DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ENSEÑADOS EN GRADO NOVENO.

GISELL ECHEVERRI ANDRADE
NATHALY ALEJANDRA SOMBREDERO PLAZA

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
CALI, 2014

Universidad
del Valle

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES ENSEÑADOS EN GRADO NOVENO.

GISELL ECHEVERRI ANDRADE

NATHALI ALEJANDRA SOMBREDERO PLAZA

DIRECTORES DE TRABAJO DE GRADO:

Héctor Jairo Martínez Romero, Ph.D

Maribel Patricia Anacona, Mg.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

CALI, 2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [x]
Director:	Hector Jairo Martinez Maribel Anacona
1er Evaluador:	Leonel Monroy
2do Evaluador:	María Eugenia Martinez
Fecha y Hora	Año: 2014 Mes: 10 Día: 01 Hora: 5:30 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
GISELL ECHEVERRI ANDRADE	200933178	3469
NATHALY ALEJANDRA SOMBREDERO PLAZA	200933592	3469

Evaluación

Aprobado	[ ]	Meritorio	[X]	Laureado	[ ]
Aprobado con recomendaciones	[ ]	No Aprobado	[ ]	Incompleto	[ ]

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo [ ] 1er Evaluador [ ] 2do Evaluador [ ]

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año: Mes: Día: Hora:

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

Hairo M. Maribel P. Anacona		María Eugenia Martínez
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Observaciones:		*Recomendaciones:*		*Razón del Desacuerdo – Alternativas:*	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Evaluación general

El trabajo de grado se considera en términos generales muy bueno. Hay mucha coherencia entre los propósitos y los desarrollos del trabajo. La temática abordada, sobre los sistemas de ecuaciones lineales, es un tema crucial de la educación básica y media. Su tratamiento exigió un esfuerzo adicional a las estudiantes.

La metodología adoptada se resalta como muy apropiada. En particular, las encuestas aplicadas a los profesores y estudiantes de las instituciones de educación media se consideran muy bien elaboradas.

Un trabajo de trabajo como éste, merece la pena que sea una referencia de consulta para los profesores de la educación básica y media, y para los profesores en formación. En los análisis y resultados, se destaca el papel que juega el docente y sus estrategias de enseñanza; las cuales inciden de manera definitiva en el proceso de formación.

De manera unánime los profesores, miembros del jurado evaluador, no sólo lo **aprueban** como Trabajo de Grado que cumple con todas las condiciones de calidad y rigor; sino que recomiendan la **Mención de Meritoria**.

Jairo M. Maribel P. Anacona	[signature]	María Eugenia Hoyos G.
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ■ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ■ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno.

Autores:

Nombre: Gisell Echeverri Andrade — Firma: Gisell Ed — C.C. 1130599030. de Cali

Nombre: Nathaly Sombredero P — Firma: Nathaly Sombredero — C.C. 1143800462 12

Nombre: ______ — Firma: ______ — C.C. ______

Fecha: ______

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

El siguiente trabajo se inscribe en la línea de formación en matemática y recibe el nombre de dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno.

Consta de 4 capítulos, en el Capítulo 1, se abordan las nociones y los conceptos que enmarcan los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución, con el fin de dar al lector la respectiva orientación sobre las nociones presentes a lo largo del trabajo. Luego, en Capítulo 2, tomando en cuenta las caracterizaciones y clasificaciones que hace Martin Socas, se hace una breve descripción de lo que son las dificultades en el aprendizaje y su clasificación. Después, en el Capítulo 3, se presentan los instrumentos de análisis utilizados para la realización del trabajo, se realiza el respectivo análisis de los resultados obtenidos con ellos. Posteriormente, en el Capítulo 4, se presenta un resumen de los principales hallazgos y conclusiones del trabajo. Finalmente, además de la bibliografía usada en el trabajo, se presentan como anexos los dos instrumentos usados y un resumen de la revisión histórica sobre los principales temas involucrados en el desarrollo de las ecuaciones lineales y sus métodos de solución.

Con el trabajo se pudo evidenciar distintas dificultades presentes no solo por parte del alumno sino también por parte del docente, dando así una herramienta para analizar cómo se puede desde el docente analizar los diferentes campos de acción para poder disminuir estas.

AGRADECIMIENTOS

A ***Dios*** por haberme permitido cursar mi carrera y lograr mis metas.

A ***Fabio Héctor*** y ***Leyda María***, mis muy queridos padres, quienes sembraron en mí el dulce habito del estudio.

A ***Héctor Jairo Martínez*** por toda su comprensión y por estar presente durante mi formación académica.

Gisell Echeverri Andrade

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en la línea de formación en Matemáticas del programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, y tiene como propósito indagar sobre la manera en que los colegios abordan el aprendizaje de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales, si bien hay un estándar curricular del pensamiento variacional que plantea la importancia de "identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales", al ver los planes curriculares de distintos colegios en Cali, todo indica que se pretende a este estándar tan solo con enseñar los algoritmos de un par de métodos de solución, dejando la parte conceptual y teórica de lado. Al no considerarse estos aspectos, es muy probable que los estudiantes queden con vacíos, los cuales van a causar en ellos dificultades que probablemente les van a afectar en la aprehensión de conocimientos presentes y futuros.

Los vacíos o falsos conocimientos durante el bachillerato puede tener implicaciones a largo plazo. Por ejemplo, es probable que en cursos futuros como el álgebra lineal que se les impartirá en las universidades, no tengan las suficientes bases para superar satisfactoriamente estos cursos, pues, solo observando las distintas estadísticas en la universidad, éste es uno de los cursos con más mortalidad académica ya que los estudiantes vienen con dificultades que no necesariamente superan durante el curso.

Dado todo lo anterior, se propone documentar mediante una encuesta a profesores y un examen a estudiantes, algunas de las dificultades que se establecen en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, en particular, en las diferentes formas de hallar la solución de estos.

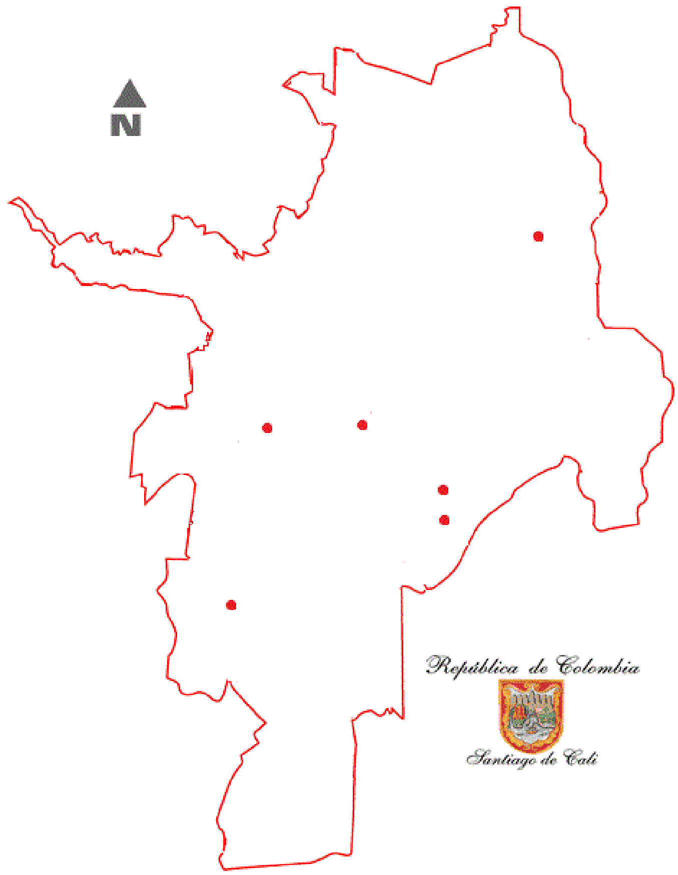
Los *sistemas de ecuaciones* lineales son una herramienta importante para el análisis y el manejo de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal y por tanto, de la matemática en general. Por esta razón, es importante que las bases que quedan en los alumnos desde el colegio sean firmes y no generen dificultades en aprendizajes futuros relacionados con este tema.

Con relación al estándar curricular mencionado con anterioridad se puede observar que se da la pauta para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución. Sin embargo, en gran parte de los colegios, se resuelve esta directriz con la explicación algorítmica y mecánica de las soluciones de los sistemas de ecuaciones por eliminación, reducción e igualación, dejando de lado las bases teóricas fundamentales que soportan estos procesos (Guerra, 2012).

En el presente trabajo, el propósito no es dar una solución mágica al problema de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales y sus respectivos métodos de solución; pero si interesa esencialmente responder la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las dificultades que se configuran durante el aprendizaje de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales en grado noveno? Para abordar esta pregunta, se tendrá como base una revisión matemática de los conceptos y nociones más relevantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. De igual forma, se hará una revisión histórica de estos conceptos.

En el proceso de indagación, se procede a realizar una entrevista a docentes y un examen diagnóstico a los estudiantes de algunos colegios en Cali (2 públicos y 3 privados), con el objetivo de documentar las experiencias y recoger la información necesaria.
Para percibir y analizar las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales, se ha tomado como contexto particular, los estudiantes de grado noveno de 6 instituciones educativas de la Ciudad de Santiago de Cali, las cuales fueron clasificadas para su escogencia de la siguiente forma: teniendo en cuenta los resultados de las pruebas de estado y la clasificación que da el ICFES a los colegios, se tomaron 2 colegios con nivel muy superior, 2 con nivel medio y 2 con nivel muy inferior, lo que permite tener un diagnóstico de una pequeña muestra.

Dentro de cada uno de los establecimientos educativos, se realizó una entrevista a los docentes del área de matemática y se hizo una evaluación diagnóstica a 20 estudiantes.



Ubicación de colegios

Una de las razones por las cuales los sistemas de ecuaciones lineales son importantes es porque son un pilar del Algebra Lineal, a partir del cual es posible construir y entender nuevos conceptos y por ello es imprescindible que el estudiante tenga claridad sobre estos y sus métodos de solución; sumando, además, la aplicabilidad que tienen los sistemas de ecuaciones en diversas áreas como economía, ciencias, ingeniería, entre otras.

Al revisar las estadísticas con respecto al número de estudiantes que ven el curso de Álgebra Lineal en la universidad, es fácil ver que un alto porcentaje reprueban este curso, y gran parte de la responsabilidad de estos resultados, es de los procesos académicos que se llevan en el bachillerato, ya que a pesar de ser uno de los primeros cursos que se ven en la universidad y que está ligado a gran cantidad de temas vistos en grado octavo y noveno, pareciera que no se llega con bases lo suficientemente fuertes para apropiarse de los nuevos conocimientos, al revisar los resultados de los instrumentos de análisis podremos ver qué la forma como el profesor imparte la clase tiene mucho impacto en el estudiante y lo que aprende.

Cada uno de los conceptos y nociones relacionados con los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales llenan de posibilidades los campos de aplicación de las matemáticas; una pequeña muestra es la noción de matriz, la cual permite organizar de manera eficaz gran cantidad de información, como ocurre en muchas aplicaciones como la criptografía, los juegos digitales, los procesos de producción, etc.

A partir de la importancia de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y la solución de los mismos, diferentes autores han hecho estudios sobre el tema, como la tesis de maestría de Aníbal Guerra, donde realiza una propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales; así mismo, Jean Luc-Dorier ha realizado diversas investigaciones donde aborda los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución desde el punto de vista tanto escolar como universitario.

Por lo dicho con anterioridad, se reviste de importancia la investigación en este campo para que se pueda, con diferentes aportes, ir superando, o al menos ir aminorando, los problemas presentes en los alumnos y así evitar que en futuros conceptos sean mayores las dificultades y menos viable la superación de estos.

El objetivo general del trabajo es identificar y analizar las dificultades presentes en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en grado noveno. Otros propósitos específicos son, realizar una conceptualización matemática de los conceptos y nociones relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales $n \times n$; además, adelantar un examen diagnóstico a estudiantes y una encuesta a profesores, de grado noveno, en cinco instituciones educativas que permita identificar las dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales; luego, elaborar un comentario educativo que aporte elementos para la enseñanza de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de grado noveno, y finalmente, hacer una revisión histórica del surgimiento de las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales.

Después de esta introducción, el desarrollo de este trabajo se presenta de la siguiente forma: En el Capítulo 1, se abordan las nociones y los conceptos que enmarcan los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución, con el fin de dar al lector la respectiva orientación sobre las nociones presentes a lo largo del trabajo. Luego, en Capítulo 2, tomando en cuenta las caracterizaciones y clasificaciones que hace Martin Socas, se hace una breve descripción de lo que son las dificultades en el aprendizaje y su clasificación. Después, en el Capítulo 3, se presentan los instrumentos de análisis utilizados para la realización del trabajo, se realiza el respectivo análisis de los resultados obtenidos con ellos. Posteriormente, en el Capítulo 4, se presenta un resumen de los principales hallazgos y conclusiones del trabajo. Finalmente, además de la bibliografía usada en el trabajo, se presentan como anexos los dos instrumentos usados y un resumen de la revisión histórica sobre los principales temas involucrados en el desarrollo de las ecuaciones lineales y sus métodos de solución.

1. CONCEPTUALIZACIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo, se exponen los conceptos básicos alrededor de los métodos de solución de *sistemas de ecuaciones lineales*. Si bien estos temas se encuentran ampliamente desarrollados en los textos de algebra lineal, su incorporación en el documento responde a la necesidad de que el presente trabajo de grado sea autocontenido, en aras de facilitar su lectura.

Para la presentación de estos conceptos hemos escogido como texto de referencia el libro del profesor Héctor Jairo Martínez, profesor del departamento de matemáticas de la universidad del valle (Martínez, 2013).

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Los *sistemas de ecuaciones lineales* son de gran importancia ya que por medio de ellos se puede resolver gran cantidad de situaciones presentes en la vida diaria, por ello, desde la escuela se involucra al estudiante con algunos métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales y, aún más importante que esto, es que ellos tengan claros los conceptos y nociones presentes (*variable, constante, ecuación, ecuación lineal, solución de una ecuación lineal*, *sistema de ecuaciones lineales*, entre otros) y que esbozamos a continuación.

1.1.1. Conceptos fundamentales

Definición 1 [Variable]. Se consideran tres formas distintas en las que la *variable* suele usarse en el álgebra escolar y que se caracteriza de la siguiente manera:

> la variable como incógnita, cuyo valor se puede determinar con exactitud tomando en consideración las restricciones del problema; la variable como número general, es decir, aquélla que aparece en generalizaciones y en métodos generales; y la variable en una relación de variación conjunta con otras variables que denominaremos variable en relación funcional. (Trigueros, 1956, p.351)

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, se utiliza la variable como incógnita.

Definición 2 [Expresión matemática]. Una *expresión matemática* es una lista ordenada de símbolos matemáticos con una sintaxis establecida que emplea variables, constantes, operaciones matemáticas y signos de agrupación.

Ejemplo 1.
A continuación, se muestran dos expresiones algebraicas:

$*\ \mathbf{3x+2y}$ (Variables x y y, constantes 3 y 2 , como operación la suma)
$*\ \mathbf{8(m-4n)}$(Variables m y n , contantes 8 y -4, como operación suma y producto)

Definición 3 [Ecuación]. "Una *ecuación* con incógnitas o variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es una proposición abierta que establece la igualdad entre dos *expresiones matemáticas*." (Martínez, 2013, p.1)
Observemos las siguientes igualdades

i.	$3x+4y=\frac{z}{2}+2y$	-Es una ecuación, con x, y y z como variables.
ii.	$\frac{3}{8}+\sqrt{9}=\frac{27}{8}$	-Se puede contemplar como una ecuación con cualquier número de variables. Por ejemplo, se puede escribir con 3 variables: $(0x_1+\frac{3}{8}+0x_2+\sqrt{9}=\frac{27}{8}+0x_3)$.
iii.	$\frac{24}{32}+\frac{2}{3}=4$	-De la misma forma que (2), se puede tomar como una ecuación con dos variables $(0m^2+\frac{24}{32}+\frac{2}{3}=0p^3+4)$

Definición 4 [Solución de una ecuación]. La *solución de una ecuación* con *variables* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es una lista ordenada de n valores, los cuales al sustituir por la variable

respectiva, se obtiene una proposición verdadera. Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lo llamamos *conjunto solución*.

A continuación, se muestra una solución de las Ecuaciones (i), (ii) y (iii).

Ejemplo 2.

La tripla (1, 1,10) es una solución de la Ecuación (i), ya que al reemplazar $x = 1, y = 1$ y $z = 10$, en la Ecuación (i), se obtiene

$$3x + 4y = \frac{z}{2} + 2y$$

$$3(1) + 4(1) = \frac{10}{2} + 2(1)$$

$$7 = 7$$

Así se puede confirmar que la tripla (1, 1,10) cumple con la condición para ser solución de la Ecuación (i).

Ejemplo 3.

En el caso de la Ecuación (ii), no importa qué valores tomen las variables, se obtiene la identidad $\frac{27}{8} = \frac{27}{8}$, por lo tanto, cualquier valor de las variables, en el conjunto de referencia, constituyen una solución.

Ejemplo 4.

Contrario a lo ocurrido en la Ecuación (ii), en la Ecuación (iii), se observa que no importa qué valores se asignen a las variables, el resultado no será nunca una identidad, puesto que

$$\frac{24}{32} + \frac{2}{3} = 4$$

$$\frac{17}{12} = 4.$$

Por lo tanto, la Ecuación (iii) no tiene solución.

Definición 5 [Ecuación lineal]. Es una ecuación que tiene una variable por cada término y cada término tiene como grado1 ó 0. Esta ecuación se puede escribir de la forma canónica $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde $a_1, a_2, .., a_n$ son los coeficientes, $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables y b es el término independiente. Si $b = 0$, se denomina ecuación lineal homogénea.

Ejemplo 5

La igualdad $4x - 5y = 3$ es una ecuación lineal en su forma canónica, donde 3 es el termino independiente, 4 es el coeficiente de x y -5 es el coeficiente de y. En este caso, el conjunto solución es $\left\{\left(\frac{3+5t}{4}, t\right), t\epsilon\boldsymbol{R}\right\}$; es decir, todas las duplas que surjan al reemplazar el parámetro t con un número real. Por ejemplo $\left(1, \frac{1}{5}\right)$ y $\left(\frac{23}{4}, 4\right)$. La ecuación lineal homogénea asociada es $4x - 5y = 0$.

Ejemplo 6.

La igualdad $7x_1 - 4 = 3x_2 + 8$ es una ecuación lineal que no está en su forma canónica, pero, al reducir sus términos semejantes, se puede obtener la siguiente ecuación que es equivalente a la inicial $7x_1 - 3x_2 = 12$, donde el conjunto solución de ambas es $\left\{\left(\frac{12+3t}{7}, t\right), t\epsilon\boldsymbol{R}\right\}$.

Definición 6 [Sistema de ecuaciones lineales].

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, \dots, x_n$ (sistema de ecuaciones lineales $m \times n$) es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

(Martínez, 2013, p.3)

El número α_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la ecuación i, y b_i es el término independiente de la ecuación i. Cuando todos los términos independientes b_i son 0, el sistema lo llamamos homogéneo. (Martínez, 2013, p.3)

Ejemplo 7.
El conjunto de Ecuaciones

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

es un sistema de ecuaciones lineales 2× 3; es decir, con dos ecuaciones y tres incógnitas x, y, z.

En el siguiente caso, se tiene un sistema de ecuaciones 3×3. (3 ecuaciones, 3 incógnitas).

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 7 \\ x + 3y - z &= 12 \\ 2x + 3y + 3z &= -1 \end{aligned} \tag{3}$$

Al igual que en las ecuaciones, en los *sistemas de ecuaciones lineales*, también se tiene solución la cual se define a continuación.

Definición 7 [Solución de un sistema de ecuaciones lineales]. La solución de un sistema de ecuaciones lineales con variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una lista ordenada de n números que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. El conjunto de todas las soluciones del sistema se le llama *conjunto solución*.

Ejemplo 8.
Las triplas (-1, 3, 2) y (1, 3, -2) son solución de los Sistemas (2) y (3), respectivamente. Se observa, que al reemplazar x, y, z en los sistemas por los respectivos valores, se obtiene

$$\begin{aligned} -1(-1) + 1(3) - 1(2) &= 2 \\ 1\,(-1) - 1(3) + 2(2) &= 0 \end{aligned} \qquad es\ decir, \qquad \begin{aligned} 2 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3(1) + 2(3) + 1(-2) &= \ \ 7 \\ 1(1) + 3(3) - 1(-2) &= 12 \\ 2(1) + 1(3) + 3(-2) &= -1 \end{aligned} \qquad es\ decir, \qquad \begin{aligned} 7 &= 7 \\ 12 &= 12 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

También podemos observar que la tripla (1, -3, 2) no es solución,

$$\begin{aligned} -1(1) + 1(-3) - 1(2) &= 2 \\ 1\,(1) - 1(-3) + 2(2) &= 0 \end{aligned} \qquad es\ decir, \qquad \begin{aligned} -6 &= 2 \\ 8 &= 0 \end{aligned}$$

Se observa que, desde el punto de vista geométrico, se puede representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como la intersección de todos los *lugares geométricos*[1] representados por cada una de las ecuaciones lineales.

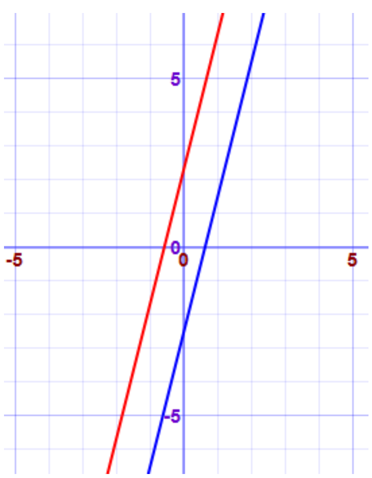
Ejemplo 9.

Los siguientes sistemas de ecuaciones lineales 2×2, tienen distinto tipo de conjunto solución y cada una de ellas se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

Conjunto solución vacío

(a)

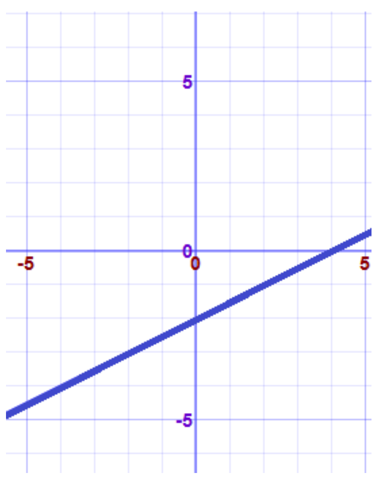
$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{aligned}$$



Conjunto solución infinito

(b)

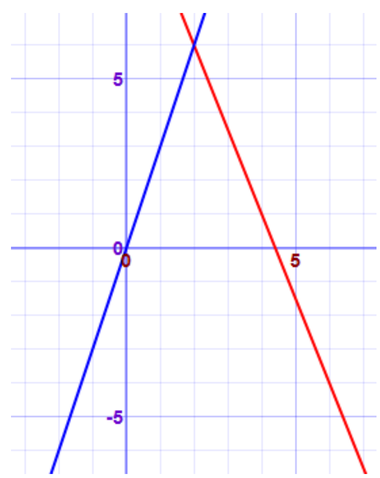
$$\begin{aligned} 3x - 6y &= 12 \\ 4x - 8y &= 16 \end{aligned}$$



Conjunto solución unitario

(c)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned}$$



[1] Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas.

(a) Este sistema de ecuaciones lineales se representa geométricamente por dos rectas paralelas en el plano; es decir, que no existe solución ya que no se cortan. Este sistema tiene conjunto solucion **vacio**.

(b) Este sistema de ecuaciones lineales se representa geométricamente por una misma recta, así que las coordenadas de cualquier punto en la recta que representa a este sistema son solución del mismo. Este sistema tiene conjunto solución **infinito**.

(c) Este sistema de ecuaciones lineales se representa geométricamente por dos rectas no paralelas, las cuales generan una interseccion en el punto (2,6), siendo ésta la solución del sistema. Este sistema tiene conjunto solución **unitario**.

Definicion 8 [Sistema de ecuaciones lineales consistente]. Un sistema de ecuaciones lineales consistente es aquel que tiene al menos una solución.

Por ejemplo, Los sistemas de ecuaciones (b) y (c) del ejemplo 9 son consistentes

Definicion 9 [Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes]. Todo par de sistemas de ecuaciones lineales que tengan el mismo conjunto solución son equivalentes, sin importar si no tienen igual número de ecuaciones .

Ejemplo 10.

Sean los sistemas de ecuaciones lineales

(4)

$$\begin{aligned} x + 2y + 7z &= 1 \\ -x + y - z &= 2 \\ 3x - 2y + 5z &= -5 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} 3y + 6z &= 3 \\ x + 2y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

Si se resuelve ambos sistemas, encontramos que el conjunto solución de ambos es $\{(-3z-1, -2z+1, z), z \in \boldsymbol{R}\}$, por lo tanto son equivalentes.

Es posible demostrar que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, puesto que se llega del uno al otro realizando un procedimiento de eliminación, el cual es reversible, y es por ello que el conjunto solución para ambos es el mismo.

(6)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Aunque (6) y (7) son *sistemas equivalentes*, se puede ver que el sistema (7) es más fácil de resolver. En efecto, en él, solo se debe despejar la segunda variable en la segunda ecuación y luego se reemplaza el valor encontrado en la primera ecuación, para luego despejar a x_1, y finalmente se obtiene la solución del sistema; es decir,

$$\begin{aligned} -2x_2 &= -1 \\ x_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

y luego, $x_1 + 1/2 = 2$ de donde,

$$x_1 = 3/2$$

Se puede despejar cada una de las variables pivotales[2] de cada ecuación y se halla fácilmente el conjunto solución, cuando se tiene un sistema como él (7), con "patrón escalonado"[3].

> El procedimiento empleado para resolver este último sistema se conoce como *sustitución hacia atrás*; por lo tanto, la idea básica para resolver un sistema cualquiera consiste en "transformar" el sistema dado en otro equivalente que tenga el "patrón escalonado", el cual, será fácil de resolver. Esta idea es lo que en el bachillerato llamamos método de eliminación. (Martínez, 2013, p.6)

Ejemplo 11.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones 3×3.

(8)

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 10 \\ 3x - y + 5z &= 14 \end{aligned}$$

*Se suma la segunda ecuación y la primera multiplicada por -1, y el resultado reemplaza a la segunda

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 3y - 5z &= 6 \\ 2y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

[2] En una ecuación lineal, al primer coeficiente diferente de cero lo llamamos pivote y la variable correspondiente *variable pivotal*.

[3] Se dice que un sistema de m ecuaciones y n incognitas es escalonado o con "patrón escalonado", cuando cada pivote está en una columna más a la derecha que el anterior.

ecuación. Se suma la tercera ecuación y la primera ecuación multiplicada por -3 y el resultado reemplaza a la tercera ecuación.

En este sistema, se realiza el mismo procedimiento que en el sistema anterior, solo que con la segunda y tercera ecuación, para obtener un sistema de ecuaciones lineales equivalente con "patrón escalonado".

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 3y - 5z &= 6 \\ -\tfrac{2}{3}z &= -2 \end{aligned}$$

Habiendo realizado lo anterior, es fácil ver que aplicando sustitución hacia atrás, la solución del sistema es (2, 7, 3). Si se observa en el último sistema, cada una de las ecuaciones tiene una variable pivotal diferente, la cual siempre se puede despejar, facilitando encontrar el *conjunto solución*.

Todos los sistemas del ejemplo son equivalentes; por tanto, la solución del último sistema es también solución de los otros sistemas y, más importante aún, del sistema que se tiene inicialmente.

Se puede notar que en el procedimiento anterior utilizamos unas operaciones las cuales reciben el nombre de *operaciones elementales entre ecuaciones*, y son de tres tipos eliminación, escalamiento y permutación, y son definidas a continuación.

Definición 10 [Operaciones elementales entre ecuaciones].

Dado un sistema de ecuaciones lineales, llamamos operaciones elementales entre ecuaciones a cada uno de los siguientes procedimientos:

1. *Escalamiento:* Reemplazar la ecuación i, E_i, por un múltiplo de ésta, $cE_i, c \neq 0: cE_i \to E_i$.
2. *Eliminación:* Reemplazar la ecuación i, E_i, por la suma de ésta con un múltiplo de otra, $cE_j: E_i + cE_j \to E_i$.
3. *Permutación:* Intercambiar las ecuaciones i y j, E_i y $E_j: E_i \leftrightarrow E_j$. (Martínez, 2013, p.7)

Ejemplo 12.

En el Ejemplo 11, se aplica las operaciones elementales entre ecuaciones que se muestran a continuación,

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= 10 \\ 3x - y + 5z &= 14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E_2 - E_1 &\to E_2 \\ E_3 - 3E_1 &\to E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 3y - 5z &= 6 \\ 2y - 4z &= 2 \end{aligned} \qquad E_3 - \frac{2}{3}E_2 = E_3$$

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 3y - 5z &= 6 \\ -\frac{2}{3}z &= -2 \end{aligned}$$

1.1.2. Representación Matricial de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Como se ha podido observar en los ejemplos anteriores, cuando se resuelve un *Sistema de Ecuaciones Lineales*, los que realmente intervienen en la ejecución del procedimiento, son los coeficientes de las variables de cada una de las ecuaciones y los términos independientes (las variables solo indican posiciones). De forma que se puede utilizar solo los coeficientes de las variables y los términos independientes para hallar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

> Para tal efecto, llamamos matriz de coeficientes del sistema (o simplemente, matriz del sistema) al arreglo rectangular de números formado por los coeficientes de las variables, de tal forma que cada fila corresponda a una ecuación y cada columna a una variable, y matriz aumentada del sistema, al arreglo rectangular de números formado por la matriz del sistema y una columna adicional conformada por los términos independientes. De esta forma, la matriz de un sistema con *m* ecuaciones y *n* variables tendrá *m* filas y *n* columnas, lo cual denotamos diciendo que el tamaño de la matriz es $m \times n$. (Martínez, 2013, p.7)

Así, la *matriz del sistema* y la *matriz aumentada del sistema* del Ejemplo 11 son:

Matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

La forma general de la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema, respectivamente, son

Forma general de la matriz de coeficientes de un sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Forma general de la matriz aumentada de coeficientes de un sistema[4]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La matriz aumentada del sistema es una representación simplificada del sistema de ecuaciones lineales. En esta medida, se llamará pivote[5] al primer elemento de la fila, de izquierda a derecha, distinto de cero. En los sistemas, se utilizan las operaciones elementales entre ecuaciones; para la matriz, reciben el nombre de operaciones entre filas.

Definición 11 [Operaciones elementales entre filas]. Dada una matriz, llamamos operaciones elementales entre filas a cada uno de los siguientes procedimientos:

1. Escalamiento. Reemplazar la fila i, F_i, por un múltiplo de ésta, $cF_i, c \neq 0: cF_i \to F_i$.
2. Eliminación. Reemplazar la fila i, F_i, por la suma de ésta con un múltiplo de otra,
   $cF_j: F_i + cF_j \to Fi$.
3. Permutación. Intercambiar las filas i y j, F_i y F_j: $F_i \leftrightarrow F_j$. (Martínez, 2013, p.7)

[4] En la matriz aumentada, así no se muestre la línea vertical, la última columna es la que corresponde a los términos independientes del sistema.

[5] Teniendo en cuenta que el primer elemento de las filas es el pivote, en el caso de las matrices, el pivote si puede ser el término independiente.

En el Ejemplo 11, las operaciones realizadas entre ecuaciones corresponden a las siguientes operaciones entre filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad E_3 - \frac{2}{3}E_2 = E_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2 \end{array}\right)$$

Al igual que en los *sistemas de ecuaciones lineales,* en las matrices también hay matrices equivalentes, ya que las matrices provienen de los sistemas.

Definición 12 [Matrices equivalentes]. Dos matrices son equivalentes, si al realizar operaciones entre filas a una de ellas, se obtiene la otra.

1.1.3. Eliminación de Gauss

La eliminación de Gauss es un método directo para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En resumen, consiste en transformar la matriz aumentada del sistema en otra matriz con patrón escalonado. A continuación, se presentan con detalle los conceptos y nociones involucradas en este método.

Definición 13 [Matriz escalonada]. Una Matriz es escalonada si cumple con las siguientes particularidades:

1. Todas las filas que tengan ceros en todas sus *componentes* van en la parte inferior de la matriz.

2. En las filas cuyos componentes no sean todas cero, los pivotes deben ir a la derecha de la columna del pivote que está en la fila anterior.

Se observa que cada fila tiene un único pivote, o en caso de que todos los componentes de la fila sean 0, esta fila no tendrá pivote.

Ejemplo 13.

De las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{4} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -5 \\ 0 & \mathbf{4} & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & -3 & 11 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 4 & -6 \\ 0 & \mathbf{3} & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se puede ver que la primera, segunda, cuarta y quinta cumplen con las propiedades para ser matrices escalonadas, ya que los pivotes están a la izquierda de los pivotes de las filas siguientes, mientras que la tercera, a pesar de tener la fila que tiene todos los componentes cero en la parte inferior, la primera fila tiene el pivote a la derecha de la segunda fila.

Método de eliminación de Gauss

La intención de este método es llevar una *matriz* dada, a una *matriz escalonada equivalente* a la dada inicialmente. Para ello, se debe seguir los siguientes instrucciones:

1) Se ubica la primera columna, de izquierda a derecha, que no tenga solo ceros.
2) Si la primera componente de esta columna es cero, se debe intercambiar la fila dónde está esa componente cero con otra que no tenga cero en esta columna, y esa componente será el pivote de la columna.
3) Utilizando la fila que tiene la componente pivotal, se realizan las respectivas operaciones elementales entre filas, para obtener ceros debajo del pivote de esta columna.

4) Se debe repetir el procedimiento desde el paso inicial, con las filas de la matriz que se obtiene como resultado del paso anterior y que están debajo de la fila donde está el pivote del paso anterior.

Ejemplo 14.

Aplicar el método de eliminación de Gauss a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que la primera columna, de izquierda a derecha, no sea cero; al verificar esto, se ve que, en la primera columna, 2 es el pivote; luego se debe buscar que debajo del pivote hayan ceros y para ello se realizan las operaciones elementales entre filas pertinentes.

$$\begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se repite de nuevo el proceso, pero ahora con las filas 2, 3 y 4, usando como segundo pivote el -2 de la fila 2, se obtiene la siguiente matriz.

$$\begin{matrix} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - F_2 \to F_4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, se repite pero con las filas 3 y 4 y usando como tercer pivote el -3 de la fila 3, finalmente se obtiene.

$$F_4 + \frac{4}{3}F_3 = F_4 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.

Ejemplo 15.

Aplicar el método de eliminación de Gauss a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que la primera columna, de izquierda a derecha, no sea cero; al verificar esto, se ve que, en la primera columna, 1 es el pivote; luego se debe buscar que debajo del pivote hayan ceros y para ello se realizan las operaciones elementales entre filas pertinentes.

$$F_3 + 2F_1 \to F_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Se debe repetir el procedimiento desde el paso inicial con las filas 2 y 3; en este caso, se observa que la primera columna, de izquierda a derecha, que no tiene solo ceros es la segunda, pero el primer elemento de esta columna es cero, entonces se intercambia las filas 2 y 3.

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Se verifica que haya solo ceros debajo de cada uno de los pivotes y finalmente, se obtiene una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.

Teniendo en cuenta el proceso de escalonamiento que se realiza en los ejemplos 14 y 15, se puede resumir los pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la siguiente forma:

1. Se escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Se utiliza el método de eliminación de Gauss para llevar la matriz aumentada a una matriz escalonada equivalente a la inicial. Se verifica que no hayan pivotes en la columna de términos independientes (puesto que si hay pivotes en ésta, el conjunto solución sería vacío).
3. Se aplica sustitución hacia atrás para encontrar el conjunto solución.

Se observa que un *sistema de ecuaciones lineales*, donde la matriz asociada es escalonada, tiene solamente un pivote por cada columna o no tiene. Se llama variables pivotales del sistema a las variables del sistema correspondientes a las columnas que son pivotales en la matriz, y las variables libres son aquellas restantes que no son pivotales.

Ejemplo 16.

(a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y - 1z &= 3 \\ 4x - 1y + 2z &= 5 \\ 2x - 3y - 2z &= 2 \end{aligned} \tag{9}$$

-Se escribe la matriz aumentada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

-Se utiliza el método de eliminación de Gauss en la matriz anterior.

$$\begin{array}{l} F_2 - 4F_1 \to F_2 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 7/9\, F_2 \to F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 14/9 & 13/9 \end{array}\right)$$

Variables pivotales x, y y z, (en este ejemplo no hay variables libres).

-Se aplica sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -9y - 2z &= -7 \\ \tfrac{14}{9} z &= \tfrac{13}{9} \end{aligned} \qquad z = \frac{13}{14}, \quad y = -\frac{72}{14}, \; x = -\frac{89}{14}$$

La solución del sistema es $\left(-\frac{89}{14},-\frac{72}{14},\frac{13}{14}\right)$. El sistema tiene solución única.

(b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

(10)
$$\begin{aligned} x-2y+z&=3\\ -3x+6y-z&=2 \end{aligned}$$

-Se escribe la matriz aumentada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3\\ -3 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

-Se utiliza el método de eliminación de Gauss en la matriz.

$$F_2+3F_1\rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Variables pivotales $x\ y\ z$, variable libre y.

-Se aplica sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x-2y-z&=3\\ 2z&=11 \end{aligned} \qquad z=\frac{11}{2}$$

$$x=\frac{17}{2}+2y$$

El conjunto solución del sistema es $\{(\frac{17}{2}+2y,y,\frac{11}{2}),\ y\ \in R\ \}$. El sistema tiene infinitas soluciones.

(c) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

(11)
$$\begin{aligned} x-3y&=1\\ -2x+6y&=5 \end{aligned}$$

- Se escribe la matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

- Se utiliza el método de eliminación de Gauss en la matriz anterior.

$$F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

- Hay un pivote en la columna de términos independientes, por tanto el sistema no tiene solución.

Otro método de solución para *sistemas de ecuaciones lineales* es la eliminación de *Gauss-Jordan*; este método de solución intercala la sustitución hacia atrás y la eliminación de Gauss, lo que genera que se aumente el número de operaciones, convirtiéndolo en un método ineficiente, sin contar que si el sistema no tiene solución, se realizan muchas operaciones que no serían necesarias con el método de Gauss para llegar a esa conclusión.

1.1.4. Solución simultanea de sistemas de ecuaciones lineales

Si se tienen dos o más sistemas que tengan la misma matriz de coeficientes y diferentes columnas de términos independientes, no es necesario resolver cada sistema por separado; se pueden resolver simultáneamente los sistemas, ahorrando tiempo, al minimizar el número de operaciones a realizar.

Ejemplo 17.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

(12)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 4 \\ -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= -3 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

Se observa que los 3 sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, por lo tanto,

1. Se escribe la matriz aumentada conjunta de estos tres sistemas de ecuaciones lineales.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

2. Se aplican las operaciones elementales para llevarlo a una forma escalonada.

$$\begin{array}{c} F_2 + F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

$$F_3 + F_2 \rightarrow F_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

3. Como en la matriz de coeficientes, en la fila 3, aparecen solo ceros, se puede identificar cual o cuales sistemas no tienen solución para excluirlos, y la manera de darse cuenta es que en la columna de términos independientes de cada sistema haya un pivote. Por tal motivo, los sistemas inconsistentes son el (16) y el (17), quedando solo el sistema (15).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

4. Finalmente se despejan las variables pivótales (x y y) para hallar el conjunto solución del sistema (15).

$$\left\{\left(\frac{-z+4}{3}, \frac{z+5}{3}, z\right) : z \in \boldsymbol{R}\right\}$$

Se puede ver que, independientemente de que los sistemas tengan la misma matriz de coeficientes, el conjunto solución de cada sistema es distinto.

1.2. Métodos de eliminación usados en grado noveno

Cuando los estudiantes están en el grado noveno de la educación básica, tienen un primer acercamiento a los sistemas de ecuaciones lineales; en ese momento, se trabaja con sistemas 2×2 y a lo sumo 3×3 para los cuales utilizan unos métodos que son variaciones de la eliminación de Gauss; a estos métodos se les llama método de igualación, reducción y sustitución. Por simplicidad, se van a explicar los métodos usando sistemas 2×2.

A continuación, se presenta cada uno de estos métodos.

1.2.1. Método de igualación

Este método consiste en despejar, de cada una de las ecuaciones del sistema, una de las variables y luego se igualan entre si las expresiones que se obtienen al despejar la variable, obteniendo una ecuación con una variable; luego se resuelve dicha ecuación y así se obtiene el valor de una de las variables; este valor se reemplaza en una de las expresiones obtenidas al despejar la variable, y así se halla el valor de la otra variable.

Ejemplo 22.

$$\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases} \tag{13}$$

En primera instancia, se debe escoger una de las variables para despejar en ambas ecuaciones del sistema, se toma la variable x.

$$\begin{aligned} x + 6y &= 27 \\ x &= 27 - 6y \\ x &= -6y + 27 \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} 7x - 3y &= 9 \\ 7x &= 9 + 3y \\ x &= \tfrac{3y+9}{7} \end{aligned}$$

Ahora, se toman las expresiones obtenidas en el despeje, se igualan, se resuelve la ecuación y así se obtiene el valor de y.

$$\begin{aligned} -6y + 27 &= \frac{3y+9}{7} \\ -42y + 189 &= 3y + 9 \\ -42y - 3y &= 9 - 189 \end{aligned}$$

$$y = \frac{180}{45}$$

$$y = 4$$

Luego, se reemplaza el valor de y en una de las dos expresiones obtenidas en el despeje de x, y se encuentra el valor de x.

$$x = -6y + 27$$

$$x = -6(4) + 27$$

$$x = 3$$

Finalmente, se obtiene la solución del sistema, la cual es (3,4).

1.2.2. Método de sustitución

En este método, el procedimiento cambia un poco; se despeja una de las variables de una de las ecuaciones y se reemplaza en la otra ecuación; luego, se resuelve la ecuación resultante, y se halla el valor de una de las dos variables; este valor, se reemplaza en la expresión obtenida al despejar y se encuentra el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 23.

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} \tag{14}$$

Se despeja una de las dos variables, en una de las dos ecuaciones, en este caso, se despeja y de la primera ecuación.

$$3x + y = 6$$

$$y = 6 - 3x.$$

Ahora, la expresión resultante se sustituye en la Ecuación 2 y, se resuelve la ecuación obtenida, se despeja x, y se encuentra el valor de x.

$$5x - 2y = 13$$

$$5x - 2(6 - 3x) = 13$$

$$5x + 6x = 13 + 12$$

$$x = \frac{25}{11}$$

Habiendo obtenido el valor de x, se reemplaza en la expresión que obtuvo al despejar y se encuentra el valor de y.

$$y = 6 - 3x$$
$$y = 6 - 3\left(\frac{25}{11}\right)$$
$$y = -\frac{9}{11}$$

Finalmente, se obtiene la solución del sistema, la cual es $\left(\frac{25}{11}, -\frac{9}{11}\right)$.

1.2.3. Método de reducción

Este método consiste en convertir en opuestos los coeficientes de una variable en ambas ecuaciones y luego se suma ambas ecuaciones para eliminar la variable escogida; luego se resuelve la ecuación resultante de la suma anterior y así se halla el valor de una de las variables. Este valor se reemplaza en una de las ecuaciones iniciales, la cual se resuelve para así hallar el valor de la otra variable.

Ejemplo 24.

$$\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases} \tag{15}$$

Se multiplica la segunda ecuación por 7, y se obtiene el opuesto del coeficiente de la variable x de la ecuación 1.

$$(\mathbf{7})(-x - 6y) = 8(\mathbf{7})$$
$$-7x - 42y = 56$$

Después, se procede a reemplazar la ecuación resultante de la multiplicación por la ecuación 2 y se suma las ecuaciones, eliminando así la variable x; se resuelve la ecuación resultante y así se halla el valor de y.

$$\begin{array}{r} 7x - 15y = 1 \\ \underline{-7x - 42y = 56} \end{array}$$

$$-57y = 57$$
$$y = -1$$

Ahora, se reemplaza el valor de y en una de las ecuaciones iniciales, y se halla el valor de la variable x.

$$-x - 6y = 8$$
$$-x - 6(-1) = 8$$
$$-x + 6 = 8$$
$$x = -2$$

Finalmente, se obtiene la solución del sistema, la cual es (-2,-1).

1.3. Determinantes

Los determinantes surgieron en la matemática mucho más de un siglo antes que las matrices; estos se utilizaban para el desarrollo de problemas prácticos, pero gracias a que se han desarrollado métodos menos costosos, han dejado de ser utilizados con la frecuencia de sus inicios. Los determinantes tienen una gran importancia teórica y una historia bien enmarcada por grandes matemáticos, por esto es importante su estudio.

Definición 1 [Menor]. En una matriz A de tamaño $n \times n$, se denota M_{ij} al menor (i, j) de A, como la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de excluir la fila i y la columna j de la matriz A.

Ejemplo 18.

Encontrar los menores M_{12} y M_{21} de la matriz B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Se excluye la primera fila y la segunda columna de B, se obtiene M_{12} , el menor (1,2) de la matriz B,

$$M_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y al excluir la segunda fila y la primera columna de B, se obtiene M_{21}, el menor (2,1) de la matriz B,

$$M_{21}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Definición 2 [Determinante].

> Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Definimos $det(\alpha)$, el determinante de una matriz 1 × 1, como α para todo $\alpha \in \boldsymbol{R}$ y $det\ A$, el determinante de A, como la suma de los productos de a_{1j}, la j-ésima componente de la primera fila de la matriz A, por $det\ M_{1j}$, el determinante del menor $(1, j)$ de A, multiplicado por $(-1)^{1+j}$; es decir,
> $det(\alpha) = \alpha, \alpha \in R$
> $det\ A = \alpha_{11}\ det\ M_{11} - \alpha_{12}\ det\ M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}\alpha_{1n} det\ M_{1n}$.

Otra manera de denotar el determinante de la matriz A es $|A|$. (Martínez, 2013, p.117)

Ejemplo 19.

Calcular el determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2detM_{11} - 3detM_{12} + (-1)detM_{13}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8) - 3(8) + (-1)(4)$$

$$= -16 - 24 - 4 = -44$$

Definición 3 [Cofactor]. El escalar que se obtiene al multiplicar el determinante de M_{ij}, el menor (i, j) de A, por $(-1)^{i+j}$, se define como A_{ij}, el cofactor $(i.j)$ de A; es decir,

A_{ij}=$(-1)^{i+j}detM_{ij}$ (Martínez, 2013).

Con la definición de determinante dada anteriormente la podemos escribir como

$det(\alpha) = \alpha,\ \alpha \epsilon R\ \ detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

1.3.1. Propiedades básicas de los determinantes

Dada una matriz M de tamaño $n \times n$,

- Si M tiene una columna o fila de ceros, $det\, M = 0$.
- Si para obtener la matriz P, se intercambian dos filas o columnas de M, $det\, P = -det\, M$.
- Si la matriz M tiene dos columnas o filas iguales, $det\, M = 0$
- Si para obtener la matriz P, se multiplica una columna o fila de M por un escalar λ, $det\, P = \lambda det\, M$ (Martínez, 2013).
- $detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ (Martínez, 2013).

1.4. Regla de Cramer

La regla de Cramer es un procedimiento que sirve para dar solución a un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes. Este procedimiento es apto para sistemas 2×2 y 3×3, ya que, para sistemas de 4×4 o más, resulta ineficiente debido a que las operaciones a realizar son muy numerosas. La regla de Cramer lleva su nombre en honor al sueco Gabriel Cramer (1704-1752), quien hizo la publicación de ésta en 1750.

Para utilizar este método, el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones y el determinante de la matriz del sistema debe ser diferente de cero.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, de tamaño $n \times n$, $x_i\, detA = det\, A_i$, donde $x = (x_i)$ es el vector solución y A_i es la matriz que se obtiene de A cuando se reemplaza la columna i por el vector b. (Martínez, 2014, p.133)

Si $\det(A) \neq 0$, se puede despejar las componentes del vector solución y se obtiene

$$x_i = \frac{detA_i}{det\, A}$$

Ejemplo 20.

Resolver el siguiente sistema con la regla de Cramer

(16) $$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \\ \quad y - z = 4 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Usando la regla de Cramer, se obtiene

$$x = \frac{|A_1|}{A} = \frac{24}{-6} = -4 \qquad y = \frac{|A_2|}{A} = \frac{-36}{-6} = 6 \qquad z = \frac{|A_3|}{A} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Con lo anterior, se sintetizan los principales conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución más usados, y a los cuales haremos referencia en el desarrollo del presente trabajo por su uso en el bachillerato.

2. LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Es común pensar que las dificultades en matemáticas las tienen los estudiantes con menos fortalezas académicas, pero cuando se ve el trasfondo de estas se puede notar que las dificultades no son algo tan simple que solo se pueda asignar a los menos "capaces", en realidad las dificultades según su origen son de distinto tipo, las cuales en muchas ocasiones son inevitables y se invita a la reflexión para que el docente trate de preverlas, y aunque no sea para evitarlas, lo más apropiado seria tener herramientas de como atacarlas aunque no en todas las situaciones se pueda.

Es importante tener presente en qué se fundamentan las dificultades, cómo han sido estudiadas a través del tiempo y cuáles son los tópicos o caracterizaciones que han generado investigadores en su estudio para distinguirlas según su origen o foco de inicio. A continuación, se muestran con el propósito de presentar una vista general del objetivo de estudio.

2.1. Clasificación de las dificultades

El objetivo de cada uno de los estudios que se hace en torno a la educación matemática va en sentido de cómo mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, lo cual hace que se busque las causas de sus falencias. A lo largo de muchos años y con el trabajo de diversos investigadores, se ha logrado reconocer, clasificar y analizar las dificultades, los errores y obstáculos. Aunque gran parte de ellos son casi imposibles de evitar, es importante que el profesor sea consciente de éstos para que por medio de técnicas o herramientas se logren superar.

En este trabajo, nuestro interés se centra en las dificultades, por esto a continuación se presenta la clasificación que algunos investigadores, en particular Martin Socas, han hecho según su origen.

2.1.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.

Socas (1997) nos refiere: los seres humanos usamos diferentes tipos de comunicación, pero cuando buscamos transmitir matemática, lo hacemos por medio de signos matemáticos y ayuda del lenguaje habitual el cual beneficia la comprensión de estos signos. Gracias a ello, se presentan distintos conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos ya que el lenguaje común, en muchas ocasiones, a pesar de que se cometan faltas ortográficas o rupturas en reglas gramaticales, así sea por alusión o por asociación, el significado puede ser transmitido; pero al comunicar objetos matemáticos, cualquier cambio puede modificar por completo lo que se desea transmitir o afirmar.

Por otro lado, hay algunas de las palabras usadas usualmente en el contexto matemático que también aparecen en el lenguaje común, por ejemplo factor, seno, conjetura, raíces, lo cual puede causar dificultad por la confusión semántica implicada.

2.1.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

Socas (1997) afirma que “siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, el aspecto deductivo formal”; en los colegios, comúnmente, se hace a un lado el aspecto demostrativo de las matemáticas con la intención de favorecer otros aspectos como la aplicación instrumental de reglas matemáticas, lo cual no quiere decir que se deba abandonar la parte lógico - deductiva de la matemática, ya que esto generara dificultad en el estudiante. Cada actividad matemática realizada por los alumnos debe tener presente los procesos lógicos matemáticos, ya que esto es lo que permite el desarrollo a nivel matemático del alumno; el seguir argumentos lógicos es una competencia que deben adquirir con cada actividad realizada; por ello, el profesor debe tener presente esto para procurar que se haga efectivo. El impulsar esta competencia no debe generar un conflicto con el desarrollo de competencias con métodos inductivos, los cuales también permiten obtener resultados igualmente válidos.

Algunos autores como Foong, opinan que la aversión de los estudiantes hacia las matemáticas, algunas veces se debe al nivel de abstracción de su contenido, que no tienen las otras materias escolares, además consta de una organización lógica; por ejemplo, es necesario saber las propiedades de los conjuntos numéricos y operarlos para usar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.1.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

En este tipo de dificultades los principales responsables son las instituciones educativas ya que de estas depende el currículo, metodología aplicada y recursos educativos entre otros. Para evitar este tipo de dificultades, las instituciones educativas deben velar porque las herramientas, los recursos, el entorno, los estímulos sean los más idóneos o al menos adecuados para que el proceso de enseñanza matemática se dé óptimamente.

El currículo debe considerar cuales son las competencias y habilidades que se deben desarrollar y velar porque estas de verdad se adquieran; deben tenerse presentes los pre-saberes de cada concepto, el nivel de abstracción desarrollado por el alumno y la naturaleza lógico matemática escolar. Por otro lado, está la metodología aplicada la cual no debe ser una “rueda suelta”; debe estar conectada y ser coherente con la institución educativa y el currículo.

2.1.4. Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

La posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos (Socas, 1997). El tener conocimiento de las teorías y de los desarrollos que se dan en pro de la enseñanza le da un abanico de posibilidades a los docentes, dado que por medio de éstas pueden preparar y diseñar el material que utilizará con sus alumnos, debido a que cada alumno tiene un tratamiento y un desarrollo distinto, éstas pueden ayudar en esta labor, pues tomando las dificultades de los alumnos se puede generar diversas herramientas para superarse.

2.1.5. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

Es común ver que a los estudiantes no les guste la matemática; incluso teniendo estudiantes que son muy buenos en esta área, suelen tener un tipo de desprecio y miedo por ésta. Esto se debe a varias razones; una de ellas es que “no está permitido” fallar en las matemáticas, otras razones son la postura y actitud de algunos docentes del área, las metodologías utilizadas y la transmisión de generación en generación de que la matemática es el área más difícil.

Lo anterior crea una pre-disposición en el alumno haciéndole sentir que va a fracasar sin ni siquiera haberlo intentado, y a sentir temor ante el menor escalón fallado; por esto, muchas veces, a pesar de tener los conceptos claros, fallan en pruebas, ya que se bloquean por su sentir, y lo cual afecta su desempeño finalmente.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presentan los instrumentos de análisis, las instituciones que fueron objeto de análisis, los resultados y finalmente el análisis de lo encontrado en cada institución.

3.1. Instrumentos de análisis

En este trabajo, se pretende realizar el análisis de las dificultades presentes en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y, para ello, se realizó un cuestionario a profesores y un examen diagnóstico a estudiantes.

El cuestionario se aplicó a docentes del área de matemática que enseñan en grado noveno en los colegios escogidos previamente y el examen diagnóstico a estudiantes que están cursando grado noveno de los mismos colegios.

El examen se diseñó teniendo en cuenta la clasificación de las dificultades que ha hecho Martin Socas en sus investigaciones con la intención de poder detectarlas en los estudiantes para posteriormente analizarlas.

En cuanto a la entrevista a los docentes, se tuvo en cuenta los objetivos planteados para ésta; entre ellos esta verificar si se impartía o no el tema en grado noveno; y de ahí se desprendieron otros propósitos como conocer la metodología utilizada por los docentes y las dificultades que ellos detectan en los estudiantes.

A continuación, se presenta la estructura de los instrumentos de análisis que se utilizaron para la investigación y posteriormente los criterios de selección de los colegios y docentes involucrados.

3.1.1. Examen diagnóstico a estudiantes

Con el propósito de poder identificar cuáles son las dificultades que presentan los alumnos de grado noveno al aprender sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución, se diseñó el examen diagnóstico, para lo cual se tuvieron en cuenta varios aspectos, entre ellos, la clasificación de Martin Socas (1997) que ha realizado con base en sus investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; otro aspecto son los referentes que da el M.E.N, como los estándares básicos de competencias que debe tener el alumno y por último la información sobre los conceptos previos que debe tener el alumno para enfrentarse al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución.

Para aplicar el examen, se le pidió al docente del área que previamente escogiera aleatoriamente 20 estudiantes del salón, los cuales, en un tiempo de 2 horas clase (80 minutos) lo desarrollaron.

Los objetivos del examen diagnóstico son los siguientes.

5.1.1.1. Objetivo general

- Identificar y analizar las dificultades presentes en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución.

5.1.1.2. Objetivos específicos

- Determinar si los estudiantes de grado noveno identifican los diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales enseñados en la educación básica.
- Determinar qué dificultades tienen los estudiantes de grado noveno al resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Con los anteriores objetivos, se procedió a realizar el diseño del examen diagnóstico que se presenta en los anexos.

5.1.1.3. Descripción del examen diagnóstico a estudiantes

1)	*Pregunta	**De las siguientes ecuaciones, seleccione con una X cuales de ellas son lineales.** ☐ $2p - q = 3$ ☐ $4x + 8y = 7y - 3$ ☐ $\frac{7}{y} + x = 4$ ☐ $2m^2 - 3n = \frac{1}{4}$
	*Respuestas correctas	$\underline{2p - q = 3}$ $\underline{4x + 8y = 7y - 3}$
	*Noción matemática involucrada	El estudiantes debe conocer que una ecuación lineal es aquella que se puede escribir de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$. Por lo general, los estudiantes tienden a reconocer estas ecuaciones por el exponente que puede tener la variable.
2)	*Pregunta	**Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, “la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p edad de Pilar y c la edad de Carlos” obtengo:** ☐ $3p = c$ ☐ $p = 3c$ ☐ $p = \frac{3}{c}$ ☐ $3p = 3c$

	*Respuesta correcta	$\underline{p = 3c}$
	*Noción matemática involucrada	En este tipo de problema, donde se debe representar la información en forma de ecuación, el estudiante debe saber cómo pasar del lenguaje natural al lenguaje formal interpretando la información.
3)	*Pregunta	**Se necesitan 52 metros de alambre para construir una cerca en un terreno rectangular. El largo del terreno supera en 5 metros el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la parcela? Para resolver el anterior problema, ¿Cuál sería el sistema de ecuaciones que lo representaría correctamente si x es el ancho y y el largo?** ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x + y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x + y = 5 \end{cases}$
	*Respuesta correcta	$\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$
	*Noción matemática	En este problema, también está presente el cambio de registro de lenguaje natural a lenguaje formal, pero aquí el

<table>
<tr>
<td></td>
<td>involucrada</td>
<td>estudiante debe tener claro cuál es el perímetro de un rectángulo.</td>
</tr>
<tr>
<td>4)</td>
<td>*Pregunta</td>
<td>
Los pasos que se ven a continuación son para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

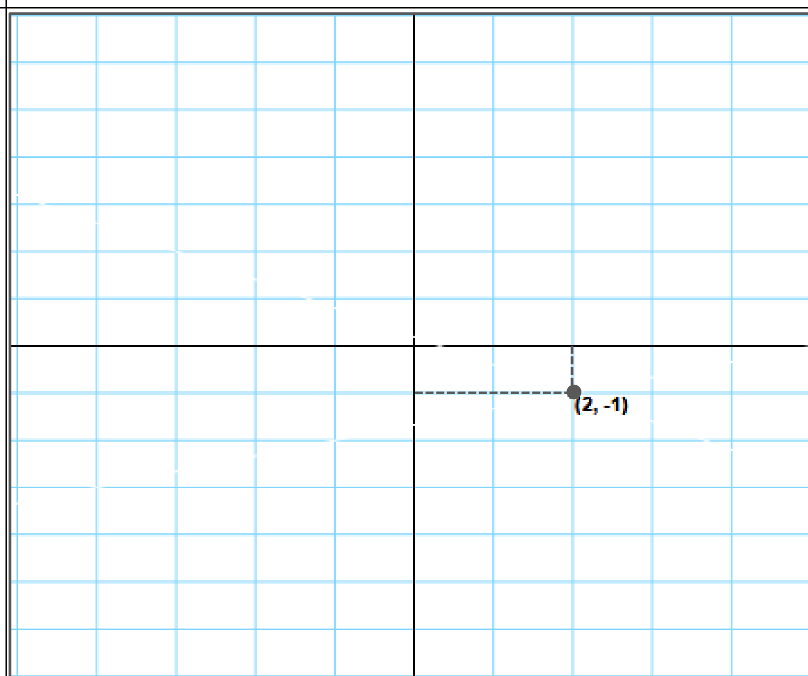
<table>
<tr>
<td>Paso 1
$3x + y = 6$
$y = 6 - 3x$</td>
<td>Paso 2
$5x - 2y = 13$
$5x - 2(6 - 3x) = 13$
$5x + 6x = 13 + 12$
$x = \frac{25}{11}$</td>
<td>Paso 3
$3x + y = 6$
$3\left(\frac{25}{11}\right) + y = 6$
$y = 6 - \frac{75}{33}$
$y = -\frac{9}{11}$</td>
</tr>
</table>

El método que se utilizó para resolverlo es:

☐ Igualación ☐ Sustitución

☐ Reducción ☐ Determinantes
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>*Respuesta correcta</td>
<td><u>Sustitución</u></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>*Noción matemática</td>
<td>Para dar respuesta a esta interrogante, el estudiante debe conocer los métodos para resolver un sistema de ecuaciones</td>
</tr>
</table>

	involucrada	lineales. Debe reconocer lo que se hace en cada método.
5)	*Pregunta	**El método de solución de sistemas de ecuaciones lineales donde uno de sus pasos consiste en cancelar una de las variables recibe el nombre de:** ☐ Igualación ☐ Sustitución ☐ Reducción ☐ Determinantes
	*Respuesta correcta	<u>Reducción</u>
	*Noción matemática involucrada	En este enunciado, el estudiante debe conocer los respectivos pasos de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.
6)	*Pregunta	**Al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables, se obtuvo $0=4$, entonces** ☐ El sistema tiene dos soluciones. ☐ El sistema tiene única solucion. ☐ El sistema tiene infinitas soluciones. ☐ El sistema no tiene solución.

	*Respuesta correcta	El sistema no tiene solución.
	*Noción matemática involucrada	Para este punto, el estudiante debe saber que al obtener un resultado de este tipo, el sistema no tiene solución, ya que no existe ningún valor que pueda convertir éste en una proposición verdadera.
7)	*Pregunta	**Represente la solución del siguiente sistema en el plano:** $$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$
	*Respuesta correcta	
	*Noción matemática	Para contestar esta pregunta, el estudiante debe tener claro la representación geométrica de un sistema de ecuaciones

	involucrada	lineales, y debe tener manejo de la ubicación de puntos en el plano cartesiano.
8)	*Pregunta	Utilice el método que usted desee para resolver el siguientes sistema: a) $\begin{matrix} 3x+4y=7 \\ 2x-3y=5 \end{matrix}$
	*Respuestas correctas	En este punto, el estudiante puede tomar varios caminos, ya que puede utilizar cualquiera de los métodos que le han sido enseñados. Por lo general, los métodos que utilizan son: • Reducción • Sustitución • Igualación • Determinantes • Gráfico La solución de este sistemas es: $\left(\frac{41}{17}, -\frac{1}{17}\right)$
	*Noción matemática involucrada	El estudiante debe reconocer un sistema de ecuaciones lineales y alguno de sus métodos de solución.
8)	*Pregunta	Utilice el método que usted desee para resolver el siguiente sistema: b) $\begin{matrix} x+y+z=4 \\ 3x-3y+5z=-5 \\ 3x+4y+7z=10 \end{matrix}$
	*Respuestas correctas	Al igual que en el punto anterior, en este punto el estudiante puede tomar varios caminos ya que puede utilizar cualquiera de los métodos que le han sido enseñados; por lo general, en

		sistemas 3×3, lo hacen por determinantes, pero esto es a elección del estudiante: La solución de este sistemas es: $\left(\frac{69}{26}, \frac{32}{13}, -\frac{29}{26}\right)$
	*Noción matemática involucrada	El estudiante debe reconocer un sistema de ecuaciones lineales y alguno de sus métodos de solución.

3.1.2. Cuestionario de profesores

Para determinar las dificultades que se presentan en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, se consultó a docentes que dictan la clase de matemáticas a grado noveno, en instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali.

El cuestionario se aplicó a 6 docentes, con los que se habló con anterioridad sobre la intencionalidad y objetivos del trabajo. Para el desarrollo del cuestionario, se tuvo en cuenta el tiempo requerido ya que era necesario que los docentes respondieran con toda la imparcialidad y exactitud posible para evitar falsos resultados en la investigación.

3.1.2.1. Objetivo general

- Detectar las dificultades que evidencian los docentes en sus estudiantes de grado noveno cuando enseñan métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

5.1.1.4. Objetivos específicos

- Establecer cuáles son las técnicas y estrategias utilizadas por los docentes de grado noveno para enseñar sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos de solución.
- Detectar, de ser posible, el compromiso de los docentes en la enseñanza de sus estudiantes.

Con los anteriores objetivos, se procedió a diseñar la entrevista que se presenta en los anexos.

3.2. Selección de instituciones educativas

Para realizar el análisis, se seleccionaron seis instituciones educativas: Liceo Departamental, Libardo Madrid Valderrama, Americano, Caizedo y Cuero, Santa Isabel de Hungría (A. López) y Señor de los Milagros, las cuales aleatoriamente llamaremos Colegio 1, Colegio 2, Colegio 3, Colegio 4, Colegio 5 y Colegio 6. De ellos, tres son del sector privado (1, 3 y 5) y tres del sector público (2, 4, 6). Además, teniendo en cuenta la clasificación que el ICFES les da respecto a sus resultados en las pruebas SABER 11, se tomaron colegios con clasificación ICFES *muy superior* (1, 2), *medio* (3, 4) e *inferior* (5, 6). A continuación, se presenta la descripción de cada una de las instituciones educativas seleccionadas.

3.2.1. Instituciones educativas

- **Colegio Parroquial Señor de los milagros:** es una institución educativa de sector privado ubicada en el Distrito de Aguablanca en el barrio El vergel, en la institución cuentan con un modelo pedagógico centrado en la formación del ser, donde el docente por cada área de formación puede implementar una metodología de acuerdo a sus necesidades.

  La institución es con orientación católica y su ideal principal es formar personas con valores que aporten a la sociedad con sus buenas ideas y su testimonio de vida. (Conversación coordinador de la institución).

- **Institución Educativa Liceo Departamental**: Es una institución educativa pública que está ubicada en la comuna 19 de la ciudad de Cali; sus aulas de clase son amplias y cuenta con diversos laboratorios para el desarrollo de actividades académicas. Recientemente, recibió el PREMIO EDUCA que es un reconocimiento que se le otorga a las mejores Instituciones Educativas de Hispanoamérica, que en el último periodo han demostrado liderazgo, desarrollo y bienestar social y que con una educación rica en valores, aportan a la formación de ciudadanos.

En cuanto su modelo pedagógico, que se referencia en su página web, cuenta con varias vertientes de distintos modelos pedagógicos entre ellos están: el conductismo, modelo pedagógico con énfasis en los contenidos, modelo pedagógico que se centra en los efectos, modelo pedagógico que enfatiza en el proceso, pedagogía conceptual entre otros. Pero, al ser una institución educativa de carácter público, no tiene un modelo fijo que deban asumir todos los docentes, aunque tienen un PEI (Proyecto Educativo Institucional) que todos deben de seguir y cumplir a cabalidad.

- **Colegio Santa Isabel de Hungría (S.I.H) -Alfonso López**: Este colegio se encuentra ubicado en el barrio Alfonso López al oriente de la ciudad de Cali, es un colegio de carácter privado, que cuenta con 27 aulas de clase, pero no cuenta con ningún tipo de laboratorio como herramienta académica; es un colegio parroquial arquidiocesano que se centra en la disciplina y el orden.

  En cuanto al modelo pedagógico que tienen, es la pedagogía conceptual, para lo cual cuenta con módulos diseñados por los asesores pedagógicos del colegio quienes son los mismos que evalúan a los docentes en las aulas de clase. La pedagogía conceptual tiene su fundamento en el desarrollo de la inteligencia, que es considerada como un compuesto binario de instrumentos de conocimiento y de operaciones intelectuales. Significa esto que la enseñanza no hace énfasis en el acumulado de datos, informaciones específicas, fechas, reglas, fórmulas, que el estudiante deba memorizar mecánicamente mediante la repetición continuada. La enseñanza y el aprehendizaje consisten en la adquisición de instrumentos de conocimiento y en el desarrollo de operaciones intelectuales. El docente tiene que seguir totalmente este modelo teniendo como importancia predominante que los alumnos estén siempre en silencio y trabajando de manera individual.(Conversación con docente de la institución).

- **Colegio Americano**: Se encuentra ubicado en el sur de la ciudad; se ha destacado siempre por ser una institución educativa privada. El colegio cuenta con amplias instalaciones campestres donde las aulas están dotadas de distintas herramientas educativas para brindar al estudiante un espacio de aprendizaje cómodo.

A continuación, se muestra la filosofía y modelo pedagógico presentado por el Colegio Americano: la educación por procesos no es determinista; reconoce la ambigüedad y la polisemia en la enseñanza; enfatiza el recorrido creativo que realiza el estudiante en su aprendizaje.

En el Colegio Americano de Cali, cada tema de aprendizaje se asume en términos, no de la conducta esperada por los estudiantes, ni de las operaciones subjetivas requeridas para la comprensión de temas; sino del contenido conceptual de las áreas, de los procedimientos propios de éstas y sus criterios claves.

El conocimiento se ve como el conjunto de problemas o interrogantes definidos para ser procesados o solucionados conjuntamente entre los maestros y los estudiantes. Así, se asume de modo dinámico, como un interrogante propio de la misma lógica del conocimiento, en el que el objetivo es la formación del pensamiento propio y autónomo. (N.Gaona, ***conversación*** personal, Mayo, 2014)

- **Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero**: Es una institución educativa del sector público, situada en el Barrio Cristóbal Colón, Comuna 10 de la ciudad de Santiago de Cali.

  El modelo pedagógico que maneja la institución, referenciado en su página web, propone el desarrollo máximo y multifacético de las capacidades e intereses del alumno. Tal desarrollo está influido por la sociedad, por la colectividad donde el trabajo productivo y la educación están íntimamente unidos para garantizar a los alumnos no sólo el desarrollo del espíritu colectivo sino el conocimiento científico-técnico y el fundamento de la práctica para la formación científica de las nuevas generaciones.

  El docente, a pesar de tener un modelo pedagógico dado por el colegio, tiene la posibilidad de utilizar distintas herramientas y modelos para el desarrollo de sus clases, por lo que algunos docentes usan las TICS (Tecnologías de la información y las comunicaciones) como herramienta de enseñanza mientras que otros prefieren la enseñanza más tradicional.

- **Institución Educativa Libardo Madrid Valderrama:** es una institución educativa ubicada en la comuna 16 de Cali en el barrio La unión en el Distrito de Aguablanca, es una institución técnico-industrial, la cual busca prestar servicio educativo en forma efectiva y oportuna con formación técnica e integral, cumpliendo con la normatividad vigente, mediante el fortalecimiento de la investigación, la ciencia y la tecnología en los estudiantes, un talento humano de calidad, la gestión eficiente de los recursos, una infraestructura adecuada y el mejoramiento continuo de los procesos, para facilitar el desarrollo de las competencias laborales, un alto desempeño en el sector productivo y el emprendimiento en los estudiantes. (Política institucional del colegio)

3.3. Fechas en las que fueron aplicados los instrumentos

Institución educativa	Fecha de aplicación
Colegio 1	28 de Mayo de 2014
Colegio 2	27 de Mayo de 2014
Colegio 3	20 de Mayo de 2014
Colegio 4	28 de Mayo de 2014
Colegio 5	23 de Mayo de 2014
Colegio 6	22 de Mayo de 2014

3.4. Resultados de los instrumentos

A partir de lo encontrado en los instrumentos de análisis, se presenta a continuación los resultados, tanto de forma general con todas las instituciones, como particularizando en cada colegio.

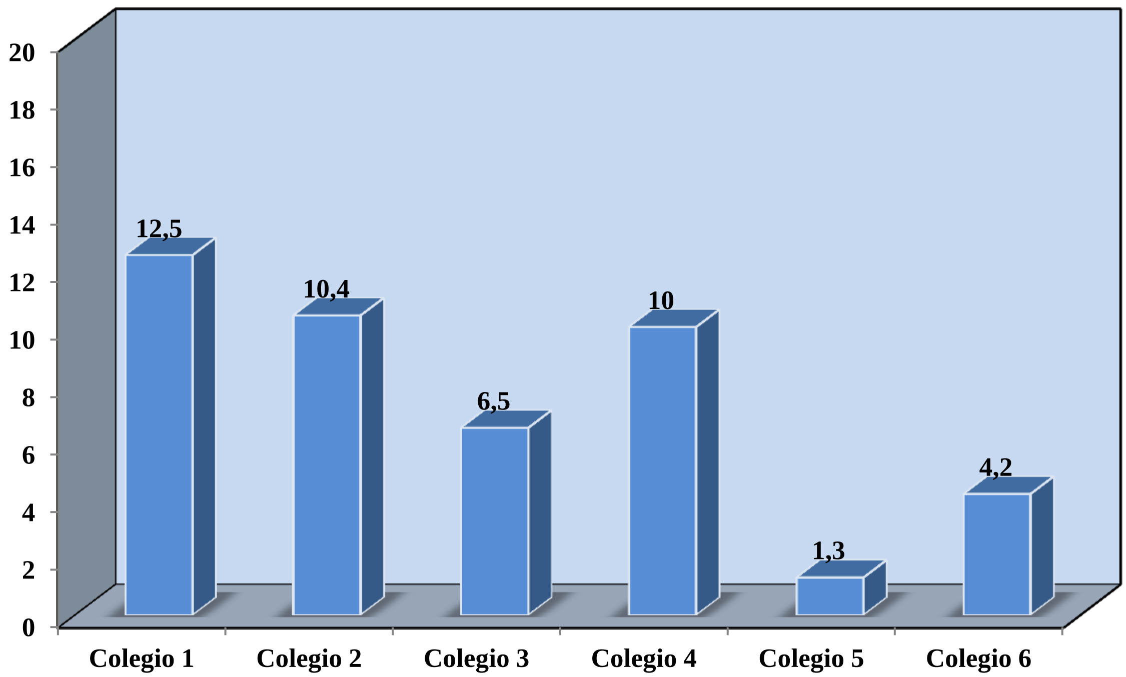
3.4.1. Resultados examen diagnóstico a estudiantes

A continuación se presentan las medias obtenidas a través de la cantidad de respuestas correctas de los estudiantes en el examen diagnóstico.

Aquí se mide la sumatoria de respuestas correctas en las ocho preguntas, de los 20 estudiantes por cada colegio.

Institución Educativa	**Media del número de estudiantes con respuestas correctas**	**Porcentajes**
Colegio 1	12.5	62.5%
Colegio 2	10.4	52%
Colegio 3	6.5	32.5%
Colegio 4	10	50%
Colegio 5	1.3	6.5%
Colegio 6	4.2	21%

Media del número de estudiantes con respuestas correctas



El mayor promedio de estudiantes con respuestas correctas lo obtuvo el colegio 1, con un 62.5%, aunque sus resultados no se alejan de los resultados del colegio 2 y el colegio 4, con un porcentaje de 52% y 50% respectivamente

El menor promedio de respuestas correctas, lo obtuvo el colegio 5, que indica que muy pocos estudiantes respondieron correctamente.

Solo en el caso de la institución educativa privada de nivel superior se ve que hay una ventaja con respecto a la institución pública nivel superior, en los otros dos niveles las instituciones públicas superan a las instituciones privadas.

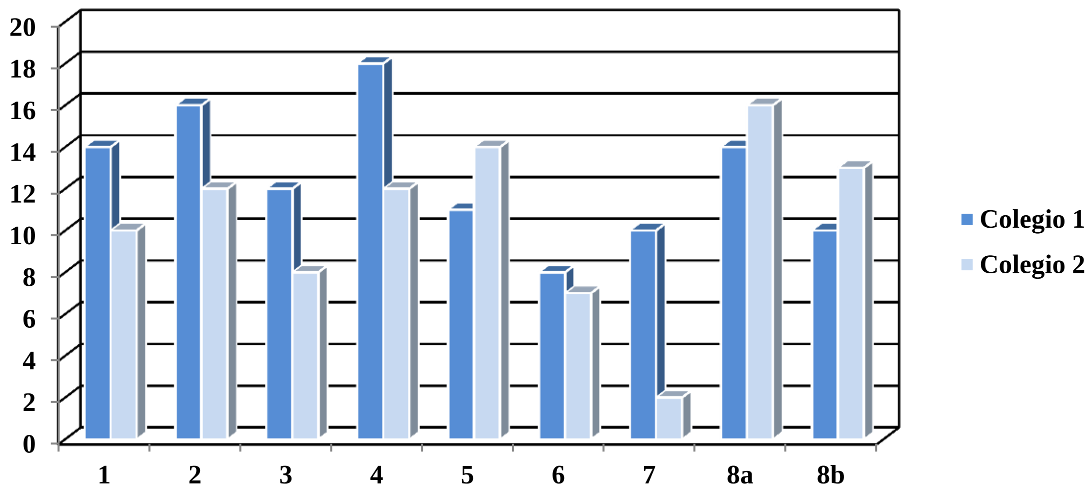
Resultados colegios nivel superior

A continuación, se considera el número de respuestas correctas de los colegios de nivel superior, con el colegio 1 como sector privado y el colegio 2 como sector público.

	1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	$\bar{x}$

Colegio 1	14	16	12	18	11	8	10	14	10	**12.5**
Colegio 2	10	12	8	12	14	7	2	16	13	**10.4**

Respuestas correctas de colegios de nivel superior

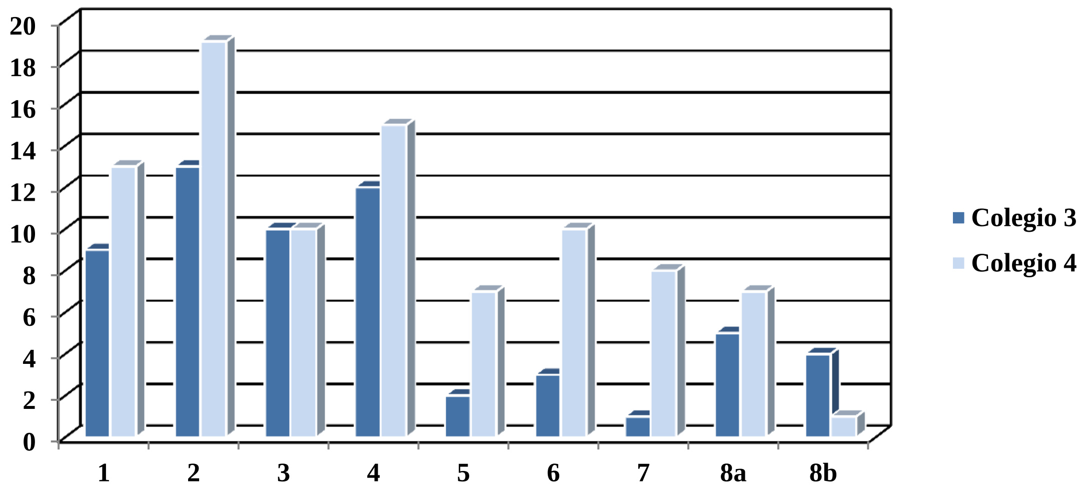


E le
62.5%, esta institución supero al colegio 2 en un 10.5%. En el 67% de las preguntas sus estudiantes tuvieron un mejor desempeño.

Resultados colegios nivel medio

	1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	$\overline{x}$
Colegio 3	9	13	10	12	2	3	1	5	4	**6.5**
Colegio 4	13	19	10	15	7	10	8	7	1	**10**

Respuestas correctas de colegios de nivel medio

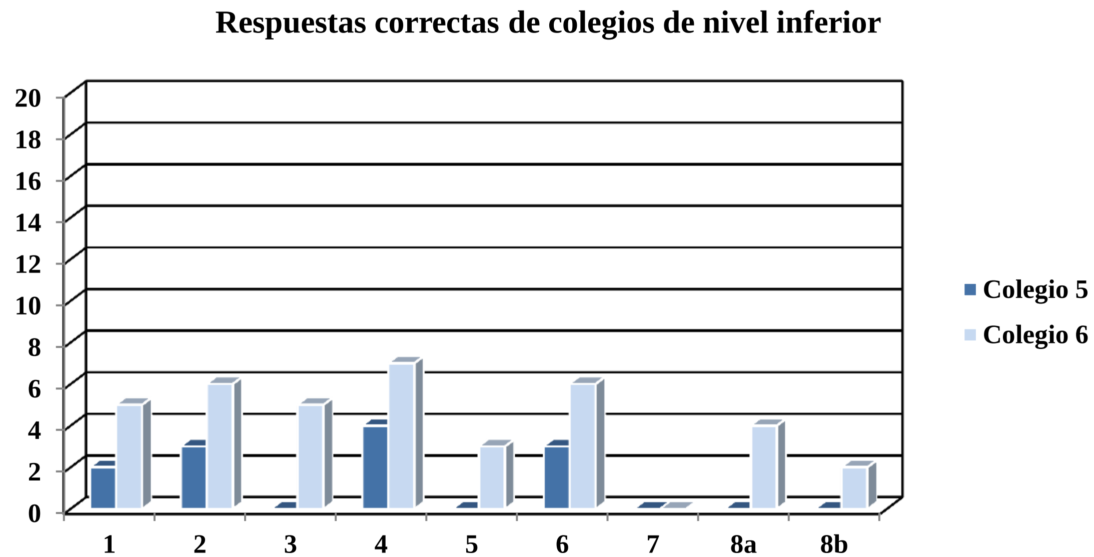


El mayor número de respuestas correctas lo obtuvo el colegio 4, el cual obtuvo una diferencia importante con respecto al Colegio 3; en el 88.8% de las preguntas el colegio del sector público tuvo un desempeño superior con respecto al del colegio privado.

Resultados colegios nivel inferior

Enseguida, se considera el número de respuestas correctas de los colegios de nivel inferior, con el Colegio 5 como sector privado y el colegio 6 como sector público.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8a**	**8b**	$\bar{x}$
Colegio 5	2	3	0	4	0	3	0	0	0	**1.3**
Colegio 6	5	6	5	7	3	6	0	4	2	**4.2**



El colegio 5 obtuvo mejores resultados que el colegio 6, en el 88.8% de las preguntas obtuvo mejores resultados que el colegio del sector privado, aunque ni el 50% de los estudiantes de los colegios respondieron correctamente ninguno de los puntos.

Resultados de las preguntas 7, 8a y 8b

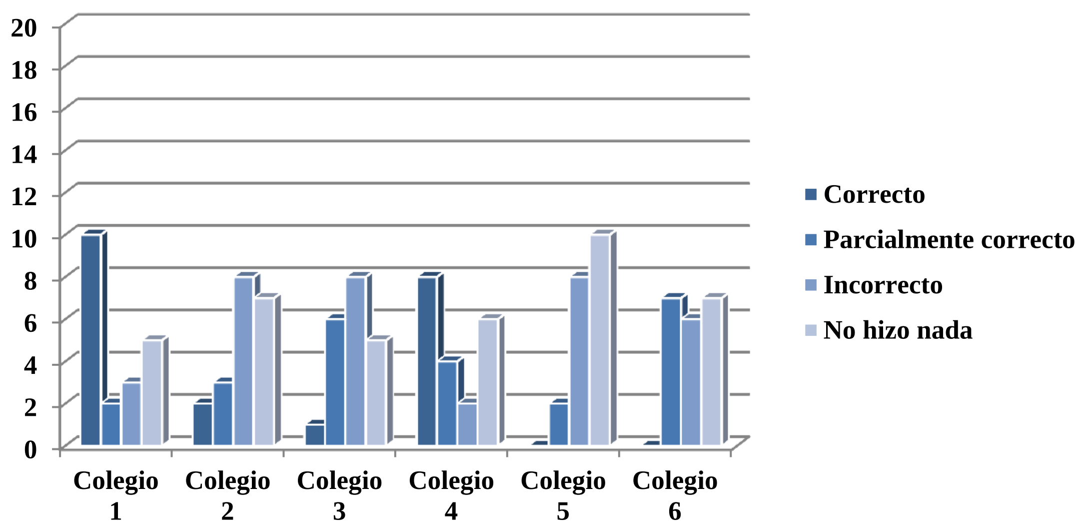
A continuación, se presentan los resultados de las preguntas 7, 8ª y 8b por cada una de las instituciones, las cuales a diferencia de las primeras no tenían opción múltiple de respuesta. En estas preguntas, se pudo apreciar los distintos procedimientos que realizaban los estudiantes para llegar a las respuestas.

- Pregunta número siete.

	Correcto	Parcialmente correcto	Incorrecto	No hizo nada
Colegio 1	10	2	3	5
Colegio 2	2	3	8	7

Colegio 3	1	6	8	5
Colegio 4	8	4	2	6
Colegio 5	0	2	8	7
Colegio 6	0	7	6	10
Total	**21**	**24**	**35**	**40**

Resultados de la pregunta 7 en los colegios

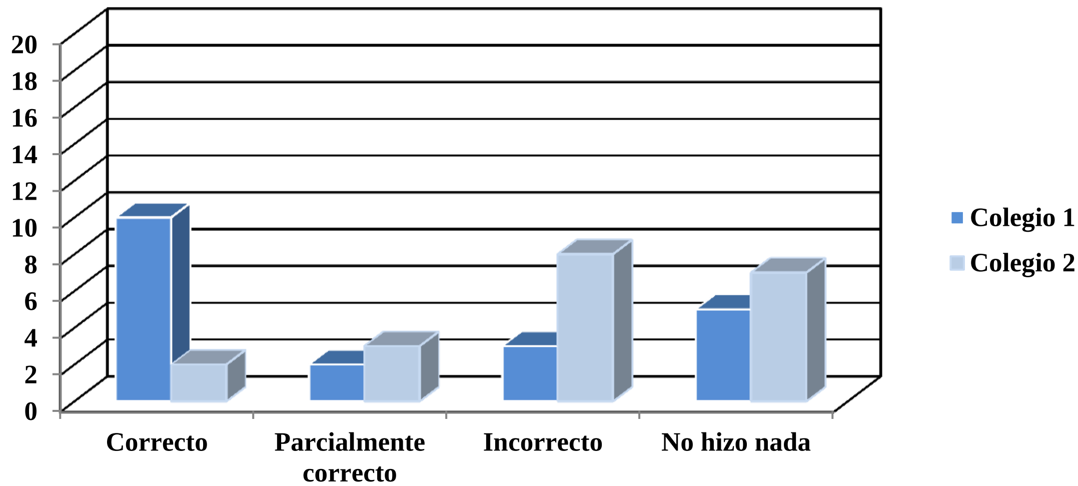


El colegio 1 y el colegio 4, presenta mejores resultados que los demás colegios, 12 de los estudiantes respondieron correctamente o parcialmente correcto y 8 incorrecto o no hizo nada.

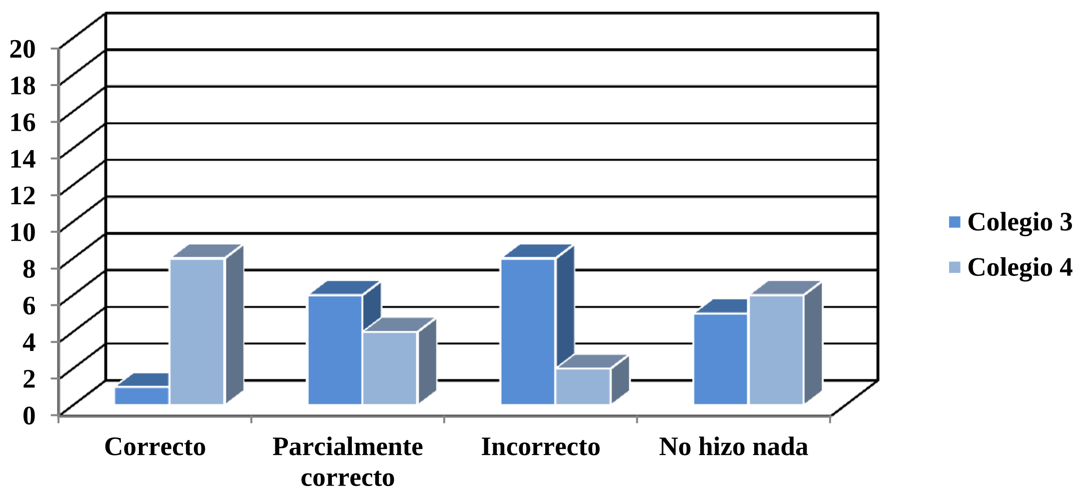
En general, la mayoría de estudiantes respondieron incorrectamente o no hicieron nada con un porcentaje total de 62.5.

A continuación, se considera la comparación de los resultados entre colegios de los sectores públicos y privados, de los niveles superiores, medio, inferior de la pregunta 7.

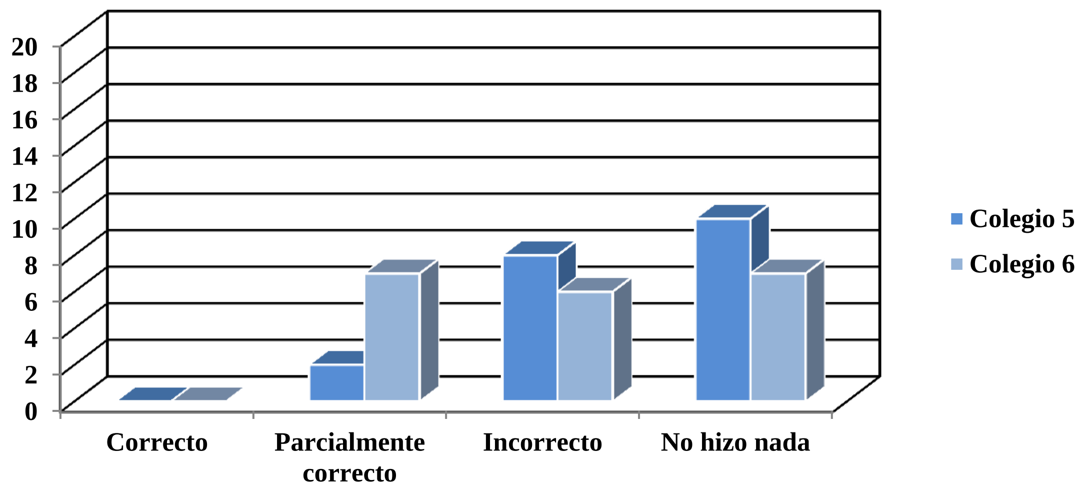
Resultados de los colegios nivel superior en pregunta 7



Resultados de los colegios nivel medio en pregunta 7



Resultados de los colegios nivel inferior en pregunta 7

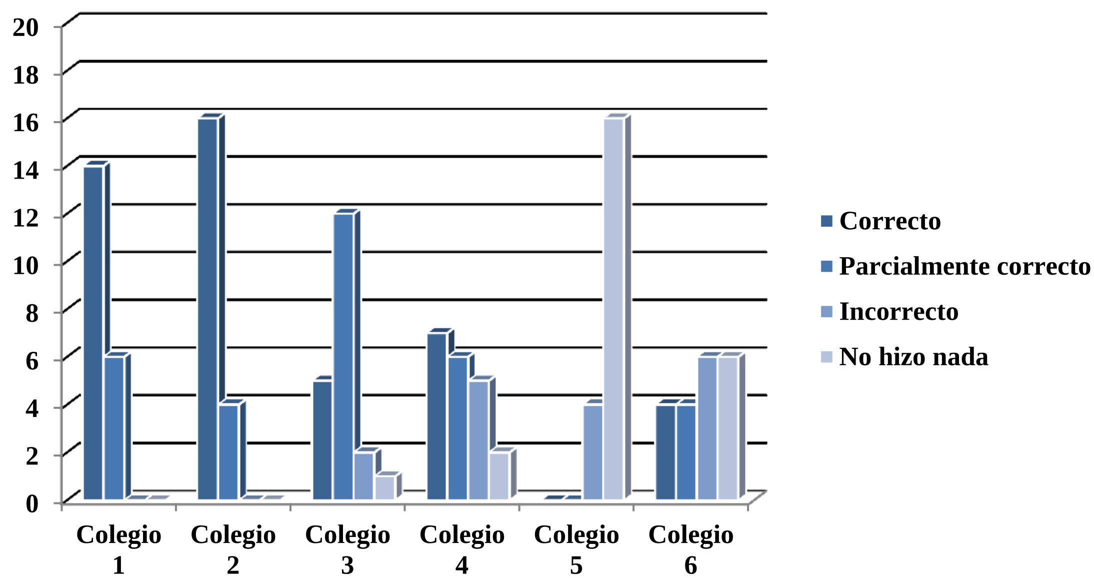


En los colegios de nivel superior, el colegio de sector privado tuvo mejores resultados, con una amplia diferencia. Se evidenciaron mejores resultados en el colegio de sector público en la categoría de nivel medio. En los colegios de nivel inferior, no hubo una gran diferencia, sin embargo, el colegio del sector público tuvo un resultado ligeramente mejor. De nuevo se evidencia que solo en los colegios de nivel superior del sector privado, hay mejores resultados con respecto a los públicos de los otros niveles.

- Pregunta número 8a

	Correcto	**Parcialmente correcto**	**Incorrecto**	**No hizo nada**
Colegio 1	14	6	0	0
Colegio 2	16	4	0	0
Colegio 3	5	12	2	1
Colegio 4	7	6	5	2
Colegio 5	0	0	4	16
Colegio 6	4	4	6	6
Total	**46**	**32**	**17**	**25**

Resultados de la pregunta 8a en los colegios

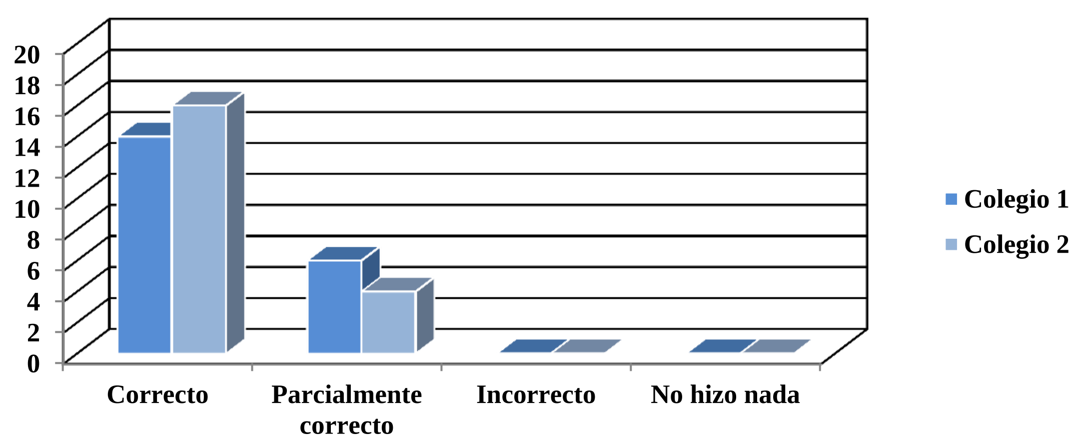


En este punto, el colegio con los mejores resultados fue el colegio 2, donde el 80% de los estudiantes respondió de manera correcta, seguido a este se encuentra el colegio 1, donde el 70% de estudiantes respondieron de manera acertada.

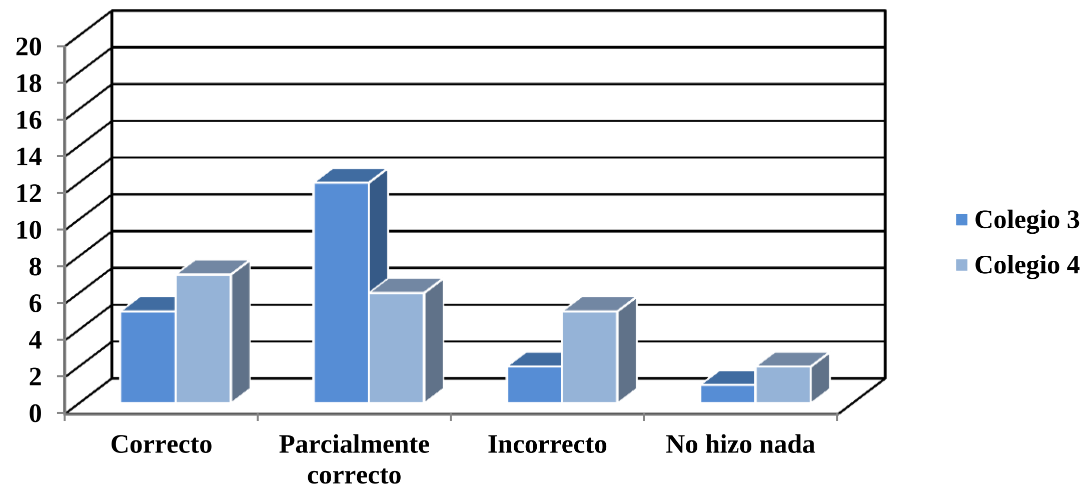
El colegio 5 obtuvo los peores resultados, con el 80% de estudiantes que no hicieron nada.

A continuación, se presenta la comparación de los resultados entre colegios públicos y privados, de los niveles superiores, medio, inferior de la pregunta 8a.

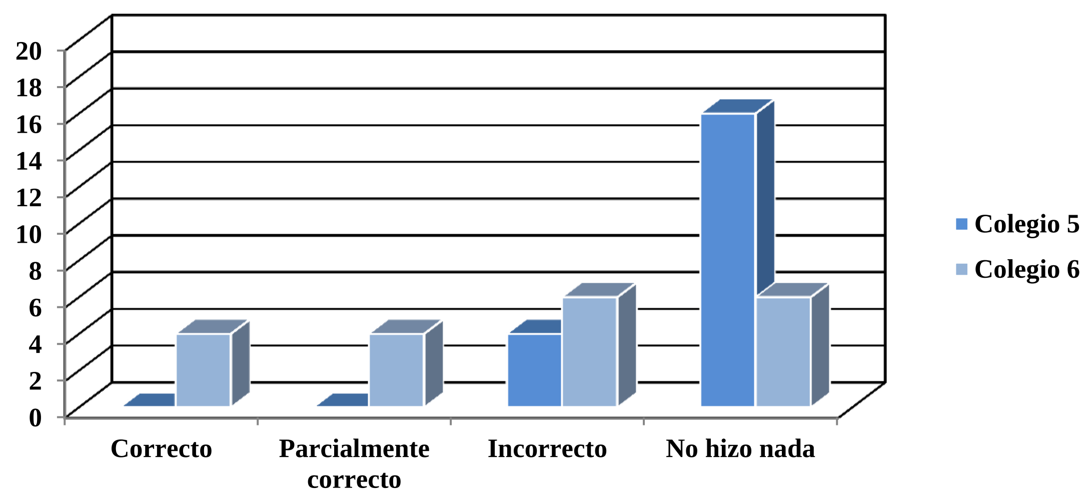
Resultados de los colegios nivel superior en pregunta 8a



Resultados de los colegios nivel medio en pregunta 8a



Resultados de los colegios nivel inferior en pregunta 8a



En los colegios de nivel superior, el colegio con mejor resultado fue el colegio de sector público, pero con una ligera diferencia del privado, en ambos colegios la mayoría de estudiantes respondió correctamente.

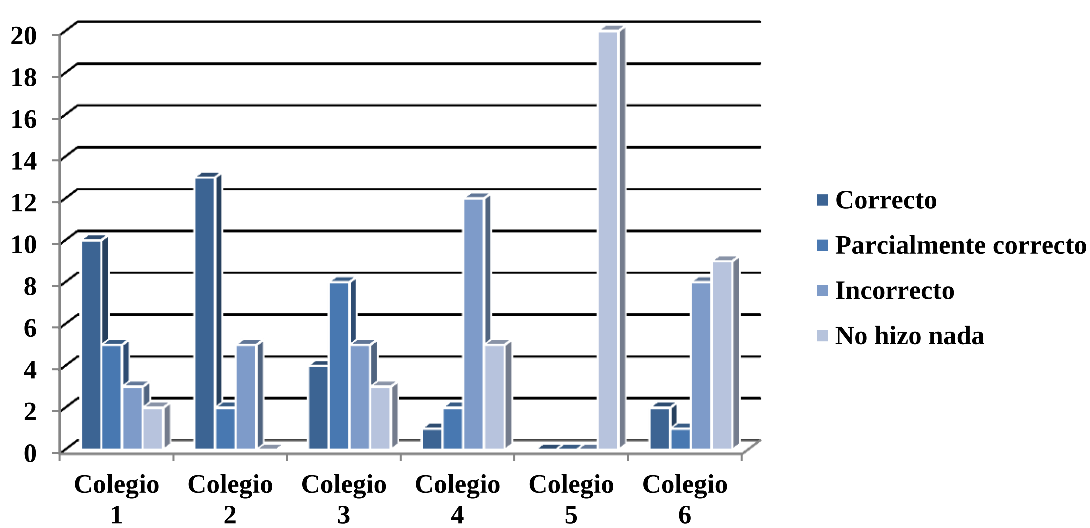
También con una diferencia muy sutil, tuvo mejores resultados el colegio de sector privado en el nivel medio, pero a diferencia de los del nivel superior un grupo pequeño de estudiantes respondió correctamente.

Finalmente, en el nivel inferior el colegio de sector privado obtuvo el peor resultado, de manera significativa ya que ningún estudiante respondió acertadamente.

- Pregunta número 8b

	Correcto	**Parcialmente correcto**	**Incorrecto**	**No hizo nada**
Colegio 1	10	5	3	2
Colegio 2	13	2	5	0
Colegio 3	4	8	5	3
Colegio 4	1	2	12	5
Colegio 5	0	0	0	20
Colegio 6	2	1	8	9
Total	**30**	**18**	**33**	**39**

Resultados de la pregunta 8b en los colegios

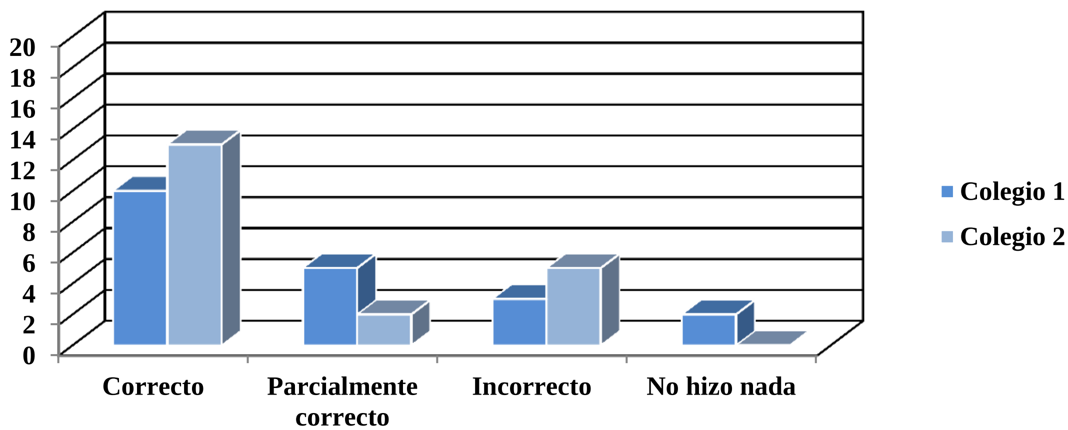


El colegio con mejores resultados en este punto fue el colegio 2, seguido se encuentra el colegio 1, en estos colegios al menos el 50% de los estudiantes respondió correctamente.

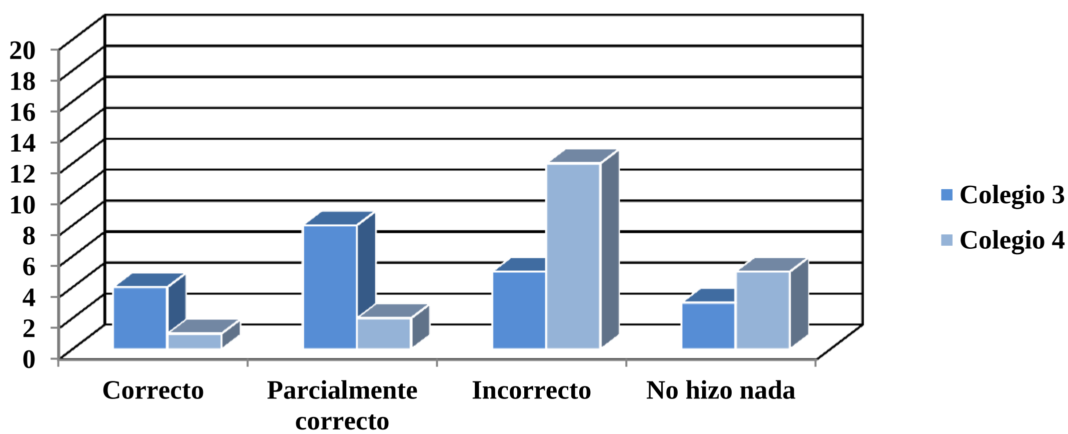
De manera negativa, el 100% de los estudiantes del colegio 5 no hizo nada. Con respecto a los colegios nivel medio el colegio del sector privado tuvo mejores resultados.

A continuación se presenta la comparación de los resultados entre colegios públicos y privados, de los niveles superiores, medio, inferior de la pregunta 8b.

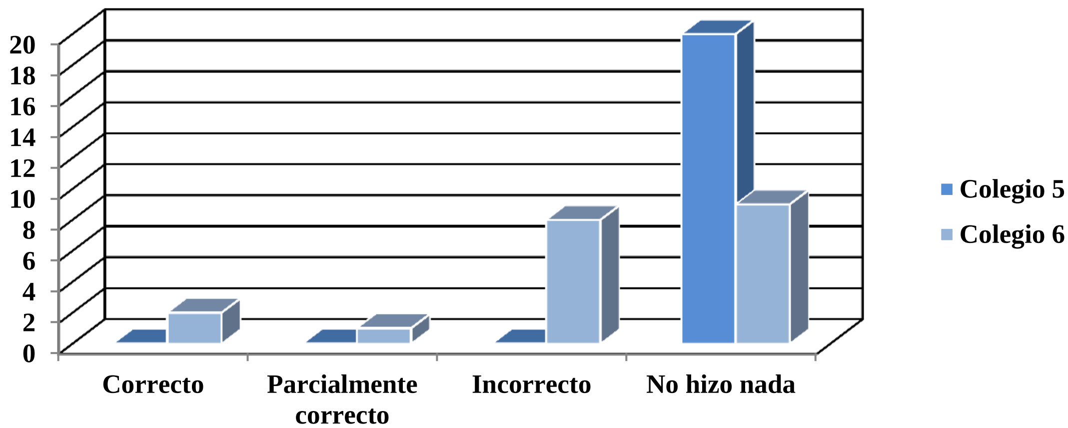
Resultados de los colegios nivel superior en pregunta 8b



Resultados de los colegios nivel medio en pregunta 8b



Resultados de los colegios nivel inferior en pregunta 8b



En el nivel superior, tanto el colegio de sector público como el colegio de sector privado tuvieron resultados positivos, con un 75% en las opciones de correcto o parcialmente correcto.

En el nivel medio, los colegios si tuvieron una diferencia significativa, puesto que un 60% de los estudiantes del colegio del sector privado tuvieron resultados en las opciones correcto o parcialmente correcto, contra un 15% del colegio del sector público.

En el nivel inferior, el colegio de sector público tuvo levemente mejores resultados que el colegio de sector privado, sin embargo, ambos están por debajo del 20%.

3.4.2. Resultados del cuestionario a profesores

A continuación, se presenta el resultado de los cuestionarios realizados a los docentes:

¿A qué grados enseña habitualmente?						
	6º	**7º**	**8º**	**9º**	**10º**	**11º**
Colegio 1				**X**		
Colegio 2			**X**	**X**		
Colegio 3			**X**	**X**		
Colegio 4				**X**		
Colegio 5			**X**	**X**	**X**	**X**
Colegio 6			**X**	**X**		

¿Qué temas considera son prerrequisitos para enseñar S.E.L y sus métodos de solución?					
	Ecuaciones lineales	**Expresiones algebraicas**	**Plano cartesiano**	**Análisis de graficas**	**Otros**
Colegio 1	**X**	**X**	**X**	**X**	
Colegio 2	**X**	**X**	**X**		
Colegio 3	**X**				
Colegio 4	**X**	**X**	**X**	**X**	Uso de Geogebra
Colegio 5	**X**				
Colegio 6	**X**	**X**			

Indique brevemente la metodología que usted emplea para impartir estos temas	
Colegio 1	Lo primero que se hace es dejar previamente el tema para investigación, deben traerlo leído, posteriormente se indaga sobre lo que investigaron los niños preguntándoles en clase, luego abro el tema con la parte teórica algún ejemplo y luego lo contextualizo con alguna situación de la vida escolar o cotidiana. Se dejan actividades y se evalúa.
Colegio 2	Introduzco con un ejemplo de áreas generalmente, luego de eso les explico que son los sistemas y que hay varias formas de solución, se copia algo acerca de eso, se explica con varios ejemplos y se hacen ejercicios en clase.
Colegio 3	Se muestra la teoría, se realiza un mentefacto con los pasos para resolver los sistemas por los diferentes métodos, se realizan ejemplos y algunos ejercicios en clase.
Colegio 4	Se plantea un problema que se modele S.E.L y luego se grafica en geogebra.
Colegio 5	Pues explico que es un sistema cómo se resuelve y realizo ejemplos en el tablero y se deja una tarea o ejercicios en clase.
Colegio 6	Se escribe la teoría se dan ejemplos de cómo se resuelve y se dejan ejercicios

¿Qué limitantes cree que tiene su metodología y por qué?	
Colegio 1	Cada estudiante tiene una forma distinta de aprender, de pronto no con todos se puede hacer lo mismo.
Colegio 2	No creo que tenga limitantes aunque se pueden integrar otras cosas
Colegio 3	No tiene limitantes.
Colegio 4	Que los jóvenes les cueste adaptarse, al llegar otro docente a trabajar sin las TICS.
Colegio 5	La disposición de los estudiantes para trabajar ese siempre es un limitante.
Colegio 6	No, limitantes como tal no, pero igual se puede mejorar en algunos aspectos.

¿Por qué utiliza esta metodología? ¿Es decisión propia o hay algún lineamiento de la institución educativa?		
	Decisión propia	**Lineamiento de la institución**
Colegio 1	**X**	**X**
Colegio 2	**X**	
Colegio 3	**X**	
Colegio 4	**X**	**X**
Colegio 5	**X**	
Colegio 6	**X**	

¿Plantea situaciones problema para contextualizar el tema?		
	Si	**No**
Colegio 1	**X**	
Colegio 2	**X**	
Colegio 3	**X**	
Colegio 4	**X**	
Colegio 5	**X**	
Colegio 6	**X**	

¿Asocia de alguna manera los métodos de solución de S.E.L. con otro tema matemático?	
Colegio 1	Si con varios pero por nombrar algunos, las áreas, problemas financieros, plano cartesiano entre otros.
Colegio 2	Si claro con los planos, los perímetros de las figuras, áreas de terrenos, fracciones, suma y resta de polinomios.
Colegio 3	Si con el plano cartesiano.
Colegio 4	Ecuaciones, ingresos y gastos, oferta demanda, planos, vectores, áreas y perímetros.
Colegio 5	Con las ecuaciones.
Colegio 6	Ecuaciones.

¿Puede señalar dificultades recurrentes que se manifiesten en los estudiantes en medio de los procesos de aprendizaje de este tema?		
	Si	**No**
Colegio 1	**X**	
Colegio 2	**X**	
Colegio 3	**X**	
Colegio 4	**X**	
Colegio 5	**X**	
Colegio 6	**X**	

Si las hay, ¿qué tipo de dificultades observa?	
Colegio 1	Error al resolver algoritmos, pasar del lenguaje natural al formal, sentimiento de rechazo por el área.
Colegio 2	Resolver ecuaciones correctamente, disposición en clase, resolución de problemas, representación en la gráfica.
Colegio 3	Motivación por estudiar, resolución de algoritmos, representación gráfica.
Colegio 4	Insuficiencia de la memoria a corto plazo, comprensión de las condiciones del problema, uso incorrecto de los algoritmos, modelación
Colegio 5	Querer estudiar eso desencadena el resto.
Colegio 6	Resolver ejercicios e interpretar problemas.

¿Cómo logró identificarlas?	
Colegio 1	Por los procesos de seguimiento a estudiantes en sus exámenes, tareas, expresiones y comportamiento frente a mi área.
Colegio 2	En los exámenes y trabajos presentados.
Colegio 3	Por la experiencia laboral y porque es común en los estudiantes.
Colegio 4	Por los desempeños esperados y el desarrollo de los ejercicios planteados.
Colegio 5	En los trabajos, casi no los entregan.
Colegio 6	En los talleres propuestos.

¿En cuál de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno los alumnos presentan más dificultades?					
	Sustitución	**Igualación**	**Reducción**	**Gráfico**	**Determinantes**
Colegio 1				**X**	**X**
Colegio 2			**X**	**X**	**X**
Colegio 3				**X**	
Colegio 4				**X**	**X**
Colegio 5	**X**	**X**	**X**	**N.A**	**N.A**
Colegio 6				**N.A**	**X**

¿A qué cree que se debe lo anterior?	
Colegio 1	Al distinto tratamiento que se da en estos temas, son diferentes las formas en que se presentan suelen ser algo nuevo para ellos y en matemática lo nuevo causa rechazo en los estudiantes.
Colegio 2	Al poco trabajo realizado por los estudiantes y al cambio de presentación del tema.
Colegio 3	A los cambios de registro.
Colegio 4	Mal uso de la multiplicación y suma de enteros.
Colegio 5	Poca disposición para el trabajo y poco manejo de los temas
Colegio 6	Es un tema nuevo para ellos por esto les cuesta más.
¿Qué significa para usted una dificultad?	
Colegio 1	Desde el ámbito educativo esta noción tiene varios ángulos desde donde fijarse, ya que las dificultades no suelen ser todas desde un orden directamente matemático académico, sino que también importan las emociones y manifestaciones hacia el área de matemática como tal.
Colegio 2	Son problemas para resolver algo.
Colegio 3	Es que cuesta obtener lo que se espera o no se entiende lo que hay que hacer.
Colegio 4	Son barreras que hay que superar para conseguir un objetivo.
Colegio 5	Manifestaciones erróneas recurrentes de los estudiantes.
Colegio 6	Es un error repetitivo.

3.5. Análisis de los resultados obtenidos.

A continuación, se presenta un análisis estadístico con base en los resultados obtenidos en los dos instrumentos;

3.5.1. Examen diagnóstico a estudiantes

A pesar de que el mayor número de respuestas correctas se realizaron en el colegio americano, no es el resultado más satisfactorio debido a que el 37.5% respondieron incorrectamente, lo cual es un porcentaje considerable.

El colegio 1, seguido del colegio 4, fueron los colegios con mejores resultados en el examen.

Los puntos con mayor número de respuestas correctas fueron el 2 y el 4, con un total del 69% y el 68% respectivamente.

El punto con menos respuestas correctas fue el 7, donde ni siquiera el 50% de los estudiantes respondieron correctamente y el 33% no hizo nada, seguido del punto 8b, donde 39 estudiantes no hicieron nada.

Respecto a la distinción entre colegios del sector público y el sector privado, no se detecto gran diferencia de resultados.

3.5.2. Cuestionario de docentes

Los resultados obtenidos en los cuestionarios hechos a los docentes nos deja saber que la mayoría de docentes de la muestra tomada, enseña en grados 8° y 9°, que 2 de ellos enseña solo en 9°, y que solo uno de ellos enseña de 8° a 11°.

Todos los profesores opinan que uno de los prerrequisitos de enseñar sistemas de ecuaciones lineales son las ecuaciones lineales, y la mayoría considera que es importante ver previamente expresiones algebraicas, mientras que solo el 50% considera que es importante haber estudiado el plano cartesiano y el análisis de gráficos; uno de los maestros considera una herramienta tecnológica (Geogebra) como prerrequisito.

El 83% de los maestros usa la teoría y los ejercicios dentro de su metodología, por tanto ellos explican el tema para luego dar ejemplos y finalizar con ejercicios; el 33% de los maestros usa otras herramientas de explicación como los mentefactos y geogebra, solo uno de los profesores deja el tema previamente para que los estudiantes indaguen acerca de él.

El 66.6% de los docentes manifiesta que su metodología no tiene limitantes, mientras que el porcentaje restante manifiesta que una de las limitantes son las diversas formas de aprender de los alumnos y el no manejo de las TICS por parte de todos los docentes.

El 100% de los docentes menciona que la metodología utilizada es por decisión propia, y el 33.4 de ellos menciona que tiene en cuenta la metodología establecida por la institución en que trabaja.

Todos los profesores encuestados usan situaciones problema para contextualizar el tema, aunque solo el 16.6% lo menciona cuando manifiesta su metodología.
El 50% de los docentes relaciona el tema con problemas de áreas, perímetros y plano cartesiano. Todos los docentes tienen presente el uso de expresiones algebraicas, y el 33.2% solo menciona las ecuaciones como tema asociado.

El 100% de los docentes encuestados manifiestan poder señalar qué dificultades son recurrentes en los alumnos. El 84% de ellos menciona que una de las dificultades es la aceptación del área por parte de los alumnos y otra es lograr resolver ejercicios acertadamente. El 66.4% de los maestros manifiestan la dificultad para interpretar lo que se pide en un problema.

El 100% de los maestros manifiesta que logra identificar las dificultades por medio del trabajo en clase con los estudiantes y solo el 16.6% de ellos menciona que la experiencia docente es un factor para identificarlas.

De los docentes que enseñan determinantes y el método gráfico como métodos de solución, el 100% manifiesta que los métodos donde los estudiantes presentan más dificultades es el gráfico y el de determinantes, uno de los docentes que representa el 16.6% manifiesta que los estudiantes tienen dificultades en todos los métodos habituales (reducción, sustitución, igualación) y que no enseña ni el método gráfico, ni el de determinantes, pero previamente ha establecido que los estudiantes no presentan disposición para aprender.

El 84% de los docentes mencionan que lo anterior se debe a que son temas nuevos para los alumnos y que los pasos varían en los distintos métodos, el 16.6% menciona que no tienen claridad en los temas anteriores y 50% menciona que no hay disposición o sienten rechazo para aprender sobre el tema.

Solo el 16.6% de los profesores menciona varias de las clasificaciones de las dificultades, mientras que el 100% de ellos la asocian con un error recurrente o una barrera para resolver o hallar solución a un problema.

Algunos de los docentes comentaron que la disposición de los estudiantes en el momento de la clase de matemáticas es baja, porque la mayoría de ellos se expresan como aburridos o dicen “las matemáticas no son lo mio”.

Fue común encontrar en los docentes la afirmación de la poca disposición de los alumnos a la hora ya sea de aprender el tema o de ejercitar sobre él; se encontró también que a pesar de que hay metodologías establecidas en la mayoría de instituciones, los docentes siguen su propia convicción a la hora de enseñar; los docentes tienen conocimiento acerca de las dificultades y como identificarlas aunque no tengan una clasificación clara; para la mayoría de los docentes no eran prioritarios los cambios de registro y la interpretación de gráficos.

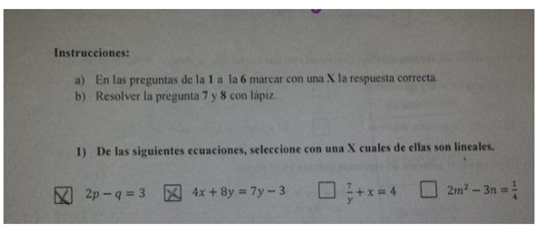
3.6. Análisis de las dificultades halladas en el examen diagnóstico a estudiantes

Por cada una de las pregunta del examen diagnóstico se hará un análisis con respecto a las respuestas de los estudiantes tratando de identificarlas.

1) **De las siguientes ecuaciones, seleccione con una X, cuáles de ellas son lineales.**

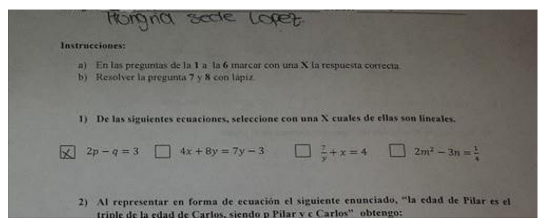
☐ $2p - q = 3$ ☐ $4x + 8y = 7y - 3$ ☐ $\frac{7}{y} + x = 4$ ☐ $2m^2 - 3n = \frac{1}{4}$

Esta pregunta se caracterizó por tener más de una respuesta correcta, solo el 44.1% la respondieron totalmente correcta, el 92% de los estudiantes que respondieron acertadamente solo una de las opciones, eligió la primera ecuación y el restante la segunda ecuación, ninguno de los estudiantes eligió la 3era o 4ta ecuación.


Instrucciones:
a) En las preguntas de la 1 a la 6 marcar con una X la respuesta correcta.
b) Resolver la pregunta 7 y 8 con lápiz.

1) De las siguientes ecuaciones, seleccione con una X cuales de ellas son lineales.

☒ $2p - q = 3$ ☒ $4x + 8y = 7y - 3$ ☐ $\frac{7}{y} + x = 4$ ☐ $2m^2 - 3n = \frac{1}{4}$


Instrucciones:
a) En las preguntas de la 1 a la 6 marcar con una X la respuesta correcta.
b) Resolver la pregunta 7 y 8 con lápiz.

1) De las siguientes ecuaciones, seleccione con una X cuales de ellas son lineales.

☒ $2p - q = 3$ ☐ $4x + 8y = 7y - 3$ ☐ $\frac{7}{y} + x = 4$ ☐ $2m^2 - 3n = \frac{1}{4}$

2) Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, "la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p Pilar y c Carlos" obtengo:

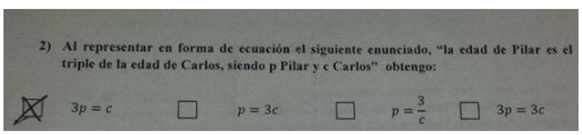
Los estudiantes conocían el concepto de ecuación lineal, sin embargo no lograron asociar el concepto en la segunda ecuación, y esto posiblemente se debe a que se les presentan normalmente las ecuaciones de una misma forma.

Los estudiantes en los procesos de pensamiento matemático no asocian lógicamente lo que se les enseña, sino por el contrario tienden a usar la memoria y la repetición para aprender y posteriormente para dar respuesta a lo enseñado. Cuando al estudiante se le cambia una parte del ejercicio que ha servido como ejemplo de explicación, suele tener inconvenientes para resolver ya que él generalmente toma la explicación y la usa para copiar inconscientemente el proceso sin usar la lógica para hallar la respuesta utilizando los conceptos.

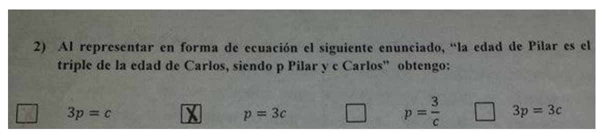
2) Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, "la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p Pilar y c Carlos" obtengo:

☐ $3p = c$ ☐ $p = 3c$ ☐ $p = \frac{3}{c}$ ☐ $3p = 3c$

Esta pregunta la respondieron acertadamente con la segunda ecuación el 57.5% de los estudiantes; el resto de los estudiantes respondió con la primera ecuación. La dificultad que se evidencio en esta pregunta es la de pasar de lenguaje natural al leguaje formal, la interpretación de un texto que servirá para dar solución a un problema es muy importante, la gran mayoría de los estudiantes tratan de pasar la información que les da el problema de forma textual sin darle una interpretación, el lenguaje matemático es preciso y no da espacio a ambigüedades y por esto al usar el lenguaje natural se presentan distintos conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos.


2) Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, "la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p Pilar y c Carlos" obtengo:

☒ $3p = c$ ☐ $p = 3c$ ☐ $p = \frac{3}{c}$ ☐ $3p = 3c$


2) Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, "la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p Pilar y c Carlos" obtengo:

☐ $3p = c$ ☒ $p = 3c$ ☐ $p = \frac{3}{c}$ ☐ $3p = 3c$

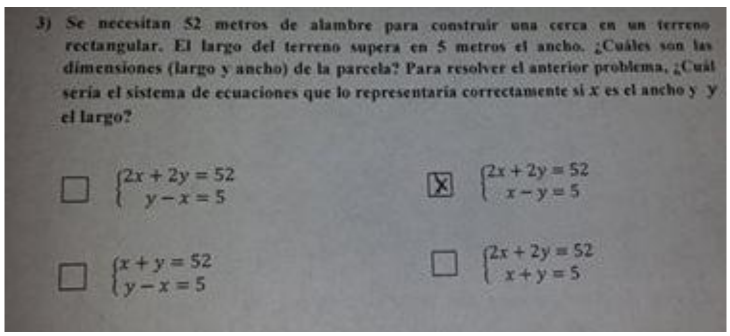
3) Se necesitan 52 metros de alambre para construir una cerca en un terreno rectangular. El largo del terreno supera en 5 metros el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la parcela? Para resolver el anterior problema, ¿Cuál sería el sistema de ecuaciones que lo representaría correctamente si x es el ancho y y el largo?

☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x - y = 5 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x + y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Esta pregunta la respondieron acertadamente el 37.5% de los estudiantes. Aquí los estudiantes debían tener claro cuál era el perímetro de un rectángulo, qué es un sistemas de ecuaciones y pasar un enunciado de lenguaje natural al lenguaje formal; en este punto se presenta la misma dificultad que en el punto 2, la cual está asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, el cambio de registro es una conflicto persistente en los estudiantes y esto se debe a la interpretación que hacen los estudiantes de los enunciados.

A continuación, se presenta la respuesta que obtuvo el mayor porcentaje de estudiantes a pesar de ser incorrecta. La razón es que los estudiantes posiblemente tomaron el enunciado y lo quisieron transformar sin darle una interpretación.



3) Se necesitan 52 metros de alambre para construir una cerca en un terreno rectangular. El largo del terreno supera en 5 metros el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la parcela? Para resolver el anterior problema, ¿Cuál sería el sistema de ecuaciones que lo representaría correctamente si x es el ancho y y el largo?

☐ $\begin{cases} 2x+2y=52 \\ y-x=5 \end{cases}$ ☒ $\begin{cases} 2x+2y=52 \\ x-y=5 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x+y=52 \\ y-x=5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x+2y=52 \\ x+y=5 \end{cases}$

4) Los pasos que se ven a continuación son para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x+y=6 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$$

Paso 1

$$3x+y=6$$
$$y=6-3x$$

Paso 2

$$5x-2y=13$$
$$5x-2(6-3x)=13$$
$$5x+6x=13+12$$
$$x=\frac{25}{11}$$

Paso 3

$$3x+y=6$$
$$3\left(\frac{25}{11}\right)+y=6$$
$$y=6-\frac{75}{33}$$
$$y=-\frac{9}{11}$$

El método que se utilizó para resolverlo es:

☐ Igualación ☐ Sustitución ☐ Reducción ☐ Determinantes

Esta pregunta, la respondieron acertadamente el 56.6% de los estudiantes. En este punto, el alumno debía saber cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales o podía asociar la respuesta con los pasos que veía en el desarrollo del ejercicio; se puede observar que entre el primer y el segundo paso se hizo una sustitución y en este caso el nombre del método coincide ampliamente con el desarrollo del ejercicio.

La matemática es una de las ciencias que desarrolla el pensamiento lógico; los estudiantes deben desarrollar ese pensamiento lógico-matemático a través de los cursos vistos y no solo volverse "máquinas fotocopiadoras de algoritmos". Es posible que a veces no sepan o no recuerden con claridad todos los conceptos, pero deben tratar de dar respuesta a los conocimientos enseñados por medio del análisis y no la memoria, las dificultades que desencadenan esto son las asociados a los procesos de pensamiento logico-matemático. La respuesta errada con más cantidad de estudiantes fue reducción.

5) El método de solución de sistemas de ecuaciones lineales donde uno de sus pasos consiste en cancelar una de las variables recibe el nombre de:

☐ Igualación ☐ Sustitución ☐ Reducción ☐ Determinantes

El porcentaje de alumnos que respondió correctamente esta pregunta fue del 30.8%, el cual es un porcentaje muy bajo; aquí el estudiante debía tener claro cómo se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales con los distintos métodos; al igual que en el punto anterior el estudiante podía asociar el paso del método al nombre.

6) Al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables, se obtuvo 0=4, entonces

☐ El sistema tiene dos soluciones. ☐ El sistema tiene infinitas soluciones.

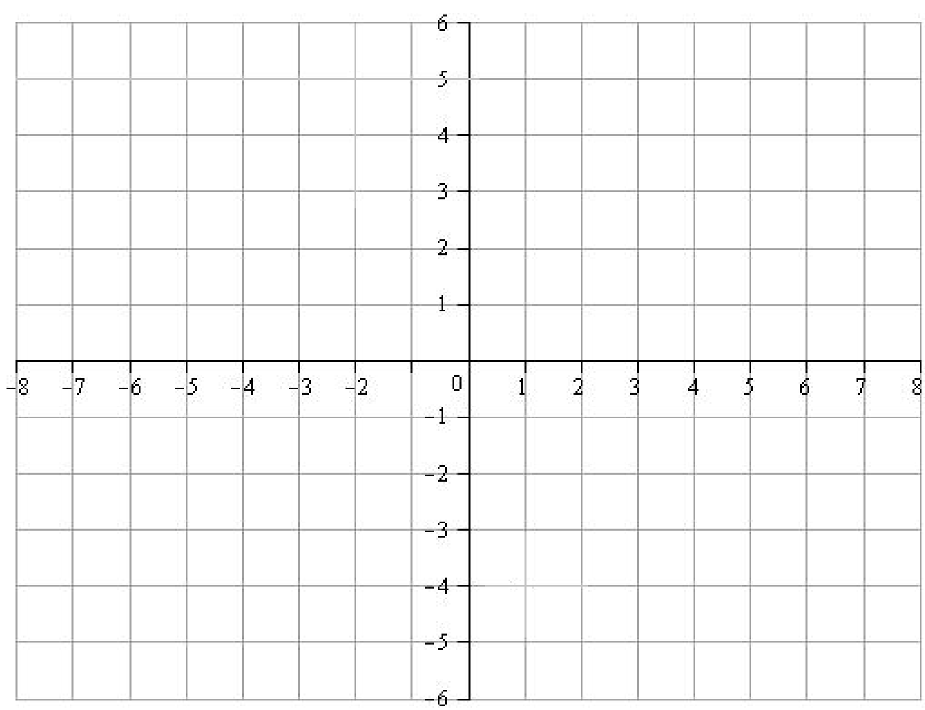
☐ El sistema tiene única solucion. ☐ El sistema no tiene solucion.

En este problema, el 30.8% de los estudiantes obtuvieron una respuesta correcta; el estudiante debe tener presente cuando un sistema tiene solución, debe saber la noción de sistema de ecuación lineal y las soluciones posibles.

Las preguntas 4, 5 y 6 muestran como el desarrollo cognitivo de los estudiantes puede estar comprometido con su desarrollo académico, ya que los estudiantes en cada etapa deben adquirir unas habilidades que le permiten analizar e interpretar diversas situaciones ya sea en el ámbito escolar o ya sea la misma vida cotidiana.

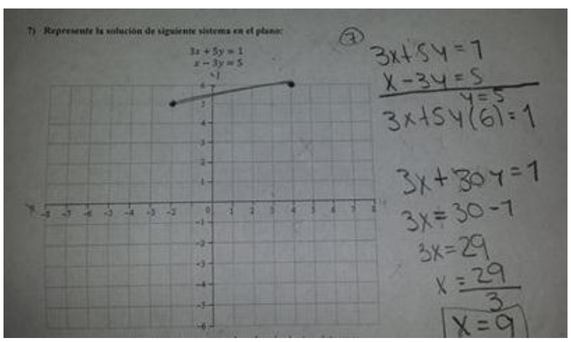
7) Represente la solución del siguiente sistema en el plano:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

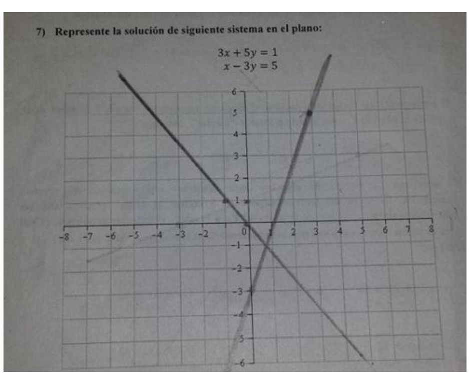


Esta pregunta la respondieron acertadamente el 17.5% de los estudiantes, fue la pregunta con el más bajo nivel de aciertos de los estudiantes, aquí el protagonista son los cambios de registro. El estudiante debe saber cómo realizar el grafico de cada ecuación y así realizar la representación geométrica de la solución del sistema. Un estudiante de grado noveno debe tener claro cómo graficar una recta ya que es una habilidad que debió haber desarrollado en cursos anteriores.

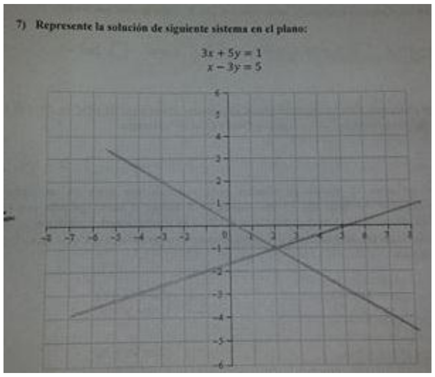
Con respecto al cuestionario de los docentes se pudo notar que no priorizan la representación gráfica al enseñar a los estudiantes; de hecho, dos de los docentes no enseñan el método gráfico a sus estudiantes. Teniendo en cuenta que las metodologías y los temas a enseñar son potestad de las instituciones y los docentes, se puede ver que esto se convierte en una dificultad asociada a los procesos de enseñanza, pues no está permitiendo la adquisición del concepto por parte del estudiante ni el desarrollo de la habilidad.



Aquí se puede observar cómo, además de tener incorrecta la gráfica, el estudiante realiza una serie de procedimientos incorrectos; por otro lado solo intenta graficar una de las rectas aunque no se logra definir cuál.



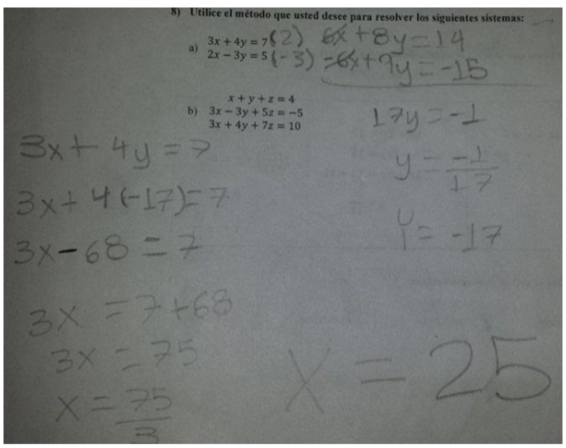
En este gráfico el estudiante trató de graficar ambas rectas; aunque lo hizo de manera incorrecta, por lo menos tiene conocimiento de que este sistema se representa geométricamente con dos rectas.



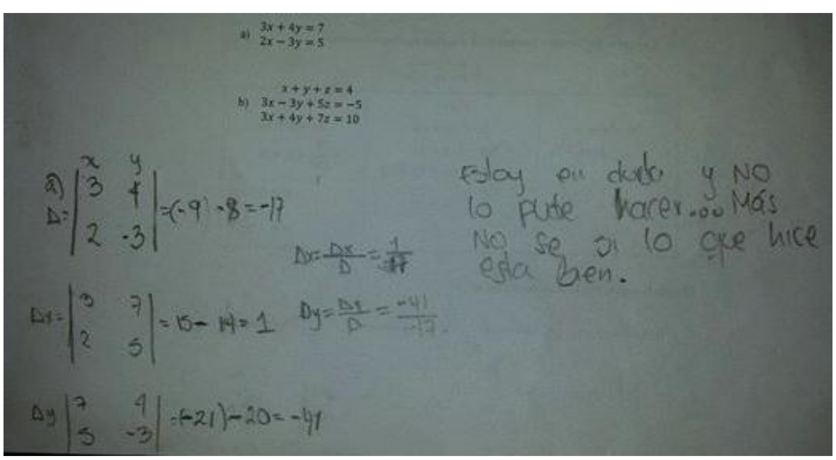
Este fue uno de los estudiantes que logro representar geométricamente el sistema de ecuaciones propuesto.

8a) Utilice el método que usted desee para resolver los siguientes sistemas:

$$3x + 4y = 7$$
$$2x - 3y = 5$$



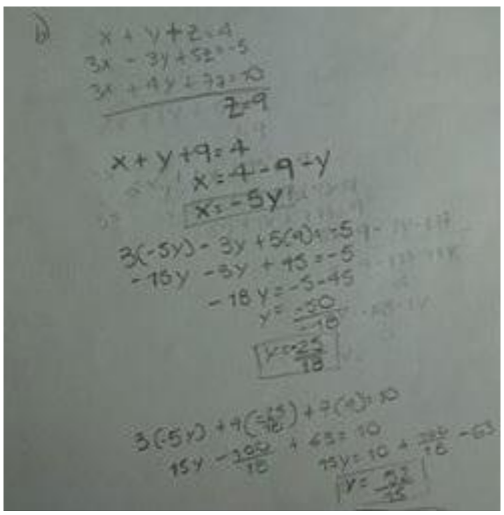
Esta pregunta la resolvieron correctamente el 38.3% de los alumnos. Aquí el estudiante podía utilizar libremente cualquiera de los métodos que recordara; la mayoría de los estudiantes intento usar el método de reducción para llegar a la respuesta, pero al realizar los algoritmos se confundían y no quedaba el procedimiento correcto.



El estudiante logra resolver correctamente el ejercicio, pero aún asi duda si le quedo bien. El miedo o la duda en los procedimientos y en el aprendizaje matemático hacen que los alumnos tengan dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, ya que a pesar de que muchas veces saben hacer las actividades pedidas y tener los conceptos claros, los estudiantes aun siendo buenos se bloquean y no terminan lo propuesto.

8b) Utilice el método que usted desee para resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 3x - 3y + 5z &= -5 \\ 3x + 4y + 7z &= 10 \end{aligned}$$



El porcentaje de estudiantes que logro responder correctamente esta pregunta fue el 25%; todos ellos realizaron el procedimiento por determinantes. Los estudiantes que trataban de realizar el ejercicio por otros métodos se equivocaban por lo largo del procedimiento o porque no sabían correctamente los pasos.

4. CONCLUSIONES

En la revisión de los instrumentos de análisis, se pudieron apreciar varias dificultades que se presentan en el aprendizaje de los métodos de sistemas de ecuaciones lineales. Cada uno de ellas proveniente de diferentes causas pero todas presentes en las diversas instituciones aunque con mayor fuerza en aquellas que tienen unas características no tan favorables (nivel inferior).

Se pudo apreciar que aunque había condiciones bastante diferentes en los colegios de nivel superior, ninguno de ellos obtuvo un promedio realmente superior, aunque los estudiantes de estas instituciones tenían más claridad en los conceptos y certeza en lo que estaban trabajando.

El único colegio del sector privado que fue mejor que los colegios del sector público fue el de nivel superior; de resto estuvieron por debajo de los públicos. El colegio del sector público de nivel medio obtuvo una media muy cercana al colegio nivel superior del sector público, donde los estudiantes mostraron tener claridad en los conceptos.

La metodología usada por el docente tiene una parte muy importante en el aprendizaje de los estudiantes ya que solamente dar la teoría y dar un ejemplo mostró que no da buenos resultados; por el contrario, los docentes que se involucraban más en el proceso con una metodología que implicaba aspectos de la vida cotidiana desarrollando las habilidades de los alumnos, tuvieron unos resultados mejores, dado que tener claridad en las nociones y conceptos les genera menos dificultades, puesto que les da más confianza en sus procesos de aprendizaje, generando un sentir más positivo hacia el área.

En los sistemas de ecuaciones lineales es importante que se abarquen problemas contextualizados, que el alumno pueda desarrollar sus diferentes tipos de pensamiento y que se tengan en cuenta los diferentes tipos de procesos y no solamente la formulación, tratamiento y resolución de problemas.

Es fundamental que el alumno desarrolle el pensamiento espacial y geométrico; cuando una institución o docente hace caso omiso, ya sea por cuestiones de tiempo o de gustos, a la explicación y exploración que el alumno debe tener de la recta numérica, el plano y más de lo que puede significar un lugar geométrico, hace que el alumno pierda la habilidad de interpretar algo que va más allá de una "simple gráfica" de poder analizar la solución de un problema desde otro punto de vista, por ello el docente debe trabajar en este aspecto ya que las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza no se pueden evitar ni eliminar pero si se pueden disminuir y más si estas provienen de la decisión docente.

Las condiciones sociales y económicas de una institución educativa tiene consecuencias ya sea positivas o negativas, depende sea el caso, los estudiantes se pueden sentir motivados en un clima escolar seguro y tranquilo, donde hayan herramientas educativas para su desarrollo académico y puedan tener como prioridad su educación, pero de seguro, en un ambiente que es hostil, el estudiante es más probable que esté pensando más en cómo sobrevivir a sentirse motivado por el área de matemática.

El aprendizaje de las matemáticas genera en el estudiante un desarrollo en su parte lógico-matemática, produciendo un crecimiento en su forma de razonar sobre el mundo, por esto el docente debe estar en procura de ampliar esta parte en el alumno obligándolo a no utilizar siempre la misma fórmula ni dándole el mismo ejemplo sino por el contrario que cada problema sea un reto para que el estudiante desarrollo esa habilidad acrecentando su pensamiento lógico y logran formar pensamientos inductivos.

Se debe trabajar con los cambios de registro con los estudiantes, que poco a poco adquieran la habilidad de llegar del lenguaje natural al lenguaje formal, para que puedan interpretar correctamente situaciones problema que se les presenten.

Aunque las dificultades no se pueden evitar, se puede trabajar para que ellas disminuyan, logrando que el estudiante cometa menos errores y pueda potenciar los distintos tipos de pensamiento, particularmente en los métodos de sistemas de ecuaciones lineales donde en un mismo tema se pueden abarcar todas las habilidades que un estudiante podría desarrollar, ya que va desde poder resolver un algoritmo, hasta analizar la solución de un problema desde distintas perspectivas como por ejemplo desde pensamiento espacial y geométrico.

Los profesores y personas encargadas, deben buscar respuestas a las preguntas de cuándo y cómo las variables afectivas se desarrollan en el curso, para intentar evitar o controlar el desprecio hacia las matemáticas, evaluando las actitudes y creencias de los estudiantes en clase, y el docente personalmente, debe analizar sus propios comportamientos de enseñanza, así como buscar la manera de fomentar el desarrollo de actitudes y creencias positivas hacia el aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. (2001). Historia de la Matemática. España: Alianza Editorial.

BUXTON, L. (1981) *Do you panic about maths?*. Heinemann educational . London.

COLLETTE, J. (1985). Historia de las Matemáticas. (Volúmenes 1 y 2). Madrid: Siglo XXI Editores S. A.

FLOREY, F. (1980). *Fundamentos de algebra lineal y aplicaciones.* México: Prentice Hall.

GUERRA. A. (2012). Propuesta para la Enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría. Universidad nacional, Bogotá, Colombia

KLINE, M. (1972). El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días, II. Madrid: Alianza Editorial.

LUZARDO, D. & PEÑA, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas*, 14 (2), 153-170

MARTÍNEZ, H.J., Sanabria, A.M. (2014). *Álgebra Lineal.* Cali: Programa editorial.

PALACIOS, F. (2008). *Calculo científico y técnico*. Recuperado en http://www.eupm.upc.edu/~fpq/ale-hp/modulos/aplicaciones/cramer.pdf el 02/03/2014

SOCAS, M. (1996). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria*. España:Universidad de La Laguna. 1996

STEWART, J. (2001). *Precálculo*. México: Thomson.

RUIZ, A. (2012). Historia y Filosofía de las Matemáticas. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia

TRIGUEROS, M. (1996) *Diseño de un cuestionario del diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra.* Recuperado en http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21465/93436 el 05/02/20

ANEXOS

PRUEBA DE ESTUDIANTES

Colegio: ____Grado:__________________

Instrucciones:

a) En las preguntas del **1** al **6,** marcar con una **X** la respuesta correcta.

b) Resolver la pregunta **7** y **8** con lápiz.

1) **De las siguientes ecuaciones, seleccione con una X, cuáles de ellas son lineales.**

☐ $2p - q = 3$ ☐ $4x + 8y = 7y - 3$ ☐ $\frac{7}{y} + x = 4$ ☐ $2m^2 - 3n = \frac{1}{4}$

2) **Al representar en forma de ecuación el siguiente enunciado, "la edad de Pilar es el triple de la edad de Carlos, siendo p Pilar y c Carlos" obtengo:**

☐ $3p = c$ ☐ $p = 3c$ ☐ $p = \frac{3}{c}$ ☐ $3p = 3c$

3) **Se necesitan 52 metros de alambre para construir una cerca en un terreno rectangular. El largo del terreno supera en 5 metros el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la parcela? Para resolver el anterior problema, ¿Cuál sería el sistema de ecuaciones que lo representaría correctamente si x es el ancho y y el largo?**

☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x - y = 5 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x + y = 52 \\ y - x = 5 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 2x + 2y = 52 \\ x + y = 5 \end{cases}$

4) Los pasos que se ven a continuación son para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

Paso 1

$$3x + y = 6$$
$$y = 6 - 3x$$

Paso 2

$$5x - 2y = 13$$
$$5x - 2(6 - 3x) = 13$$
$$5x + 6x = 13 + 12$$
$$x = \frac{25}{11}$$

Paso 3

$$3x + y = 6$$
$$3\left(\frac{25}{11}\right) + y = 6$$
$$y = 6 - \frac{75}{33}$$
$$y = -\frac{9}{11}$$

El método que se utilizó para resolverlo es:

☐ Igualación ☐ Sustitución ☐ Reducción ☐ Determinantes

5) El método de solución de sistemas de ecuaciones lineales donde uno de sus pasos consiste en cancelar una de las variables recibe el nombre de:

☐ Igualación ☐ Sustitución ☐ Reducción ☐ Determinantes

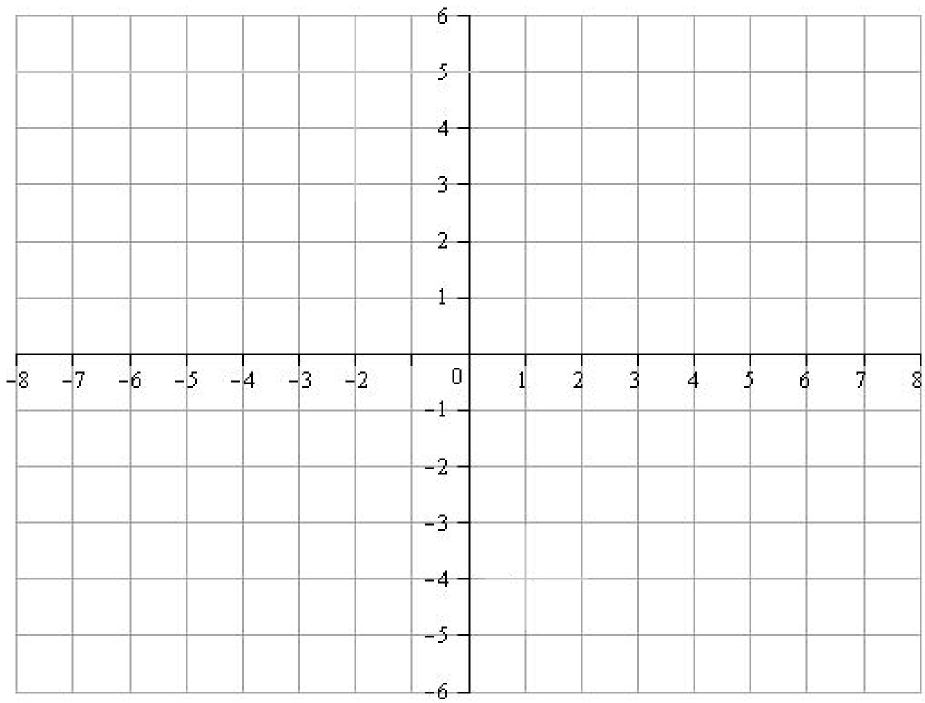
6) Al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables, se obtuvo 0=4, entonces

☐ El sistema tiene dos soluciones. ☐ El sistema tiene infinitas soluciones.

☐ El sistema tiene única solucion. ☐ El sistema no tiene solucion.

7) Represente la solución del siguiente sistema en el plano:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$



8) Utilice el método que usted desee para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 2x - 3y &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 3x - 3y + 5z &= -5 \\ 3x + 4y + 7z &= 10 \end{aligned}$

Dificultades presentes en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales

Muy buenas tardes. Mi nombre es ________________________, soy estudiante de la Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle. El motivo de esta entrevista es poder identificar algunas dificultades que se configuran durante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los métodos de solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (S.E.L) para los alumnos de grado noveno. De antemano gracias por la disposición presentada.

1) **¿Cuál es su nombre? (Opcional)**

____

2) **¿Institución educativa donde se desempeña como docente? (Opcional)**

____

3) **¿A qué grados enseña habitualmente?**

SEXTO ___ SÉPTIMO___ OCTAVO___ NOVENO ___ DECIMO___ ONCE ___

4) **¿Usted ha enseñado S.E.L a sus estudiantes de grado noveno?**

Sí ____ No____

5) **¿Qué temas considera son prerrequisitos para enseñar S.E.L?**

Ecuaciones lineales ______ Expresiones algebraicas ______ Plano cartesiano ______ Análisis de gráficas ______ Otros ____

____ ____

6) **Indique brevemente la metodología que usted emplea para impartir estos temas.**

____

____

7) **¿Qué limitantes cree que tiene su metodología? y ¿Por qué?**

____

____

8) **¿Por qué utiliza esta metodología? ¿Es decisión propia o hay algún lineamiento de la institución educativa?**

____

____

9) **¿Plantea situaciones problema para contextualizar el tema?**

Sí____ No____

10) **¿Asocia de alguna manera los métodos de S.E.L con otro tema matemático?**

No____ Si ____ ¿Cuál?____
____
_

11) **Puede señalar dificultades recurrentes que se manifiesten en los estudiantes en medio de los procesos de aprendizaje de este tema.**

Si ____ No ____

12) **Si las hay, ¿Qué tipo de dificultades observa?**
____

13) **¿Cómo logró identificarlas?**
____
____

14) **¿En cuál de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno, los alumnos presentan más dificultades?**

Sustitución _____ Igualación _____ Reducción _____ grafico _____ determinantes _____
Otros __________________________________

15) **¿A qué cree que se debe lo anterior?**
____

16) **¿Qué significa para usted una dificultad?**
____
____

17) **Comentarios adicionales**
____
____

Muchas gracias por su tiempo.

REVISIÓN HISTÓRICA

Para la siguiente revisión histórica de las ecuaciones lineales, se hizo un breve resumen de las aparición de las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y algunos de sus métodos de solución; también, de alguna manera, se explica la aparición y el desarrollo de lo que hoy conocemos como determinantes y matrices, debido a que también hacen parte de los sistemas de ecuaciones lineales. Para esto, se tiene en cuenta momentos históricos, como el desarrollo de las ecuaciones lineales en la economía y el comercio de los Egipcios y los Babilonios, así como el aporte por parte de los matemáticos Chinos e Indios; luego se presenta el trabajo en el área de determinantes y matrices de algunos matemáticos como Leibniz, Maclaurin, Cramer, Gauss, Bezout, Vandermounde, entre otros.

Ahora bien, las matrices y los determinantes tienen orígenes por separado, no es lo que hoy conocemos cuando hablamos de los determinantes de una matriz. Los determinantes surgieron en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, aunque no solamente ahí; Ruiz (2012) comenta que alguna vez estos fueron usados en el cálculo diferencial e integral, (los sistemas de ecuaciones diferenciales y cambios de variables en métodos de integración) y en el estudio de propiedades de las formas cuadráticas de tres o más variables que se pueden encontrar asociadas a la teoría de número y muchas otras.

Para empezar, se describe el aporte matemático de la cultura Egipcia, que tuvo gran desarrollo a pesar de ser una civilización tan antigua, comprendían las matemáticas en su progreso económico y arquitectónico.

El empleo de las ecuaciones en la matemática egipcia

La cultura egipcia existió hace más de 5.000 años, alrededor 3100 a. C. hasta el 322 a. C., comprende la edad antigua y parte de la edad media; su economía dependía de sus recursos naturales, dados por la cercanía al rio Nilo y su tierra negra y fértil; además, aprovechaban esto para obtener otras materias que necesitaban por medio del comercio. También se destacan en su arquitectura, como la construcción de grandes monumentos, estatuas y centros religiosos, lo cual hacían por medio de sus avanzadas matemáticas.

Como una de las evidencias de su gran desarrollo, se encuentra el Papiro de Rhind, también llamado el Papiro de Ahmes, del cual se tiene poca información sobre su precisa naturaleza; el papiro contiene 87 problemas en matemáticas, con fracciones aritméticas básicas, cálculo de áreas y volúmenes, ecuaciones y su respectiva solución, por lo cual se puede decir que el papiro tenía una intensión pedagógica.

Complicaciones como la división de terrenos, el comercio y cálculos astrales se representaban en forma lineal; en efecto, se encuentra el uso de ecuaciones lineales de la forma,

$$ax + y = b \qquad o \qquad ax + by + z = c$$

con x, y y z como variables, a, b y c como constantes[6].

Estas se resolvían con la aplicación del método llamado “falsa posición” según Collette (1998); el método consiste en calcular el valor buscado a partir de uno estimado. A continuación se presenta un ejemplo del Papiro de Rhind, para explicar el método de la “falsa posición”:

Problema: Una cantidad y su séptima parte suman 19

Solución: Para la cual se tiene la ecuación $x + \frac{x}{7} = 19$, donde x representa la cantidad

Ahmes parte de un valor estimado de 7 como si fuera la solución, quizás porque le permite realizar de manera más sencilla los cálculos. Luego, calcula $7 + \frac{7}{7} = 8 \neq 19$ y dice que hay que encontrar un número de tal forma que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor remplazado de 19; es decir, se necesita obtener $\frac{19}{8}$

Entonces, se presentan un listado de valores que se ajustan a lo pedido, así cuando $x = 7$, el resultado es 8, y se procede a multiplicar varios valores por 8, como se muestra en la siguiente tabla:

n	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$8n$	8	16	4	2	1

[6] Encontrados en El papiro de Rhind, una fuente importante de la que obtenemos conocimientos matemáticos egipcios. (Collette, 1998, p. 40)

Si se seleccionan los resultados 16, 2, 1 que al sumarlos se obtiene 19; al tomar los respectivos n, se obtiene:

$$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}= \frac{19}{8}$$

este valor se multiplica por 7, descomponiendo el 7, por ejemplo $7 = 1 + 2 + 4$. Así,

$$1\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+2\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+4\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$$

$$= 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

por lo cual, la solución es $x=\frac{133}{8}$

Finalmente, de esta manera, los egipcios solucionaban las ecuaciones lineales, usando la "falsa posición" como método[7].

También, se encuentran en los problemas del 30 al 34, ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante divisiones, por ejemplo: Una cantidad, sus 2/3, su 1/2, su 1/7, su totalidad asciende a 33[8], para la cual hoy en día se tiene la ecuación $\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=33$, donde x representa la cantidad. Aunque Pulpón dice que Ahmes resolvía este tipo de ecuaciones con complicadas operaciones de división

Las ecuaciones en la cultura Babilónica

Los registros de los Babilonios datan alrededor del 3500 a. C. y terminan en el 539 a.C.; su base económica era la agricultura y dependía de la construcción de canales para el riego. De la poca información que se tiene de su desarrollo matemático, se puede decir que en esta civilización había un cierto nivel de ambigüedad numérica, puesto que no poseían el cero, tampoco expresaban la diferencia entre la parte entera y la fraccionaria de un número, entre otros. Según Kline (1972), para esta época y al igual que los egipcios, el álgebra es considerada retórica, por su falta de uso sistemático de notaciones algebraicas y simbólicas, como las que usamos actualmente. A pesar de esto, resolvían ecuaciones como $ax = c$, con

[7] Ejemplo mencionado mencionado por Guerra (2012).
[8] Ejemplo mencionado literalmente por Ángel Pulpón Zarco en su trabajo *"historia del papiro de Rhind y similares"*

x como variable, $a > 0$ y $c > 0$, como se haría hoy en día. Además, resolvían ecuaciones de dos incógnitas, mediante sustitución resolvían los problemas de ecuaciones de primer y segundo grado, para ecuaciones cúbicas y bicuadráticas[9], sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, como

$$\begin{cases} x \pm y &= a \\ x^2 \pm y^2 &= b \end{cases}, \quad \begin{cases} x \pm y &= a \\ xy &= b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax + y + cz &= d \\ mx + ny + p &= h \\ rx + sy + qz &= 0 \end{cases}$$

donde *x, y y z son* variables. a, b, c, d, h, m, n, p, r, s y q son constantes.

Las ecuaciones en las matemáticas chinas

Continuando con la tradición de los Babilonios, quienes nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal, están los matemáticos Chinos (durante los siglos III y IV a. C.) como lo comparten Luzardo & Peña (2006, p. 156). Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases},$$

con x, y y z variables, usaban el método de solución "fan-chen" o "método de las tablas", que fue publicado durante la Dinastia Han en el tratado de *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*[10], escrita por el científico Chuan Tsanom; este método actualmente lo conocemos como eliminación Gaussiana. Ejemplo: Se tienen tres tipos de semillas de manera que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero pesan 39 unidades. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero pesan 34 unidades. Finalmente, un saco del primero, dos del segundo y tres del tercero pesan 26 unidades. ¿Cuánto pesa cada uno de los sacos?

Se sustituye el sistema por una "tabla",

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

[9] La forma de las ecuaciones bicuadráticas es $ax^4 + bx^2 + c = 0$

[10] Quizá la obra que ejerció una mayor influencia entre todos los libros matemáticos chinos. Este libro incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

Como anteriormente se explicó, esta tabla representa una matriz, la cual, mediante transformaciones, se manipula para obtener una nueva matriz equivalente escalonada,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, se aplica sustitución hacia atrás, como se expresó en el capítulo anterior, para obtener la solución[11]

A pesar de que los métodos registrados en los Nueve Capítulos tenían tradiciones de los Babilonios y de los Egipcios por el uso del método de la "falsa posición", se dice que los Chinos parecían ser independientes de toda cultura occidental. Además, específicamente el capítulo ocho de los *Nueve capítulos*, trata de la resolución de problemas, los cuales conducen a sistemas de ecuaciones lineales, utilizando números positivos y negativos. Boyer (2001) lo ejemplifica, señalando el último problema de este capítulo, donde se plantea la solución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. Luego, las ecuaciones determinadas; es decir, las ecuaciones que tienen un número limitado de soluciones, se convirtieron en uno de los temas favoritos de los pueblos orientales.

Las ecuaciones en la civilización india

Los registros de los Babilonios datan alrededor del 3500 a. C. y terminan en el 539 a.C.; su base económica era la agricultura y dependía de la construcción de canales para el riego. De la poca información que se tiene de su desarrollo matemático, se puede decir que en esta civilización había un cierto nivel de ambigüedad numérica, puesto que no poseían el cero, tampoco expresaban la diferencia entre la parte entera y la fraccionaria de un número, entre otros. Según Kline (1972), para esta época y al igual que los egipcios, el álgebra es considerada retórica, por su falta de uso sistemático de notaciones algebraicas y simbólicas, como las que usamos actualmente. A pesar de esto, resolvían ecuaciones como $ax = c$, con x como variable, $a > 0$ y $c > 0$, como se haría hoy en día. Además, resolvían ecuaciones de dos incógnitas, mediante sustitución resolvían los problemas de ecuaciones de primer y

[11] Ejemplo modificado de http://www.ugr.es/~amartine/geo1/contenido/matricesn.pdf

segundo grado, para ecuaciones cúbicas y bicuadráticas[12], sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, como

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 \pm y^2 = b \end{cases}, \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax + y + cz = d \\ mx + ny + p = h \\ rx + sy + qz = 0 \end{cases}$$

donde *x, y y z son* variables. a, b, c, d, h, m, n, p, r, s y q son constantes.

Las ecuaciones en las matemáticas chinas

Continuando con la tradición de los Babilonios, quienes nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal, están los matemáticos Chinos (durante los siglos III y IV a. C.) como lo comparten Luzardo & Peña (2006, p. 156). Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases},$$

con x, y y z variables, usaban el método de solución “fan-chen” o “método de las tablas”, que fue publicado durante la Dinastia Han en el tratado de *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*[13], escrita por el científico Chuan Tsanom; este método actualmente lo conocemos como eliminación Gaussiana. Ejemplo: Se tienen tres tipos de semillas de manera que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero pesan 39 unidades. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero pesan 34 unidades. Finalmente, un saco del primero, dos del segundo y tres del tercero pesan 26 unidades. ¿Cuánto pesa cada uno de los sacos?

Se sustituye el sistema por una “tabla”,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Como anteriormente se explicó, esta tabla representa una matriz, la cual, mediante transformaciones, se manipula para obtener una nueva matriz equivalente escalonada,

[12] La forma de las ecuaciones bicuadráticas es $ax^4 + bx^2 + c = 0$

[13] Quizá la obra que ejerció una mayor influencia entre todos los libros matemáticos chinos. Este libro incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & 33 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, se aplica sustitución hacia atrás, como se expresó en el capítulo anterior, para obtener la solución[14]

A pesar de que los métodos registrados en los Nueve Capítulos tenían tradiciones de los Babilonios y de los Egipcios por el uso del método de la "falsa posición", se dice que los Chinos parecían ser independientes de toda cultura occidental. Además, específicamente el capítulo ocho de los *Nueve capítulos,* trata de la resolución de problemas, los cuales conducen a sistemas de ecuaciones lineales, utilizando números positivos y negativos. Boyer (2001) lo ejemplifica, señalando el último problema de este capítulo, donde se plantea la solución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. Luego, las ecuaciones determinadas; es decir, las ecuaciones que tienen un número limitado de soluciones, se convirtieron en uno de los temas favoritos de los pueblos orientales.

Matrices

En la noción de determinante, aparece el término de Matriz en 1850, cuando Sylvester definió la matriz como un "arreglo cuadrilongo de términos". Cayley en 1853, después de establecer contacto con Sylvester comprende la importancia del concepto de matriz, publica una nota donde aparece por primera vez su trabajo en este campo, que luego llaman algebra matricial.

Cayley es considerado el *creador de la teoría de matrices,* por darles un estatus independiente; definió la igualdad de matrices, matriz nula, matriz unitaria, suma y multiplicación de matrices; probó que la multiplicación de matrices es asociativa, introdujo las potencias de una matriz y las líneas que rodean la matriz, la inversa de una matriz invertible.

[14] Ejemplo modificado de http://www.ugr.es/~amartine/geo1/contenido/matricesn.pdf