PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREAS EN EL LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

YAMILA GARCÍA MORENO
RUBER DARÍO ZÚÑIGA PATIÑO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
CALI
2014

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREAS EN EL LABORATORIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

YAMILA GARCÍA MORENO
0936872
RUBER DARÍO ZÚÑIGA PATIÑO
0932710

Trabajo de grado presentado para optar al título de
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora
MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ

Director Póstumo
OCTAVIO AUGUSTO PABÓN RAMIREZ (Q.E.P.D.)

UNIVERIDAD DEL VALLE
INSTRITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
CALI
2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática.
Se trata de:	*Proyecto* [ ] *Informe Final* [X]
Director:	Marisol Santacruz
1er Evaluador:	Sara Marcela Henao
2do Evaluador:	Maritza Pedreros
Fecha y Hora	*Año:* 2014 *Mes:* Agosto *Día:* 21 *Hora:* 7:00 p.m.

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Yamila García Moreno	0936872	3469
Ruber Darío Zúñiga Patiño	0932710	3469

Evaluación

Aprobado	X	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* ________________ *(máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* ________________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

[firma]	Sara Henao	Maritza Pedreros P
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el Laboratorio de Educación Matemática

Autores:

Nombre: Ruber Darío Zúñiga Patiño Firma: Ruber Darío Zúñiga
C.C. 1.144.037.607 (Cali)

Nombre: Yamila García Moreno Firma: Yamila García M
C.C. 1.118 289.371

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha:

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

Agradecimientos

A nuestros padres, hermanos y demás familiares que nos han apoyado durante todo este tiempo y nos han animado para culminar este gran proyecto.

Nuestro reconocimiento para el profesor Octavio Augusto Pabón (Q.E.P.D.) quien fue el gestor de este trabajo y nos dejó un gran legado, igualmente a la profesora Marisol Santacruz quien retomó el trabajo y nos reanimó para continuar en esta gratificante labor.

Contenido

Resumen analítico

Título	Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática.
Estudiantes	Yamila García Moreno, Ruber Darío Zúñiga Patiño.
Director trabajo de grado	Marisol Santacruz Rodríguez.
Evaluadores	Sara Marcela Henao, Maritza Pedreros Puente.
Palabras Clave	Resolución de problemas matemáticos, concepto de área, magnitud, medida, número, mediación, Laboratorio de Educación Matemática.
Objetivos	**General** Reconocer el papel que juegan las mediaciones en la comprensión conceptual del área en grado sexto a partir de la resolución de problemas de áreas en el escenario del Laboratorio de Educación Matemática. **Específicos** Identificar elementos teóricos y metodológicos vinculados a la formulación y resolución de problemas de áreas en el grado sexto de la Educación Básica. Concebir y formular problemas de áreas para ser planteados en el escenario del laboratorio de educación matemática a estudiantes de grado sexto de la Educación Básica. Analizar las producciones de los participantes del estudio a partir del marco teórico adoptado para dar cuenta de la comprensión conceptual del área.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la Línea de Formación en Didáctica de las Matemáticas del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, surge como resultado de algunas problemáticas y preocupaciones recurrentes en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, en relación con la enseñanza y aprendizaje del concepto de área.

En efecto, el concepto de área es complejo y suele estar asociado a dificultades de distinto orden en relación con su enseñanza y aprendizaje, en asuntos relativos al tratamiento de las unidades de área, los algoritmos, las confusiones entre área y perímetro, entre otros. Es un concepto tan central en las matemáticas escolares que investigadores como Chamorro (1995), Castro, Flores & Segovia (1997), Stavy & Tirosh, (2001), han buscado identificar algunas de las dificultades asociadas a su enseñanza y aprendizaje direccionada hacia la formulación de alternativas didácticas para su enseñanza.

Estas alternativas didácticas se dirigen a desarrollar competencias matemáticas en relación con este concepto, que generalmente no se amplían por el predominio de una enseñanza estereotipada al interior de las aulas de clase, en las cuales se aborda de una manera superficial, mecánica, enfocada en la memorización y aplicación de fórmulas que no tienen necesariamente un sentido para los alumnos, como afirma Martí (2002), con mucha frecuencia ocurre que en matemáticas los estudiantes aprendan a operar sin tener comprensión sobre lo que están haciendo, repitiendo fórmulas o algoritmos sólo para cumplir con tareas, exámenes o trabajos, más aún las matemáticas favorecen la disociación entre forma y significado, entre aplicar reglas mecánicas y entenderlas.

La resolución de problemas se considera un proceso central en la construcción del concepto de área, dado que el planteamiento y resolución de *problemas no rutinarios* de áreas, eventualmente podría contribuir a superar algunos obstáculos didácticos y cognitivos en los estudiantes. Más aún, se considera que este proceso vinculado al uso de recursos de diferente naturaleza, por ejemplo, manipulativos como el geoplano, monominó, figuras en foami, etc. de los cuales se tiene en cuenta principalmente el foami debido a que ellos configuran unos tipos particulares de mediaciones que son vinculantes en la comprensión conceptual del área por parte de los estudiantes. En este punto, es importante señalar que el escenario donde se ponen a prueba los problemas formulados es el Laboratorio de Educación Matemática, el cual promueve y permite estudiar el *trabajo experimental* en relación con la resolución de problemas.

El desarrollo de este trabajo se llevará a cabo en cinco capítulos distribuidos de la siguiente forma, el primero de ellos se refiere al planteamiento y justificación de la problemática abordada, en el segundo capítulo se presenta el marco teórico que exhibe elementos desde diferentes perspectivas con relación al concepto de área como magnitud y sentará las bases sobre las cuales se sustenta este trabajo. El tercer capítulo está dedicado a la metodología implementada para la puesta en acto de diferentes problemas relacionados con el concepto del área, sus participantes, el diseño de los problemas, los criterios sobre los cuales se realizará el análisis de las producciones de los estudiantes, entre otros. En el cuarto capítulo se mostrará el análisis mencionado con algunas imágenes que ponen en evidencia el cumplimiento o no de los criterios seleccionados para tal fin, el quinto capítulo expone las conclusiones obtenidas a partir del análisis de las producciones de los estudiantes realizando un balance de cada uno de los objetivos e intentando dar respuesta a la pregunta problema, finalmente se presentan algunos anexos que permiten dar cuenta de los procedimientos utilizados por los estudiantes al momento de abordar los problemas planteados.

Se espera entonces que a partir del desarrollo de esta propuesta surjan elementos teóricos y metodológicos que fortalezcan y mejoren los procesos de formación profesional de los futuros docentes de matemáticas al promover un acercamiento a los distintos tipos de mediaciones en la comprensión conceptual del área en estudiantes de grado sexto.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INDAGACIÓN

En este primer capítulo se presenta el problema que será objeto de indagación referente a la enseñanza y aprendizaje del concepto de área como magnitud, debido a las grandes dificultades y errores que presentan los estudiantes en su concepción y tratamiento, tanto por profesores como estudiantes, además se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar para evidenciar las características de las mediaciones emergentes a partir de la inclusión de materiales manipulativos en la enseñanza del área como magnitud.

1.1 Planteamiento y justificación del problema

En el ambiente que nos rodea se encuentran objetos y cualquier cantidad de figuras que hacen parte de un contexto matemático (obras pintorescas, esculturas, edificaciones, etc.), de ahí se puede afirmar que la geometría está presente en la vida cotidiana, así, los primeros acercamientos que se tienen hacia ella se presentan a través de la interacción con los objetos y la intuición. En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, a continuación se pueden mencionar algunas problemáticas asociadas con este campo, así:

La importancia de la geometría radica en que tiene como objeto analizar, sistematizar y organizar los conocimientos espaciales y fue por mucho tiempo un pilar en la educación que posteriormente perdió su importancia, especialmente en nuestro país, en el cual se limita a enseñarse de forma opcional (Arenas, 2012), esto a partir de la gran cantidad de reformas que ha sufrido la enseñanza de la geometría en los últimos años, como por ejemplo en 1962 se realizó un desplazamiento del trabajo con figuras para dar paso al trabajo con ecuaciones, de la misma manera con la reforma de 1973 se ve reducido el número de horas dedicadas a la enseñanza de la geometría en contraste con otras temáticas, posteriormente en 1994 se otorga a las instituciones la autonomía para la elaboración de su propio currículo,

> Esto último exige de los diseñadores de currículos (que por ley serían todos los maestros) una experticia en el campo del saber geométrico desde una perspectiva escolar; y dado el antecedente histórico de las reformas curriculares y del lugar de la geometría en ellos, es muy probable que esa

> experticia no esté presente en los docentes ni que se hayan dado las condiciones para desarrollarla y formular un currículo (León, 2012, p. 119).

Todas estas reformas son algunas de las causas por las cuales se derivan los bajos resultados obtenidos en las pruebas TIMSS 2007 en relación con la geometría, debido al desplazamiento que se le ha dado y la pérdida de importancia reflejada en dichas reformas.

El presente trabajo aborda uno de los temas de gran importancia en la enseñanza geometría elemental como lo son las magnitudes, especialmente el área que preparan al sujeto para la vida, permitiendo instaurar relaciones con el cálculo de operaciones aritméticas y la geometría, creando condiciones que los estudiantes necesitarán en otras asignaturas y que ayudarán a comprender cualitativa y cuantitativamente su entorno. La enseñanza de las magnitudes al interior de las aulas de clase generalmente se puede ver encaminada al aprendizaje de algunas habilidades como el cálculo con datos de magnitud, medir, estimar y convertir, por el contrario, aquí se pretende trabajarla desde un punto de vista diferente, con la ayuda de elementos que propicien un aprendizaje menos algorítmico y más interactivo.

Además se torna interesante el abordaje de las magnitudes por cuanto sus antecedentes problemáticos, como por ejemplo, una característica común a la mayoría de los estudiantes de la enseñanza elemental es su ignorancia sobre los métodos usuales de medición de manera que en una situación en la que se deba hacer uso de esta medición, los estudiantes no reconocen cuál es el instrumento correcto y la manera de utilizarlo, debido a que las actividades de medición al interior de las aulas de clase se realizan con la utilización de instrumentos como balanzas digitales o diversos artefactos numerizados, proceso que Chamorro (1995) denomina aritmetización de la medida, de tal manera que se desconoce el proceso que se encuentra detrás de estos resultados numéricos.

Por otra parte, se tiene la problemática de la sustitución del área por un número en los procesos de medición, excluyendo el concepto de magnitud y los procesos necesarios para su constitución, enfocándose sólo en fórmulas en función de las dimensiones longitudinales del objeto, ésta exclusión de la magnitud deja de lado la estrecha relación que existe entre número, medida y magnitud, de manera que si se quiere expresar el valor de dicha magnitud (medida), se debe tener en cuenta la relación entre magnitud y número a través de la unidad de medida por medio de procedimientos que inicialmente no tienen en cuenta el cuadro numérico, como lo son la comparación de áreas mediante la superposición e inclusión, recorte y pegado, que posteriormente pueden representar el área de una figura en función de dicha unidad de medida.

Lo anterior se puede observar en los capítulos V y VII de *Elementos*, en los cuales Euclides hace todo un desarrollo de su teoría de proporciones, en el primero de ellos se enfoca de manera general en las magnitudes, entendidas como un pedazo de recta “macizo”, representante ideal de lo continuo y en el segundo, en los números, entendidos como una colección de unidades, pero solo es hasta el libro X que en su quinta proposición establece la relación existente entre número y magnitud, en la cual demuestra que las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón de un número a otro. En cuanto a la medida, Euclides afirma que medir significa que la magnitud más grande es múltiplo entero de la más pequeña, entendida en un lenguaje más actual como A es parte de B si existe un número natural n tal que B es igual a nA (Arbeláez, Anacona & Recalde, 1998).

La importancia del trabajo sobre magnitudes, se asocia al reconocimiento de una problemática relativa a la *comprensión conceptual* del concepto de área, entendida como la posibilidad de establecer relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones de resolución de problemas y hace parte de los aspectos que ayudan a determinar si un estudiante es matemáticamente competente (Llinares, 2003).

Como se mencionó, en el transcurso de este trabajo se aborda el área como magnitud y se hace desde el enfoque de la resolución[1] de problemas cuya importancia radica en ser un proceso para la creación de conocimientos matemáticos y sus posibilidades en el aprendizaje de esta disciplina (Barrantes, 2006) que fomenta la reflexión y profundización en las ideas matemáticas para explicar los comportamientos cognitivos de los individuos dentro de los medios sociales (Santos & Moreno, 2013).

Para el desarrollo del trabajo desde el enfoque de la resolución de problemas se hace necesario contar con un espacio que permita abordar problemas matemáticos experimentalmente, por ello se toma en consideración el *Laboratorio de Educación Matemática*, desde los años 30, Piaget fue pionero en realizar investigaciones experimentales de construcciones conceptuales relacionadas con la geometría, de las cuales se podrían resaltar los trabajos realizados con la magnitud área, estos trabajos siguen vigentes e influencian las investigaciones realizadas en relación con este tema, en los cuales se concede una gran importancia al trabajo experimental en matemáticas, en tanto que permite a los estudiantes simular la actividad realizada por un científico al considerar el aula de clase como un laboratorio, dado que el hecho de aprender matemáticas no se reduce a memorizar fórmulas, teoremas y reconocer el momento adecuado para utilizarlas, sino que implica que los estudiantes desarrollen una disposición hacia el trabajo matemático y se ocupen de problemas con actividades como formular, probar, construir modelos que posteriormente compartirá con sus compañeros para una construcción conjunta o para tomar de ellos lo que se ajuste a su trabajo.

Para la actividad desarrollada en un escenario como el laboratorio se hace necesario el uso de unos materiales específicos, por esta razón y como un aporte a lo planteado en el trabajo experimental, el uso de materiales manipulativos pueden considerarse como elementos que establecen una relación entre las nociones intuitivas de los estudiantes y las estrategias

[1] Entenderemos por resolución a la acción o proceso de resolver el problema que tiene como fin una meta que llamaremos solución. (Codina & Rivera, 2000).

informales con los conceptos y procedimientos de las matemáticas formales, de esta manera los manipulativos contribuyen al proceso de enseñanza y la construcción de los aprendizajes, debido a que incitan la función de los sentidos y activan las experiencias y aprendizajes previos para acceder con mayor facilidad a la información, al desarrollo de habilidades y destrezas y a la formación de actitudes y valores (Careaga & Bardavid, 1991), además Giménez (2000) afirma que son entendidos como modelo de procesos de construcción, puesto que este material se convierte en un “objeto real” con el que el alumnado hace matemáticas y muestra a otros sus descubrimientos.

Teniendo en cuenta los anteriores elementos de esta propuesta en la línea de formación en didáctica de las matemáticas se pretende diseñar e implementar problemas no rutinarios, los cuales se pueden entender como problemas que sean significativos para el estudiante, que sean llamativos, que involucren y permitan la consolidación, la comprensión conceptual del área, que puedan ser abordados con la utilización de un procedimiento práctico informal en la resolución de problemas (heurísticas) y sobre todo de materiales manipulativos. Para abordar la problemática asociada a la comprensión conceptual del área, estableciendo la relación entre número, medida y magnitud se hace énfasis en la *mediación* que se configura a partir de la interacción entre el estudiante, los problemas propuestos y el material manipulativo, además permite dar cuenta de las características de la mediación instrumental que emerge en dicha comprensión, en esta mediación los materiales manipulativos son inicialmente entendidos como artefactos y posteriormente a través del proceso del desarrollo de esquemas en el estudiante, se convertirán en instrumentos que mediarán las actividades.

Para iniciar este estudio es conveniente tener en cuenta algunos aspectos teóricos que permitan conocer de las magnitudes, especialmente el área aspectos históricos, dificultades asociadas a su aprendizaje, su relación con el manipulativo, su estructura matemática, entre otros para poder llegar al objetivo de este trabajo, por esta razón se presentan algunos aspectos que ayudarán en este propósito, a partir de ellos se puede construir una rejilla de análisis que permita dar cuenta de las características que presentan algunas de las mediaciones que emergen al momento de implementar los problemas diseñados y que contribuyen en la comprensión conceptual del área en estudiantes de grado sexto, tal intención puede resumirse en la siguiente pregunta

¿Qué caracteriza la mediación instrumental en relación con la comprensión conceptual del área como magnitud por parte de estudiantes de grado sexto a partir de la resolución de problemas en el Laboratorio de Educación Matemática?

1.2 OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo de grado es:

Reconocer el papel que juegan las mediaciones en la comprensión conceptual del área en grado sexto a partir de la resolución de problemas de áreas en el escenario del Laboratorio de Educación Matemática.

Como objetivos específicos que apoyan de manera directa el objetivo general, se tiene

- Identificar elementos teóricos y metodológicos vinculados a la formulación y resolución de problemas de áreas en el grado sexto de la Educación Básica.
- Concebir y formular problemas de áreas para ser planteados en el escenario del Laboratorio de Educación Matemática a estudiantes de grado sexto de la Educación Básica.
- Analizar las producciones de los participantes del estudio a partir del marco teórico adoptado para dar cuenta de la comprensión conceptual del área.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Nuestro interés es reconocer algunas de las características de la mediación instrumental que se configura en la comprensión conceptual del área como magnitud a partir de la integración de materiales manipulativos, para tal propósito adoptamos referentes teóricos que emergen del estudio de aspectos históricos-epistemológicos, matemáticos, cognitivos, didácticos, curriculares y una mirada general a la mediación y el enfoque instrumental.

2.1 Aspectos histórico-epistemológicos

El análisis histórico permite identificar algunas de las principales concepciones y dificultades asociadas a la construcción de un determinado objeto matemático hasta llegar a su formulación actual y que eventualmente permita reconocer obstáculos asociados a su enseñanza, de esta manera, Armella (1996) afirma que la historia de las matemáticas se concibe como un laboratorio en donde se cuestionan diversas hipótesis sobre la construcción del conocimiento, de manera que permite al estudiante hacer parte de la reconstrucción de algunas de las actividades en las que se manifiesten los procedimientos que se llevaron a cabo a lo largo de la historia del desarrollo de un concepto matemático.

La génesis de la medida parte de la constitución de la magnitud como algo cuantificable, es decir, medible, analizable, que emerge de una noción de igualdad al comparar el tamaño, la importancia, el valor, entre otras, en situaciones comerciales o de trueque, además este desarrollo está unido al desarrollo de las nociones numéricas y presenta un punto de interés particular en aspectos históricos tales como la construcción y adaptación de los sistemas y unidades de medida, éstas últimas entendidas como una cantidad estandarizada de una magnitud física establecida.

Medir hace referencia a relacionar una magnitud con otra u otras que pueden ser o no de la misma especie considerada como patrones universales aceptados, es decir lo que se emplea como muestra para medir alguna magnitud o para replicarla (unidades de media) que establecen una comparación de igualdad de orden y de número, así, para especificar el valor de una magnitud se debe dar el número y la unidad de medida que relaciona ambos valores, de esta manera, se puede evidenciar la relación existente entre número, medida y magnitud.

La necesidad de medir es uno de los generadores de todo el desarrollo de las matemáticas, todas las teorías de los números reales tienen una fundamentación en el proceso de medición, claramente la utilización de los números naturales no es suficiente para representar todas las medidas, debido que para representar algunos resultados con mayor exactitud se debe fraccionar la unidad de medida, aunque así se puede realizar una mayor aproximación de la medida, de ninguna manera se podrá alcanzar la medida real de la magnitud involucrada (Ponce, 2009).

Entre los antiguos, este inconveniente no tenía tanta importancia, de modo que para efectos prácticos no era necesario dar una aproximación de infinitésimos, de acuerdo a esto, es evidente que el proceso de medida es tan antiguo como el quehacer humano, debido a que en todas las actividades que el hombre realiza para el desarrollo del conocimiento matemático, se encuentran presentes seis actividades que según Bishop (2005) son fundamentales, ellas son contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, por ejemplo, el proceso de medición es utilizado para la delimitación de terrenos, construcción de viviendas, entre otros.

En un comienzo, los patrones de medida utilizados hacían referencia a objetos tales como las partes del cuerpo (codo, antebrazo, palma de la mano, etc.), los objetos a medir se comparaban directamente entre sí, pero a medida que las actividades del hombre como la agricultura y la industria fueron evolucionando, hacer estas comparaciones era demasiado dispendioso por las magnitudes tan grandes a medir, debido a la complejidad de las mediciones se hizo necesario realizar convenciones sobre unidades de medidas y gracias a las implicaciones comerciales con distintas regiones, se realizaron las unificaciones de los diferentes unidades.

Un ejemplo de magnitud que resulta históricamente interesante es el área, por cuanto se muestra un ejemplo del surgimiento de los problemas isoperimétricos que hacen referencia a la variabilidad de áreas de figuras conservando el perímetro constante es el caso de la reina Dido, estos problemas tienen su origen hacia el año 900 a.C., en un enclave costero al norte de África, según la leyenda:

> Dido, en la mitología griega, era una princesa fenicia hija de Belo, rey de Tiro, ciudad del sur de Líbano, junto al Mediterráneo, la ciudad más importante de aquellos fenicios que obsequiaron a la humanidad regalándole un alfabeto. Su hermano Pigmalión asesino al marido de Dido para quitarle todas sus posesiones y convertirse en rey. Ésta huye por mar hasta llegar a las costas de África. Era el año 900 a.C., aproximadamente. Quiso comprar unas tierras al cacique local, llamado Jarbas de Numidia, donde pudiesen vivir ella y sus gentes. El trato fue difícil, no tanto porque Dido regatease demasiado, sino porque Jarbas no estaba dispuesto a que se estableciera una colonia en su territorio, y se cerró con la condición de que no le vendería más tierras que la que pudiera delimitarse con la piel de un buey. Dido supo sacar el mayor provecho de lo acordado, ya que hizo cortar la piel en finas tiras, la cosió una a continuación de otra y, aprovechando la costa determino una semicircunferencia. Suponiendo que la piel fuese equivalente a la superficie lateral de un cilindro de 1 metro de altura y 0.5 de radio y que se cortaran tiras de 2 mm, la circunferencia que pudo construir Dido pudo ocupar más de millón y medio de metros cuadrados o, equivalente a más de 150 hectáreas de terreno (Gómez, 2000, p. 105).

En la actualidad, un caso muy particular que se presenta en las aulas de clase en la enseñanza de la medida es pasar desapercibido el origen de su constitución realizando procedimientos aditivos, con este procedimiento es posible conocer cuándo dos magnitudes de la misma especie son iguales, cuándo una es mayor que otra (usando la superposición) adición de magnitudes, entre otras. Cuando no se tiene en cuenta esta constitución se quita a los estudiantes algunos elementos que posteriormente serán de gran utilidad que ayudarán en la apropiación y comprensión de la medida de superficies, incluyendo el sistema de unidades para realizar este procedimiento.

Acudir al estudio del cambio histórico de las nociones matemáticas, por ejemplo, en el caso del área, permite el reconocimiento de que esta noción tiene su origen hace muchos años en la solución de problemas cotidianos de las personas, relacionados con división y medida de terrenos por medio del proceso de recubrimiento, por ejemplo, los antiguos egipcios utilizaban la medida de áreas cuando ocurrían las inundaciones del río Nilo para calcular el área de las parcelas y restaurar los límites de sus terrenos. Este procedimiento adquiere su numeración cuando se introduce la unidad de medida como referencia para el cubrimiento de una superficie haciéndose necesario saber cuántas de estas unidades se deben utilizar para cubrirla totalmente.

Posteriormente y con el desarrollo de la matemática se presentan los procedimientos de medición de áreas de figuras regulares introduciendo las unidades de medida como cuadrados, rectángulos, triángulos, etc. Después de todo el desarrollo matemático e histórico, en las aulas de clase son presentados los resultados de todo ese recorrido y evolución del concepto de área resumido en las fórmulas y algoritmos para su cálculo, siendo esto útil en cuanto a la economía de tiempo y procedimientos.

2.2 Aspectos matemáticos

En este apartado, los aspectos matemáticos permiten dar a conocer las características y términos involucrados en la medida del área como magnitud y su relación con el número, además de la deducción de algunas fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas a partir de unos elementos iniciales como lo son las definiciones, axiomas y las propiedades del área del rectángulo basándose en la geometría elemental o euclidiana.

2.2.1 Área como magnitud

En la actividad educativa en algunas ocasiones se asume la magnitud como un concepto entendido por parte de los estudiantes, debido a las experiencias adquiridas a través de las situaciones cotidianas o el sentido común y se supone que en la escuela solo se debe definirla a través de la teoría.

Lebesgue (en Turégano 1996) afirma que comprender el significado de magnitud es de la misma naturaleza que los números, es decir metafísica, por esta razón existe un aspecto en común entre ellos como el cuidado de no confundir el número con el símbolo que lo representa, de la misma manera no confundir la magnitud con el número que mide dicha magnitud, así, se puede abordar el concepto de área independientemente del número (Turégano, 1996).

No obstante se debe reconocer la estrecha relación existente entre número, medida y magnitud, para lo cual es importante definir algunos de los términos involucrados en esta relación como lo son la *cantidad de magnitud* que hace referencia al estado particular de una magnitud mesurable (medible), la *comparación de cantidades de magnitud* se realiza teniendo en cuenta si una magnitud es mayor, menor o igual que otra, de la misma manera se pueden ordenar mediante la relación mayor o menor qué, pero para hacer una comparación mucho más precisa se hace necesario realizar el proceso de medición, la cual es una propiedad de las cantidades de magnitud.

Para realizar la medida de una cantidad de magnitud, nuevamente se caracterizan tres etapas, una de ellas es *medir* que consiste en la asignación numérica después de realizar una comparación de la cantidad de magnitud con una cantidad considerada como unidad de la misma magnitud, teniendo en cuenta que esta unidad de medida puede ser relativa, a diferencia de la unidad numérica que es única e indivisible, de aquí que el valor numérico puede variar como consecuencia de la unidad de medida seleccionada; la *medición* es el proceso mediante el cual se asigna el valor numérico objetivo a la anterior comparación, además la medición considera los instrumentos utilizados en este proceso, la interpretación de los datos y las estrategias que se requieren para la medida de las diferentes magnitudes, por último se encuentra la *medida* que es consecuencia o resultado final del proceso descrito anteriormente, en la medida se expresa o representa el resultado de la medición que se compone del valor numérico mencionado y el sistema de representación de la medida dependiendo del tipo de magnitud considerada en el proceso de medida (González, s.f).

En resumen, a partir de las anteriores definiciones se puede evidenciar la relación explícita entre el número, medida y magnitud por cuanto la magnitud es una cualidad o característica, de la cual su cantidad es susceptible de medición que a su vez se realiza a través del proceso de medida con la ayuda de una unidad arbitraria y que finalmente es expresada mediante la pareja número-unidad de medida.

2.2.2 Área de figuras planas

Vinculado a lo anterior se requiere profundizar en el estatus matemático del concepto de área, para superar la visión generalizada del cálculo de áreas, a partir del cual en las aulas de clase se presentan fórmulas sin explicación alguna de consecución y sentido. Uno de los métodos para deducirlas toma en cuenta como elementos iniciales los conocimientos que se tienen históricamente sobre el rectángulo y sus propiedades, como lo son, que el área de un rectángulo de base b y altura a es igual a ab y que el área de un rectángulo es invariante por traslación, además se hace uso de algunas definiciones y un axioma de los conjuntos elementales (aditividad) (Barreto, 2008).

El anterior procedimiento toma el área como una magnitud, así que es posible apreciar la reconfiguración o descomposición de una figura en un número finito de partes, de tal manera que se pueda formar una figura más sencilla, cuya fórmula es conocida previamente por los estudiantes como lo es la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo.

Definición 1[2] Línea Poligonal: Es la figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común. (Fig. 1)

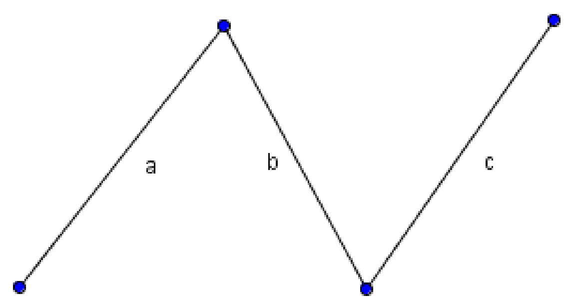


Fig. 1 Línea Poligonal

Definición 2 Polígono: Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.
Definición 3 Cuadrilátero: Es un polígono de 4 lados.
Definición 4 Paralelogramo: Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes.
Definición 5 Rectángulo: Son los paralelogramos que tienen todos sus ángulos rectos. (Fig. 2)

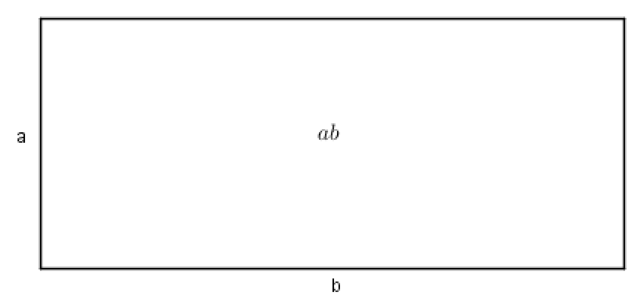


Fig. 2 El rectángulo

[2] Todas las definiciones y procedimientos para la deducción de algunas fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas son tomadas de Barreto, J. (2008). *Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos.*

Definición 6 Conjunto elemental: Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como una unión finita de triángulos y rectángulos. (Fig. 3)

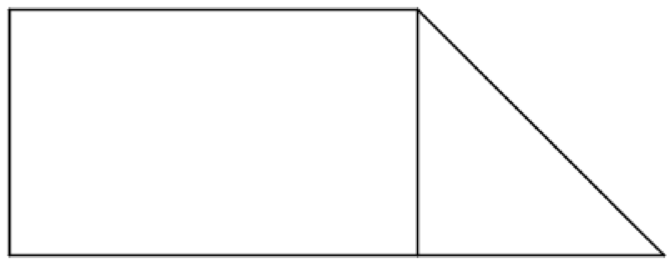


Fig. 3 Conjunto elemental

Axioma 1: El área de un conjunto elemental es aditivo.

Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales, tales que A intersecado con B es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de A unión B es igual a la suma del área de A mas el área de B.

Definición 7 Romboide: Es el paralelogramo que no tiene ni sus ángulos ni sus lados iguales.

Todo romboide puede ser transformado en un rectángulo mediante la aprehensión operativa de reconfiguración[3] moviendo el triángulo AEC a la derecha del paralelogramo no rectangular para formar el triángulo BFD. (Fig. 4)

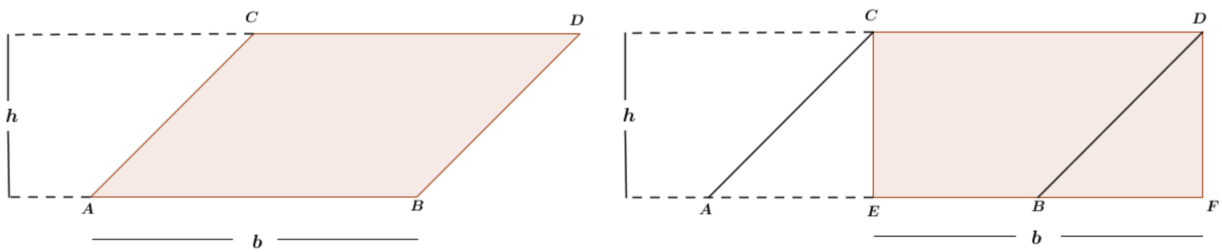


Fig. 4 Apreciaciones de la aprehensión operatoria de reconfiguración

[3] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle

Y como se había dicho antes, el área del rectángulo DCEF es igual a *b* x *h*, por lo tanto el área del romboide es también igual a *b x h*.

Definición 8 Figura congruente: Dos figuras son congruentes si se puede hacer coincidir en todos sus puntos mediante una isometría**.**

Definición 9 Triángulo: Es un polígono de tres lados.

Para hallar el área del triángulo ABC se hace uso de *la aprehensión operativa de cambio figural*[4] para colocar el triángulo BCD de tal manera que ellos dos son congruentes, de manera que se forma el romboide ABCD y cuya fórmula se presentó en el punto anterior, de esta manera se evidencia que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del romboide ABCD. (Fig. 5)

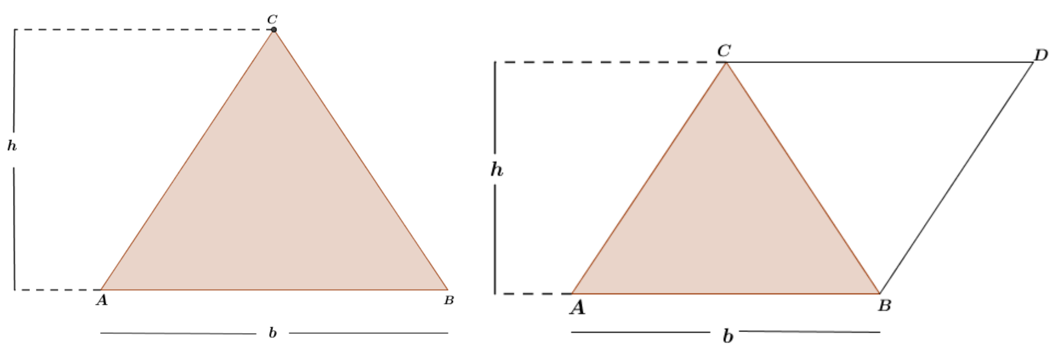


Fig. 5 Apreciación operativa de cambio figural del triángulo

De esta manera, el área del triángulo ABC es igual a la mitad de la base multiplicada por la altura.

Definición 10 Trapecio: Cuadrilátero que solo tiene dos lados paralelos.

Para hallar el área del trapecio ABCD se hace uso de la siguiente *aprehensión operativa de cambio figural* (Fig. 6)

[4] Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones.

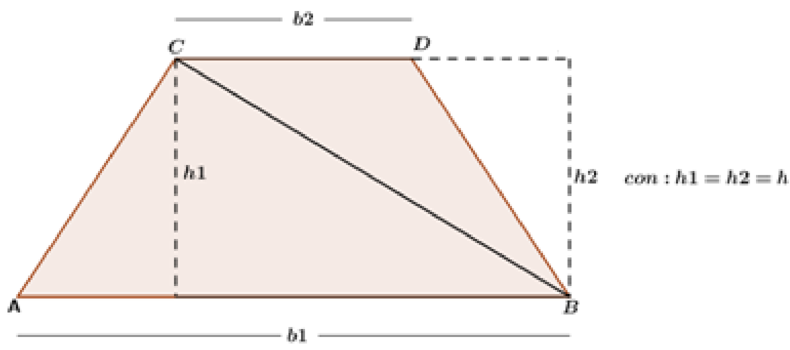


Fig.6 Aprehensión operativa de cambio figural del trapecio

Como el área del triángulo ABC es igual a la mitad de (b_1 x h_2), por el Axioma 1 se tiene que el área de este conjunto elemental es aditiva, entonces el área del triángulo ABC mas el área del triángulo DCB es igual al área del trapecio ABCD.

Definición 11 Rombo: Es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales, pero sus ángulos no son rectos.

Para encontrar el área del rombo, se inscribe este en un cuadrado para obtener la forma conocida de base x altura. (Fig. 7)

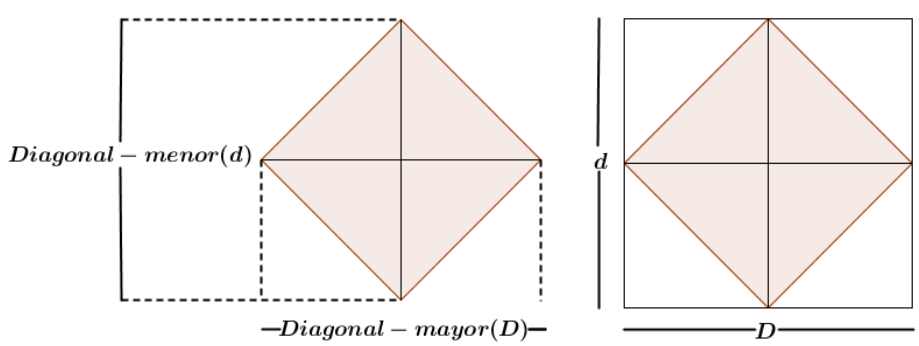


Fig. 7 Inscripción del rombo en el cuadrado

Al inscribir el rombo en el cuadrado, se obtienen 8 triángulos iguales, de los cuales 4 pertenecen al rombo, como el área del rectángulo ya es conocida, en este caso se tiene que el área del cuadrado es igual a (d x D) y como el rombo contiene la mitad de los triángulos que conforman el cuadrado, se puede evidenciar que el área del rombo es igual a la mitad del área de cuadrado que lo inscribe, es decir la mitad de (d x D).

De esta forma se puede conocer una de las maneras de deducir las fórmulas para hallar el área de algunas figuras planas y poder calcularla de manera indirecta, con esto se presenta solo una parte de lo que involucra el concepto de área, presentando a los alumnos un procedimiento un poco más riguroso que involucra la manipulación de las figuras mediante la adición o supresión conveniente de elementos geométricos de las configuraciones iniciales, además este tipo de procedimientos pueden ser abordados a través de materiales manipulativos o ambientes de geometría dinámica para apreciarlos en mayor medida.

2.3 Aspectos didácticos

Un análisis didáctico de una determinada noción se usa en la Didáctica de las Matemáticas para identificar y caracterizar una serie de fenómenos relativos al aprendizaje y enseñanza de una noción o concepto matemático en contextos escolares. Puede plantearse en términos de obstáculos didácticos y de los errores y dificultades de los estudiantes en términos de su aprendizaje. En el presente trabajo de grado se otorga especial importancia al proceso de resolución de problemas y las estrategias de enseñanza del concepto de área a través del uso y mediación de materiales manipulativos.

2.3.1 La resolución de problemas como un proceso central en el tratamiento del área

Según Santos Trigo (2008), a nivel curricular se considera la resolución de problemas como un eje central en la organización de contenidos a pesar de que existan diferencias entre los diversos sistemas educativos, además Schoenfeld (citado por Santos Trigo, 2008) plantea la necesidad de especificar el significado al usar el término “resolución de problemas” en las propuestas curriculares o bien en los programas de investigación, por esta razón se pueden retomar algunos significados de resolución de problemas propuestos por diferentes autores, según Lesh & Zawojewski (citado por Santos Trigo, 2008) la resolución de problemas se define como:

> El proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas (p. 3).

De acuerdo a lo anterior, Santos Trigo (2008) argumenta que esta caracterización es importante por cuanto el desarrollo de las ideas matemáticas implica todo un proceso de reflexión en el que el estudiante construye y mejora sus ideas que posteriormente le permitirá desarrollar estrategias y recursos que le ayudarán a superar las dificultades que inicialmente se le presentan; de la misma manera propone otra definición para la identificación de la resolución de problemas

> Como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Es decir, la meta no es solamente reportar una respuesta sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema. También contempla actividades que permitan extender el problema inicial y formular conjeturas y otros problemas (p. 3).

George Pólya es uno de los autores más importantes dentro del campo de la resolución de problemas, y su trabajo se asocia a la importancia de resolver problemas como el camino por el cual se crea el conocimiento matemático; en si libro *cómo plantear y resolver problemas 1945* propone una serie de pasos que ayudarán al estudiante en esta tarea, ellos son, entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y por último mirar hacia atrás.

Existe gran diversidad de estrategias para resolver problemas que son utilizadas en algunas ocasiones para un tipo de problema, en otras ocasiones pueden ser utilizadas dos o más estrategias combinadas para resolver un problema, e incluso pueden existir diferentes formas para resolverlo, según Rodríguez, Caraballo, Cruz & Hernández (1997), algunas de ellas son:

- **Descubrir un patrón:** esta estrategia ayuda a descubrir algo que sucede en repetidas ocasiones, un patrón en un problema presenta un comportamiento en el cual se suma la misma cantidad, se resta o multiplica o divide, no solamente números, sino figuras, letras o patrones de comportamiento.
- **Ensayo y error:** esta estrategia es útil cuando no se conoce otra, es decir, consiste en hacer varios intentos para llegar a una solución.
- **Hacer una tabla:** con esta estrategia se puede llevar la cuenta de números, datos y la combinación de ellos en forma organizada, aunque la información contenida en ella no necesariamente debe ser numérica, solo debe tener un arreglo rectangular para su organización en filas y columnas.
- **De atrás hacia adelante:** o comenzar por el final, esta estrategia es útil cuando se debe comenzar con la información dada sobre la forma en que el problema termina y empezar por el final.

Cuando se habla de resolución de problemas se hace referencia a una actividad en la que los estudiantes se encuentran enfrentados a situaciones, que generan en ellos una profunda reflexión frente a los procedimientos, justificaciones y demás elementos presentes en el proceso de la resolución de un problema y no solamente a la aplicación de fórmulas y algoritmos que son rasgos característicos del desarrollo de un ejercicio más que de un problema, por esta razón, Shoenfeld (citado por Santos Trigo, 2008) sugiere no solo describir las estrategias heurísticas que pueden utilizar los estudiantes, sino tener en cuenta otros elementos como lo son ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de estrategias heurísticas especificas ligadas a clases específicas de problemas; enseñar a los estudiantes a controlar su trabajo, de manera que sean capaces de reconocer si las estrategia utilizada para la resolución de un problema es la adecuada, saber en qué momento debe detenerse y tomar otro camino de solución cuando el adoptado no es el correcto; y desarrollar sólidas creencias en los estudiantes acerca de las matemáticas debido a que su influencia puede dominar la manera en que los estudiantes y profesores abordan la resolución de un problema.

El desarrollo de la actividad de resolución de problemas promueve el trabajo experimental como un punto clave para propiciar el acercamiento al desarrollo de conceptos por parte de los estudiantes mediante la utilización de actividades propias de la labor científica, como la realización de procedimientos de ensayo-error, hipótesis, realización de cálculos, entre otros. De esta manera se pretende reflejar este tipo de actividad con estudiantes de grado sexto, donde el estudiante, además de poner en práctica los recursos con los que cuenta, entendidos como los conocimientos previos, los conceptos, procedimientos, fórmulas y demás, debe realizar las actividades anteriormente mencionadas para su propio trabajo intelectual al enfrentarse a la resolución de un problema.

Para desarrollar esta actividad se hace uso de un escenario apropiado para este fin como lo es el Laboratorio de Educación Matemática que según Alsina (citado por Arce & Pabón, 2011) se propone como una estrategia pedagógica donde se implementa la utilización de materiales, en la que se presentan una serie de problemas no rutinarios que deben ser resueltos por los estudiantes en diferentes situaciones, esta serie de actividades otorgan un ambiente de aprendizaje en el cual se relacionan las actividades matemáticas con el material manipulativo y a partir de esta relación se contribuye a la construcción y fundamentación del pensamiento matemático. De esta manera, el Laboratorio de Educación Matemática pone en acto el desarrollo del pensamiento matemático por su característica desligada de la complementariedad de las clases en el aula, es decir que no da continuidad a los temas que se manejan en ella.

Según lo mencionado, es importante destacar la resolución de problemas como un proceso para el abordaje del concepto de área, debido a que este trabajo está enfocado en las características de la mediación instrumental que se configura en la comprensión conceptual del área como magnitud, y para esto la resolución de problemas aporta elementos esenciales que permiten por una parte el trabajo de forma experimental de un tipo de problemas que den cuenta de la comprensión conceptual del área que es una de las características que ayudan a determinar si un estudiante es matemáticamente competente, por otra parte permite reflejar a partir del trabajo con materiales manipulativos los elementos característicos de la mediación instrumental que emerge a partir de la interacción entre el estudiante y dichos materiales.

2.3.2 Algunos aspectos problemáticos sobre la enseñanza del área

El tema de la enseñanza de la medida es complicado de abordar para los maestros desde sus primeros acercamientos en la educación primaria. El proceso de medición ha sido llevado a cabo desde muchas generaciones atrás, por ello algunos de los maestros cometen el error de pensar que todo lo que proviene de la cultura no debe representar un reto en su enseñanza y por lo tanto es fácil de entender para los estudiantes por cuanto se supone están familiarizados con ella y la llevan a cabo en múltiples oportunidades en sus hogares. Por esta razón, en clase se aborda el proceso de medición realizando medida de magnitudes y objetos sencillos que no permiten al estudiante reconocer la complejidad de la medición (Chamorro, 1995). Otro de los inconvenientes que se presentan en la enseñanza de la medida tiene que ver directamente con el Diseño Curricular Base (DCB), en el cual se proponen las magnitudes: longitud, superficie, cantidad, masa y tiempo dejando de lado el sistema monetario o los porcentajes considerados también como medida, de igual manera la extensión de los temas que deberían tratarse en la enseñanza de la medida hacen que los maestros opten por evitar las prácticas de medida efectivas por cuanto son costosas en tiempo y esfuerzo, privando así la construcción adecuada de la medida por parte del estudiante, impidiendo así el uso del razonamiento inductivo, por ello se sugiere que para la enseñanza de esta se utilice la experiencia y práctica de los estudiantes como punto de partida del proceso de construcción matemática (Chamorro, 1995).

Dentro del sistema educativo muchas veces se tiende a presentar o proponer teoría que sirva para realizar procedimientos prácticos (Sistema Métrico Decimal), que llevan al estudiante a resolver ejercicios más que problemas convirtiendo la enseñanza de la medida en un discurso teórico, de esta manera Chamorro (1995) indica que:

> Para muchos profesores y profesoras, el objetivo inmediato es el aprendizaje de las unidades del Sistema Métrico Decimal y las conversiones entre ellas. Esta práctica está en la mayoría de los casos encaminada a entrenar a los alumnos y alumnas en la resolución de ejercicios de los manuales escolares, enseñándoles lo que podríamos llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente y que por su propia naturaleza encierra una pérdida del sentido que tiene los cambios de unidades. (p. 33)

En las aulas de clase ocurre con demasiada frecuencia una anomalía que consiste en reemplazar la magnitud por un número, esto puede explicarse por lo que se denomina aritmetización de la medida que según Chamorro (1995) se presenta cuando se realiza el procedimiento de medición implementando un instrumento numerizado, de esta manera cuando se utilizan por ejemplo balanzas digitales, el único indicador que puede apreciar el estudiante es el número que proporciona la balanza, por esta razón cuando se utilizan los instrumentos de gran tecnología para las mediciones olvidando los viejos instrumentos como las balanzas de pesas, los maestros no pueden dar una explicación de lo que sucede dentro de dichos instrumentos, y si lo hicieran, posiblemente los estudiantes presentarían dificultades para comprenderlo, ocultando con ello todo el procedimiento y el desarrollo que durante muchos años ha tenido la medida para llegar a lo que ahora se conoce y se pierde por una inadecuada enseñanza.

A partir de las anteriores problemáticas, algunos como Zapata & Cano (2008) afirman que en el proceso de formación del concepto de área se hace necesario que los estudiantes tengan un acercamiento a este concepto mediante situaciones prácticas que involucren objetos y contextos con los que están familiarizados en mayor medida y que hagan explícita la necesidad e importancia del área para la resolución de problemas cotidianos. Además Freudenthal (citado por Ponce, 2009) asevera que el concepto de área viene dado por tres aproximaciones, las cuales son: repartir equitativamente, comparar y reproducir, y medir.

En cuanto a la primera aproximación, se puede hacer referencia a situaciones que involucren la división equitativa de un objeto como una torta, de lo cual también se puede estudiar el concepto de fracción que es un medidor en el estudio del área; la segunda aproximación se puede dar mediante el planteamiento de situaciones que involucren la comparación de áreas o dada una superficie, encontrar otra que tenga la misma área. Para la resolución de estas situaciones se puede hacer uso de algunos procesos como la inclusión que consiste en la comparación de un área que se encuentra contenida en otra, de manera que la diferencia de áreas se hace notoria de inmediato; las transformaciones de romper y rehacer que consisten en la división en partes iguales de las figuras y reorganizarlas obteniendo nuevas figuras, pero con las áreas iniciales; el proceso de estimación que es usado cuando se pretende obtener una medición sin la utilización de instrumentos de medida, de manera que el resultado obtenido será aproximado; entre otros.

La tercera aproximación, medir, que propone situaciones que se encuentran estrictamente ligadas a un proceso de medición que se puede abordar mediante la exhausión con unidades, consiste en rellenar una superficie con unidades de área sin solapamientos, los espacios que no queden recubiertos por ser menores que la unidad de área utilizada, se cubrirán con subdivisiones de la unidad inicial, y así sucesivamente hasta cubrir toda la superficie; también se puede abordar la aproximación mediante la acotación entre un valor superior e inferior que consiste en superponer en la superficie a medir, por ejemplo una rejilla cuadrada para contar los cuadrados que quedan al interior de la figura y los que quedan en el exterior para tener una mejor aproximación por defecto o por exceso; entre otros.

Para los aspectos relacionados con la enseñanza de la magnitud área, se presenta a continuación una de las problemáticas didácticas asociadas a este concepto. Se reconoce que la forma como se enseña la matemática influye en las creencias que los estudiantes tengan sobre ésta, es decir, la forma como el profesor aborde el tema permite que el estudiante actúe de la misma manera, llevándolos a pensar que la matemática es un régimen de verdades absolutas con fórmulas que se deben simplemente memorizar, como sucede con las utilizadas para el cálculo del área de figuras planas donde los estudiantes suelen pensar que ellas llevan consigo mismas el concepto de área y por ello van relacionados a una figura específica como el cuadrado, el triángulo, el círculo, entre otras.

Estas concepciones que adquieren los estudiantes tienen lugar en las aulas de clase, y de estas fórmulas surgen dos aspectos a resaltar, según Castro, Flores & Segovia (1997):

- Las fórmulas que se emplean para hallar el área de una superficie geométrica se basan en medidas de longitud de cada figura con el riesgo que se considere la superficie como una magnitud derivada de la longitud, dejando de lado las propiedades que son propias de la magnitud área.
- La fórmulas que se usan para el cálculo del área, depende de la forma de la unidad de medida que se ha elegido, generalmente es utilizado el cuadrado como unidad de medida para agilizar o hacer más práctico el procedimiento, pero para generar en los estudiantes una mejor y más general comprensión de lo que significa el área de una figura se debe relativizar la unidad de medida.

Se ha generalizado en las aulas de clase la tendencia de omitir la medida directa de superficies por razones como la imposibilidad de realizar su recubrimiento con unidades cuadradas en la mayoría de los casos, o por la gran cantidad de dificultades entre otros, por ello se opta por la enseñanza de la medida del área de manera indirecta, es decir mediante fórmulas. Presentando a los estudiantes esta forma de calcular el área se deja bajo su responsabilidad subsanar las deficiencias inherentes de este procedimiento, centrando el trabajo en la aplicación de las fórmulas para hallar el área, fundando así la creencia en los alumnos de la inexistencia de otros procedimientos para tal fin.

Teniendo como punto de partida estas dificultades, a continuación se da a conocer la tipología de problemas que permite mostrar una alternativa para la enseñanza del área como magnitud a partir del rediseño de algunas actividades para el grado sexto.

2.3.3 Tipología de problemas de áreas

El concepto de área puede entenderse de diversas formas, de tal manera que para cada una de ellas puede diseñarse un determinado tipo de tareas. Moreira, (1998) propone una clasificación de posibles procedimientos que ponen en evidencia algunas invariantes con respecto a la magnitud área, entre las que se puede ver el área como el número de cuadrados necesarios para recubrir la superficie, el área como número obtenido por la aplicación de una fórmula, como el lugar ocupado por una superficie, entre otras, de la misma forma Corberán (1996) afirma que este concepto se puede concebir de diversas formas dependiendo de los procedimientos necesarios para el cálculo, bien sean geométricos o numéricos, de esta manera se pueden clasificar de la siguiente manera:

- **El área como cantidad de plano ocupado por la superficie.** Esta es la primera manifestación con la que los niños deben estar familiarizados. En tal sentido, es posible realizar tareas de comparación de áreas de superficies mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica, donde el número está ausente de cualquier razonamiento.
- **El área como magnitud autónoma.** Por área como magnitud autónoma entendemos el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, lo cual permite disociar el área del perímetro. La confusión entre el área y el perímetro es una de las más habituales y más arraigada entre los estudiantes que les lleva a cometer frecuentes errores. En tal sentido, es posible realizar tareas de comparación de áreas de superficies, de modo que se observe que superficies de forma diferente pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica como de naturaleza numérica. Es importante señalar que la disociación del área del número que la mide es clave en la comprensión del papel que juega la unidad de medida, y en consecuencia en la comprensión del proceso de medida. En tal sentido, es posible realizar tareas que vinculen a la medida del área de una misma superficie, con el uso de diferentes unidades de medida.

- **El área como unidades que recubren la superficie.** Para que el estudiante comprenda el área como número de unidades que recubren la superficie, es necesario que comprenda el papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas. Estudiar esta manifestación del área ayudará a los estudiantes a enfrentarse significativamente el estudio del área como resultante del producto entre magnitudes lineales, en tal sentido, es posible realizar tareas de medición basadas en la comparación de las áreas de dos superficies, la superficie cuya área se desea medir, y la otra, la considerada como unidad de medida, utilizando procedimientos de carácter numérico con el uso de una unidad de medida bidimensional. De este modo la medida del área vendrá dada por el número procedente de un recuento o conteo del número de unidades o fracción de esta que recubre exactamente la superficie.

- **El área como producto de dos dimensiones lineales.** Antes de abordar esta tipología, es conveniente tener presente que a pesar de ser este el enfoque del área más enseñado a los estudiantes, paradójicamente es el que posee las más altas cotas de incomprensión. Se debe ser consciente del nivel de abstracción y de formalización que requiere la medición de un área mediante cálculos a partir de las dimensiones lineales y de ahí la dificultad en la comprensión por parte de los estudiantes de las fórmulas para el cálculo del área de algunas superficies.

Ahora bien, como el presente trabajo pretende dar cuenta de las características de la mediación instrumental que emerge en la comprensión conceptual del área como magnitud a través de la formulación y resolución del tipo de tareas presentadas, es importante dar a conocer como se entenderá esta mediación, la cual surge gracias al uso de materiales manipulativos en el tratamiento de la tipología de problemas presentada, de las cuales se tendrá cuenta sólo las tres primeras formas de concebir el área de figuras planas, razón que será explicita en un apartado posterior, titulado diseño de problemas.

2.3.4 El enfoque instrumental

Como se presentó en apartados anteriores, el *enfoque instrumental* se tomará como un referente para el estudio de aspectos vinculados a la mediación de artefactos en relación con la comprensión conceptual del área. Los elementos de este enfoque dan cuenta que este analiza algunas de la potencialidades y las restricciones de la tecnología para una nueva actividad matemática que se espera produzca reorganización del conocimiento de los estudiantes.

Como señala Del Castillo & Montiel (2009) la *génesis instrumental* estudia la construcción hecha por el estudiante al interactuar con un artefacto, convirtiéndolo en instrumento, así el estudiante se lo apropia haciéndolo parte de su actividad matemática. La interpretación del trabajo de Rabardel (1995) ha permitido a algunos autores distinguir y establecer diferencias entre máquina, herramienta e instrumento:

> Como ***máquina*** entendemos un aparato complejo, que se puede considerar que esta relativamente alejado en su interacción con el hombre, pero más consonante con la manufactura industrial o procesos similares.
>
> Una ***herramienta*** es un dispositivo que originalmente nos provee de una ventaja (generalmente mecánica) al ejecutar una tarea. Entenderemos por herramienta al aparato que está disponible para dar sustento a la actividad humana. Un teléfono celular, un taladro, el lenguaje de los tarahumaras, el lenguaje que usamos nosotros, son ejemplos de herramientas.
>
> Cuando nos referimos a una herramienta y no consideramos el usuario y sus usos, estaremos hablando de un artefacto. Para Rabardel (1995, p.49) es una "cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano".
>
> El término de ***instrumento*** se usa para designar el artefacto en situación, delimitado por un uso, en una conexión instrumental a la acción del sujeto, como medio de éste. (Del Castillo& Montiel, 2009, p. 460).

Existe la concepción de que es posible que las TIC en tanto herramientas se convierten en verdaderos instrumentos para el trabajo matemático y contribuya a la reorganización conceptual, donde la noción de instrumento es ligada a una tarea, que es asociada a su vez con un objeto.

Así, el instrumento autoriza al usuario a actuar sobre el objeto. La noción de instrumento aparece en los trabajos de Rabardel (1995) y está asociada con otros dos elementos: un objeto y un sujeto. Más tarde Rabardel (1995) precisa su definición del instrumento:

> La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y al objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es pues adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse" (p. 72).

Además, para Trouche (2005) un ***instrumento*** es lo que el sujeto construye a partir de un ***artefacto.*** De esta manera, el sujeto construye su propio instrumento, se lo apropia, lo que hace al instrumento reutilizable en situaciones análogas. A través de esta conservación el ***instrumento*** es una forma de capitalizar la experiencia acumulada. Adicionalmente, distingue tres tipos de restricciones del medio informático: internas, de comando y de organización. Las primeras no se consideran ligadas a la tarea específicamente, ya que vienen predeterminadas (naturaleza del microprocesador, capacidad de la memoria, estructura de la pantalla). Las de comando están asociadas a la sintaxis de los propios comandos, las cuales pueden modificarse dentro de ciertos límites para obtener un cierto resultado (ejemplo, la existencia de paréntesis para las funciones). Por último, las de organización, que están ligadas al teclado y a la pantalla, es decir, a la estructuración de las informaciones y de los comandos disponibles, también pueden ser modificadas por el usuario para obtener los resultados deseados (por ejemplo, la accesibilidad del símbolo∞) (Del Castillo &Montiel, 2009):

A partir de estas consideraciones, se acepta que el usuario no cuenta con una total libertad para utilizar como él pretende un artefacto dado. Su uso está, relativamente, preestructurado por el artefacto en sí mismo. De acuerdo con Trouche (2002): “es sin embargo, separar las potencialidades de las restricciones: las dos están íntimamente mezcladas, toda facilidad que se le ofrece al usuario constituye al mismo tiempo una incitación a realizar un tipo de acción antes que otra”.

En el centro de este análisis se encuentra la denominada *génesis instrumental,* considerada como el proceso mediante el cual un artefacto que se convierte en un instrumento en las manos de un usuario.

Más allá de las versiones simplistas de este proceso, los investigadores consideran que la *génesis instrumental,* es una evolución en curso, no trivial y que lleva mucho tiempo. Una relación bilateral entre el artefacto y el usuario está establecida: Mientras el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (***instrumentalización***), las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (*instrumentación*).

Thouche (citado por Del Castillo & Montiel, 2009) afirma que un ***instrumento*** puede considerarse una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto (o parte de él) y de una componente psicológica (la organización de la actividad con un fin dado). El ***instrumento*** es entonces el producto de una historia:

> El usuario a partir de un artefacto, construye un instrumento, en un entorno determinado, para realizar una tarea específica. Esta historia, que se denomina génesis instrumental, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar las características del artefacto (sus potencialidades y restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo (p. 463).

También se acepta que la génesis instrumental contiene dos entidades, una primera que se refiere a la apropiación del artefacto y de sus propiedades: la instrumentalización; la otra se refiere en la construcción de los esquemas de uso: la instrumentación. Estos procesos pueden ser caracterizados en los siguientes términos:

> La ***instrumentalización.*** Es la expresión de la actividad específica de un sujeto: sobre lo que el usuario piensa en relación para qué fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado: la elaboración de un instrumento ocurre en su uso. La instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento.
>
> La ***instrumentación*** se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los diseños de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores. De la misma forma que la utilización de las señales psicológicas influye sobre los pensamientos del sujeto, la génesis instrumental permite hacer evolucionar las concepciones del sujeto relativo al objeto contemplado por el instrumento. Las concepciones evolucionan por la adaptación a las dificultades de las herramientas y también por la consideración de las potencialidades (Trouche, 2005, p. 148).

De manera general, se considera que el progresivo descubrimiento del sujeto de las propiedades (intrínsecas) de los artefactos va acompañado de la adaptación de sus esquemas, así como los cambios en la significación del instrumento resultante de la asociación del artefacto con los nuevos esquemas.

Igualmente se considera que el nacimiento de estos esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas (que dan así un nuevo significado a los artefactos), la adaptación de los esquemas (que contribuyen a sus cambios en el significado), constituye esta segunda dimensión de la génesis instrumental: el proceso de instrumentación. (Del Castillo& Montiel, 2009)

2.3.5 Los materiales manipulativos y la resolución de problemas para abordar el estudio de la magnitud área

Uno de los puntos centrales en este trabajo relacionado con el concepto de área es el enfoque de la resolución de problemas, dicho enfoque se vincula a las denominadas *matemáticas experimentales* que permiten a los estudiantes abordar los problemas planteados utilizando diversos procedimientos formales y especialmente los informales. Para estimular la aparición de estrategias y procedimientos informales, una técnica que ha empezado a ganar terreno es el uso de materiales manipulativos, que dan lugar a una particular mediación y que permite un acercamiento a situaciones cotidianas donde eventualmente podrían aparecer esos procedimientos informales.

En las investigaciones realizadas en didáctica de las matemáticas se promueve la renovación de las actividades y recursos que se utilizan para la enseñanza, lo cual se traduce en la posibilidad de integrar diferentes artefactos. En este trabajo se asumen algunos de los referentes teóricos propuestos por Rabardel (1995) según los cuales se presentan los artefactos como objetos materiales o abstractos que son proporcionados para el desarrollo de un cierto problema, estos artefactos pueden ser unos objetos sin sentido para los alumnos si no han interactuado en alguna ocasión con ellos o si no han visto su funcionamiento o forma de utilización.

El artefacto se transforma en un instrumento después de un cierto proceso de apropiación que le permite ser un mediador de la actividad, en el transcurso de dicho proceso, el estudiante adquiere una serie de esquemas mentales que organizan los conceptos y teorías que conforman la estrategia para la resolución del problema, además de los medios técnicos para su utilización. Por esta razón, solo hasta que el estudiante haya desarrollado medios para el uso del artefacto con una finalidad específica, este se convierte en un instrumento mediador de la actividad que además es construido por el estudiante mismo. Más adelante se precisan asuntos relacionados con este enfoque conocido como el *enfoque instrumental*.

Los materiales manipulativos no son sólo artefactos que funcionan automáticamente en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, sino que hay que tener cuidado con el carácter simbólico y estructural de los manipulativos en relación con el conocimiento matemático, de esta manera se puede entender que los manipulativos son más que artefactos, gracias a ese carácter simbólico se pueden representar ideas mediante los materiales manipulativos (Nührenbörger & Steinbring, 2008). Por ejemplo en el caso del trabajo con el concepto del área se puede ver que cada uno de los cuadrados del monominó tienen un carácter simbólico que representa el concepto de unidad de área y un carácter estructural que tiene la posibilidad de entrar en interacción con otros elementos para crear una estructura matemática.

Como un aporte del trabajo con manipulativos tanto para estudiantes como para los futuros docentes es que desarrollen una conciencia del carácter epistemológico de los manipulativos, es decir que ellos no son solo artefactos, sino que tienen una vinculación muy particular con el conocimiento matemático; además de que los futuros docente de matemáticas valoren el aprendizaje y la comprensión del conocimiento matemático cuando se utilizan manipulativos.

Es importante tener en cuenta que el uso de los materiales manipulativos para el tratamiento del concepto de área tiene una larga tradición en el campo de la didáctica de las matemáticas, por ejemplo, el trabajo con geoplanos y con tangrams es común en las clases de matemáticas pero sigue siendo muy prototípico en relación con el trabajo del área en tanto medida.

En el presente trabajo se busca fundamentar la actividad con problemas no rutinarios vinculados a estos artefactos, de manera que se promueva la emergencia de verdaderos instrumentos para la labor matemática. También se espera integrar en las clases, nuevos elementos, sencillos y fáciles de utilizar, que correspondan con la tipología de problemas de áreas caracterizados en el apartado de los aspectos didácticos, los cuales se consideran centrales para promover la comprensión conceptual del área. Por supuesto, este trabajo demanda un escenario particular que ayude a superar el tratamiento mecánico a través de fórmulas para el cálculo de áreas, permitiendo concebirla como una magnitud, para ello se propone el Laboratorio de Educación Matemática.

2.3.6 El laboratorio de Educación Matemática

El *Laboratorio de educación Matemática* es fundamentalmente un escenario para el *trabajo experimental* en matemáticas a través de la elaboración y puesta en acto de actividades matemáticas directamente encaminadas a potenciar los procesos de experimentación e indagación matemática, puesto que ellas:

- Ofrecen un atractivo a los participantes del laboratorio, para que ellos puedan integrarlas fácilmente en su mundo al tratar de buscarles solución o explicación.
- Generan la posibilidad de provocar el desarrollo de razonamientos propios y creativos.
- Tienen un carácter marcadamente abierto, lo que permite acoger diferentes caminos de solución provenientes de los distintos participantes.
- Propician la oportunidad de expresar de distintas formas las vías de solución y de explicación, utilizando quizá distintos lenguajes y representaciones.
- Dan la posibilidad de trabajar con distintos tipos de materiales, medios y recursos que van más allá del papel y del lápiz. Arce (citado por Arce & Pabón, 2011).

Es importante señalar que *el enfoque instrumental* ha empezado a impactar los alcances y proyecciones del trabajo en el laboratorio, como resultado de la presencia creciente de *recursos informáticos y computacionales* en las aulas de clase y el desarrollo de ambientes informáticos de aprendizaje.

El trabajo en el laboratorio podría ampliar la visión sobre las *matemáticas experimentales* a partir del estudio de recientes desarrollos teóricos relativos a los denominados *recursos pedagógicos*, entendidos en un sentido laxo como todo aquello que estudiantes o profesores utilizan para el aprendizaje o la enseñanza de un tema matemático específico, como por ejemplo, materiales escritos, software, videos, fotografías, entre otros,(para este trabajo el monominó).

También se reconoce en la actualidad la posibilidad de realizar investigaciones que intenten explicar en qué medida, las estrategias de aprendizaje basadas en ambientes experimentales como los de los laboratorios de matemáticas y en la integración de las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación) repercuten en la disminución de bajos desempeños académicos de los estudiantes en pruebas estandarizadas tanto nacionales como internacionales, y sobre la misma formación y cualificación de los profesores de matemáticas.

El *Laboratorio de Educación Matemática* tiene una estructura simple y funcional y toma como base de su configuración una unidad que se llamará *mesa*, en ella se disponen recursos pedagógicos (fichas de trabajo, materiales manipulativos, documentos, software, equipos, elementos para estructurar una secuencia de clase, prototipos, etc.) para que sus participantes enfrenten los retos y problemas, enmarcados en el currículo TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), que dispongan en la temática de actuación de cada mesa.

Por otra parte, hay problemas cuyas soluciones demandan la participación simultánea de dos o más mesas de trabajo, dicha relación entre mesas constituye lo que se denomina una *sección* del laboratorio de matemáticas. La nueva concepción del Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle contempla las siguientes mesas: Aritmética, Álgebra, Estadística y probabilidades, Juegos matemáticos, Prensa y matemáticas, Matemáticas del consumidor, Matemáticas y nuevas tecnologías, y finalmente, la mesa de Geometría.

La *mesa de aritmética* se encargará de ingresar problemas numéricos que involucren números, relaciones y operaciones entre ellos.

La *mesa de álgebra* planteará problemas que permitan crear perspectivas de generalización y modelación de marcos de referencia cambiantes tanto en ambientes numéricos como en el marco de estructuras matemáticas abstractas.

La *mesa de estadística y probabilidades* incorporará problemas tendientes a la organización y procesamiento de diferentes tipos de datos con la intención de inferir de ellos, mediante el cálculo de probabilidades, nueva información para la toma de decisiones.

La *mesa de juegos matemáticos* incorpora, desde diferentes perspectivas, juegos que se rigen con reglas acordadas previamente pero que tienen un trasfondo matemático claro y preciso. Hay una gran variedad de ellos.

La *mesa de matemáticas y prensa* extraerá o creará a partir de diferentes medios periodísticos de circulación nacional o internacional diferentes situaciones problema que se relacionen con alguno de los tópicos matemáticos que abarca el TIMSS.

La *mesa de matemáticas del consumidor* incorporará el análisis de las situaciones matemáticas cotidianas en que se ve involucrado un consumidor local. Los problemas de las matemáticas financiera y las matemáticas del artesano tienen aquí un lugar preferencial.

La *mesa de matemáticas y nuevas tecnologías* incorporará el análisis de situaciones matemáticas que se proponen en ambientes de geometría dinámica y sistemas de algebra computacional, con la intención de reconocer aspectos asociados a procesos de formación de pensamiento geométrico y de instrumentación e instrumentalización de las Tics.

Finalmente la *mesa de geometría* planteará problemas cuyas soluciones se pueden enmarcar en los diferentes tipos de geometría existentes y que fundamentalmente tienen que ver con las propiedades de diferentes espacios y diferentes objetos y sus relaciones en dichos espacios.

Descripción de una ficha de trabajo

Cada mesa se desarrolla a través del agrupamiento sistemático de lo que se denomina *fichas de trabajo*, las fichas que ingresan a cualquiera de las mesas del laboratorio de matemáticas tienen un diseño sencillo y práctico que permite su organización y manipulación tanto física como digital.

En la Figura 8, se muestra el esqueleto de la cara A (anverso) de una ficha prototipo, donde en:

(1) se escribe el título de la ficha

(2) se señala claramente el aspecto de contenido de la ficha utilizado para ello los códigos de los marcos de referencia curricular del TIMSS.

(3) se ubica la descripción del problema.

(4) se ubican los dibujos, gráficos e información no escrita que sea complementaria a la descripción del problema.

(5) se abre un espacio para registrar observaciones, comentarios, autorías, fuentes bibliográficas, sugerencias, etc.

(6) se ubica un código de barras o código QR que indicad la localización de la ficha en la base de datos física y digital y suministra datos e información complementaria para su manejo.

<table>
<tr><td colspan="2">(1) → Titulo de la ficha</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) → Códigos de los marcos de referencia curricular TIMSS</td></tr>
<tr><td>(3) → Descripción del problema</td><td>(4) → Dibujos, gráficos e información no escrita complementaria a la descripción del problema.

(5) → Se recogen las observaciones, autor, y otros datos que se consideren importantes</td></tr>
</table>

(6) → Un código de barras o código QR que indique la localización de la ficha en la base de datos física o digital y suministre datos e información complementaria para su manejo.

Fig. 8. Ejemplo de una ficha de laboratorio

Finalmente, en la cara B (reverso) de la ficha, que se denominará bitácora, será un espacio en el que se registrará la experiencia de poner en juego con los usuarios la ficha de trabajo respectiva. Se recogerán datos generales como: número de personas que han intentado resolverla, preguntas del usuario, dificultades detectadas, problemas de redacción, edades de los solucionadores, fechas de uso, soluciones encontradas, etc.

La información que se consigna en cada bitácora será estudiada por el coordinador y los estudiantes que realicen investigaciones en el mismo, con miras a producir o mejorar recursos pedagógicos ya existentes, producir fichas nuevas, mejorar las existentes, derivar documentos de divulgación para la formación inicial y profesional de los docentes de matemáticas, clasificar las soluciones dadas por los usuarios de cada ficha, hacer los soportes teóricos de las fichas, hacer esbozos de secuencias de clases basadas en algún subconjunto de fichas de una mesa del laboratorio y, finalmente, sugerir diseños de materiales para acompañar el desarrollo de la ficha.

2.4 Aspectos curriculares

La enseñanza del concepto de área ha sido esencial en la educación matemática, pues desde los principales niveles de enseñanza está presente en el sistema métrico y sistemas de medida abordados a lo largo de todo el ciclo educativo de la enseñanza básica y media y nuevamente en clases de cálculo integral en los estudios universitarios, es por ello que en este apartado se quiere indagar si los estudiantes comprenden el concepto de área, debido a los bajos resultados obtenidos en las pruebas TIMSS 2007, además se consultará en algunos libros de texto la presentación de este concepto desde el inicio de la educación secundaria. Los libros de texto a consultar no serán los utilizados desde los primeros grados de escolaridad, debido a que por una parte el Laboratorio de educación Matemática está pensado para el trabajo experimental, de manera que puede integrar diferentes grados de escolaridad en una misma actividad, además por el hecho de que pueden identificarse muchas dificultades en el trabajo con el concepto de área en grados superiores.

A continuación se presenta una mirada de algunos aspectos con relacional sistema educativo colombiano, reflejando parte de la realidad educativa del país, para ello, inicialmente se toman algunos elementos del currículo propuesto que hacen referencia a las matemáticas que se espera que los estudiantes aprendan y la organización que el sistema educativo debería implementar, fundamentado en los Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2003); seguidamente se tendrá en cuenta el currículo aplicado que hace referencia a lo que se enseña en las aulas de clase, y lo propuesto en los textos didácticos; finalmente se mencionarán algunos de los resultados obtenidos a partir de las pruebas TIMSS 2007 que reflejan el currículo logrado.

En los *Estándares Básicos de Competencia,* en cuanto al pensamiento espacial, se destaca la importancia de una interacción y familiarización con las figuras geométricas para que de esta manera el niño pueda tener un dominio de la medición. Como se cita en el documento de los Estándares, en un primer momento del pensamiento espacial no es importante tener en cuenta los aspectos cuantitativos de los objetos que se encuentran en el espacio, sino más bien las propiedades y las relaciones entre ellos como puede ser el tamaño visualmente percibido, la comparación con otros, la ubicación entre ellos, etc.

En un segundo momento, cuando el estudiante se enfrenta a situaciones y sistemas de representación más complejos, se hace necesario hacer uso de la metrización, para determinar cuáles son los tamaños, distancias y demás características que poseen los objetos, realizando así la transición de lo cualitativo a lo cuantitativo y por último en un tercer momento, se tienen las relaciones que se pueden establecer entre las medidas de los objetos convirtiéndose en conocimientos formales de la geometría.

En los *Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas* (MEN, 1998) se propone el pensamiento espacial como un componente fundamental en el desarrollo del pensamiento científico, ya que es utilizado por los estudiantes para la representación y manipulación de la información en el aprendizaje y en la resolución de problemas, de la misma manera, en la propuesta de la renovación curricular se incluye la geometría activa como un artefacto de exploración que permite al estudiante interactuar, construir, producir, dibujar, mediante la manipulación de objetos presentes en el mundo que lo rodea y la utilización de gestos y palabras informales que posteriormente permitirán un mejor acercamiento hacia la conceptualización y representación interna de los objetos matemáticos.

En relación al *pensamiento numérico y sistemas numéricos* se plantea que:

> La organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las

relaciones entre los números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. (*Estándares de Competencia 2003, p. 58*)

Lo anterior puede ser complementado si se hace uso de las magnitudes para comprender mejor los sistemas numéricos, además de dar un paso hacia lo concerniente con el pensamiento métrico, de tal manera que si se quiere trabajar con los números naturales, se puedan relacionar con cantidades discretas, o si la intención es trabajar con números reales, las magnitudes continuas son muy buena opción. Además, el significado de los números puede variar dependiendo del contexto o la actividad en que los utilice el estudiante, como ejemplo está el número utilizado para medir, el cual describe la cantidad de unidades de alguna magnitud utilizada como las unidades de área que son necesarias para cubrir una superficie determinada.

En el *pensamiento métrico y sistemas de medida* se presentan una serie de logros que están direccionados a acompañar los estudiantes en su desarrollo de procesos y conceptos que se refieren a las nociones generales de los estudiantes acerca de las magnitudes y cantidades, además de la utilización de los sistemas métricos en diferentes situaciones, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los procesos y conceptos son:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitud
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar” lo continuo con lo discreto.
- La aparición del rango de las magnitudes
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos
- La diferencia entre unidad y el patrón de medida
- El papel del trasfondo social de la medición

De acuerdo a lo mencionado en el currículo propuesto, se dará una mirada en algunos textos escolares a las actividades o metodologías propuestas para el desarrollo de las clases, especialmente el tema de la medida de magnitudes como el área, en comparación con lo sugerido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Lineamientos Curriculares de Matemáticas que permiten observar lo que generalmente ocurre al interior de las aulas de clase, el nivel escolar de los textos utilizados para ello, son acordes con el grado de escolaridad que se pretende estudiar en este trabajo y que corresponden a un sexto grado.

El pensamiento espacial propone desde los primeros grados de escolaridad generar un ambiente en que los estudiantes tengan la oportunidad de explorar con las figuras y formas geométricas para familiarizarse inicialmente con ellas sin tener en cuenta sus propiedades métricas, además de un tratamiento cualitativo al momento de iniciar el trabajo del concepto de magnitud. En los textos consultados (Conexiones 6 de la editorial Norma, Zoom a la matemáticas 6 de la editorial Libros & Libros y Matemáticas 6 de la editorial Santillana), escogidos por estar entre las editoriales más usadas en las instituciones escolares, en ellos fue clara la ausencia de esta metodología de enseñanza ya que al parecer, de alguna manera se continua utilizando una adopción de lo que en los años 60 y 70 se denominó *la matemática moderna* (MEN, 1998) presentando a los estudiantes unos contenidos cargados de un énfasis abstracto dejando de lado las actividades desarrolladas en un ambiente experimental y como se había mencionado, los ambientes que permiten la simulación de la actividad científica por parte de los estudiantes como en un laboratorio de matemáticas ayudan a generar representaciones internas y en general contribuye a la producción de pensamiento matemático.

En cuanto al pensamiento numérico y sistemas numéricos que se pueden evidenciar en los diferentes libros de texto, es clara que la ausencia de un ambiente experimental en una aula de clase genera una deficiencia en este pensamiento, debido a que el hecho de solo proponer actividades en los libros con fines mecánicos, donde los estudiantes se ven enfrentados a una sola vía de solución que es la mera aplicación de fórmulas y conversiones, causan dificultad a la hora de encontrar áreas de figuras no rectilíneas por causa de la incomprensión del concepto de área como magnitud que llevan a darle el sentido al número y sus operaciones, que le permitan desarrollar estrategias y métodos para poder interpretar información y así poder entender la importancia y utilidad del número. Igualmente la adquisición del pensamiento numérico no se propone de una manera gradual en contraposición a lo prescrito en los Lineamientos Curriculares, sino que el primer contacto con el concepto de medida que tienen los estudiantes, se hacen a través de los números sin pasar por actividades previas como comparaciones o la implementación de objetos no numerizados para el proceso de medición.

Una vez más, en el *pensamiento métrico y sistemas de medidas* se hace necesaria la interacción de los estudiantes con los objetos a medir, que la práctica de medida que estén realizando en las aulas de clase se apliquen sobre objetos reales y no sólo en objetos ideales como los rectángulos, triángulos y demás figuras matemáticas regulares para que el estudiante adquiera habilidades matemáticas y comprenda realmente lo que significa aplicar una medida y no se limiten a la repetición de fórmulas y algoritmos, esto no fue invidente en ninguno de los libros consultados, además, en ninguno de ellos aparecían cuestiones históricas que den cuenta del surgimiento de la magnitud como objeto de medida y la compresión y desarrollo de los procesos de medición que forman parte fundamental en la interiorización de los conceptos por parte de los estudiantes, es decir mirar la historia como un laboratorio que permita al estudiante recrearla y poder replicar el papel de científico en el momento que vivencia lo ocurrido muchos años atrás.

Es oportuno dar cuenta de algunos procesos y conceptos que no son evidentes en los textos escolares entre ellos están, la comprensión de los procesos de conservación de magnitud que en los libros de texto no se explicita de una manera clara en sus ejercicios y actividades no es explícita la existencia de unas propiedades invariantes a pesar de las alteraciones de tiempo y espacio que permiten al estudiante fortalecer los conceptos de área, entre otras magnitudes. En cuanto a la apreciación del rango de las magnitudes, en solo uno de los tres textos consultados se proponían actividades que involucren la estimación perceptual del rango en el que se encuentra una magnitud concreta como por ejemplo cuál puede ser el rango de una sábana, el área de un campo de futbol, etc.

Aunque en algunos textos se trabaja con unidades cuadradas sin hacer referencia al Sistema Internacional de Medidas, no se realiza el proceso de medición de un mismo objeto o superficie con diferentes unidades de medida para refinar un poco más el resultado de dicho proceso y por ende no hay una verdadera apreciación del concepto de unidad de medida ni la relación inversa entre la unidad y la cantidad utilizada para la medición; esto hace parte de lo que concierne a la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos sugeridos para el pensamiento métrico y sistemas de medidas en los lineamientos curriculares.

Gracias a la práctica generalizada de utilizar los textos o manuales escolares como los que rigen los contenidos y las metodología en las clases y no como una ayuda, que es realmente su función se ha dejado la labor del docente en manos de los textos dando lugar a múltiples dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes, además con esta experiencia fue evidente que los textos escolares se enfocan generalmente en la última tipología adoptada en este trabajo dejando de lado el tratamiento del área como cantidad de plano ocupado por la superficie, como una magnitud autónoma y la relativización de la unidad de medida, demostrando una enseñanza algorítmica de este concepto y por ende genera dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes.

Finalmente se puede hablar acerca del currículo logrado tomando como base los resultados de Colombia en TIMSS 2007 (2010) que reflejan el desempeño de los estudiantes de matemáticas y ciencias de cuarto y octavo grado, que se espera hayan obtenido a partir del currículo propuesto en los Lineamientos curriculares del área de matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y el currículo aplicado en las aulas de clase, aportando valiosa información para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje especialmente de las matemáticas.

Según los resultados arrojados por estas pruebas, Colombia no tuvo los desempeños esperados en matemática, debido a que en los dominios de contenido relacionados con lo numérico, el país obtuvo 360 y 369 puntos en cuarto y octavo grado respectivamente; en cuanto a formas geométricas y medidas se obtuvieron 361 puntos para el grado cuarto y 371 puntos en geometría para el grado octavo, Colombia obtuvo puntajes inferiores a 400 puntos, de tal manera que no alcanzó a ubicarse ni siquiera en la categoría de bajo implementada por TIMSS, la cual está en un rango de 400 a 474 puntos, es decir, Colombia no alcanza los mínimos puntajes para ubicarse en ninguna de las categorías de bajo, medio, alto o avanzado.

Claramente existen factores que influyen directamente en los resultados obtenidos como por ejemplo los económicos, socioculturales, familiares, institucionales, etc., pero para efectos de este trabajo se hace más importante considerar lo que sucede al interior de las aulas de clase que tiene que ver con el cumplimiento de los contenidos propuestos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas, debido a que como se mencionó, algunos docentes e instituciones no cumplen a cabalidad cada concepto y proceso descrito en el pensamiento métrico y sistemas de medida, en parte porque las instituciones tienen la libertad de incluir y descartar algunos contenidos, en este caso la enseñanza de la geometría en profundidad y por otra parte, en muchas ocasiones los docentes confían en lo que se encuentra plasmado en los libros de texto, razón por la cual se trabaja el concepto de área de manera algorítmica y descontextualizada.

2.5 Aspectos cognitivos

En el siguiente apartado se tratan aspectos relacionados con problemáticas vinculadas al aprendizaje de la medida, debido a que esta noción es bastante confusa desde los primeros años de escolaridad hasta los niveles superiores, por esta razón se darán a conocer algunas etapas del desarrollo progresivo de la comprensión del proceso de medida de acuerdo a la edad del estudiante, además se mencionan algunos errores y dificultades presentes frente a la medición del área y el perímetro.

Dickson, Brown & Gibson (1991) aseguran que uno de los problemas con que se encuentran los estudiantes en el aprendizaje de la medida es que la introducción a esta noción se hace por medio de unos instrumentos refinados y complejos, además se les ha restringido el desarrollo histórico de la medida, por esta razón, los estudiantes no reconocen la necesidad de medir, ni cómo esta surge de la noción de igualdad socialmente aceptada. El estudiante no tiene claro que a partir de la repetición de una unidad de medida se llegó al número y al recuento y es de ahí que nace la necesidad de utilizar unos patrones fijos de medida, de tal manera que su experiencia inicia normalmente con el número, más no con la noción de replicación de la unidad y por tanto sus experiencias están restringidas al número sin oportunidad de explorar los principios de la medición.

De igual manera, los acercamientos hacia la medida y especialmente a la magnitud área se realizan con objetos o regiones ideales, bastante alejados de las superficies u objetos con los que los estudiantes se ven relacionados en la realidad, por ejemplo, cuando se propone la medición del área de una región, generalmente se presenta a los estudiantes regiones poligonales como cuadrados que presentan los lados con longitudes discretas, sin tener en cuenta situaciones como encontrar el área de regiones curvas o figuras irregulares en la que su medida no se limite simplemente a la utilización del algoritmo generalizado de base por altura o lado por lado, en este tipo de situaciones que se tornan más significativas para el estudiante, se debe hacer uso de otros procedimientos como tener en cuentea la unidad de medida apropiada para dicha medición, reducir el tamaño de la unidad de medida, replicación de la unidad de medida, tener en cuenta una cota inferior y una superior para tener un valor más aproximativo en un cierto intervalo, etc.

Según Dickson et al. (1991), los trabajos de Jean Piaget afirman que existen dos operaciones que son de gran importancia por cuanto ayudan a comprender el proceso de la medida, ellas son la conservación y la transitividad. La primera de ellas se ocupa de la invariancia de algunos aspectos como la cantidad o medida de algunos objetos y figuras aún si cambian de forma o posición, por ejemplo, cuando se tiene la longitud de una cuerda, esta longitud será la misma sin importar la dirección en la que se mida, bien sea desde el extremo derecho hacia el izquierdo o viceversa, o el área del piso de un salón rectangular, esta no cambiará su medida independientemente de la disposición de las baldosas y la forma que se les asigne.

La segunda operación hace referencia a la comprensión que adquiere el niño sobre la mediación que proporciona un objeto en el procedimiento de la medida, de tal manera que si el estudiante señala en una cuerda la longitud de una puerta para fabricar otra de la misma longitud, comprenderá que si la nueva puerta tiene la misma longitud que la cuerda, entonces será tan larga como la puerta inicial.

Estas dos operaciones no se adquieren en poco tiempo, requieren de un desarrollo progresivo de acuerdo a la edad en la que se encuentre el estudiante, de aquí que se pueden identificar algunos estadios en los que de acuerdo a Piaget, Inhelder & Szeminska (citados por Dickson et al., 1991) se evidencia la aprehensión de estas operaciones inmersas en la evolución del proceso de la medida, como lo son:

Estadios iniciales: en los primeros años de escolaridad, los estudiantes no presentan indicios de la adquisición de la conservación, debido a que ellos realizan afirmaciones sobre los objetos a partir de lo que logra la percepción visual, de tal manera que si se les presenta dos cuerdas de la misma longitud pero con sus extremos no alineados, aseguraran la desigualdad de la longitud entre ella. De la misma forma esta falta de comprensión influye sobre las aseveraciones que realicen sobre las áreas presentando argumentos como "esta superficie A tiene mayor área que las B porque es más larga" juzgando de manera equivocada gracias a que solo se ha tenido en cuenta sus dimensiones lineales. En esta etapa de su desarrollo, el niño se basa completamente en su visualización, siendo incapaz de dotar de significado cualquier instrumento de medida, si se le suministra un instrumento u objeto como unidad de medida, lo utilizará de manera inadecuada, debido a que no comprende la idea de la repetición de dicha unidad o de la subdivisión en secciones de igual tamaño.

Estadio en que comienza a emerger la conservación y la transitividad: en esta etapa, alrededor de los seis o siete años, el niño empieza a desarrollar algunas ideas iniciales de conservación y transitividad por el hecho de que de alguna manera trata de utilizar instrumentos de medida como sus brazos, las palmas de sus manos y en general trata de realizar comparaciones con las partes de su cuerpo, además puede llegar a considerar de manera empírica que si al cubrir dos superficies A y B es necesario utilizar una mayor cantidad de unidades para cubrir la superficie A que la superficie B, entonces la superficie A es más grande que la B. El niño todavía no es capaz de entender por qué las unidades de medida deben conservar una homogeneidad en el tamaño.

Estadio caracterizado por el inicio de la conservación operacional y la transitividad: ocurre hacia los siete u ocho años de edad, en este momento el niño es capaz de transportar una medida con la ayuda de un instrumento rudimentario de comparación, siempre y cuando el objeto a medir sea de menor tamaño que el instrumento de medición, permitiendo al estudiante señalar en el instrumento la longitud requerida, sin embargo, él no sabe utilizar un instrumento de medida que tenga menor tamaño que el objeto a medir. El niño comienza a reconocer la mediación bidimensional en el sentido de área encerrada en un contorno, también puede distinguir la conservación de las cantidades de materiales como que la cantidad de líquido encerrada en un recipiente largo y estrecho seguirá siendo la misma aunque se vierta en otro recipiente ancho y corto.

Estadio en que se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir: esta etapa ocurre entre los ocho y diez años de edad, donde normalmente no se alcanza a captar la idea de medición por recubrimiento de unidades más pequeñas que el objeto a medir hasta no cumplir esta edad. Antes de esto, el estudiante trabaja basado en el ensayo y error pero en este punto se trabaja de una manera un poco más procedimental, rigurosa o consciente, sin embargo, en lo concerniente a la medida de capacidad o volumen, todavía no se ha desarrollado por el hecho de que no se evidencia la forma de recubrir o llenar un objeto sólido con unidades de medida, por cuanto es impenetrable y solo es posible apreciar su superficie.

La etapa final en el desarrollo de las nociones de medida: hacia los once años de edad, el niño que ha alcanzado la comprensión plena de las nociones de medida es capaz de hallar áreas y volúmenes mediante cálculos utilizando dimensiones lineales. El aspecto característico de este estadio es la conciencia de la infinitud y la continuidad de puntos que conforman el espacio.

Anteriormente se había mencionado que realizar una medición consiste en la reproducción de una unidad de medida que se replicará tantas veces como sea necesario para abarca en su totalidad la extensión de la magnitud que se desea medir, siendo una característica particular de este procedimiento la posibilidad de utilizar diferentes unidades de medida para la medición de una misma magnitud, es decir, dependiendo del tamaño de la unidad de medida variará el número de unidades utilizadas (entre más pequeña sea la unidad de medida, más veces será necesario repetirla) (Dickson, et al., 1991).

Algunas dificultades que se presentan en relación con la unidad de medida son, por una parte que los niños no ven la necesidad de conocer los tamaños relativos de las unidades, es decir, que cuando se pregunta a un niño por ejemplo ¿Qué longitud es mayor, la longitud A que mide quince palitos de paleta o la longitud B que mide diez palitos de pinchos? El niño responderá que la longitud A es mayor, debido a que estará enfocado en los datos numéricos que le son presentados más que en el tamaño de las unidades de medida.

Por otra parte se tiene la idea errónea de que el proceso de medida es de naturaleza discreta y precisa, deficiencia que de alguna manera se promueve en las aulas de clase cuando se pretende en algunos casos ejemplificar la medida del área de un rectángulo tomando como unidad de medida un cuadrado de cierto tamaño tal que ocupa cierta cantidad de veces –una cantidad de veces exacta– introduciendo así a los estudiantes la idea de que la medición es un proceso discreto, sin tener en cuenta situaciones en las que se deba realizar subdivisiones de la unidad de medida para tener una mejor aproximación a la medida real de la magnitud, así como el metro se puede subdividir en decímetros, estos a su vez en centímetros, posteriormente en milímetros y de esta manera dar cuenta de la continuidad del proceso de medición.

Los conceptos de área[5] y perímetro[6] no se presentan menos problemáticos para el aprendizaje por parte de los estudiantes, teniendo por ejemplo que en algunos trabajos que involucran estos conceptos, se muestra gran interés en lo referente a su introducción y diferenciación debido a que en algunos casos:

> Algunos docentes (y por tanto muchos estudiantes) tienen grandes dificultades para conceptualizar el área y el perímetro y, particularmente para comprender las mutuas relaciones entre estos: un argumento que parece estar al alcance de toda persona culta, en realidad esconde insidias que para muchos son notables y del todo inesperadas. (Fandiño, 2012, p. 1)

---

[5]El área tiene que ver con la magnitud superficie pues puede ser entendida cognitivamente como "la extensión de la superficie. O uno de los rasgos o características de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión" (Godino, 2002, p. 17)

[6]El perímetro tiene que ver con la magnitud longitud, pues se trata de determinar la longitud de la línea poligonal que encierra la figura o la superficie, o de otro modo, de determinar la longitud total mediante la adición de las medidas de las longitudes de cada uno de los lados que forman la frontera de la superficie (Seduca, 2006).

Las investigaciones de Stavy & Tirosh (citado por D´amore, 2007) muestran que gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre los dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo:

Si A y B son dos figuras planas, entonces:

- Si el perímetro de A es mayor que el perímetro de B, entonces el área de A también es mayor que el área de B.
- Si el perímetro de A es menor que el perímetro de B, entonces el área de A también es menor que el área de B.
- Si el perímetro de A es igual al perímetro de B, entonces el área de A también será igual al área de B.

Por lo cual dos figuras isoperimétricas serían necesariamente equi-extensas; y viceversa, cambiando el orden "perímetro-área" con "área-perímetro".

Con lo anterior, Ponce (2009) presenta otros errores y dificultades cometidos por los estudiantes en lo que se refiere a la magnitud área y el perímetro:

- Pensar que las medidas indirectas son las medidas reales y no valoran la medida conceptual del área.
- No reducir a la mínima unidad en los cálculos.
- Tratamiento lineal de las medidas de superficie, que puede inducir la creencia que al duplicar el lado de una figura, también se duplicará su área.
- Cambiar la unidad de referencia al medir distintas superficies.

Además algunas dificultades asociadas al tratamiento del área son:

- Que las figuras tengan forma irregular.
- Que las figuras no aparezcan pavimentadas.
- La proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y el número que representa la medida.
- El contar unidades no enteras.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presentan aspectos correspondientes a la metodología implementada para el desarrollo del trabajo, la cual tiene un carácter de investigación cualitativa denominada investigación de diseño, dicho enfoque metodológico es pertinente dentro de esta propuesta de trabajo, gracias a los procedimientos que pueden ser adoptados y utilizados para comprender procesos presentes en contextos singulares. La investigación cualitativa se relaciona con la presentación de las descripciones de los participantes, sus interacciones, sus expresiones, comportamientos, avances en relación con el concepto trabajado, actitudes, creencias y especulaciones que los estudiantes hagan al respecto tal como son exhibidos por ellos.

La investigación de diseño o investigación basada en diseño se apoya en algunos campos como la psicología, la antropología, la neurociencia y la didáctica, su objetivo es analizar el aprendizaje de los estudiantes a partir de algunas formas particulares de aprendizaje, la utilización de algunas artefactos y las estrategias que se puedan implementar en el desarrollo de una actividad o la resolución de problemas, esta metodología es de gran importancia gracias a su aporte en el desarrollo de metodologías que fomentan el conocimiento empíricamente adquirido y el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes (González, Castro, Molina & Castro, 2011).

Según González, et al., (2011) una de las características de la investigación de diseño es la creación de un nuevo artefacto como un modelo teórico u otro tipo de producto como materiales manipulativos, que ayude a los estudiantes en la resolución de problemas o se logren mejoras significativas en ello, además una de las cualidades de esta metodología es la disminución de la brecha entre la práctica educativa y los análisis teóricos, debido a que se presentan informes de la evolución en el aprendizaje de los estudiantes relacionándolos con el proceso que se ha llevado a cabo en la promoción de dicha evolución.

Los resultados obtenidos de una investigación de diseño deben tener como beneficio un aporte para los docentes, que estos tengan la posibilidad de estudiar, acoger, comprobar y modificar los problemas planteados y poder implementarlos a su enseñanza en un aula de clases. El ejemplo más común de la investigación de diseño es el experimento de enseñanza que tiene como objetivo construir un modelo de aprendizaje o desarrollo del estudiante relacionado con un tema específico, en el cual, dicho aprendizaje es consecuencia de las formas en que los alumnos operan y las actividades propuestas por parte del investigador.

Acerca del método de la investigación de diseño, en el marco de la investigación cualitativa, la estructura y la organización que presentará el desarrollo de este trabajo serán las siguientes fases: *Fase preactiva, Fase interactiva y Fase posactiva* (Pérez, 1994)

Fase preactiva (donde se tendrá en cuenta)

- Nuestras preconcepciones
- Fundamentos teóricos
- La información previa
- Los objetivos pretendidos
- Influencias de interacciones del contexto
- Materiales, recursos y técnicas
- Qué temporalización prevemos

Fase interactiva (procedimientos y desarrollo del estudio)

- Observación participante y no participante
- Análisis de evidencias documentales

Fase posactiva (el informe etnográfico)

- Elaboración del informe inicial
- Discusión del informe
- Elaboración del informe final
- Reflexión crítica sobre los resultados

Como este trabajo se realiza en el escenario del Laboratorio de Educación Matemática, por ello no se trata de un ejercicio de clase, sino de una actividad de carácter experimental, entonces lo que será objeto de organización, sistematización e interpretación son los desempeños matemáticos de los estudiantes y su evidencia en registros físicos como las fichas de laboratorio. Además, serán objeto de una mirada interpretativa algunos elementos asociados a la génesis instrumental y al rol mediador de los manipulativos y otros recursos vinculados a los problemas propuestos.

3.1 Aspectos presentes en las situaciones problema relativos al concepto de área

Para este trabajo se han adoptado una serie de problemas propuestos por Corberán (1996) encaminados hacia la comprensión conceptual del área, además estas formas de entender este concepto no sólo es adoptada por esta autora, sino que tiene gran relación con los posibles procedimientos y puesta en evidencia de los invariantes por Moreira-Baltar (1998). Para abordar esta forma de concebir el área se tendrán aspectos como:

- Las tareas escogidas para este trabajo están dirigidas para el grado sexto por cuanto hasta este nivel de escolaridad se aprecia gran dificultad en la comprensión conceptual del área.
- Como uno de los objetivos es el reconocimiento de algunas mediaciones que emergen en la resolución de problemas relacionados con el área, se propone el material manipulativo que hará explícita estas mediaciones, algunos materiales que se recomiendan para el tratamiento de áreas son el geoplano, bloques de patrones, el monominó, el tangram, software de geometría dinámica, reglas, entre otros. Entre esta variedad de materiales, se utilizará el monominó y las figuras en foami gracias a la economía en su fabricación, su sencilla utilización y su gran ayuda en la comprensión conceptual del área.

3.2 El espacio de trabajo

Como se ha mencionado, esta investigación se lleva a cabo en un escenario como el Laboratorio de Educación Matemática, el cual busca promover en los estudiantes el trabajo experimental y la integración del material manipulativo como mediador en los problemas propuestos relacionados con la tipología de problemas de áreas presentados en los aspectos didácticos, los problemas presentados a los estudiantes tienen la característica de ser llamativos por su contextualización con situaciones cotidianas y la libertad con la que se pueden abordar, debido a que no se ejerce sobre ellos la presión de una nota que generalmente soportan en las aulas de clase, con esta metodología de trabajo el estudiante se siente más cómodo al momento de trabajar, de manera que él abandona la postura pasiva para tomar el rol de investigador recreando el concepto de área, teniendo en cuenta cuestiones como la existencia de diferentes unidades con las que puede realizar el proceso de medición del área y no solo la unidad cuadrada.

3.3 Participantes

En el desarrollo de esta investigación de diseño se presentan las situaciones problema a dos grupos de estudiantes de sexto grado conformados por niños entre los 11 y 13 años de edad, como la investigación tiene un carácter experimental, no se trabaja con estudiantes de una única institución educativa, sino que se tienen en cuenta dos colegios, Nuestra Señora de la Consolación y el Colegio Santa Isabel de Hungría, de esta manera se distribuyeron en grupos de dos y tres estudiantes, en la primera institución se trabajó con 15 estudiantes y en la segunda con 11.

3.4 Elaboración de los manipulativos para la aplicación de los problemas

Los problemas planteados siguen un proceso en el que se tienen en cuenta las etapas del desarrollo del concepto de área por las que deberían pasar los estudiantes para la apropiación de este concepto, teniendo como elementos mediadores de la actividad los materiales manipulativos, como lo son las figuras en foami y el monominó.

Para la primera actividad, el material propuesto son las figuras no rectilíneas, las cuales representan en este caso unas manchas provocadas por un carrito de juguete, de tal manera que los estudiantes deben compararlas para determinar cuál de ellas tiene una mayor área, aquí las figuras tienen la función de ayudar en la comprensión conceptual del área como cantidad de plano ocupado por la superficie, realizando procedimientos geométricos, recorte y pegado para llegar a dicha comprensión sin la utilización de procedimientos numéricos.

La segunda actividad presenta como material de apoyo el monominó, el cual consiste en cuadrados de dos centímetros de lado y de diferentes colores; en esta actividad tiene la función de representar la unidad de medida en el proceso del cálculo y comprensión de la conservación del área independientemente de la forma que tenga la figura, este material tiene su origen hacia el año 1953 con el matemático Solomon Golomb quien tuvo la idea de los poliminós, que son figuras geométricas formadas a partir de la conexión de cuadrados coincidentes. El monominó es el mínimo poliminó que puede construirse, es decir que utiliza sólo un cuadrado.

En la tercera actividad se involucran nuevamente figuras, pero en esta ocasión son figuras geométricas conocidas, como el hexágono, el triángulo y el paralelogramo, que funcionan como unidades de medida para el cálculo del área de una misma figura poligonal, con el fin de que el estudiante disocie el área del número que la mide, al relativizar la unidad de medida y darse cuenta que la misma figura puede tener diferentes números que representen su área dependiendo de la unidad de medida utilizada.

Los materiales mencionados son fabricados por nosotros con la ayuda de artefactos como tijeras, bisturí, regla, marcadores y son elaborados en foami, el cual es un material muy utilizado en las artes manuales, debido a que tiene ciertas características como: ser fácil de cortar, pegar, manipular, no es tóxico, es reciclable y de muy bajo costo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta a continuación un cuadro que resume los problemas a implementar, su caracterización y los materiales sugeridos para su desarrollo.

Concepto de área	Caracterización	Tipos de problemas asociados	Manipulativos sugeridos	Mesa de laboratorio
El área como cantidad de plano ocupado por la superficie	El número está ausente en el razonamiento, siendo los procedimientos geométricos los que toman importancia	Se proponen problemas de comparación por inclusión o superposición	Figuras en foami	Geométrica
El área como magnitud autónoma	Se encuentran presentes procedimientos tanto geométricos como numéricos con los cuales se disocia el área del perímetro y el área del número que la mide	Se proponen problemas con figuras de diferente forma pero con igual área	Monominó	Aritmética y Geométrica
El área como número de unidades que recubren la superficie	Se reconoce la importancia de la unidad de medida y su relativización para el cálculo de áreas	Se pide a los estudiantes calcular el área de una figura utilizando diferentes unidades de media	Figuras en foami	Aritmética y Geométrica

Tabla 1. Criterios que orientan el diseño de las tareas

3.5 Gestión del diseño, recolección y sistematización de la información

Los problemas propuestos fueron aplicados en el escenario del *Laboratorio de Educación Matemática* con la participación del Colegio Nuestra Señora de la Consolación y el Colegio Santa Isabel de Hungría de la ciudad de Santiago de Cali a través de un trabajo conjunto entre docentes en formación, además de la colaboración de los docentes encargados de los grupos de estudiantes a la hora de transportarlos hacia el espacio ubicado en la Universidad del Valle. En cuanto a la información generada, se tienen algunos medios que ayudan en su recolección y análisis, entre ellos se tienen fotografías, producciones escritas por los estudiantes y videos.

A continuación se presentan los instrumentos utilizados para la recolección de la información para su posterior análisis, ellos son:

Fichas de laboratorio

Cada uno de los problemas aplicados se presentan a los estudiantes en el formato de ficha de laboratorio, expuesto en los aspectos didácticos, en los que se sigue el proceso de acuerdo a la tipología adoptada, a través de estas fichas es posible recolectar la información referente a los procedimientos utilizados en la comprensión conceptual del área por parte de los estudiantes con la ayuda del material manipulativo como mediador en este proceso.

Recolección de información

Para la toma de registro en el desarrollo de los problemas se utiliza una cámara fotográfica y una videograbadora, con ellos se puede rastrear los diferentes puntos de vista que tienen los estudiantes frente a la resolución de un mismo problema y la utilización de los materiales manipulativos, debido a que estos artefactos actúan como un complemento de las producciones escritas gracias a que se puede tener una mejor recolección de las conversaciones, impresiones y acciones realizadas.

Materiales manipulativos

Los problemas escogido pertenece a un tipo de conocimiento matemático que se desea que el estudiante construya, para este propósito se propone la utilización de materiales manipulativos, de manera que se pueda evidenciar cómo influyen directamente y de manera efectiva en dicha construcción por parte de los estudiantes, así se tiene una perspectiva crítica frente a los materiales dejando de lado la concepción de ellos como un simple artefacto, para posteriormente pensar en las posibilidades que ofrecen en el aprendizaje del conocimiento matemático abstracto.

Los manipulativos son vistos como herramientas para ser usadas, pero ellas solas no ayudan, sino que hay que darles un uso especial, de acuerdo a esto, Nührenbörger& Heinz (2008) afirman que:

> “En un contexto matemático, el poder de una herramienta no consiste solamente en el uso correcto y apropiado, la herramienta necesita ser generalmente estructurada. Cuando la estructura puede ser interpretada, uno puede usar la herramienta como un objeto mental. En este sentido una herramienta matemática se ve como una regla. De una parte, la regla es una herramienta técnica la cual puede ser usada para medir, de otro lado uno puede usar la regla como un objeto mental, como una herramienta de pensamiento. La regla es bien estructurada y la estructura de la medida tiene un significado simbólico, el cual puede ser interpretado con respecto a las ideas clave de la medición”

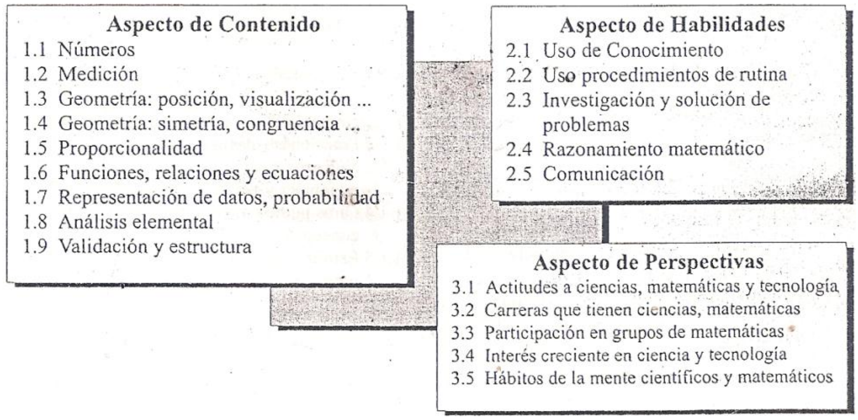
De esta manera se debe reconocer la estructura matemática que subyace a esa regla como la relación parte-todo, valor posicional, entre otros. Debido a que las herramientas han sido concebidas con un propósito didáctico específico porque estructuralmente tienen elementos más allá de su uso, por ende el valor del manipulativo depende de la relación del material con las relaciones matemáticas y las estructuras que él está representando.

Teniendo en cuenta la importancia de los materiales manipulativos, a continuación se mencionan los materiales con los cuales se lleva a cabo el desarrollo de los problemas propuestos, en ellos se trabaja con algunas figuras construidas en foami, las cuales fueron construidas teniendo en cuenta principalmente la facilidad que este material brinda en la representación de las superficies debido a que contribuye en las etapas mencionadas en la tipología, permitiendo la inclusión, superposición y la relativización de la unidad de medida, de la misma forma dentro de las figuras obtenidas a partir de este material se encuentra el monominó, el cual consta de cuadrados de un centímetro de lado que permite al estudiante formar diferentes figuras, facilitando el reconocimiento de la unidad de medida y ayuda en la disociación entre el área y el perímetro o entre área y forma, además del recubrimiento de figuras planas, por otra parte además de lo mencionado se tiene en cuenta para la elaboración de este material, lo interesante para los estudiantes tanto por su colorido como por ser un recurso poco común en las aulas y mucho menos en clase de matemáticas.

3.6 Diseño de problemas

De acuerdo a la tipología de problemas planteada anteriormente, se presentan las fichas de trabajo correspondientes a cada una de ellas, destacando que para efectos de este trabajo se hace énfasis en las tres primeras formas de concebir el área, debido a que en ellas se puede hacer evidente la conservación del área, la necesidad de una unidad de referencia para la medición del área de figuras planas, la disociación entre área y perímetro, el área como un recubrimiento, la relativización de la unidad de medida, entre otras, aspectos que no se pueden apreciar en la cuarta forma de concebir el área que por cierto es la manera habitual de enseñanza al interior de las aulas de clase y lo que se pretende es la incorporación de procedimientos novedosos e informales.

A continuación se presentan las fichas de laboratorio, las cuales fueron un rediseño de actividades planteadas por MEN (2013) y Corberán (1996) para abordar el área como magnitud en la tipología de problemas mencionada, en los análisis de las pruebas externas TIMSS, se sustenta la elección de contenidos y conexiones (Figura 9) que se presentan en la casilla número 2 de las fichas del Laboratorio que se mencionaron con anterioridad en los aspectos didácticos, de manera puntual en la figura 8.



1.2 MEDICION

1.2.1 Concepto de medida y unidades estándar

(comparación de objetos, uso de unidades estándar, sistemas inglés y métrico, uso apropiado de instrumentos, precisión y confiabilidad, medidas comunes de longitud, área, volúmen, capacidad, tiempo, año calendario, moneda, temperatura, masa, ángulos; cocientes y productos de unidades; análisis dimensional)

1.2.2 Perímetro, área y volúmen

(conceptos de perímetro, área, superficie del área, volúmen; fórmulas para determinar perímetros, áreas y volúmenes)

1.2.4 Estimaciones y errores

(estimación en la medición, errores en la medición, precisión y confiabilidad de las mediciones)

Fig. 9. Marco de referencia curricular de matemáticas.

A partir de este marco de referencia curricular se fundamente una parte esencial del trabajo en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle y se identifican las conexiones posibles entre la resolución de problemas matemáticos relativos a las áreas y la emergencia de estrategias heurísticas.

El carrito que mancha

Estimación de cantidad y tamaño *(Área como cantidad de plano ocupado por la superficie)*

Parte A

Richard había estado jugando con su carrito, sin darse cuenta que este soltaba un líquido que manchaba el piso (fig.1). Ahora está en serios problemas porque no sabe cómo limpiar semejante desorden antes que llegue su mamá.
Ayúdale a Richard a solucionar el problema, para limpiar el piso debe utilizar un líquido que es muy costoso.

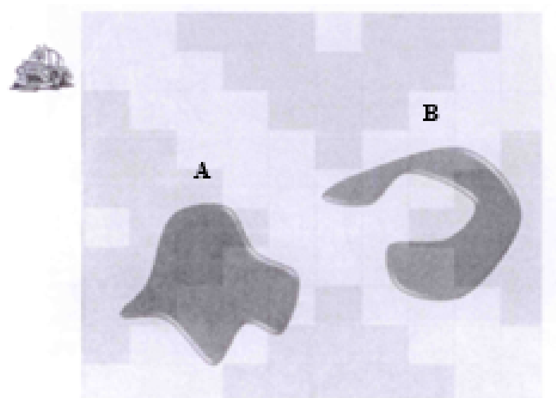


Fig. 1

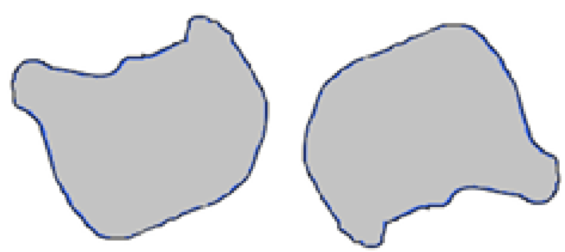
1. ¿En cuál de las manchas se gastará mayor cantidad de líquido para limpiarlas?

2. Explica los procesos que puedes llevar a cabo para averiguar cuál de las manchas es más grande, pues un amigo de Richard le ayudará con el líquido para la mancha más pequeña si éste hace muy bien la cuenta

3. ¿Existe otra forma de solucionar el problema? ¿Cuál?

Parte B

La figura 2 se muestra otras dos manchas, A y B producidas por el carrito mientras Richard limpiaba las anteriores.



A B

Fig. 2

4. ¿Qué podrías decir acerca de sus tamaños?

5. ¿Qué procedimientos podrías utilizar para comparar los tamaños de las manchas A y B?

Yamila García Moreno
Darío Zúñiga Patiño

Explora con el monominó

Medición *(El Área como Magnitud Autónoma)*

Parte A

En una hoja cuadriculada Juanita trazó las superficies A, B, C, D y E de la figura 3

Replica las figuras con la ayuda del monominó y responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos cuadrados utilizó para construir cada una de ellas?

2. ¿Qué tienen en común las superficies y en qué se diferencian?

3. ¿Qué puedes decir entonces acerca del área y el perímetro de las figuras?

Parte B

Construye con la ayuda del monominó los rectángulos A y B que corresponden a los corrales que hay en la finca de Andrés y que aparecen en la figura 4.

4. Compara las figuras A y B ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de superficie que ocupa en el plano?

5. ¿la forma que tienen las figuras influye en la cantidad de superficie?

6. ¿Qué relación y que diferencia encuentras entre las dos figuras?

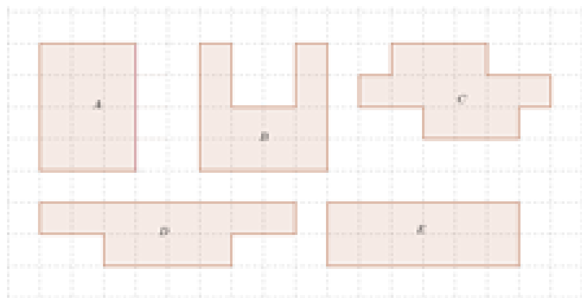


Fig. 3

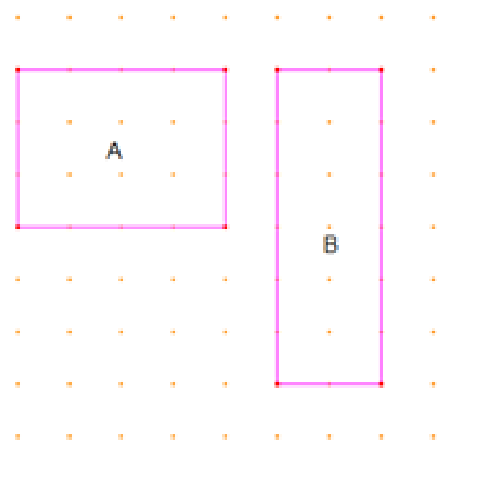


Fig. 4

Yamila García Moreno
Darío Zúñiga Patiño

Arma el rompecabezas (puzzle)

Medición *(El Área como Número de Unidades que Recubren la Superficie)*

Ayuda a Natalia a responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas figuras del tipo A caben en la figura S sin dejar espacios en blanco?

¿Cuántas figuras del tipo B caben en la figura S sin dejar espacios en blanco?

¿Cuántas figuras del tipo C caben en la figura S sin dejar espacios en blanco?

2. ¿Qué sucede con los anteriores resultados cuando utilizas las diferentes figuras?

3. ¿Qué sucedería con el número de figuras que caben en la superficie S si se utiliza una figura de menor tamaño que la figura A u otra de mayor tamaño que la figura B?

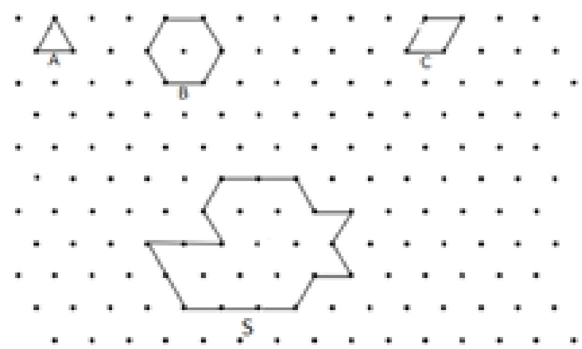


Fig. 5

Yamila García Moreno
Darío Zúñiga Patiño

La primera ficha presentada es la adaptación de una actividad planteada por MEN (2013), las dos últimas fichas hacen parte de las tareas propuestas por Rosa Corberán en cada una de las formas de abordar el área en su tipología, es importante aclarar que los problemas utilizados en este trabajo son un rediseño de dichas tareas, debido a que se han reformulado y planteado nuevas preguntas, además se ha propuesto la implementación del material manipulativo y el trabajo en un escenario que permita el trabajo experimental para su desarrollo como elemento innovador.

3.7 Rejilla de análisis

Dentro de la fase preactiva de la metodología, para la organización y análisis de la información se hace uso de una rejilla donde se encuentran consignados los aspectos que se esperan encontrar en el desarrollo de los diferentes problemas y la información suministrada por el marco teórico, en esta rejilla por una parte se encuentra la tipología de problemas adoptada que a su vez representa el proceso por el cual los estudiantes deberían pasar en el proceso de la comprensión conceptual del área como magnitud. A partir de esta rejilla de análisis y con la ayuda de los registros fotográficos, escritos y fílmicos se pone en evidencia la forma como los estudiantes interactúan con los materiales y como los manipulativos median en la comprensión del área, estableciendo un puente entre el conocimiento formal e informal a través de la mediación instrumental explícita en los gestos, acciones y verbalizaciones de acuerdo a una intención didáctica que posee cada problema correspondiente a la tipología adoptada.

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
Área como cantidad de plano ocupado por la superficie	Para el desarrollo del problema propuesto en esta tipología, se pretende que los estudiantes no cuantifiquen el área, sino que realicen procedimientos de tipo geométrico como la comparación para instaurar relaciones de inclusión o igualdad, en los cuales estén ausentes los procedimientos numéricos para el tratamiento cualitativo del área, además a partir de dichos procedimientos geométricos como la descomposición, recorte, pegado y posterior composición de las figuras permitir un primer acercamiento a la comprensión de la conservación del área.	Las figuras impresas en foami para esta actividad permitirán que el estudiante realice un recorte para manipularlas más fácilmente. Al tener las figuras recortadas, el material permite que el estudiante modifique su forma, de manera que se cubran los espacios vacíos y de esta manera el artefacto realice una devolución en el sentido que se pueda observar de una manera más inmediata la diferencia entre las áreas de las figuras; de la misma forma en la segunda parte de la actividad, las figuras recortadas permitirán realizar los movimientos adecuados como rotaciones y traslaciones para superponer las figuras y concluir a partir de la observación la igualdad entre las áreas de las figuras.	Se proyecta que los estudiantes a través los movimientos como doblar o girar las hojas de foami, los procedimientos, las preguntas emergentes y el recorte, el cual en esta primera actividad es la principal acción que permite evidenciar la génesis de un esquema de actividad instrumentada, ayuden al estudiante en el reconocimiento de la utilidad del material manipulativo, la interiorización del funcionamiento, propósito y posibilidades en la solución de la actividad por parte de este instrumento mediador, además al conocer sus funcionalidades se pretende que los estudiantes repitan algunas de estas acciones para segunda parte.

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
Área como magnitud autónoma	En el transcurso de la resolución de los problemas propuestos para esta tipología, se espera que los estudiantes puedan comprender y distinguir el área de la forma, ayudando así a disociar el área del perímetro, esto se llevará a cabo mediante procedimientos tanto de naturaleza geométrica como numérica en los que se pueda evidenciar que figuras con diferentes formas y perímetros pueden tener la misma área. En esta tipología se introduce un elemento adicional, la unidad de medida, debido a que para el procedimiento de medición del área se hace alusión a la unidad de medida cuadrada y el conteo para encontrar el número que representa el área de las figuras.	Las figuras utilizadas en esta actividad son los cuadraditos de foami, conocidos como el monominó, que permitirán al estudiante en un primer momento replicar una serie de figuras y a medida que lo hagan puedan observar la construcción de estas a partir de la misma cantidad de cuadrados con la que construyó la figura inicial, de esta manera el artefacto evidencia y al mismo tiempo ayuda al estudiante a reconocer y comprender la conservación del área. Además por medio del conteo de los cuadrados y los lados que conforman cada una de las figuras, será posible determinar no sólo la diferencia de formas de las figuras, sino también la diferencia de perímetros de una figura a otra conservando el área como magnitud constante.	Se espera que los estudiantes se interesen en conocer este tipo de material a partir del planteamiento de preguntas referentes a su funcionamiento, debido a que es un artefacto poco conocido en las aulas de clase. por otra parte y como función principal del monominó, los estudiantes pueden observar de manera inmediata la conservación del área, debido a que a medida que construyen las figuras presentadas en la ficha de trabajo, se darán cuenta de que utilizarán la misma cantidad de cuadrados para cada una de ellas, además podrán ver que las figuras no son más que nuevas reconfiguraciones o acomodaciones de cuadrados a partir de la figura inicial, cambiando así la forma de la figura, estas características pueden apreciarse de una forma mucho más clara gracias a la intervención del material manipulativo, aunque también es posible que realicen dibujos u operaciones mientras se replican las figuras con la ayuda del monominó.

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
El área como número de unidades que recubren la superficie	En la resolución del problema propuesto en esta tipología se pretende que los estudiantes reconozcan el papel que juega la unidad de medida para el cálculo de las áreas. A partir del recubrimiento de una superficie por medio de una unidad de medida o fracción de esta, se espera que el estudiante construya y comprenda la medida del área, que vendrá dada por el conteo de las unidades de medida que son necesarias para recubrir totalmente la superficie, además, al finalizar esta actividad los estudiantes podrán reconocer la disociación entre el área y el número que la mide a partir de la relativización de la unidad de medida y la relación inversa entre el número y la superficie que se tome como unidad de medida, de tal manera que entre más grande sea la unidad de medida, menor será la cantidad de veces que se necesitara replicarla para cubrir la superficie en su totalidad y viceversa.	El material se presenta como una gran ayuda para el desarrollo de este problema gracias a que permite representar diferentes unidades de medida a partir de la descomposición de la unidad principal, en este caso, a partir de hexágono se pueden obtener triángulos y paralelogramos para llevar a cabo el proceso de medida cuando no se puede realizar un recubrimiento total con la unidad completa. Además permitirá apreciar los diferentes resultados numéricos que se pueden obtener al calcular el área de una superficie mediante distintas unidades de medida manipulables.	En esta actividad, el artefacto representa las diferentes unidades de medida que se utilizan para el recubrimiento de una misma figura, de esta manera, se espera que los estudiantes presenten una invariante de acción como la superposición utilizada en la primera actividad, de tal manera que superpongan la unidad triangular o el paralelogramo sobre la unidad hexagonal y puedan reconocer mediante el movimiento y la comparación de las figuras que una de ellas puede ser descompuesta o fraccionada para obtener las otras dos unidades de medida que le permitirá realizar el recubrimiento de la figura con la unidad de medida hexagonal haciendo uso de recomposición de dicha unidad a partir de sus fracciones.

CAPITULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de cada uno de los problemas de áreas de figuras planas que desarrolló cada grupo de estudiantes, donde se hará un análisis teniendo como referente la información recolectada y las impresiones causadas en los estudiantes con las actividades desarrolladas, este análisis se hace con base en la rejilla mencionada, la cual recoge algunos aspectos relevantes para este trabajo como lo son la intención didáctica de cada problema, las posibilidades y restricciones que presenta el material manipulativo propuesto y los esquemas de actividad instrumentada que permiten dar cuenta de la evolución en cuanto a las formas de uso del artefacto, dirigida hacia la mediación de éste para el desarrollo de los problemas.

4.1 Descripción de la experimentación

La puesta en práctica de los problemas se desarrolló en dos sesiones de trabajo, las cuales tuvieron una duración de dos horas para el Colegio Nuestra Señora de la Consolación, del cual participaron 15 estudiantes, y dos horas y media para el Colegio Santa Isabel de Hungría, del cual participaron 11 estudiantes.

DIA	PROBLEMA	MATERIALES	TIEMPO
Mayo 21 de 2014	Tipología 1, 2 y 3	Figuras en foami y monominó.	10:00 am – 12:00 m
Junio 5 de 2014	Tipologías 1, 2 y 3	Figuras en foami y monominó.	8:30 am – 11:00 am

4.2 Análisis por tipología

A continuación se presenta el análisis de los problemas resueltos por los estudiantes de acuerdo a la tipología correspondiente, el cual se encuentra resumido en la rejilla construida para la fase posactiva de la investigación de diseño que tratará de dar cuenta de los logros alcanzados y eventualidades ocurridas con relación al concepto de áreas por parte de los estudiantes y que posteriormente será ampliada.

El área como cantidad de plano ocupado por la superficie. La parte A de esta primera actividad permitió ver que los estudiantes son capaces de llevar a cabo procedimientos no numéricos para la comparación de áreas de figuras planas irregulares, pero también se pudo ver unos pocos estudiantes se limitaban a la aplicación de procedimientos algorítmicos y numéricos. De esta manera para los procedimientos no numéricos, el más utilizado por la mayoría de estudiantes fue el recorte inicial de las siluetas para realizar una comparación de las figuras (Figura 14)

Fig. 14. El recorte inicial

Posteriormente los estudiantes realizaron un segundo procedimiento de recorte después de notar que con el primero de ellos y la comparación no era posible determinar cuál era la diferencia de tamaños entre las figuras, debido a que la figura B presenta una forma alargada y curva, dejando así un espacio vacío en su interior que no permite la visualización inmediata de la igualdad o diferencia entre sus tamaños, para este segundo recorte se presentaron tres formas hacerlo, la primera de ellas consiste en recortar la figura B en pequeños pedazos (Figura 15) que luego serán pegados entre ellos con la ayuda de cinta (Figura 16) para de esta manera cubrir la figura A y así determinar la figura de mayor área.

Fig. 15 Recorte de la figura B en pedazos para recubrir la figura A

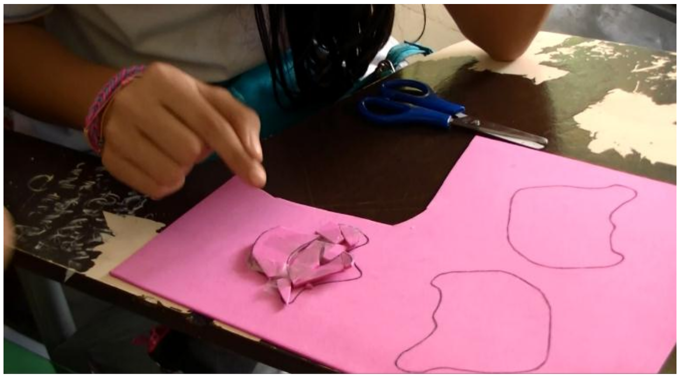
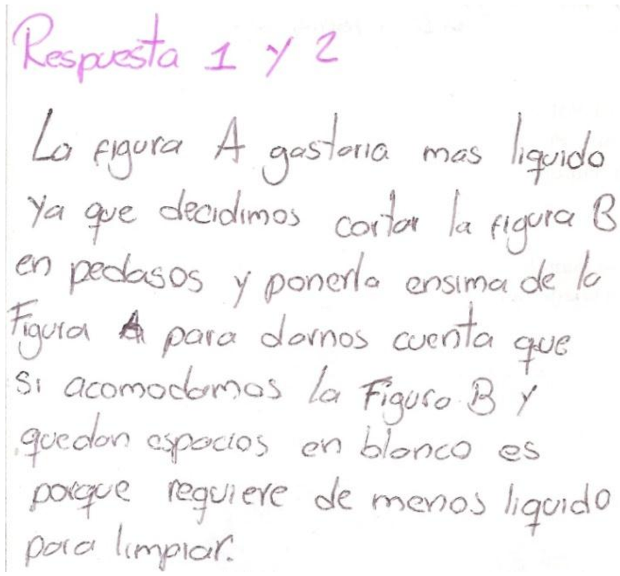


Fig. 16. Pegado con cinta

Se registró la primera forma de realizar el segundo recorte realizado por un grupo de estudiantes a partir de las anteriores imágenes y la siguiente consigna que permite reconocer que la mancha A tiene un área mayor que la mancha B (Figura 17)


Respuesta 1 y 2

La figura A gastaria mas liquido ya que decidimos cortar la figura B en pedasos y ponerla ensima de la Figura A para darnos cuenta que si acomodamos la Figura B y quedan espacios en blanco es porque requiere de menos liquido para limpiar.

Fig. 17. Descripción de la primera forma de realizar el segundo recorte

La segunda forma utilizada por los estudiantes al recortar las figuras fue colocar una sobre la otra y recortar las partes sobrantes de la figura B (Figura 18), que posteriormente son introducidas en el espacio vacío de dicha figura y a partir de esto comprobar si aún quedaban espacios sin cubrir en la figura A con los pedazos sobrantes de la figura B (Figura 19)

Fig. 18. Recorte de parte sobrantes al colocar una figura sobre la otra

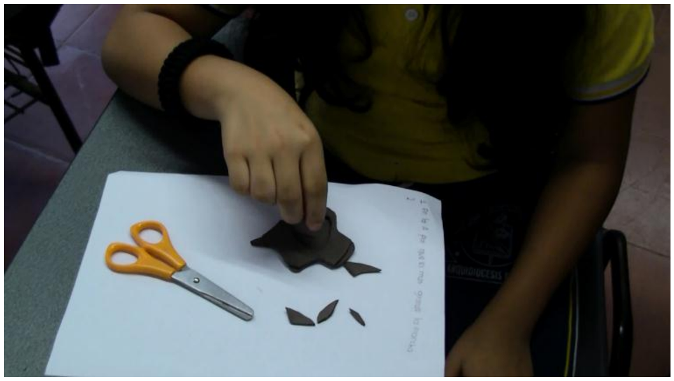
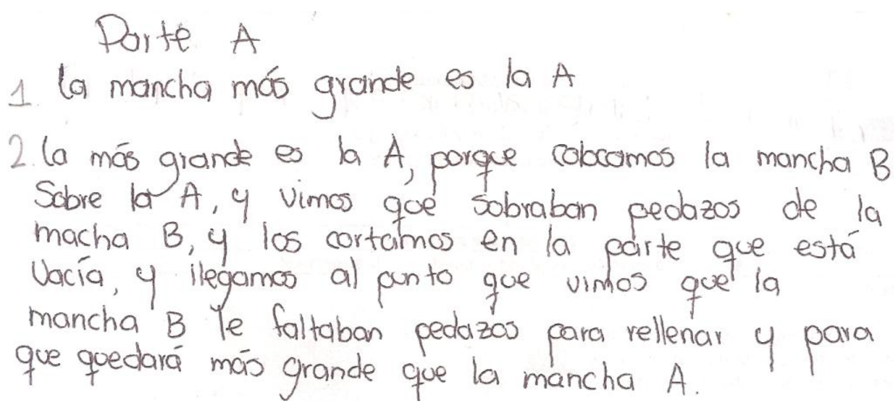


Fig. 19. Cubrimiento del espacio vacío de la figura B con los pedazos sobrantes

El siguiente es un ejemplo de la respuesta proporcionada por un grupo de estudiantes que utilizo la segunda forma de hacer el segundo recorte para la comparación de las áreas de las manchas A y B (Figura 20)



Parte A

1. la mancha más grande es la A

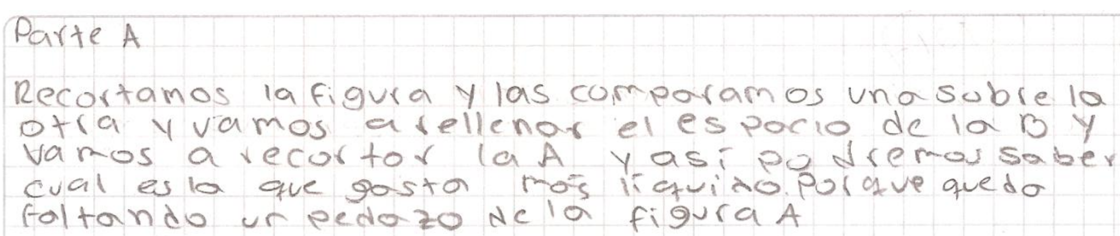
2. la más grande es la A, porque colocamos la mancha B Sobre la A, y vimos que sobraban pedazos de la macha B, y los cortamos en la parte que está Vacía, y llegamos al punto que vimos que la mancha B le faltaban pedazos para rellenar y para que quedará más grande que la mancha A.

Fig. 20. Descripción de la segunda forma de hacer el segundo recorte

La tercera forma llevada a cabo por los estudiantes fue el intento de formar la figura B recortando la figura A y al notar que después de este recorte sobro un pedazo de la figura A, los estudiantes concluyeron que esta figura tenía mayor tamaño (Figura 21)

Fig. 21. Recorte de la figura A para formar la figura B y el pedazo sobrante de la figura A

La situación en la que se observó el anterior procedimiento fue expresado por un grupo de estudiantes por medio de la siguiente explicación donde se puede evidenciar el uso del recorte inicial y la tercera forma de realizar el segundo recorte (Figura 22).



Parte A
Recortamos la figura y las comporamos una sobre la otra y vamos a rellenar el esporio de la B y vamos a recortar la A y así podremos saber cual es la que gasta mas liquido. Porque quedo faltando un pedazo de la figura A

Fig. 22. Descripción de la tercera forma de hacer el segundo recorte

Además de los procedimientos anteriores, cuando se pregunta a los estudiantes si existen otros procedimientos para determinar cuál de las manchas es más grande, un grupo propone la reducción de espacios vacíos por medio de la manipulación como comprimir la figura hacia la parte hueca y de esta manera conocer cuál de las figuras tiene una mayor área (Figura 23).

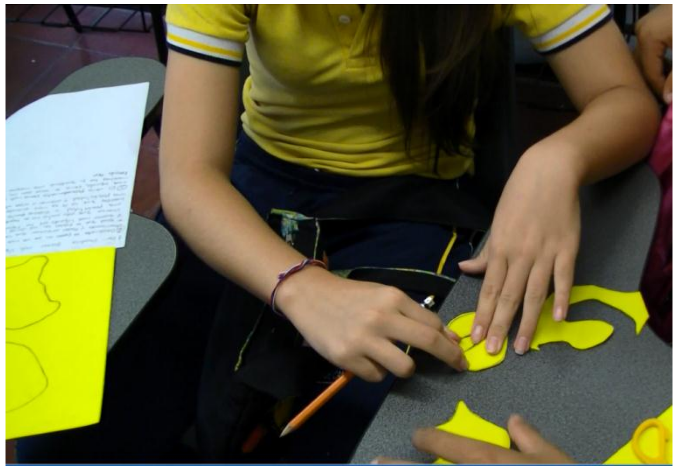


Fig. 23. Reducción de espacios mediante la compresión

El procedimiento numérico propuesto solo por un grupo para la solución de este problema, consiste en la utilización de la regla para medir la longitud de las figuras, como el ancho y el largo y de esa manera aplicar la fórmula que usualmente utilizan para el cálculo del área de rectángulos y así de acuerdo a un resultado numérico poder concluir cuál de las figuras tiene una mayor área, este procedimiento no es pertinente para la solución del problema, debido a que son figuras no rectilíneas y la utilización de la regla no es tan efectiva a la hora de calcular el área de este tipo de figuras llegando a obtener sólo una respuesta aproximada en la que el error puede ser considerable (Fig. 24).

Fig. 24. Utilizando procedimientos numéricos

Para el desarrollo de la parte B de la primera actividad, todos los estudiantes coincidieron en el mismo procedimiento que consiste en un recorte de las dos figuras para comparar el tamaño de las manchas mediante movimientos que los estudiantes consideraban adecuados, como rotaciones (Figura 25) y traslaciones (Figura 26) para ubicar las figuras en una posición que permitiera comparar las figuras con mayor facilidad a través de la superposición para llegar a la conclusión de que tenían el mismo tamaño

Fig. 25 Rotación

Fig. 26. Traslación y superposición

Como se pudo evidenciar a partir de la primera actividad, el material manipulativo realizó grandes aportes para el desarrollo de ésta, debido a que sólo el hecho de realizar el primer recorte a la silueta de la figuras le permitía al estudiante acercarse a la solución del problema, gracias a que iba más allá de lo que se podía ver en las manchas plasmadas en la ficha de trabajo o en los octavos de foami haciendo tangible y manipulable las figuras, así el estudiante pudo maniobrarlas, girarlas, doblarlas y apreciarlas de una forma más interactiva para realizar su comparación mediante procedimientos geométricos como las rotaciones, traslaciones para establecer relaciones de igualdad o inclusión, luego en el segundo recorte, el material ayudó al estudiante a comprender la conservación del área, puesto que fue posible recomponer las figuras cambiando su forma pero utilizando la misma cantidad de trozos obtenidos a partir de dicho recorte. (Anexo 1)

Aunque al inicio del desarrollo del problema los estudiantes se hacían preguntas como *¿cuál de ellas es mayor?* intentando responder simplemente a partir de la observación, teniendo así un acercamiento poco verídico, de tal manera que no fue posible llegar a una respuesta que los convenciera de la conclusión obtenida con este procedimiento sin reconocer la utilidad que podría brindar el material suministrado viéndolo entonces en ese momento como un artefacto, a partir de esto algunos estudiantes se sintieron impulsados a buscar nuevas alternativas de solución para obtener una respuesta con mayor fiabilidad, por esta razón algunos estudiantes preguntaron: "*¿puedo dañar el foami recortando las figuras?"* a lo que se responde positivamente y se da inicio al procedimiento que facilitó contestar la primera pregunta que se plantearon los estudiantes con relación a cuál de las figuras tenía un mayor tamaño.

A partir de las preguntas que realizaban los estudiantes, el material manipulativo se desempeñaba como mediador en la búsqueda de respuestas adecuadas, una vez encontradas las formas de uso o la utilidad que ofrecían las figuras en foami, el estudiante expresaba la satisfacción de resolver el problema y gran seguridad al momento de dar una respuesta gracias ese reconocimiento, y de esta manera se hacía evidente el cambio que sufrió el material en la transición de ser un artefacto para convertirse en un instrumento mediador en la actividad desarrollada.

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
Área como cantidad de plano ocupado por la superficie	En esta actividad fue posible observar que los estudiantes pudieron superar ciertas limitaciones y concepciones erróneas que pudieran tener frente al tratamiento del área como una magnitud y no solamente mediante el cálculo a través procedimientos numéricos, algorítmicos y la utilización de fórmulas propias de las figuras rectilíneas, como generalmente es presentada en las clases de matemáticas por parte de los maestros. Así, los estudiantes con la ayuda de procedimientos en su mayoría geométricos tales como traslaciones y rotaciones lograron concebir el área como la extensión o espacio que ocupa una superficie en el plano y poder determinar las relaciones: mayor que o menor que en cuanto al área de dos figuras curvas o irregulares.	Para la resolución de este problema, los estudiantes realizaron el recorte de la silueta de las figuras, este permitió un acercamiento más tangible hacia ellas y poder realizar el procedimiento de comparación a partir de movimientos de traslación y rotación, en el caso de las figuras que no tenían igual tamaño, los estudiantes realizaron un nuevo recorte de descomposición y recomposición para comparar las figuras mediante la inclusión, de esta manera, el manipulativo retroalimenta esta acción permitiendo que el estudiante se dé cuenta de conservación e invariancia del área después de someter las figuras a este procedimiento, además de la reducción de espacios vacíos por medio de la manipulación como comprimir la figura hacia la parte hueca ayudó al estudiante a conocer cuál de las figuras tenía una mayor área.	Al momento de suministrar el material, los estudiantes no sabían para qué se les presentaba, qué ayuda brindarían las figuras plasmadas en los octavos de foami, fue sólo a partir de la interacción con el material que los estudiantes reconocieron su funcionalidad. El recorte de la silueta de las figuras realizado ayudó en su manipulación para realizar procedimientos como la superposición y motivó a los estudiantes a gestar ideas como distintos tipos de recorte para la comparación de las superficies, de la misma manera, los procedimientos de recorte y superposición se convirtieron en invariantes de acción que fueron utilizados para la segunda parte de la actividad, así con el reconocimiento de las ayudas y posibilidades que permitía el manipulativo, los estudiantes concibieron el artefacto como un instrumento útil en la resolución del problema y lo expresaron a través de algunos gestos y la seguridad con la que exponían sus respuestas.

El área como magnitud autónoma: El conocimiento que se moviliza en las dos partes de esta actividad está relacionado con la independencia del área frente al perímetro, lo cual fue posible evidenciarlo gracias a la réplica que hacían los estudiantes de las diferentes figuras con la ayuda de los cuadrados del monominó y la comparación de las figuras a través de procedimientos numéricos como el reconocimiento de la unidad de medida (Figura 27), a partir del cual el estudiante pudo conocer la medida de la superficie, de tal manera que dos figuras de igual medida tienen la misma área, es decir que el orden establecido para las medidas es el mismo para las áreas (Figura 28).

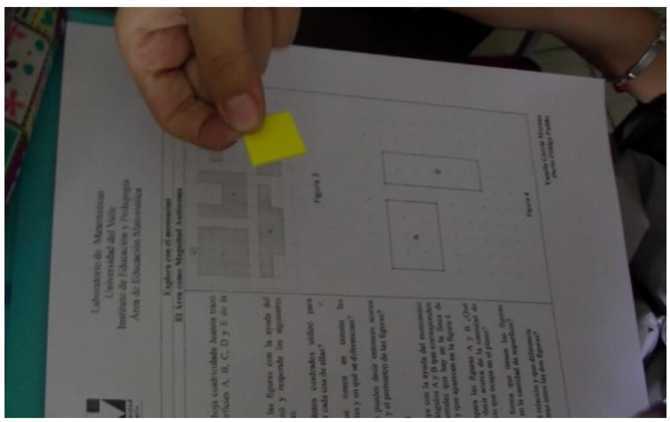


Fig. 27. El reconocimiento de la unidad de medida

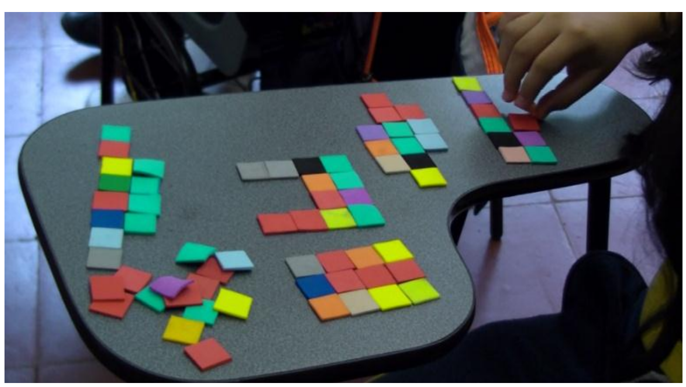


Fig. 28. Figuras de igual medida tienen la misma área

Por otra parte y en relación con el anterior, a partir de la primera pregunta de la actividad se pudo cimentar el proceso de medida del área de las figuras expuestas en la primera parte y basándose en ese proceso, los estudiantes pudieron establecer las relaciones y diferencias entre las superficies comparadas de acuerdo al conteo de cada cuadrado que conformaban las diferentes figuras y su contorno (Figura 29)

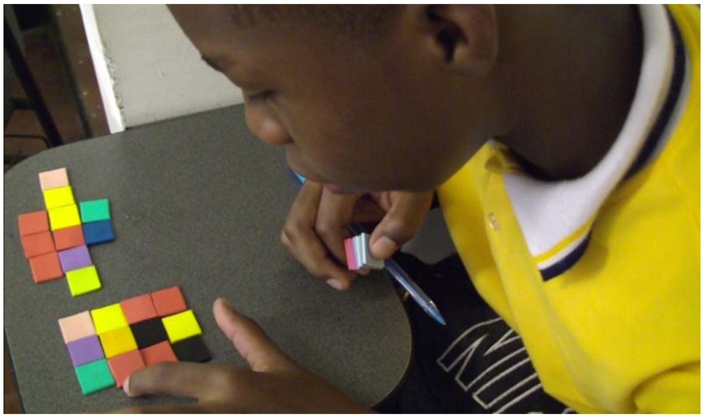


Fig. 29. Conteo de cuadrados y su contorno

Algunos estudiantes utilizaron procedimientos complementarios al uso del monominó, los cuales consistían en trazos sobre y al lado de las figuras plasmadas en la ficha para realizar el conteo de cuadrados mientras que su compañero a la par replicaba las figuras con los cuadrados de foami. En otros casos, el material manipulativo no significó un gran aporte para los estudiantes, debido a que tuvieron privilegio sobre procedimientos menos interactivos como el trabajo exclusivo sobre las fichas de trabajo dejando de lado el material suministrado (Figura 30).

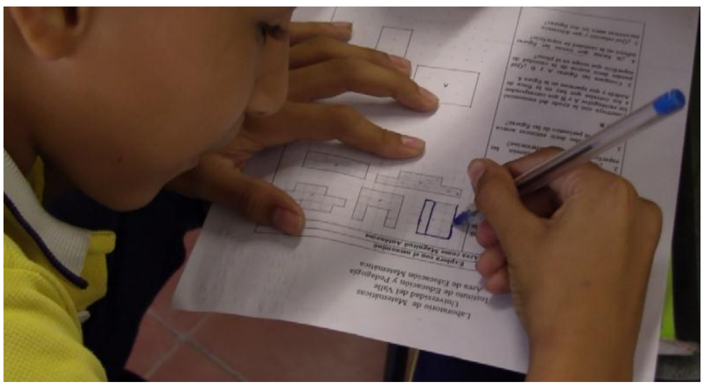


Fig. 30. Trabajo sin el uso del monominó

En cuanto a los procedimientos utilizados en la segunda parte, la mayoría de estudiantes construyeron una cuadricula utilizando los puntos impresos como guía, esto les ayudó a observar más fácilmente la cantidad de cuadrados que se debían utilizar para construir los rectángulos y así poder establecer si la forma de estas figuras influía en la cantidad de superficie y reconocer las relaciones entre ellas (Figura 31).

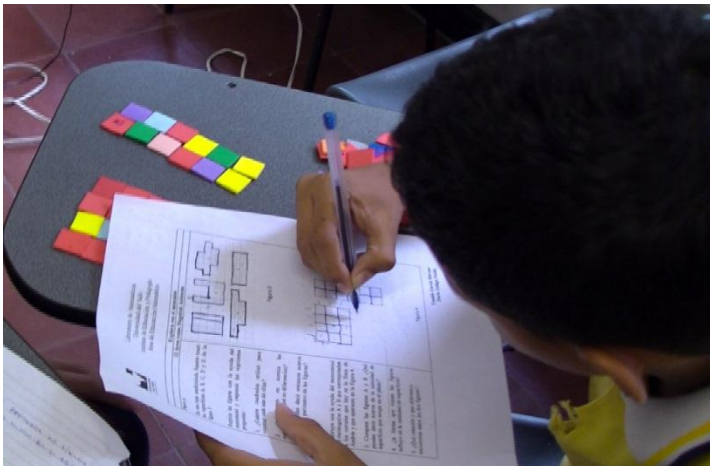
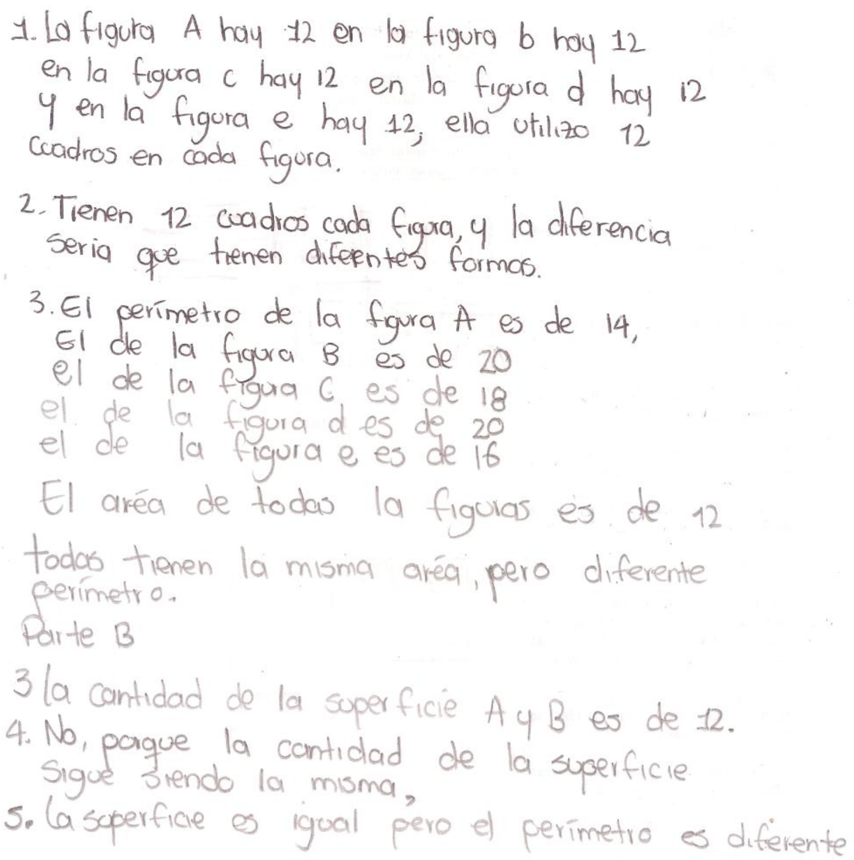


Fig. 31. complementariedad de dos procedimientos

En términos generales, en el transcurso de la actividad el material se desempeñó de una manera aceptable, debido a que para responder la primera pregunta los estudiantes exploraron las ayudas que brindaba el monominó en el proceso de cálculo del área, éste proporcionó apoyo en el reconocimiento de la unidad de medida, en evidenciar que el número que resultaba al aplicar la fórmula de base por altura, correspondía con el número de cuadrados que conformaban la figura gracias al conteo realizado y fue fundamental en la comprensión de la conservación del área al trabajar con una misma cantidad de cuadrados en la construcción de las diferentes figuras.

Los anteriores avances fueron comunicados por parte de los estudiantes a través de expresiones como *"el perímetro es diferente y el área se conserva"*, *"puede cambiar el perímetro pero el área no"*, *"si tienen la misma cantidad de cuadrados, tienen la misma superficie"* y *"las figuras A y B son rectángulos pero están proporcionadas diferentemente en el plano"*. Con estas expresiones se puede ver que los estudiantes han reconocido algunas de las características del área independiente de la forma y el perímetro, esto se logró gracias a la interacción que tuvieron los estudiantes con los materiales manipulativos que les permitió construir las figuras dadas y poder visualizarlas de una manera más clara explorar sus características.

La mayoría de los estudiantes desarrolló la actividad con éxito, logrando comprender que el perímetro es diferente en relación a una misma área, identificando cuestiones como: la cantidad de superficie no cambia, continúa siendo la misma a pesar de que las figuras presentan diferentes formas, es decir, logran disociar el área del perímetro y evidenciar la conservación del área, (Anexo 2) un ejemplo proporcionado por un grupo de estudiantes permite ver claramente estos logros alcanzados (Figura 32).



1. La figura A hay 12 en la figura b hay 12 en la figura c hay 12 en la figura d hay 12 y en la figura e hay 12, ella utilizo 12 cuadros en cada figura.

2. Tienen 12 cuadros cada figura, y la diferencia seria que tienen diferentes formas.

3. El perímetro de la figura A es de 14, El de la figura B es de 20 el de la figura C es de 18 el de la figura d es de 20 el de la figura e es de 16

El aréa de todas la figuras es de 12

todas tienen la misma aréa, pero diferente perímetro.

Parte B

3 la cantidad de la superficie A y B es de 12.

4. No, porque la cantidad de la superficie sigue siendo la misma,

5. La superficie es igual pero el perímetro es diferente.

Fig. 32. Disociación entre el área y el perímetro

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
Área como magnitud autónoma	Los estudiantes presentaron gran desempeño en la comprensión del área como una magnitud autónoma, debido a que el procedimiento del conteo de los cuadrados de monominó utilizados en la construcción de las figuras permitió conocer el número que representaba el área de cada una de las figuras rechazando así la idea errónea que inicialmente tenía la mayoría de estudiantes respecto a la relación de estrecha dependencia entre el área y el perímetro. Adicionalmente, los estudiantes al momento de construir cada una de las figuras pudieron evidenciar la propiedad de la conservación del área gracias al conteo de los cuadrados del monominó que representaban la unidad de medida, ratificando así la disociación anteriormente mencionada.	En esta ocasión, el material ayudó al estudiante en la manipulación de las figuras haciendo un poco más interactiva y llamativa la actividad, ya que no se tendría el mismo tipo de intervención si sólo se presentan las figuras en el papel sin permitir el movimiento, así mismo, los cuadrados representan de una forma muchos más adecuada el procedimiento recubrimiento por iteración de la unidad de medida. Con la reacomodación de los cuadrados de foami, los estudiantes comprendieron que sin importar la forma ni el perímetro de la figura, su área se mantenía constante, además los estudiantes expresaron la facilidad que proporcionaba el material para la construcción de las figuras afirmando que sería más complicado si lo tuvieran que hacer con el lápiz.	Con la utilización de este material se logró que los estudiantes reconocieran su funcionalidad y la representación que permitía hacer de la unidad de medida además del procedimiento de repetición de los cuadrados de foami y reconociendo el papel fundamental de la unidad de medida para el cálculo del área, de la misma manera, al momento de la construcción de las figuras con la misma cantidad de cuadrados, los estudiantes se dan cuenta de la propiedad de conservación del área independiente de la forma que esta adopte gracias a la reorganización de dichos cuadrados. Aunque el material se preveía como una ayuda muy potente para la resolución de problemas, algunos estudiantes no pudieron evidenciar todo el potencial esperado, debido por una parte a que los procedimientos para el cálculo del área podían llevarse a cabo a partir del conteo por medio de marcas sobre las figuras impresas en las fichas de trabajo.

El área como número de unidades que recubren la superficie: En esta última actividad propuesta, los estudiantes lograron concebir el área como un recubrimiento en el cual, la unidad de medida desempeñó un papel fundamental. Anteriormente se utilizó el cuadrado como unidad de medida para agilizar o hacer más práctico el procedimiento con relación al área como magnitud autónoma, pero para generar en los estudiantes una mejor y más general comprensión de lo que significa el área de una figura se hizo necesario relativizar la unidad de medida.

Para dar respuesta a la primera pregunta los estudiantes recubrieron la superficie con los triángulos sin presentarse ningún inconveniente, dado que la superficie a medir se podía cubrir con una cantidad completa de triángulos (Figura 33), para el recubrimiento de la superficie con las otras dos unidades de medida propuestas, los estudiantes tuvieron que realizar un procedimiento adicional, el cual consistió en su fraccionamiento, debido a que ninguna de ellas cabía un número discreto de veces en la superficie a medir. Para el caso del fraccionamiento del hexágono se presentaron dos formas de hacerlo, la primera de ellas fue el fraccionamiento por medio de triángulos, superponiéndolos sobre el hexágono para comprobar la cantidad de triángulos que pueden recubrirlo, concluyendo así que cada hexágono estaba compuesto por seis triángulos y a partir de esto se realizó el recubrimiento de las partes que no podían ser ocupadas por hexágonos completos (Figura 34).

La segunda forma para el fraccionamiento del hexágono fue utilizada sólo por un grupo de estudiantes, el cual consistía en su recubrimiento por medio de paralelogramos teniendo así mayor facilidad para el recubrimiento de la figura S, puesto que lo hacían más rápido al colocar una menor cantidad de figuras que las utilizadas en la primera forma presentada, pero al finalizar, para conocer el resultado de la medición se tuvo en cuenta que los hexágonos estaban compuestos por seis triángulos, es decir que al final, las dos formas coincidieron en la misma respuesta numérica porque el resultado se dio con base en triángulos (Figura 35). De la misma forma en la que se procedió con el fraccionamiento de los hexágonos, se hizo para los paralelogramos teniendo como resultado que cada uno de ellos se constituía de dos triángulos.

Fig. 33. Recubrimiento con la primera unidad de medida

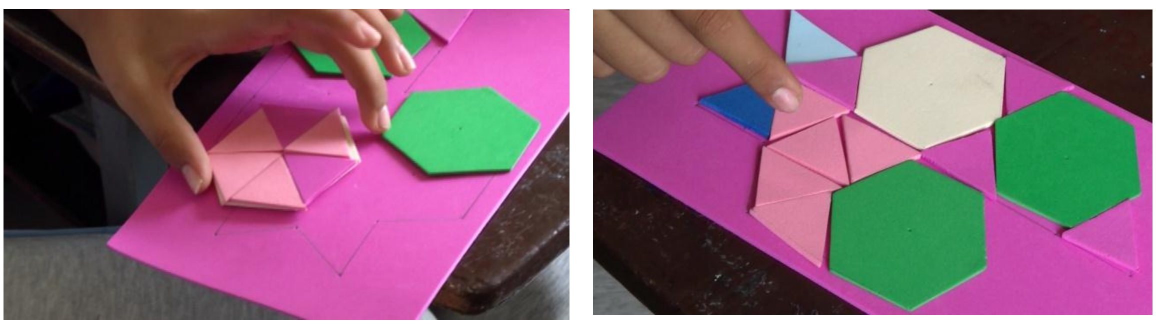


Fig. 34. Fraccionamiento del hexágono a partir de triángulos y posterior recubrimiento

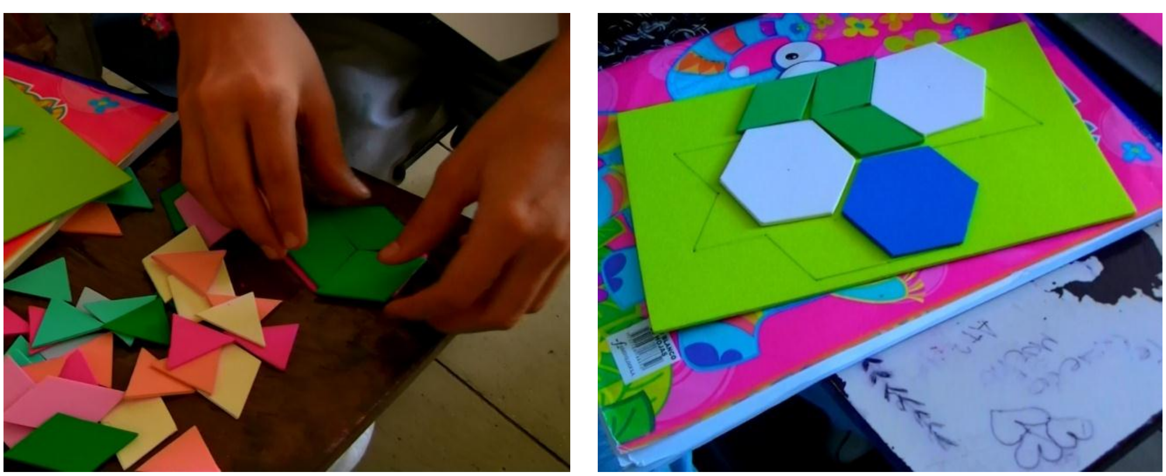
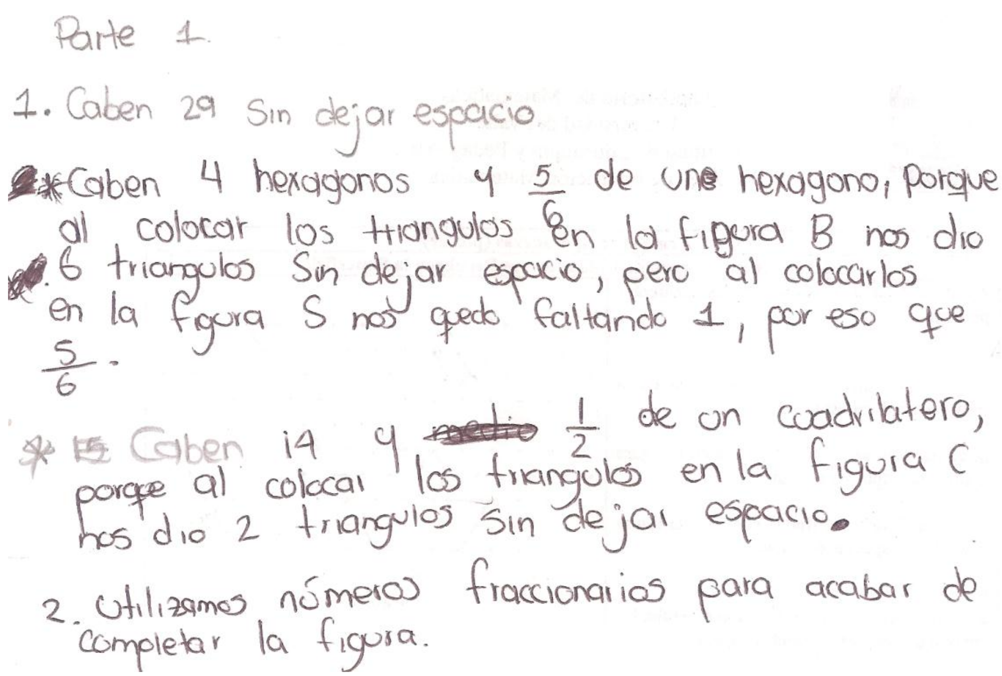


Fig. 35. Fraccionamiento del hexágono a partir de paralelogramos y posterior recubrimiento

La siguiente es una de las respuestas proporcionadas por un grupo de estudiantes en la que se puede evidenciar los resultados conseguidos a partir de la puesta en práctica de los procedimientos mencionados (Figura 36).


Parte 1.

1. Caben 29 sin dejar espacio.

* Caben 4 hexagonos y $\frac{5}{6}$ de un hexagono, porque al colocar los triangulos en la figura B nos dio 6 triangulos sin dejar espacio, pero al colocarlos en la figura S nos quedo faltando 1, por eso que $\frac{5}{6}$.

* Caben 14 y ~~medio~~ $\frac{1}{2}$ de un cuadrilatero, porque al colocar los triangulos en la figura C nos dio 2 triangulos sin dejar espacio.

2. Utilizamos números fraccionarios para acabar de completar la figura.

Fig. 36. Algunas de las respuestas conseguidas

En este ejemplo se puede ver que los resultados obtenidos a partir del recubrimiento con las diferentes unidades de medida fueron correctos, con la figura A se obtuvo un resultado inmediato que no necesitaba procedimientos adicionales, para la respuesta relacionada con la figura B, los estudiantes proponen una explicación para el uso de números fraccionarios, al decir que caben 4 hexágonos se puede entender que han utilizado la recomposición de uno de ellos, debido a que caben exactamente tres hexágonos sin descomponerlos (Figura 37).

Fig. 37. Cubrimiento con hexágonos completos

Ahora, con la expresión $\frac{5}{6}$ de un hexágono se explica que la descomposición fue hecha a partir de triángulos, donde se presenta que en cada hexágono caben exactamente seis triángulos y para el recubrimiento total de la figura S queda faltando un triángulo para completar el quinto hexágono, razón por la cual el valor del área quedó expresado como 4 hexágonos y $\frac{5}{6}$ de otro.

Para hallar el área utilizando la figura C, los estudiantes afirman que el resultado es 14, con lo que se entiende que también utilizaron la recomposición, dado que en la superficie S caben 12 figuras del tipo C sin descomponer (Figura 38), lo que quiere decir que las otras dos fueron producto de la recomposición con el uso de triángulos formado un paralelogramo con dos de ellos. Además aparece la expresión $\frac{1}{2}$, de un cuadrilátero que explica que la descomposición se hizo a partir de dos triángulos para cada paralelogramo, de esta manera los estudiantes afirmaron que para el recubrimiento total de la figura S eran necesarios 14 y $\frac{1}{2}$ cuadriláteros.

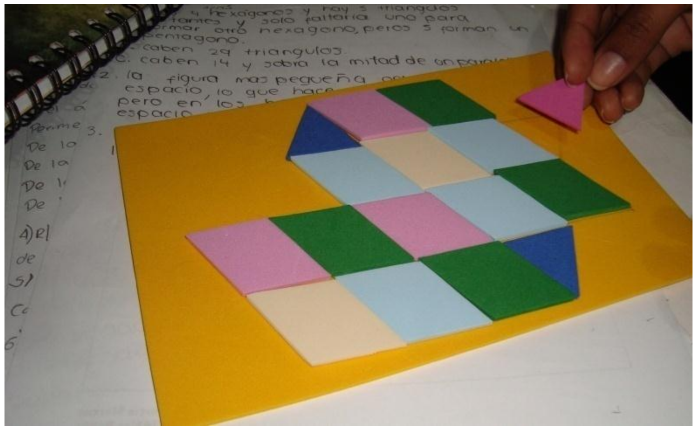
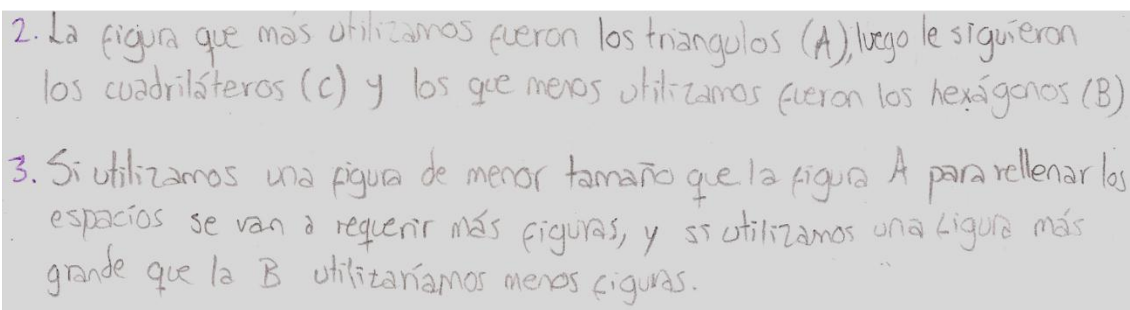


Fig. 38. Recubrimiento con paralelogramos

De acuerdo a los anteriores procedimientos que determinaron los resultados de la primera pregunta, los estudiantes tenían elementos para continuar respondiendo a interrogantes como: ¿Qué sucede con los resultados al trabajar con diferentes unidades de medida? o ¿Qué pasaría con ellos si cambiamos a una unidad mayor o menor a las utilizadas?, en ellos, los estudiantes expusieron algunas respuestas que permitieron ver los avances logrados con relación a la importancia de la unidad de medida en el procedimiento del cálculo del área (Figura 39).



2. La figura que más utilizamos fueron los triangulos (A), luego le siguieron los cuadriláteros (C) y los que menos utilizamos fueron los hexágonos (B)

3. Si utilizamos una figura de menor tamaño que la figura A para rellenar los espacios se van a requerir más figuras, y si utilizamos una figura más grande que la B utilizaríamos menos figuras.

Fig. 39. Algunas respuestas con relación a la importancia de la unidad de medida

Se puede ver que en respuesta a la segunda pregunta, los estudiantes conceden un orden a las unidades de medida desde las más utilizadas a las menos utilizadas con relación a la cantidad de figuras empleadas, aquí se puede interpretar que la unidad de medida que otorgan el calificativo de más utilizadas es la unidad de medida A, y el caso contrario ocurre con la unidad de medida que llaman la menos utilizada, la figura B,

Esta relación se presenta un poco más explícita en la respuesta de la tercera pregunta en la que este grupo de estudiantes manifiestan que si utilizan una figura de menor tamaño que la figura A, la cual es la más pequeña, se hacía necesario replicarla un mayor número de veces que las otras dos unidades de medida para recubrir la superficie S, por el contrario, si se utilizara una figura de mayor tamaño que la figura B como unidad de medida, se necesitarían menos figuras para el recubrimiento de la misma superficie, de esta manera los estudiantes pudieron establecer la relación inversa existente entre la unidad de medida y el número que representa el área de una figura en función de dicha unidad. (Anexo 3)

En el desarrollo de esta actividad, nuevamente el material manipulativo tiene un papel protagónico, pues ayuda a los estudiantes por una parte a calcular el área de una superficie con unidades de medida diferentes a la unidad cuadrada que es la más ampliamente utilizada por su facilidad en los procedimientos, por otra parte permitió que los estudiantes realizaran el recubrimiento de una superficie con unidades de medida que inicialmente no se presentaban como apropiadas para ello porque no cabían un número entero de veces.

Al momento de realizar el recubrimiento de la superficie S con la ayuda de la figura A, los estudiantes exploran y descubren que estas cubren en su totalidad dicha superficie, en un segundo momento este procedimiento les fue de gran ayuda, debido que a partir de él se gesta la idea un fraccionamiento y recomposición de la unidad de medida, probablemente de triángulos, concebido al no poder cubrir totalmente la superficie con las figuras B y C.

Todos los procedimientos que se realizaron en función de la comprensión del área como el número de unidades que recubren la superficie fueron posibles gracias a la intervención del material manipulativo, el cual muy pertinente por la facilidad que brinda al momento de realizar la construcción de las figuras y la manipulación, además cuando los estudiantes tratan de incluirlos en el desarrollo de los problemas pueden reconocer muy fácilmente la funcionalidad y las posibilidades que ofrece en la visualización de propiedades fundamentales en la forma de concebir el área propuesta en la actividad.

Como uno de los ejemplos, se tiene que los estudiantes vieron el recorte y descomposición de la unidad de medida como una de las posibilidades y funcionalidades del manipulativo frente a esta actividad específica, de tal manera que cuando el estudiante recubrió la superficie con las diferentes unidades de medida, el manipulativo inmediatamente retroalimentó esta acción "mostrándole "que al recubrir la superficie con cada una de las unidades de medida se obtenían resultados numéricos diferentes, de manera que el estudiante comprendió que la selección de la unidad de medida influye directamente en el resultado obtenido a través del conteo.

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	INTENCIÓN DIDÁCTICA DE LA TAREA	POSIBILIDADES DEL MANIPULATIVO/ARTEFACTO	ESQUEMAS DE ACTIVIDAD INSTRUMENTADA
El área como número de unidades que recubren la superficie	La mayoría de estudiantes lograron desarrollar la actividad y alcanzar los objetivos planteados para ella porque comprendieron la importancia, necesidad y utilidad de la unidad de medida para el cálculo de áreas, concibieron el área como el número de unidades necesarias para realizar el recubrimiento de una superficie a partir de una unidad de medida preestablecida, teniendo en cuenta que cualquier superficie con un área apropiada puede ser útil como unidad de medida. La disociación entre el área y el número que la mide se logró a partir del cálculo del área de una superficie con la ayuda de diferentes unidades de medida que a su vez eran fracciones de una más grande, es decir, se relativizó la unidad consiguiendo de esta manera diferentes resultados numéricos dependiendo de la unidad seleccionada y desvirtuando la idea de un único resultado numérico ligado a una superficie.	La facilidad del recorte que se puede hacer en este material facilita la visualización de las fracciones obtenidas a partir de una unidad de medida y su posterior recomposición para la medición del área de una superficie, además este material se muestra llamativo para los estudiantes debido a que se presenta como una especie de rompecabezas que los motiva a construirlos y no sólo a trabajarlos con lápiz y el papel. Por otra parte, los estudiantes pudieron ver gracias a la utilización de tres distintas unidades de medida que se pueden obtener diferentes resultados numéricos que representan el área de una misma figura en oposición a las ideas generalizadas de la existencia de un único resultado ligado a la representación del área de una superficie.	Este material motivo al estudiante a hacer uso de la fracción de la unidad de medida, descomponiendo el hexágono en paralelogramos y este a su vez en triángulos, de esta manera saber, de cuántos triángulos se compone el hexágono y de cuántos el paralelogramo, a partir de esta información conocer por ejemplo cuántos hexágonos son necesarios para recubrir la superficie sin dejar espacios vacíos utilizando la recomposición del hexágono a partir de las partes que lo constituyen y así establecer la relación inversa la unidad de medida y el número que representa el área, es decir que entre más grande sea la unidad de medida seleccionada, será menor el número representativo del área y viceversa. Utilizando este procedimiento, el material contribuye a que el estudiante comprenda la utilidad, usos y posibilidades que ofrece y pueda replicarlos para la resolución de problemas relacionados con relativización de la unidad de medida

4.3 Consideraciones Finales

Teniendo en cuenta el desarrollo de los problemas encaminados a pensar el área de acuerdo a la tipología presentada en los aspectos didácticos, se puede ver la evolución que mostraron los estudiantes frente a ellas, dado que en el desarrollo de las actividades se pudo concebir el área como magnitud con unas características específicas que se pudieron evidenciar de una manera progresiva con la aplicación de procedimientos geométricos muy básicos como la comparación a través de movimientos de traslación y rotación, además de la superposición, equidescomposición y recomposición para visualizar la equivalencia y la conservación del área de dos superficies, además con procedimientos adicionales como la relativización de la unidad de medida se proporcionan elementos para la comprensión de la disociación del área del número que la mide.

En cuanto al material utilizado, en términos generales tuvo un buen desempeño gracias a las múltiples posibilidades que ofreció a los estudiantes para el desarrollo de cada problema, con características como la posibilidad del recorte, la manipulación de las figuras mediante traslaciones, rotaciones, descomposición y recomposición de figuras; uno de los elementos que se pudieron construir con la ayuda del foami es el monominó que a su vez permitió a los estudiantes trabajar cuestiones como la conservación del área y su disociación con el perímetro mediante procedimientos como la reacomodación de las unidades que componen una figura para construir otra con diferente forma pero conservando la misma área, todas estas acciones posibilitan la ejecución de un trabajo mucho más interactivo a diferencia de los procedimientos algorítmicos realizados con elementos usuales en las aulas de clase.

Aunque este tipo de material brinda grandes posibilidades, tiene un campo de acción limitado, por esta razón es necesario que el estudiante adopte una actitud de compromiso con la actividad, debido a que el hecho de ser llamativo puede desviar la atención de los estudiantes y tomar la actividad más como un juego que como una situación para su formación, otra de las restricciones presentes en el trabajo con el foami es la imposibilidad de fraccionar la unidad de medida infinitamente, de tal manera que se pueda realizar un recubrimiento total de una superficie sin importar la forma ni cuan pequeña sea, debido a que este material no permite realizar este tipo de fraccionamiento.

Por último se tiene la restricción que presentan la mayoría de materiales manipulativos y es la imposibilidad de trabajar situaciones a gran escala, es decir, situaciones en las que intervengan longitudes o magnitudes muy extensas que sobrepasan las posibilidades del material, para abordar este tipo de situaciones, se hace necesario que el estudiante comprenda e interiorice el concepto matemático y las propiedades que están representadas a través del manipulativo.

Finalmente, se pudo reconocer el papel que desempeñó el material en cuanto a la mediación instrumental esperada, porque permitió a los estudiantes a través de la manipulación del material para la solución de los problemas, explorar e ir avanzando en la construcción de esquemas de uso que sugirieran invariantes para el desarrollo de situaciones posteriores, de esta manera se pudo evidenciar la construcción hecha por parte de los estudiantes al interactuar con un artefacto que le permitiera establecer relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones de resolución de problemas convirtiéndolo así en un instrumento para su formación.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan algunas conclusiones a las que se llegaron a partir de aspectos como los resultados obtenidos en el análisis de los problemas desarrollados, el problema de indagación, el cumplimiento de los objetivos, la pertinencia del marco teórico adoptado, la eficacia de la metodología utilizada, diseño de las tareas y sus resultados, algunas reflexiones personales y preguntas que quedan abiertas para nuevas investigaciones.

En cuanto al **problema de indagación** se puede concluir que la mediación permite a los estudiantes interponer un elemento auxiliar para enfrentarse al problema a desarrollar antes de abordarlo directamente con procedimientos algorítmicos como la aplicación de fórmulas, así, este trabajo introduce los materiales manipulativos en representación de dichos elementos mediadores en el proceso de resolución de los problemas propuestos y direccionados a la comprensión de las diferentes formas de concebir el área.

De la misma forma, la propuesta de este problema de indagación se torna interesante por cuanto se conoce que el desarrollo cognitivo del estudiante está vinculado con la actividad que este desarrolle, así, a partir de la interacción con los materiales manipulativos realizada por los estudiantes se pudieron vencer algunos de los errores y dificultades mencionadas, las cuales están presentes en la comprensión conceptual del área, es decir, en el establecimiento de relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones de resolución de problemas.

En cuanto al **objetivo general**, en el transcurso del trabajo y especialmente en la aplicación de los problemas se pudieron encontrar algunas características de la mediación instrumental emergente en el desarrollo de cada uno de los problemas, por una parte se reconoce la importancia de algún elemento que tienda un puente a través del cual el estudiante puede pasar de un conocimiento informal, con el cual desarrolla problemas utilizando el material manipulativo e integrando procedimientos intuitivos, empíricos, lúdicos, colaborativos, entre otros, y el conocimiento formal, que surge a partir de las deducciones, construcciones o abstracciones que los estudiantes realizan a partir de los resultados obtenidos y los procedimientos utilizados para ello.

Por otra parte, la mediación instrumental surgió rápidamente gracias a la intervención del material manipulativo, el cuál fue considerado por los estudiantes como objetos materiales que les fueron proporcionados para el desarrollo del problema, pero sin un sentido explícito, debido a que no habían interactuado con él, y mucho menos tratar de resolver un problema matemático con su ayuda, es decir, en un primer momento, este material fue apreciado como un artefacto. En un segundo momento, después de un proceso de apropiación en el que el estudiante alcanza una serie de esquemas mentales que organizan los conceptos y teorías que conforman la estrategia para la resolución del problema, por ello hasta que el estudiante alcance medios para el uso de dicho artefacto con una finalidad específica, este se convierte en un instrumento mediador de la actividad que además es construido por él mismo.

En cuanto a los objetivos específicos se puede concluir que:

- se pudieron identificar algunos elementos teóricos como algunas de las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de área como lo son la confusión y linealidad entre el área y el perímetro, el tratamiento estrictamente numérico que se da al área dejando de lado los procedimientos geométricos, el desconocimiento de la unidad de medida y su relativización, entre otros, estos elementos permitieron formular problemas de áreas orientados en la búsqueda de una solución para ellas y así lograr la apropiación de los elementos que se consideran clave para la comprensión conceptual del área como magnitud.

- Gracias al rediseño de algunos problemas que hacen alusión a la tipología propuesta por Corberán (1996) y MEN (2013), estos problemas fueron modificados para incluir materiales manipulativos en los procedimientos utilizados en su desarrollo, además, las preguntas planteadas son abiertas para la utilización de diferentes maneras de resolverlos, siendo estas algunas de las características del trabajo experimental que se desarrolla al interior del Laboratorio de Educación Matemática.

- En cuanto al análisis de las producciones de los participantes del estudio se logró mediante la utilización de una rejilla de análisis, en la cual se recogieron elementos importantes del marco teórico que se esperaban encontrar como consecuencia de la integración de materiales manipulativos como mediadores de la actividad realizada por el estudiante, y de esta manera determinar si los problemas propuestos fueron pertinentes y facilitaron la comprensión conceptual del área.

El **marco teórico** adoptado para el desarrollo de este trabajo fue pertinente para tener elementos necesarios desde diferentes puntos de vista con relación al concepto de área, para ello se tuvieron en cuenta cuestiones como algunas concepciones y dificultades asociadas a la construcción histórica del concepto de medida a partir de la magnitud, además fue posible identificar aspectos matemáticos que permitieron dar a conocer las características y términos involucrados en la medida del área como magnitud y su relación con el número.

Además fue posible conocer algunas etapas del desarrollo progresivo de la comprensión del proceso de medida de acuerdo a la edad del estudiante. Aunque se pudieron observar dificultades en la comprensión conceptual del área por parte de estudiantes de grado sexto, siendo esta una de las razones por las cuales se plantearon problemas para este grado, se sugiere realizar este tipo de actividades desde los primeros grados de escolaridad.

En este marco teórico los elementos más importantes se ubicaron en los aspectos didácticos que ayudaron a identificar y caracterizar fenómenos relativos al aprendizaje y enseñanza el concepto de área, otorgando gran importancia al proceso de resolución de problemas y las estrategias de enseñanza de este concepto a través del uso y mediación de materiales manipulativos, además de la tipología adoptada donde se abordó el concepto de área a partir de diversas formas, de tal manera que para cada una de ellas se diseñaron un determinado tipo de problemas.

En cuanto al **diseño metodológico** podemos reconocer su pertinencia, gracias a que con esta metodología de carácter cualitativa se pudo reconocer el papel que juega la mediación instrumental dentro de la comprensión conceptual del área a partir de la caracterización de los comportamientos de los estudiantes, avances en relación con el concepto, sus actitudes, expresiones, creencias y especulaciones que hagan al respecto, tal y como son exhibidos por ellos.

A partir de la puesta en práctica de los problemas rediseñados se pudieron obtener grandes resultados, debido a que el trabajo por inclusión y superposición permitió a los estudiantes realizar procedimientos fundamentalmente geométricos, en los cuales las superficies a comparar eran determinantes y el marco numérico no intervino. A medida que los estudiantes iban desarrollando la actividad a través de la superposición, fue posible determinar la igualdad entre dos superficies y gracias a la superposición e inclusión, los estudiantes lograron superar la concepción numérica del área para concebir el área como magnitud, además, el procedimiento de equidescomposición para realizar la comparación de dos superficies permitió que los estudiantes apoyándose en procedimientos numéricos disociaran el área del perímetro. En conclusión, los procedimientos utilizados a lo largo del desarrollo de las actividades como lo fueron la superposición, inclusión, equidescomposición y relativización de la unidad de medida ayudaron en la comprensión del área como una propiedad de la superficie invariante, es decir lograron concebir el área como una magnitud.

Así pues, con los **resultados** obtenidos se pudo evidenciar que los estudiantes lograron superar algunas de las dificultades relacionadas con el aprendizaje del área, aunque a nuestro juicio y a partir de dichos resultados, sugerimos un mayor énfasis en la actividad concerniente a concebir el área como una magnitud autónoma, debido a que la actividad planteada no logró liberar todo el potencial que puede brindar esta forma de ver el área, para esto se sugiere introducir en ella no solo la replicación de figuras, sino que el estudiante construya por si mismo figuras que puedan tener igual área con diferente perímetro, diferente área con perímetro constante y figuras con igual área y perímetro.

A manera de **reflexión final**, se pretende que este trabajo pueda ser utilizado por docentes para la implementación de formas diferentes en el abordaje del área y a su vez pueda tomarlo como un punto de apoyo para ir más allá en esta propuesta de enseñanza del área como magnitud, de la misma forma se quiere que se reconozca las potencialidades que brindan en general los materiales manipulativos y en especial el trabajo con foami para la comprensión de temas matemáticos, además estos materiales ofrecen a los estudiantes y profesores nuevos instrumentos diferentes de los usualmente utilizados en las aulas de clase como el lápiz, el papel, los libros de texto, entre otros, que puedan ser mediadores en las actividades a desarrollar.

Al finalizar este trabajo, se dejan abiertos algunos interrogantes como:

- ¿Cómo pretender mejorar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos utilizando materiales manipulativos si hace falta formación de maestros en este campo?

Finalmente, como profesores de matemáticas en formación estamos convencidos que se hace necesario formar maestros en la utilización de materiales manipulativos para ser introducidos en las aulas de clase, debido a que este tipo de materiales no es muy conocido en las clases de matemáticas y los docentes no tienen la suficiente experiencia para implementarlos de manera efectiva en las aulas de clase.

BIBLIOGRAFÍA

Arbeláez, G., Anacona, M. & Recalde, L. (1998). Historia del Número y la Magnitud. Documento de trabajo. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Arenas, M. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.

Arce, J. & Pabón, O. (2011). El Laboratorio de Matemáticas, matemáticas experimentales y formación de docentes de matemáticas. (Presidente), XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM, Recife, Brasil.

Armella, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa. (1),* 123-136.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* Recuperado de http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971/6657.

Barreto, J. (2008). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números* [en línea]. (69), Recuperado el 20 de junio de 2014, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf.

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Careaga, I. & Bardavid, E. (1991). *Los materiales didácticos.* México: Trillas.

Castro, E., Flores, P. & Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficies de figuras planas. *SUMA, (26)*, 23-32.

Chamorro, M. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria. *UNO, (3)*, 31-53.

Codina, A. & Rivera, A. (2000). *Elementos para una reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, México.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis doctoral). Universitat de València, España.

D`Amore, B., Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y estudiantes. *Revista electrónica de Relime,* Núm. 1, Vol. 10, 39-68. Extraído el 19 de octubre de 2013 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33400103

Del Castillo, A. & Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 22, 456-467. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC Labor

Fandiño, M. (2012). Convicciones de los docentes sobre área y perímetro: una investigación. Recuperado el 19 de octubre de 2013 de http://www.dmunibo.it/rsddm/it/articoli/fandino/204%20Area%20y%20perimetro%20I%20SEM%20Corrientes.pdf.

Giménez, J. (2000). La importancia de lo tangible para el aula de matemáticas. *Números* [en línea]. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo08.pdf

Gómez, R. (2000). El problema isoperimétrico en la arquitectura, Literatura, Música…, en la naturaleza. *SUMA, (33)*, 103.106.

González, J. (s.f.). Los conceptos de magnitud, cantidad, medida y unidad de medida y su relación con el número. Recuperado el 9 de mayo de 2014 de http://www.gonzalezmari.es/magnitud_cantidad.pdf

González, M., Castro, E., Molina, J. & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*, *29*(1), 75-88.

León, O. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En Leonor Camargo. (Ed.), *investigaciones en educación geométrica* (pp. 105-123). Bogotá: UD.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas.* (pp. 4.29). Madrid: Pearson.

Martí, E. (2002). Comprensión matemática: forma y significado. En F. López. (Ed.), *La resolución de problemas en matemáticas* (pp. 13-26).

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, D.C.

MEN (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D.C.

MEN (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007.* Bogotá, D.C.

MEN (2013) Talleres para tutores. Programa Todos a Aprender. Bogotá, D.C.

Moreira, P. (1998). Une etude de Situations et Invariantes: Outil Pour L´Analyse de la Construction du Concept D´Aire au College. *PETIT X*, (49), 45-78.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *the international handbook of mathematics teacher education: Volume 2: Tools and Processes in Mathematics teacher Education* (pp. 157-181). West Lafayette: Sense Publishers.

Pérez, G. (1994). Investigación Cualitativa. Retos e interrogantes. Métodos: Madrid: Editorial La Muralla, S.A.

Ponce, C. (2009). Áreas de figuras planas. *Innovación y experiencias educativas, (*21), 1-10. Recuperado de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_21/CATALINA_PONCE_HUERTAS02.pdf

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: A. Colin.

Rodríguez, J., Caraballo, A., Cruz, T. & Hernández, O. (1997). *Razonamiento matemático: Fundamentos y aplicaciones* .México: Thomson.

Santos, M. & Moreno, L. (2013). Introducción a las perspectivas internacionales en la resolución de problemas de Investigación en Educación Matemática. *The Methematics Enthusiast. (10),* 3-8.

Santos, M. (2008). La resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en al Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Unirioja. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2748785

SEDUCA. (2006). *Módulo 3. Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas*. Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad. Primera edición. Medellín Colombia.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2001). *Perché gli student fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Trouche, L. (2002). Une aproche instrumentale de l´apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin y L. Trouche (Eds.). Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique (pp. 187-214). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Trouche, L. (2005). A instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.). The didactical Challenge of Symbolic Calculators, turning a computational device into a mathematical instrument (pp. 137-162). Springer Netherlands.

Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *UNO*, (10), p. 9.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. European Journal of Psychology of Education, 10 (1), 77-101.

Zapata, F. & Cano, N. (2008). La enseñanza de la magnitud área. Conferencia presentada en *9º Encuentro colombiano de Matemática Educativa* (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.

ANEXOS

Anexo 1

Procedimiento:

Parte A.

1. Primero recortamos la figura B en pedazos no tan pequeños, para ponerlo sobre la figura A, y determinar que espacios nos pueden fatar o si tienen igual tamaño.

Despues de acomodar los pedazos que recortamos determinamos que la figura A es más grande. que la figura B; por lo que gastara mayor cantidad de líquido en la figura A.

parte B,

4-5. lo que podemos deducir de los tamaños de las figuras A y B es que son iguales; porque al recortarlas y unirlas nos damos cuenta de su igualdad.

Respuesta 1 y 2

La figura A gastaria mas liquido ya que decidimos cortar la figura B en pedasos y ponerla ensima de la Figura A para darnos cuenta que si acomodamos la Figura B y quedan espacios en blanco es porque requiere de menos liquido para limpiar.

Punto 4

Podria decir que los tamaños de las figuras son iguales, solo que la figura B es la misma de la A solo que la B esta alrrevez

Respuesta 3

Uno de los procedimientos más sencillos es el que se muestra en el punto 1, otro procedimiento sria si calculamos el alto y ancho de la figura.
La figura más paqueña es la figura B

Punto 5

El procedimiento que utilizamos fue recortar la figura B y ponerla encima de la A para darnos cuenta que tienen la misma forma

Parte A

1. la mancha más grande es la A

2. la más grande es la A, porque colocamos la mancha B Sobre la A, y vimos que sobraban pedazos de la macha B, y los cortamos en la parte que está Vacía, y llegamos al punto que vimos que la mancha B le faltaban pedazos para rellenar y para que quedará más grande que la mancha A.

3. Midiendo lo centímetros de largo y de ancho.

Parte B.

4. Son de igual tamaño, y más grandes que las anteriores.

5. Comparamos sus tamaños, y vimos que son iguales.

Parte A

Recortamos la figura y las comparamos una sobre la otra y vamos a rellenar el espacio de la B y vamos a recortar la A y así podremos saber cual es la que gasta más liquido porque quedo faltando un pedazo de la figura A

Parte B

Aunque sean figuras irregulares dandole su derecho son la misma figura pero al reves son diferentes.

la recortamos y le cambios su forma y su derecho para poder unir las figuras

Anexo 2

2. En todas se utilizan 12 cuadritos pero estan distribuidos de formas diferentes

3. ~~B~~ P:

B: P: 40 A: 12 C÷ P: 28 A 12 D– P: 32 A: 12 e-P: 26 A: 12

el perimetro varia gracias a su pocicion pero el area seguira siendo la misma

4 Que en la figura A ocupa 12 cuadritos y la figura B ocupa 12 cuadritos

5 No ya que si cambiamos la forma en manera horizontal e vertical siempre ocupara 12 cuadritos en la superficie

6
Diferencia: Que estan acomodados de diferente forma
Relación: Que esta conformado por la misma cantidad de
Que esta conformado por la misma cantidad de cuadritos (12) osea que ocupan la misma espacio

1. ~~S~~Contando Cada figura y da 12 en todas las figuras.

2. las superficies tienen en Común que son 12 en Cada figura se diferencian en que no tienen la misma forma.

3.

A

El Area de la figura A12 y el perimetro es 13

B

El Area de la figura B12 y el perimetro es 20

C

El Area de la figura C 12 y perimetro 13

D

El Area de la figura D 12 y el perimetro 12

E

El Area de la figura E 12 y el perimetro 15

2 Parte B

3 la Cantidad de superficie es 12 en las dos figuras.

4 la cantidad de Superficie es doce pues no hay necesidad de agregar mas cuadrados.

5. la relación es que tienen la misma Cantidad de Superficie es la misma la diferencia es que Tienen diferente forma.

1)R/En la A. 12 Cuadros
2) R/En la B. 12 cuadros
3) R/En la C. 12 Cuadros
R/En la D. 12 cuadros
R/En la E. 12 cuadros

2)R/tienen en común que todas tienes la misma cantidad de cuadros y diferentes formas.

3)el área de todos es 12.

Perimetro:de la A es 14

De la B es 20

De la C es 18

De la d eS 20

De la E eS 16

4)R/que las figuras tienen la misma cantidad de cuadros, Pero es diferente en el perimetro
5)R/no le influye Porque queda con la misma cantidad de cuadros
6) La relación es que todas son figuran y la diferencias que tienen diferente tamaño o superficie.

Parte A

1. La figura A hay 12 en la figura b hay 12 en la figura c hay 12 en la figura d hay 12 y en la figura e hay 12, ella utilizo 12 cuadros en cada figura.

2. Tienen 12 cuadros cada figura, y la diferencia seria que tienen diferentes formas.

3. El perímetro de la figura A es de 14,
El de la figura B es de 20
el de la figura C es de 18
el de la figura d es de 20
el de la figura e es de 16

El aréa de todas la figuras es de 12

todas tienen la misma aréa, pero diferente perímetro.

Parte B

3 la cantidad de la superficie A y B es de 12.

4. No, porque la cantidad de la superficie sigue siendo la misma,

5. la superficie es igual pero el perímetro es diferente

Anexo 3

- Desarrollo:

1. Figura B: primero acomodamos los hexagonos que nos quepan en la figura S y rellenamos los espacios sobrantes dividiendo otros hexagonos.
   Para rellenar la figura S con hexagonos utilizamos 4 hexágonos y $\frac{5}{6}$.
   Figura A: utilizamos 29 triángulos.
   Figura C: utilizamos 14 y la mitad de un cuadrilatero.

2. La figura que más utilizamos fueron los triangulos (A), luego le siguieron los cuadriláteros (C) y los que menos utilizamos fueron los hexágonos (B)

3. Si utilizamos una figura de menor tamaño que la figura A para rellenar los espacios se van a requerir más figuras, y si utilizamos una figura más grande que la B utilizaríamos menos figuras.

1. B. hay 4 hexágonos y hay 5 triangulos restantes y solo faltaria uno para formar otró hexagono, peros 5 forman un pentagono.

A. caben 29 triangulos.

C. caben 14 y sobra la mitad de un paralelogramo

2. la figura mas pequeña ocupa menos espacio, lo que hace que quepan mas. pero en los hexágonos ocupan más espacio porque son más grandes.

3. si usamos la a, daria más resultado, y la c, menos

grupo 3

A 29.

B 4 y $\frac{5}{6}$

C 14 y $\frac{1}{2}$

3 Paso que como el triangulo es la figura mas pequeña el Resultado es mayor y cada vez que la figura es mas grande el Resultado va desminuyendo

2 el Resultado va cambiando cada vez como lo Hi so el la figura A nos dio 29 y en la B 4 y 5/6 y en la C 14 y 1/2

Parte 1.

1. Caben 29 sin dejar espacio

* Caben 4 hexagonos y $\frac{5}{6}$ de una hexagono, porque al colocar los triangulos en la figura B nos dio 6 triangulos sin dejar espacio, pero al colocarlos en la figura S nos quedo faltando 1, por eso que $\frac{5}{6}$.

* Caben 14 y ~~medio~~ $\frac{1}{2}$ de un cuadrilatero, porque al colocar los triangulos en la figura C nos dio 2 triangulos sin dejar espacio.

2. Utilizamos números fraccionarios para acabar de completar la figura.

3. En los triangulos si fuerán más pequeños sería mayor la cantidad en la figura S.
y si es más grande disminuye la cantidad, para rellenar la figura S.