antropológico no implica el abandono del ideal positivista ya que la teoría antropológica sigue siendo un programa *fuerte* (en el sentido de Bloor, 1998) que busca explicaciones causales en la Didáctica de las Matemáticas. Este programa sigue manteniendo la existencia de *leyes didácticas* que rigen el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas. Estas leyes se manifiestan en forma de *fenómenos didácticos* que hasta cierto punto escapan a la voluntad de los actores del proceso didáctico y que se constatan empíricamente como regularidades observables y difíciles de modificar. Así, ante la constatación de alguna regularidad observable cabe preguntarse por las causas que explican dicha regularidad o, lo que es equivalente, hay que buscar las condiciones bajo las cuales se da el fenómeno observado y aquéllas bajo las cuales podría no darse. Además sigue manteniendo que las *causas* que explican estos fenómenos didácticos son *esencialmente* matemáticas. La novedad es que las *matemáticas* no son analizadas con un modelo sistémico sino que se consideran como una actividad humana realizada en ámbitos institucionales.

Si bien el programa antropológico sigue siendo un programa positivista en el que la atribución de significado a los actores juega un papel muy reducido, no descartamos que si lo desarrollan coherentemente, este giro antropológico al enfoque sistémico implique abandonar el objeto *sistema didáctico* y debilitar el objetivo de convertir la Didáctica de las Matemáticas en una disciplina científica de tipo positivista, para dar cabida a las explicaciones provenientes de la tradición interpretativa basadas en la atribución de significado a los actores.

Visión global

El programa antropológico es claramente un sistema semilocal ya que su mayor aporte lo realiza gracias a su reflexión sobre la actividad matemática institucional. Con relación a la ontología general, este enfoque —en cierta manera, o al menos de manera implícita— problematiza el punto de vista tradicional que considera la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, puesto que considera la existencia como una relación:

> Un objeto existe desde que una persona *X* o una institución *I* reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto *O* existe para *X* (respectivamente, para *I*) si existe un objeto, que represento por *R*(*X*,*O*) (respectivamente, *R*(*I*,*O*)) que llamo relación personal de *X* a *O* (respectivamente, relación institucional de *I* a *O*). (Chevallard, 1992, p. 9)

La epistemología del programa antropológico, al menos implícitamente, cuestiona el representacionismo y la teoría de la *verdad* como *correspondencia*. Su teoría sobre el significado tiene un fuerte componente pragmatista. Adopta un punto de vista constructivista no–trivial con relación a la génesis del conocimiento individual, por lo que su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista. Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual como en grupo. Las matemáticas se consideran como una actividad humana realizada en ámbitos institucionales. El objetivo de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de la actividad matemática, sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción. La metodología que proponen es de tipo positivista.

EL ENFOQUE SEMIÓTICO

En nuestra opinión la teoría antropológica propuesta por Chevallard intenta hacerse cargo, en parte, del giro lingüístico y pragmático que se ha producido en la filosofía. El giro antropológico en la Didáctica de las Matemáticas propuesto por Chevallard nos parece muy interesante porque abre unas perspectivas prometedoras de cara a la integración de muchos enfoques parciales (epistemológicos, psicológicos, lingüísticos, sociológicos, etc.). Nuestra opinión es que el estudio de las actividades humanas no puede hacerse desde una sola perspectiva sino que es necesario el concurso de muchas disciplinas diferentes. En particular, creemos que en la actividad matemática escolar, los objetos personales de los alumnos juegan un papel muy importante y se han de tener en consideración dando cabida a algún tipo de análisis psicológico. También consideramos los objetos ostensivos muy importantes en la actividad matemática, por lo cual creemos que también es necesario integrar los análisis de tipo semiótico. Estas consideraciones nos llevan a creer que un nuevo enfoque que integre, dentro del marco antropológico, análisis semióticos y psicológicos puede ser más útil para la disciplina "Didáctica de las Matemáticas", que no planteamientos reduccionistas, aunque éstos se justifiquen por el objetivo de convertir la Didáctica de las Matemáticas en una disciplina científica de tipo positivista.

A continuación presentamos la teoría de las funciones semióticas como un programa de investigación emergente en España, bajo la anterior línea de pensamiento. Luego presentaremos nuestra visión global sobre esta teoría a la luz de los seis aspectos considerados en la introducción.

La teoría de las funciones semióticas

Para Godino y Batanero (1994) la Didáctica de las Matemáticas no puede prescindir de la esfera de lo mental. La consideración explícita de este dominio, los lleva a diferenciar entre *objeto institucional* —base del conocimiento objetivo— y *objeto personal* (o mental) —base del conocimiento subjetivo. Las prácticas matemáticas, los objetos que intervienen, y los que de ellas emergen, están organizados alrededor de la finalidad de resolver situaciones problemáticas. Por este motivo Godino y Batanero toman como noción primitiva la de *situación–problema* para la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación–problemática, definen los conceptos teóricos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado* (personal e institucional).

Godino y Batanero llaman *práctica significativa* a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. Distinguen entre prácticas institucionales y prácticas personales. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución. Su carácter social indica que son observables.

Un *objeto institucional* es entonces un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo; en un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa está sometido a transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. Hay que destacar que de un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que están mutuamente relacionados. Con esta definición de objeto institucional se postula la existencia (como producto cultural) de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve un único objeto.

El carácter progresivo de la construcción de los objetos institucionales tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto. En el plano personal, se introducen las nociones: *sistema de prácticas personales* y *objeto personal*. Este último se considera como un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.

El punto de vista constructivista–pragmatista sobre las matemáticas se encuentra en la base de la teoría de los *objetos personales e institucionales* formulada por Godino y Batanero (1994) y desarrollada en Font (2000a). Estos autores consideran tres niveles de significado:

1) Significado personal de un objeto matemático. Es el sistema de prácticas personales que realiza una persona para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto personal.

2) Significado institucional de un objeto matemático. Es el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas del cual ha emergido el contenido institucional.

3) Significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar. Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en la institución escolar como adecuadas y características para resolver estos problemas.

En las prácticas que forman parte del significado de un objeto —sea personal o institucional— éste se toma como un dato cuya presencia o ausencia con tales o cuales características representa un factor a tener en cuenta en el momento de planificar la práctica. Pero este objeto no es el único objeto que el sujeto, o la institución, tiene en cuenta; en las prácticas intervienen conjuntamente varios objetos dado que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas.

En nuestra opinión el constructo significado a priori de un objeto institucional para un sujeto desde el punto de vista de la institución, resulta muy operativo para diseñar unidades didácticas, puesto que nos permite hacer un análisis de arriba–abajo que, a partir del significado del objeto en la institución escolar, permite una catalogación a priori de las prácticas que han de provocar la emergencia de los objetos personales de los alumnos. Este proceso implica determinar, para un objeto institucional dado, el campo de problemas asociado, el sistema de prácticas asociado y su reducción con finalidades didácticas. Por otra parte también resulta muy operativo para evaluar los resultados finales de la implementación de las unidades didácticas.

Las prácticas que constituyen la actividad matemática, institucional o personal, se pueden considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Si entendemos las prácticas de esta manera resulta que las prácticas admiten una análisis más fino mediante funciones semióticas.

Godino y Batanero y sus colaboradores, en sus trabajos sobre significado y comprensión de los objetos matemáticos, han desarrollado la teoría de los objetos institucionales y personales y la teoría de las funciones semióticas (Font , 2000a, 2000b; Godino y Batanero, 1994, 1997, 1998a, 1998b; Godino y Recio, 1998; Godino, 2000b, 2001). La integración de estas dos teorías ofrece un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas. La teoría que resulta de la integración de la teoría de las funciones semióticas con la teoría de los objetos personales e institucionales de Godino y Batanero —TFS a partir de ahora—, postula la siguiente hipótesis de trabajo: las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de lo público) y de las mentales (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas. Se considera que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje.

Godino y Batanero (1998b), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por entidades primarias o conjunto de ellas.

En la TFS, las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schutz pasando por Husserl. La noción de signo, tal como la describe Peirce, es un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales. En cambio, el signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales. En nuestra opinión la interpretación de las funciones semióticas que aquí se propone generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en Didáctica de las Matemáticas.

La introducción de las funciones semióticas permite refinar la idea de que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades (o grupos de ellas), activadas en prácticas que se realizan dentro de un determinado juego de lenguaje, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido).

Visión global

La TFS es otro claro ejemplo de programa de investigación semilocal ya que sus principales aportaciones son fruto de su reflexión sobre las prácticas matemáticas, institucionales y personales. Las matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Con relación a la ontología general este enfoque —en cierta manera, o al menos de manera implícita— problematiza el punto de vista tradicional sobre la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado ya que los referentes teóricos sobre los que se sostiene (pragmatismo, segundo Wittgenstein, etc.) así lo hacen. Su epistemología cuestiona el representacionismo y la teoría de la *verdad* como *correspondencia* y su teoría sobre el significado es de tipo pragmatista. Adopta un punto de vista constructivista no–trivial con relación a la génesis del conocimiento individual, por lo que su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista. Aprender matemáticas es construir significados personales y enseñar matemáticas consiste en procurar que los significados personales se aproximen al significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar. El objetivo de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de la actividad matemática de manera extensiva y descriptiva. La metodología que proponen es de tipo interpretativo.

EL ENFOQUE CRÍTICO

En este apartado presentamos algunas características que definen al enfoque crítico el cual incorpora aspectos político–sociales. Al final, expondremos una visión global en torno a los seis asuntos en cuestión.

Características generales

La educación matemática crítica coincide plenamente con los puntos de vista que entienden la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como fenómenos sociales, pero no se limita a considerar los aspectos sociales sino que considera esencial ampliarlos a los aspectos político–sociales. Propone una agenda de investigación para el estudio de la relación entre educación matemática y democracia. Para la teoría crítica la institución escolar es la unidad de análisis básica para comprender el trabajo de los profesores de matemáticas, los estudiantes y los administradores. Para la teoría crítica la forma de interacción entre estos tres estamentos configura y delimita las posibilidades de construcción de un proceso de enseñanza–aprendizaje que contemple el desarrollo de la competencia democrática de los alumnos.

La relación entre educación matemática y democracia puede discutirse a partir de tres tesis posibles (Skovsmose y Valero, 2000). La tesis de la *resonancia* considera que tanto las matemáticas como su enseñanza y aprendizaje facilitan la consecución de fines democráticos. Esta tesis genera una visión internalista de la investigación en el área. La tesis de la *disonancia* considera que tanto las matemáticas como la educación matemática están fuertemente asociadas con la creación de estructuras de riesgo en nuestra sociedad tecnológica actual, y con el mantenimiento de filtros de acceso social. A diferencia de la tesis anterior, que presupone la idea de la neutralidad de las matemáticas, esta segunda tesis reconoce la naturaleza política, ideológica de las matemáticas y de la educación matemática como actividad social. Una tercera manera de interpretar el vínculo entre educación matemática y democracia es a través de la tesis de la *relación crítica*. Esta tesis considera que, potencialmente, las matemáticas y la educación matemática pueden tanto facilitar como dificultar la construcción de una sociedad más democrática. Esta relación no está de por sí dada, sino que se construye en diversos escenarios y en combinación de diversos tipos de acciones en ellos. Esos escenarios incluyen la manera como la educación matemática se lleva a cabo en el aula, en la escuela como una organización, en los sistemas educativos nacionales y dentro de la nueva sociedad global.

Los aspectos que preocupan a la teoría crítica son, entre otros: (i) preparar a los estudiantes para ser ciudadanos; (ii) introducir las matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos socialmente relevantes; (iii) tener muy en cuenta los intereses de los estudiantes; (iv) considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucción; (v) contemplar los aspectos anteriores sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica; (vi) dar mucha importancia a la comunicación en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que son la base de la vida democrática; y, (vii) atender las relaciones entre las matemáticas y la tecnología, la cual, al mismo tiempo que soluciona problemas, genera otros nuevos.

La teoría crítica al igual que otras de las teorías comentadas anteriormente considera básico el análisis institucional. Para esta teoría no se pueden conectar educación matemática y democracia sin contemplar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la institución escolar en la que efectivamente se realiza. La teoría crítica considera las prácticas de la educación matemática en la institución escolar como una red de distintas esferas de acción que se interconectan y que producen en conjunto las condiciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esa institución concreta. Esta *Red institucional de prácticas de la educación matemática*, entendida como el espacio de acción definido por las relaciones entre estudiantes, profesores, grupo de profesores de matemáticas y administración, es el objeto de investigación de la teoría crítica, puesto que se considera que el conocimiento de esta red es la base para la reflexión sobre las potencialidades de construcción de prácticas democráticas de educación matemática.

Según Valero (2000), el estudio de esta red resalta la importancia de comprender los siguientes aspectos:

1) *La política de la institución escolar.* Tener en cuenta la institución escolar implica incluir como parte del estudio, información sobre el entorno económico, político y social donde se ubica la escuela y que influye sobre las posibilidades de acción dentro de la red institucional de prácticas de la educación matemática. Considerar la política de la institución escolar como parte esencial de la comprensión del funcionamiento de las matemáticas escolares presenta una visión de las prácticas de la educación matemática como acciones sociales dependientes de redes más complejas de actividad.

2) *La relevancia de las matemáticas escolares.* Las razones que justifican la educación matemática en la escuela por lo general están dadas por la sociedad. Para la teoría crítica no hay que olvidar que es fundamental el punto de vista de los estudiantes como pares dialógicos con quienes encontrar razones de relevancia para la enseñanza y el aprendizaje de las

matemáticas. El asunto de la discusión de la relevancia se basa en la exploración de los antecedentes de los estudiantes y, ante todo, de su porvenir —o la visión sobre las posibilidades futuras de vida de los estudiantes dado el entorno en que se encuentran. Sin la consideración de la relevancia desde el punto de vista de los estudiantes no hay una aproximación completa a los problemas de exclusión y equidad en las prácticas de la educación matemática escolar. Esta consideración no es sólo una negociación entre estudiantes y profesor sobre los contenidos de su interacción en el aula, sino una negociación entre los diversos actores que participan en la red institucional de prácticas de la educación matemática.

3) *La complejidad organizacional de la escuela.* La reforma en la enseñanza de las matemáticas en la mayoría de los casos está asociada a proyectos de cambio más globales. En este sentido, el cambio en asuntos relacionados con el currículo no se puede separar de cambios en, por ejemplo, equidad, evaluación, estructura organizativa de la escuela y profesionalización del profesorado. Los procesos de reforma en educación matemática suponen una conexión estrecha entre el trabajo de la administración y los profesores, como grupo y como individuos, para transformar las prácticas existentes. La manera como se crean relaciones entre estos distintos actores alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no es directa ni carece de una complejidad grande. La autonomía relativa que coexiste con la coordinación organizacional, la complementariedad entre rigidez–formalización, y flexibilidad–informalidad hace que no sea fácil comprender el tipo de influencia que la estructura organizativa del trabajo escolar tiene en lo que sucede en el aula. No obstante, sin este ámbito del trabajo de los profesores no es posible pensar en posibilidades de cambio.

4) *La comunidad profesional de las matemáticas escolares.* El grupo de profesores de matemáticas constituye una comunidad básica de práctica donde se ubica el trabajo de profesores individuales. Dentro de esta comunidad se negocian significados sobre la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Estos significados constituyen parte de la base de acción de los profesores individuales en su aula. La teoría crítica se formula preguntas del tipo: ¿Cómo llegan a esta comunidad demandas externas de cambio? ¿Cómo se generan oportunidades de desarrollo profesional y mejoramiento de la enseñanza —y por lo tanto del aprendizaje— de las matemáticas en la escuela? ¿Cuál es la relación entre esta comunidad profesional, la administración y otras comunidades dentro de la misma institución?

5) *Significado de las matemáticas en el aula.* En el aula el profesor individual crea situaciones de enseñanza que, idealmente, promueven un aprendizaje de las matemáticas. En ese aprendizaje se encuentran las intenciones de los profesores y las de los estudiantes. La relevancia de las matemáticas escolares, desde el punto de vista de uno y otros, juega un papel central en la manera como se desenvuelve esta interacción y cómo, a la larga, se construyen conocimiento y competencias. La investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estudiado tanto empírica como teóricamente lo que significa generar un conocimiento matemático significativo en el aula. No obstante la exploración de la construcción de significados desde una perspectiva sociopolítica, complementaria a la anterior es uno de los temas a desarrollar para la teoría crítica. En concreto se trata de estudiar la construcción de visiones críticas de las matemáticas escolares en el aula y de cómo se conecta esta construcción con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Estos cinco aspectos ofrecen una aproximación al funcionamiento de las matemáticas escolares. Desde una perspectiva sociopolítica de la educación matemática interesada por la democracia, no es posible comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje sin considerar esta complejidad. La teoría crítica propone un estudio holístico que implica una ampliación del objeto de investigación. Para esta teoría, las investigaciones que sólo se plantean conocer una parte de lo que es el fenómeno social de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conducen a la generación de un conocimiento reducido que si bien es importante, es insuficiente para comprender tal fenómeno. Pero la ampliación del objeto de investigación implica sacrificar profundidad en el análisis, y, en muchos casos, conlleva una implicación personal en la investigación. Este posicionamiento del investigador hace que desde otras teorías se critiquen la validez de las investigaciones realizadas desde el enfoque crítico. Ahora bien, para esta teoría la realización de un estudio de este tipo se justifica con razones que trascienden los argumentos aceptados dentro de una comunidad científica de tipo positivista, ya que se considera que una posición crítica en educación matemática conlleva una posición personal comprometida en la mejora del actual sistema de enseñanza–aprendizaje.

Visión global

En nuestra opinión la teoría crítica es un programa semilocal ya que su principal foco de reflexión son las matemáticas realizadas en instituciones. Las matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas socialmente compartida que tiene que ser una herramienta para la emancipación democrática. Con relación a la ontología general este enfoque —en cierta manera, o al menos de manera implícita— problematiza la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado ya que sus referentes teóricos (por ejemplo Habermas) sí lo hacen. Su epistemología cuestiona el representacionismo y la teoría de la *verdad* como *correspondencia* y su teoría sobre el significado tiene un fuerte componente pragmatista. Adopta un punto de vista constructivista no–trivial con relación a la génesis del conocimiento individual y social, por lo que se puede decir que su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista, pero ampliando la exploración de la construcción de significados con una perspectiva sociopolítica, complementaria a la construcción personal y social que se realiza en el aula. El objetivo de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de la red institucional de prácticas de la educación matemática. La metodología que proponen conlleva en muchos casos la implicación personal del investigador en la investigación–acción que realiza.

SÍNTESIS ENTRE ALGUNOS ENFOQUES

Algunas síntesis entre el enfoque individual y el social

Muchos de los investigadores posicionados inicialmente en el punto de vista cognitivo, sobre todo a partir del redescubrimiento de la obra de Vygotsky, han realizado propuestas de integración en las que, sin renunciar al papel predominante de la psicología, han contemplado en cierta manera el *giro social*.

Entre las propuestas más potentes y elaboradas hay que destacar en España la línea de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas denominada *Pensamiento numérico*, que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social y que se está desarrollando gracias a trabajos de investigación en los que colaboran la Universidad de Granada y la Universidad de Málaga (Castro, 1994; Romero, 1997, 2000; Romero y Rico, 1999; González, 1998). Esta línea estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados usando diferentes estructuras numéricas. Contempla una triple dimensión: por un lado se ocupa de estructuras numéricas específicas; en segundo término estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades numéricas; en tercer lugar tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven mediante la estructura numérica considerada y, muy especialmente, analiza la fenomenología que subyace a tal estructura.

En algunos de los trabajos de esta línea de investigación (Romero, 1997) se da prioridad al contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza–aprendizaje, con toda su riqueza y la multiplicidad de variables que la conforman. El objetivo primordial no es explicar los procesos cognitivos subyacentes a la adquisición de ciertos contenidos, sino estudiar el proceso constructivo que desarrollan unos alumnos en torno a un determinado contenido en la situación escolar en que dicho proceso tiene lugar. Este enfoque permite una mayor integración entre teoría y práctica. Esta línea de investigación tiene muy en cuenta la dimensión social de las matemáticas.

También podemos situar en esta línea de integración la propuesta psicopedagógica del actual sistema educativo del Estado español —aunque muchos considerarán que esta propuesta no llega a salir del enfoque cognitivo centrado exclusivamente en el sujeto. El marco de referencia psicopedagógico de la enseñanza no universitaria del Estado español es un conjunto de teorías y explicaciones que, si bien mantienen entre sí discrepancias importantes en numerosos puntos, participan de una serie de principios comunes o, al menos, no contradictorios. Este marco de referencia según Coll (1989) está delimitado por lo que podemos denominar enfoques cognitivos en un sentido amplio: (i) la teoría genética de J. Piaget y de sus colaboradores de la Escuela de Ginebra; (ii) la teoría de la actividad en las formulaciones de Vygotsky, Luria, Leontiev, y en sus desarrollos posteriores (Wertsch, Forman, Cazden, etc.); (iii) la teoría del aprendizaje verbal significativo de D. Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de R.E. Mayer; (iv) la teoría del procesamiento de la información (teoría de los esquemas); y, (v) la teoría de la elaboración de M. A. Merrill y Ch. M. Reigeluth. A partir de estos enfoques, se ha formulado la propuesta constructivista que inspira la enseñanza no universitaria. El constructivismo, en la versión de Coll, considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget.

Los estudios sobre el conocimiento de la práctica del profesor de matemáticas, realizados por el grupo GIEM de la Universidad de Sevilla, también buscan conseguir la integración del punto de vista cognitivo con el social:

> En este trabajo describiremos cómo los intentos por analizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas realizados en nuestro Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Sevilla (GIEM) nos llevaron a buscar una complementariedad entre puntos de vista cognitivos sobre el conocimiento del profesor y puntos de vista socioculturales relativos a la práctica del profesor, como una manera de dar cuenta de ciertos aspectos de lo que sucede en las aulas de matemáticas. (Llinares, 2000, p. 109)

Otra línea de investigación que adopta una posición intermedia entre el enfoque individual y el social es el *interaccionismo simbólico* (Bauersfeld, 1994; Voigt, 1996, 1998; Godino y Llinares, 2000) y el *socio–constructivismo* de Cobb y sus colaboradores (Cobb y Yackel, 1998).

El programa interaccionista aplicado a la educación matemática enfatiza como foco de estudio la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo el supuesto básico de que los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática. Los fundamentos de la perspectiva interaccionista se pueden esquematizar en: (i) el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula; (ii) las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente; y, (iii) el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.

Bauersfeld (1994) indica que, para comprender los logros individuales de los alumnos y las regularidades sociales que se generan en determinadas culturas de aula, es necesario considerar puntos de vista psicológicos y sociológicos sin dar preferencia a ninguno de ellos. De esta manera, la perspectiva interaccionista se sitúa en una posición intermedia entre la perspectiva individualista y la social. De la perspectiva individual que tiene su origen en Piaget, se asume que en el aprendizaje matemático juegan un papel muy importante los intentos del individuo de resolver lo que encuentra problemático en su mundo experiencial, ya que el conocimiento matemático es el resultado de la construcción activa del alumno. De la perspectiva social que tiene su origen en Vygotsky, se asume que el aprendizaje consiste en la enculturación en estructuras sociales preexistentes, ya que el sujeto es el objeto de prácticas culturales que tienen por objetivo la interiorización del conocimiento matemático.

Al estudiar el aprendizaje de los estudiantes, las perspectivas interaccionistas enfatizan tanto los procesos individuales de producción de sentido como los procesos sociales, ya que se concibe el desarrollo de la comprensión personal de los individuos a través de su participación en la negociación de las normas del aula, incluyendo las generales y las que son específicas de la actividad matemática. Voigt (1996) considera que para el interaccionismo, el aprendizaje individual no deriva de la interacción social, como se sugiere en las teorías de la socialización y de la internalización. Desde el punto de vista interaccionista, la interacción social no funciona como un vehículo que transforma el conocimiento objetivo en conocimiento subjetivo, sino que de hecho, la interacción social hace posible que las ideas subjetivas lleguen a ser compatibles con la cultura y con el conocimiento intersubjetivo como las matemáticas.

El punto de vista de Cobb y sus colaboradores es más proclive a la dimensión social. Uno de los temas de investigación que más les han interesado es la manera en que los aspectos sociales se relacionan con los aprendizajes de los alumnos en la clase. Esta relación se entiende como una relación bidireccional o de reflexividad (Cobb et al., 1997). A nivel del conocimiento, la relación de reflexividad conlleva dos componentes propias —una de restricción y una de posibilidad— que se ofrecen al alumno en la interacción con los otros y se moviliza por medio del discurso y del uso mediático de signos. La participación en una actividad de aula en la que se han de utilizar el discurso y los sistemas de signos constituye la condición para la posibilidad de aprendizaje, pero son los estudiantes los que efectivamente realizan el aprendizaje. La participación en este tipo de actividad es lo que hace posible y restringe la construcción matemática del sujeto, pero no la determina de manera mecánica. Para Cobb y sus colaboradores, esta forma de facilitación–restricción que tiene la dimensión social en el aprendizaje individual es una de las nociones básicas.

Los intentos de síntesis entre las posiciones centradas en el sujeto de inspiración piagetiana y las posiciones que consideran como punto de partida una intersubjetividad pre–dada en la que se forma el sujeto en un proceso de enculturación, no son fáciles, ya que es muy diferente partir del sujeto y considerar la interacción social, que considerar una intersubjetividad pre–dada que se ha estructurado históricamente en la que se forma el sujeto. En el primer caso se habla de interacción, mientras que en el segundo se habla de intersubjetividad. La controversia de Lerman con Steffe y Thompson ilustra claramente esta diferencia de interpretaciones de *lo social* (Lerman, 1996 y 2000b; Steffe y Thompson, 2000).

Como conclusión se puede decir que los enfoques cognitivistas centrados en el individuo y el constructivismo radical no han sido insensibles a los argumentos del constructivismo social. Una de las principales consecuencias de esta apertura hacia la perspectiva social en la construcción de significado del alumno, ha sido que una parte considerable de la investigación en Didáctica de las Matemáticas se ha ocupado de encontrar respuestas a la pregunta ¿cómo el profesor y los alumnos llegan a compartir significados matemáticos en el aula? La lista de investigaciones que han intentado contestar a esta pregunta investigando la interacción en el aula y más en general la cultura del aula sería muy extensa por lo que aquí nos limitaremos a mencionar que en el Departamento de Didáctica de la Matemática y de Ciencias Experimentales de la UAB se han presentado tres tesis sobre la interacción, dos de ellas sobre la interacción en el aula (Cobo, 1998; Meavilla, 1998) y la otra sobre la interacción que las nuevas tecnologías permiten en entornos interactivos (Murillo, 2001).

tres (4
referencias

Intentos de síntesis entre algunos programas semilocales

Entre los intentos de integración de enfoques diferentes desde posiciones de tipo sistémico, antropológico y semiótico realizados en España se destacan los trabajos del grupo de investigación denominado *Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica* (DMDC) constituido en el seno de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) en 1998. Sus actividades deben ser consideradas como una continuación y extensión de las iniciadas en 1991 por el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM) formado por unos treinta profesores pertenecientes a quince universidades. El grupo DMDC se propone potenciar las actividades del SIIDM y coordinarlas con los objetivos de la SEIEM y de los restantes grupos de investigación de dicha Sociedad. Los objetivos formulados inicialmente por el SIIDM y asumidos por el grupo DMDC son los siguientes:

1) Estudiar los trabajos relevantes sobre los fundamentos teóricos de la Didáctica de las Matemáticas, teniendo en cuenta las distintas aportaciones de otras disciplinas: matemáticas, epistemología, semiótica, pedagogía, psicología, sociología.

2) Analizar y confrontar las nociones básicas de la teoría de los campos conceptuales, de la teoría de las situaciones didácticas, de la teoría antropológica y de la teoría de las funciones semióticas.

3) Aplicar dichas teorías a problemas específicos de investigación didáctica. Estudiar la eficacia respectiva de cada una de ellas para identificar —y, en su caso, explicar— los fenómenos didácticos emergentes, así como para producir recursos didácticos tanto en el ámbito curricular como en el de la formación del profesorado de matemáticas.

4) Identificar los elementos básicos de una aproximación integrativa de los distintos enfoques que permita formular una agenda de investigación coherente y productiva en Didáctica de las Matemáticas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá: una empresa docente.

Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de alumnos de 2º de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilón, 24*, 9-22.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno, 4,* 53-61.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de los triángulos?. *Suma, 25,* 23-30.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona: Paidós.

Bloor, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona: Gedisa.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Castro, E. (1994). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. y Whitenack. J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 3, 258-277.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: University Press.

Cobo, P. (1998). Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Coll, C. (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*. Barcelona: Departament d'Ensenyament de la Generalitat.

Confrey, J. (1994). A theory of intellectual development. *For the Learning of Mathematics, 14* (3), 2-8.

Confrey, J. (1995a). A theory of intellectual development: part 2. *For the Learning of Mathematics, 15* (1), 38-48.

Confrey, J. (1995b). A theory of intellectual development: part 3. *For the Learning of Mathematics, 15* (2), 36-45.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8* (3), 25-41.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: Towards a social constructivist account. *Science and Education, 1* (1), 89-100.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, 1-14.

Ernest, P. (1998). Social constructivism as a philosophy of mathematics. En C. Alsina et al. (Eds.), *ICME 8 (1996). Selected lectures* (pp. 153-171). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

Font, V. (2000a). Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Font, V. (2000b). Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria. *La Lettre de la Preuve*, noviembre/diciembre 2000, (pp. 1-21). (En línea. Documento disponible en: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Font/Font00.pdf).

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18* (1), 7-34

Godino, J.D. (2000a). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. *Números*, *40.* (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/Teoria_Metodos/Consolidacion.htm).

Godino, J.D. (2000b). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno, 25,* 77-87.

Godino, J.D. (2001). Análisis semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Versión revisada del trabajo presentado en la Reunión del Grupo "*La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*". III Simposio de la SEIEM, Valladolid, septiembre de 1999. (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/ ~jgodino/semioesp/analisis_semiotico_didactico.PDF).

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *10.* (En línea. Documento disponible en: http://www.ex.ac.uk/ ~PErnest/pome10/art7.htm).

Godino, J.D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En J. Kilpatrick y A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics education as a research domain. A search for identity* (pp. 177- 195). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes. (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/ ~jgodino/ semioesp/funciones.htm).

Godino, J.D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12* (1), 70-92.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (vol. 3, pp. 3-1 a 3-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.

González Marí, J.L. (1998). Clasificación de problemas aditivos por su estructura numérica y semántica global. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas Primer Simposio SEIEM* (pp. 77-105). Granada: Universidad de Granada.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 133-150.

Lerman, S. (2000*a*). A case of interpretations of social: A response to Steffe and Thompson. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (2), 210-227.

Lerman, S. (2000*b*). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport: Ablex Publishing.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática em Portugal, España e Italia* (pp. 109-132). Lisboa: SEM-SPCE.

Meavilla, V. (1998). Algunas contribuciones al estudio de la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje del álgebra escolar. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Murillo, J. (2001). Un entorno interactivo de aprendizaje con cabri–actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Norman, D.A. (1987). Doce problemas para la ciencia cognitiva. En D.A. Norman (compilador), *Perspectivas de la ciencia cognitiva* (pp. 315-350). Barcelona: Paidós.

Norman, D.A., Rumelhart, D.E. y Grupo LNR (1975). *Explorations in cognition*. San Francisco: Freeman.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación–acción*. Granada: Comares.

Romero, I. (2000). *Representación y comprensión en pensamiento numérico*. Ponencia presentada al Seminario sobre Representación y comprensión. IV Simposio de la SEIEM. (En línea. Documento disponible en: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm).

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA, 4* (2), 117-151.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2000). Breaking political neutrality. The critical engagement of mathematics education with democracy. En B. Atweh, H. Forgasz, y B. Nebres (Eds.), *Socio-cultural aspects of mathematics education: An international research perspective*. Londres: Erlbaum.

Steffe, L.P. y Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 711-733.

Steffe, L.P. y Thompson, P.W. (2000). Interaction or intersubjectivity? A reply to Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (2), 191-209.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151-169.

Valero, P. (2000). *Reforma, democracia y educación matemática en la escuela secundaria*. Comunicación presentada a la XI-SIEM de Portugal. (En línea. Documento disponible en: http://correio.cc.fc.ul.pt/~jflm/xisiem/tpaola.doc).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10* (2, 3), 33-170.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 21-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. En F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 191-220). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

von Glasersfeld, E. (Ed.). (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism. A Way of Knowing and Learning*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L.S. (1987). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

Wittgenstein, L. (1983). *Investigacions Filosòfiques.* Barcelona: Laia

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Vicenç Font
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y
de las Ciencias Experimentales
Universidad de Barcelona
E-mail: vfont@d5.ub.es