LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO SEGÚN OMAR AL-KHAYYĀM. Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas.

MARIA CAMILA ESPINOSA CUARTAS
Código: 200935212

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, Septiembre de 2014

.

LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO SEGÚN OMAR AL-KHAYYĀM. Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas.

MARIA CAMILA ESPINOSA CUARTAS
Código: 200935212

Requisito parcial para optar el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Asesora:

Ligia Amparo Torres Rengifo
Profesora del Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, Septiembre de 2014

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primeramente a Dios por haberme permitido la vida y las condiciones para llevar a cabo tanto la carrera universitaria como la culminación de este trabajo de grado.

Especialmente, un enorme agradecimiento a la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo por su comprensión, su completa dedicación, entrega, profesionalismo y por haberme aportado su conocimiento para la exitosa ejecución de este trabajo de grado.

Me embarga un enorme sentimiento de gratitud hacia la Universidad del Valle y hacia mis profesores, pues me brindaron durante cinco años una fuente inagotable de conocimiento, de formación profesional, de crecimiento como persona y de oportunidades de progreso. Especialmente, un agradecimiento a mis evaluadoras Myriam Vega y Mónica Aponte, y a la profesora Maribel Anacona por sus comentarios, correcciones y sugerencias para la elaboración y posterior culminación de este trabajo.

Finalmente, a mi familia y mi esposo por su gran apoyo, comprensión y por haber sido una gran motivación para la culminación de ésta que es una etapa más de mi vida.

M. Camila Espinosa Cuartas.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo de grado se inscribe en las líneas de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. En este trabajo, se presenta un estudio histórico-epistemológico de la solución de las ecuaciones cúbicas según al-Khayyām, en virtud de identificar las potencialidades que tiene este estudio en la formación profesional del profesor de matemáticas.

Para ello, se consideran algunos criterios de análisis tales como: el tratamiento geométrico y algebraico de las proporciones, el tipo de proporciones que utiliza al-Khayyām, el papel que juegan las gráficas en sus demostraciones, el espacio dimensional de los objetos matemáticos, la homogeneidad de los términos con los que opera, entre otros aspectos. Posteriormente se identifican las potencialidades de su estudio en la formación profesional del profesor de matemáticas desde la perspectiva de Shulman (1987), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) -citados por Godino (2009)- en cuanto a las categorías que constituyen dicho conocimiento profesional.

Palabras claves: ecuaciones cúbicas, Omar al-Khayyām, formación profesional del profesor de matemáticas, Historia de las Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en matemáticas está ubicado en las líneas de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y tiene como propósito determinar algunos aportes y potencialidades del estudio de la solución de las ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām en la formación profesional de profesores de matemáticas. Para lograr este propósito, se realiza un estudio de la solución geométrica que Omar al-Khayyām hace para catorce casos de ecuaciones que según él pueden ser resueltas geométricamente por la intersección de cónicas. Cabe resaltar que al-Khayyām fue el primero en proponer esta teoría geométrica para este tipo de ecuaciones y aunque ya había sido intentado por otros, él es quien aporta en gran manera la generalización para todos los casos de ecuaciones cúbicas.

Este trabajo se desarrolla en cuatro capítulos los cuales se describen brevemente a continuación:

En el *primer capítulo* se exponen los aspectos fundamentales que enmarcan el desarrollo de este trabajo; se presenta el planteamiento del problema en donde es de interés estudiar la manera en que el estudio de la solución de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām potencia la formación profesional de un profesor de matemáticas, también se expone la relevancia de la Historia de las Matemáticas en la formación de los profesores de esta disciplina, y la manera en que dicha historia podría contribuir al desarrollo de las competencias profesionales de su formación; a su vez se presentan objetivos generales y específicos que guían el desarrollo de este trabajo de grado; la justificación de la importancia de este estudio histórico, algunos antecedentes que constituyen un gran aporte teórico como base de este trabajo y por último se presentan los aspectos metodológicos.

En el *segundo capítulo*, se presenta un marco teórico de referencia que se compone de tres perspectivas: histórico – epistemológica, curricular y didáctica. En la perspectiva histórico – epistemológica se presentan algunos elementos teóricos relacionados con los estudios históricos los cuales se pueden abordar desde diferentes enfoques. A su vez, se presenta el texto *Al-Khayyām Mathématicien* como base para la realización de este trabajo y una breve presentación del trabajo algebraico de Omar al-Khayyām.

En la perspectiva curricular se toman como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) que son los documentos oficiales del MEN para direccionar el currículo de las Instituciones Educativas en Colombia. Se evidencia que en los estándares básicos en matemáticas que abordan el estudio de las ecuaciones polinómicas hay un vacío en cuanto a estándares específicos que hagan alusión al estudio de las ecuaciones cúbicas. Por último es importante mencionar que en Colombia los docentes no incorporan el concepto de ecuación cúbica en el estudio de las ecuaciones y esto puede reconocerse en el ámbito educativo con los textos escolares que son usados en la actividad de aula.

Por último, en la perspectiva didáctica se ponen de manifiesto dos investigaciones sobre el concepto de ecuación cúbica en el marco de la resolución de problemas. Cabe mencionar que son escasas las investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de este tipo de ecuaciones.

En el *tercer capítulo*, en primer lugar se exponen algunas consideraciones preliminares importantes con relación a la obra de Omar al-Khayyām y al momento histórico en el que se desarrolla. Dichas consideraciones están relacionadas con el lenguaje retórico en la época árabe medieval, el lenguaje retórico en las demostraciones de al-Khayyām, los antecesores de al-Khayyām en cuanto al uso de secciones cónicas, el uso implícito de referentes cartesianos en las demostraciones de al-Khayyām, su método, y algunos conceptos primordiales para comprender el estudio de las soluciones a los catorce casos de ecuaciones. En segundo lugar, se presentan las tres ecuaciones cúbicas que pueden reducirse a grados inferiores y la manera en que al-Khayyām las reduce. En tercer lugar se presenta la solución de las catorce ecuaciones cúbicas, en el que se incluyen comentarios propios en cuanto al tratamiento geométrico y algebraico de las proporciones y la elección de las curvas cónicas para la solución de cada ecuación. Finalmente, se exponen algunas consideraciones finales en términos generales del estudio de los catorce casos de ecuaciones. Estas consideraciones están relacionadas con el tipo de proporciones que utiliza al-Khayyām, las magnitudes con las que opera, el papel de la gráfica en cada solución, el espacio dimensional de los objetos matemáticos, la similitud de su trabajo con su antecesor al-Kwarizmi y con los trabajos de Descartes seis siglos después, entre otros aspectos.

En el *cuarto capítulo* se exponen algunas reflexiones didácticas y conclusiones con relación al estudio de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y las dimensiones que constituyen el conocimiento profesional del profesor de matemáticas citadas por Shulman (1987), Schoenfeld y Kilpatrick (2008). En primer lugar, se expone un esquema que muestra la articulación de las dimensiones señaladas por estos autores, y las investigaciones relacionadas con la Historia de las Matemáticas y la formación profesional del profesor de matemáticas. En segundo lugar, se presentan algunas reflexiones didácticas que el estudio realizado aporta a las dimensiones que constituyen el conocimiento profesional según los autores señalados, las cuales son: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular del contenido por parte del profesor de matemáticas. Finalmente, se presentan algunas conclusiones generales con relación a los objetivos específicos que guiaron la propuesta de este trabajo.

A partir de este estudio, se espera contribuir con una reflexión en cuanto a los aportes que la historia puede hacer en la formación del profesor de matemáticas y en las competencias profesionales que debe desarrollar. Particularmente, se espera limitar esta reflexión al aporte que hace esta manera de solucionar ecuaciones de tercer grado para el conocimiento propio del profesor de matemáticas.

CAPÍTULO I:

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos generales que enmarcan el trabajo que aquí se expone. Se presenta el planteamiento del problema el cual aborda la problemática que hay en cuanto a la integración de la Historia de las Matemáticas en la formación del profesor de esta disciplina, la justificación sobre la pertinencia de este estudio histórico, algunos antecedentes donde se citan trabajos que han resaltado el papel de la historia en la formación de un profesor de matemáticas, objetivos generales y específicos y por último los aspectos metodológicos que guían el desarrollo de este trabajo.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el marco de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se propone hacer una reflexión por parte del educador matemático acerca del saber escolar que se ha de enseñar. En este sentido, el profesor de matemáticas debería aceptar que el saber matemático es resultado de una evolución histórica, una ciencia humana que no está acabada, y que en dicho reconocimiento, podrían considerarse actividades en el aula donde se involucren momentos culminantes de un concepto en su evolución histórica, contribuyendo así a la enseñanza y aprendizaje de los conocimientos matemáticos. En esta misma línea, debe reconocerse que los Lineamientos Curriculares se presentan como puntos de apoyo para que los docentes puedan desarrollar y orientar sus clases, en este caso en el área de matemáticas.

Sin embargo, puede decirse que en Colombia aún sigue predominando una reflexión elemental y primaria acerca de los aportes del conocimiento histórico en la enseñanza de las matemáticas. Este hecho se relaciona directamente con la formación profesional en HM[1] del profesor de esta disciplina.

En esta dirección, con el fin de identificar estrategias curriculares formativas en el campo de la HM en programas de formación inicial de profesores de matemáticas en Colombia, Torres & Guacaneme (2010) realizan una investigación -próxima a publicarse-, que refleja que aunque existe el componente histórico en el currículo de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de las universidades participantes[2], la historia a la que se alude es una historia general

[1] La Abreviación HM representa la Historia de las Matemáticas.

[2] Universidad de Nariño, Universidad del Cauca, Universidad del Valle, Universidad de Antioquia, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Universidad Pedagógica Nacional y Universidad Gran Colombia.

de las matemáticas y sigue siendo escasa y exigua la apropiación en cuanto a las contribuciones de ésta al conocimiento del profesor y las implicaciones de su inclusión en el aula. A su vez, además de reconocer los propósitos de su inclusión y la necesidad de dicha historia en su formación como profesores, es evidente la inexistencia de profesores que puedan dictar estos cursos en algunos programas de formación profesional para la enseñanza de las matemáticas.

En la misma línea, Vasco (2002) señala siete tensiones que subyacen de la articulación de la historia con la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, se considera importante hacer mención a algunas de ellas: una primera tensión que se relaciona con el problema en cuestión tiene que ver con la tensión profesoral, en donde manifiesta que hay muy pocos profesores preparados profesionalmente para dar cursos sobre HM a los futuros educadores de esta disciplina. Otra tensión hace referencia a que hay muchos profesores que quisieran incluir episodios históricos[3] en sus clases pero debido a su poca preparación y como consecuencia de la primera tensión, no saben cómo introducir estos episodios. Otra tensión no menos importante que las anteriores es el poco tiempo que las instituciones tienen para enseñar matemáticas, por ende, mucho menos tiempo hay para enseñar HM.

Es así como puede decirse que a pesar de que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace referencia al papel que juega la historia en la enseñanza y aunque aparentemente hay un consenso entre los profesores que reconocen los aportes significativos de la historia en su ejercicio docente, no hay una relación muy clara en cuanto al papel que juega dicha historia en las actividades de aula y en el desarrollo profesional de los profesores.

---

[3] Cabe resaltar que la introducción de episodios históricos como una de las tensiones señaladas por Vasco (2002), no es exactamente hacer Historia de las Matemáticas, aunque guarda relación con la intención de introducir la Historia de las Matemáticas en la enseñanza misma de las matemáticas.

Un aspecto importante que debe considerarse cuando se refiere a la formación profesional de los profesores, es lo que tiene que ver con las competencias profesionales[4].Cabe resaltar que la formación profesional del profesor de matemáticas está permeada por las competencias que se desarrollan en su proceso las cuales tendrán sus frutos en el ejercicio docente. En otras palabras, la formación profesional está directamente asociada con las competencias que determina esa formación.

Es así como puede identificarse una problemática más que consiste en que no es totalmente claro para los docentes el papel que juega la historia en su formación profesional, y la manera en que dicha historia podría contribuir al desarrollo de las competencias profesionales en su formación.

En cuanto a las competencias profesionales, investigaciones como la de Poblete & Díaz (2003) y Jankvist & Hoff (2010), ofrecen una clasificación que incluye competencias generales y competencias especializadas del profesor de matemáticas. Al respecto, Poblete & Díaz (2003) resaltan contextos de competencias tales como saber, saber-hacer, ser y saber-ser. A su vez, se pueden caracterizar competencias como saber la disciplina, los conceptos y lenguajes de las matemáticas para poder interpretar y modelizar; seleccionar y diseñar actividades novedosas y pertinentes para la enseñanza, materiales didácticos y recursos; saber evaluar e integrar dicha evaluación como parte esencial del proceso de los estudiantes; construir ambientes de aprendizaje, etc.

Por su parte, Arcavi (2007) expone la habilidad de escuchar como una competencia profesional. Al respecto menciona que:

---

[4] Una primera aproximación al significado de *competencias profesionales* tiene que ver con un cúmulo de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para ejercer una profesión de una forma autónoma y con calidad.

> “La habilidad de escuchar es una competencia con la cual se puede servir un número de propósitos en el desarrollo profesional, escuchar puede volverse una capacidad central de la enseñanza que necesita ser aprendida, desarrollada y continuamente nutrida, sin embargo escuchar no es una tarea fácil” .Arcavi (2007, pág.113)

Para desarrollar esta capacidad, se puede hacer uso de la HM en el sentido que para comprender las ideas detrás de una fuente histórica, se requiere adoptar una especie de descentración similar a la que se exige para escuchar las ideas de los estudiantes. En este sentido, la descentración implica adoptar la *perspectiva del otro* para lograr una comprensión de lo que dice y hace. Esto, según Arcavi (2007), también tiene que ver con cualificar la sensibilidad del docente para entender las dificultades en la comprensión de los estudiantes y poder escuchar sus argumentos. Como lo menciona Guacaneme (2011, pág. 6), “Arcavi sustenta la idea de que cuando se trabaja con la historia pueden desarrollarse actitudes y aptitudes para la docencia”.

En este trabajo se pretende que el profesor de matemáticas pueda hacer una reflexión en cuanto a su formación profesional y los aportes que la HM puede hacer al respecto. En particular se aborda desde un objeto matemático particular como son las ecuaciones de tercer grado.

En Colombia, es usual que los docentes no incorporen el concepto de ecuación cúbica y esto se reconoce en el ámbito educativo con los textos escolares. Precisamente, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se habla de familia de ecuaciones polinómicas en cuanto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Además, se muestra un gran interés por el estudio de las ecuaciones en general, considerando que entre la familia de ecuaciones polinómicas se encuentra la ecuación de tercer grado; sin embargo no se hace énfasis específico en este tipo de ecuaciones. Es decir, desde el conocimiento propio de nuestro objeto de estudio, en la educación básica actual hay un vacío, ya que se estudian las ecuaciones lineales y cuadráticas y no se incluyen las ecuaciones cúbicas para comprender dicha familia de ecuaciones.

En este sentido, se considera importante hacer un análisis histórico y estudiar la solución de las ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām debido a que puede ser un escenario que brinde elementos significativos[5] a la formación profesional del profesor de matemáticas.

A partir de lo anterior, en este trabajo se pretende hacer una aproximación histórica, epistemológica y didáctica, para lo cual es de interés responder la siguiente pregunta:

¿Cómo una aproximación histórico-epistemológica del estudio de la solución de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām puede potenciar y enriquecer el conocimiento profesional del profesor de matemáticas?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar cómo una aproximación histórico-epistemológica de la solución de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām puede potenciar y enriquecer el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Documentar la solución de las ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām a partir del papel que juega la teoría geométrica en dichas soluciones.

[5] Elementos significativos de tipo histórico, epistemológico y didáctico que le permiten al profesor ampliar el campo semántico que se tiene de dicho objeto matemático. Entre otros aspectos, se espera que a través del estudio histórico, puedan repensarse algunas actividades de aula y la manera en que se enseñan algunos conceptos que integran el currículo de matemáticas.

- Reconocer e identificar elementos de tipo histórico, epistemológico y didáctico que este estudio aporta a la formación profesional de profesores de matemáticas con relación a sus competencias profesionales.

1.3 JUSTIFICACIÓN.

Este trabajo de grado está ubicado en las líneas de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. En esta dirección, se realiza un estudio histórico-epistemológico del tratamiento de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām, examinando el momento histórico en el que se presentan, el tratamiento geométrico y algebraico en sus soluciones, el papel de las proporciones, el tipo de magnitudes con las que opera, entre otros aspectos.

Además, en este trabajo se reconoce el papel de la Historia como una herramienta pedagógica en la educación, un componente en los currículos de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas, una iniciativa en el quehacer docente donde los profesores son conscientes de los aportes del conocimiento histórico en la enseñanza de las matemáticas y en el aprendizaje de sus estudiantes, a partir de la importancia que tiene la historia en su formación profesional.

A su vez, se considera importante observar la relación que existe entre la HM y las competencias profesionales del profesor de matemáticas; la manera en que el conocimiento de dicha historia incide en el desarrollo de estas competencias en la formación profesional y que más adelante se podrán evidenciar en las prácticas de aula.

Con referencia a la relación de la HM y la formación de profesores, Sierra (1997) citado por Vidal & Quintanilla (s.f, pág. 6), comentan:

> “La exploración de la historia por parte del profesor, le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática, como actividad humana con sus glorias y sus miserias”.

Ahora bien, Heiede (1992; 1996), citado por Guacaneme (2011, pág. 2) expresa que “la HM es parte sustancial de las matemáticas y por tanto, no puede haber autentica enseñanza de las matemáticas sin incluir en ésta su historia”.

Al respecto, Anacona (2003, pág.7) menciona:

> “A partir de una concepción de las matemáticas como constructo social, se propende por una enseñanza dinámica en la que se replantean constantemente tanto los contenidos como las maneras de comunicarlos. Estudiantes y profesores podrán ver las matemáticas como una actividad del hombre, con vínculos con el arte, la historia, la filosofía y otros campos del conocimiento. Una disciplina en la que también tienen lugar el error, el fracaso y, por supuesto, la creatividad”.

Es así como por medio de la introducción de la historia en la enseñanza y el aprendizaje, las matemáticas pueden verse como un medio y un proceso que tiene lugar a la creatividad y a potenciar un pensamiento intelectual y no como técnicas que se deben seguir al pie de la letra o replica de lo que otros ya han hecho.

Grugnetti (2000) también plantea que un análisis histórico y epistemológico permite a los profesores comprender por qué un cierto concepto es difícil para los estudiantes, en tanto que para Fauvel y Van Maanen (1997) consideran que dicho análisis puede permitir a los profesores ver a los alumnos de manera diferente.

La historia podría ayudar a los profesores a comprender mejor los contenidos curriculares que se deben enseñar en el área de matemáticas. Además, porque la historia no solo cambiaría la manera de concebir las matemáticas por parte del profesor, sino que proporciona un cambio de visión de las mismas por parte de los estudiantes. Esto es, como lo menciona Rico (1997), la historia como un organizador del currículo de las matemáticas despierta el interés y la motivación de los estudiantes hacia éstas, además se puede hacer uso de varios conceptos que en la actualidad generan dificultades en su aprendizaje y que por medio de ilustraciones a lo largo de la historia, pueden comprenderse de una mejor manera.

Entre los numerosos aportes de incluir la historia en la Educación Matemática se encuentra que los estudiantes en su aprendizaje se enfrentan a distintos escenarios en donde por ejemplo, como lo menciona Morley (1982), resolver problemas no es una tarea sencilla y quien se enfrenta a ellos puede llegar a tal punto de encontrase en un callejón sin salida, además muchos aún piensan que los matemáticos que dieron surgimiento a las matemáticas que aparecen en los libros no pasaron por situaciones similares, por lo que cuando se incluye la historia los estudiantes podrán comprender que las matemáticas son una actividad humana, que en su proceso puede tener lugar el error, pero también las satisfacciones. Al respecto, Tymoczko (1994) citado por Furenghetti (2007) menciona que al introducir a los estudiantes a las matemáticas humanísticas, se les estará mostrando que dichas matemáticas hacen parte de una aventura humana en la que los seres humanos participaron de su propia historia.

Por consiguiente, por muchos argumentos podemos afirmar que el uso de la historia no solo es enriquecedor para los estudiantes sino que tiene un papel importante en la construcción y comprensión del conocimiento por parte del profesor de matemáticas.

De otra parte, se considera importante observar la relación que existe entre la HM y las competencias profesionales del profesor de matemáticas. Es de anotarse que dichas competencias emergen en su formación profesional y se desarrollan en las prácticas de aula. Es aquí donde la historia toma un papel importante para nutrir dichas competencias.

Al respecto, Guacaneme (2011) a partir de un espectro documental que realiza sobre la relación entre HM - Educación Matemática, presenta una serie de argumentos para considerar la HM como “fuente de artefactos”[6]. Entre dichos artefactos, menciona que:

> “El estudio de la HM exige y promueve el desarrollo de competencias personales y profesionales que van más allá del conocimiento matemático (v.g., leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las matemáticas; sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas; valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad)”. (Guacaneme, 2011, pág. 4)

Arcavi (2007) hace mención al acto de escuchar a los estudiantes como una competencia profesional del profesor, que se puede lograr a través de la descentración que se requiere para analizar fuentes históricas. Es así como la lectura y el entendimiento de las fuentes históricas es una manera de ejercitar la adopción de la *perspectiva del otro,* y así se puede aprender a valorar las opiniones y apreciaciones de los estudiantes.

Sin embargo, lo interesante es observar que en Colombia es usual incluir en la enseñanza de las ecuaciones, aquellas que son lineales y cuadráticas, soslayando o eludiendo el estudio de las ecuaciones cúbicas. Esto puede corroborarse con los textos escolares para los grados 8° y 9° de la educación básica. A su vez, se considera importante la obra de al-Khayyām porque no es común ver que un profesor en ejercicio conozca otros tipos de solución asociados a teorías geométricas de ecuaciones algebraicas de tercer grado.

Este trabajo se desarrolla con el fin de aportar directamente a la formación profesional de un profesor de matemáticas, y que se puedan tomar algunos elementos que se exponen para mejorar determinados procesos de enseñanza y aprendizaje de algunos objetos matemáticos como es el caso de las ecuaciones cúbicas. Además, se propone con el fin de que los futuros profesores o profesores en ejercicio conozcan otra manera de resolver ecuaciones de tercer grado con el

[6] Verillon & Rabardel (1995) citados por Guacaneme (2011), expresan que un artefacto llega a ser una herramienta cuando los usuarios son capaces de emplearlo para sus propios propósitos.

ánimo de mejorar su comprensión de este objeto matemático en relación con el desarrollo histórico y tomando como marco de referencia la obra de Omar al-Khayyām.

A partir de estas consideraciones surge el propósito de este trabajo, ya que tomando como foco de indagación el trabajo de al-Khayyām, estudiar la solución de ecuaciones de tercer grado puede ser un escenario que brinde elementos significativos a la formación del profesor de matemáticas.

Además, es preciso mencionar que este trabajo se considera valioso ya que no hay muchos referentes teóricos con propuestas como ésta en donde se aborda el estudio de las ecuaciones de tercer grado como componente en la formación profesional del profesor de matemáticas y como una forma de enseñar este tipo de ecuaciones involucrando la historia. Además, se tiene la certeza de que podrá ser de interés para docentes en ejercicio o en formación, y que tendrá buenos frutos para quienes deseen tomar elementos de aquí para desarrollar nuevas actividades en el aula.

1.4 ANTECEDENTES

En este trabajo se toman como antecedentes las investigaciones de Torres & Guacaneme (2011), las tesis de pregrado de Escobar (2012) y Murcia (2009) -de la Universidad del Valle-, entre otras. Estas investigaciones resaltan la importancia del papel que juega la HM en la Educación Matemática.

Tal como se mencionó, Torres & Guacaneme (2011) en su documento próximo a publicarse, realizan una investigación que tiene como propósito caracterizar las estrategias curriculares de participación de la HM en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas con el fin de dar cuenta sobre cómo se está gestionando tal apropiación en estos programas. En el panel participaron nueve licenciaturas de siete universidades de Colombia en torno a cuatro preguntas descriptivas de las estrategias curriculares (por qué, para qué, qué y cómo se lleva a cabo el estudio de la HM en las licenciaturas). Entre varios impactos que generó el desarrollo de esta investigación, se tiene que logró articular acciones y perspectivas de varios grupos de investigación; logró la masiva participación de docentes, estudiantes, investigadores y directivos; además, la investigación permitió conocer algunos resultados en cuanto a la caracterización de la HM en los currículos de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de las universidades participantes.

Escobar (2012) en su trabajo de grado realiza una propuesta de inclusión de la Historia para la enseñanza de la función logarítmica, donde se les propone bibliografía a los docentes de matemáticas con el fin de incentivar la consulta en HM en relación con el objeto de estudio. Como metodología se adopta el modelo de una encuesta que sería aplicado a docentes de algunos grados de escolaridad de cierta institución, la cual se seleccionó bajo algunos criterios y parámetros definidos al inicio del proyecto. Uno de los objetivos principales del proyecto, fue analizar la manera en que los educadores conciben la HM y después guiar este análisis hacia su objeto matemático de estudio. Además, la investigación resalta la importancia de la HM por parte del profesor para la comprensión de los objetos matemáticos en su enseñanza.

En esta misma dirección, Murcia (2009) resalta el papel de la HM donde aborda la problemática de la transición del álgebra clásica al álgebra moderna a través de un estudio histórico - epistemológico de la noción de estructura algebraica. Esta transición se muestra en tres momentos fundamentales del desarrollo del álgebra enmarcados en la teoría de ecuaciones. Para abordar dicha propuesta, el autor enfatiza en el papel de la HM como paso fundamental para comprender la problemática que se presenta en estos momentos históricos.

En cuanto a nuestro objeto matemático de estudio, es decir, las ecuaciones de tercer grado, se encuentran algunos trabajos en los que se aborda la obra de

Omar al-Khayyām y los cuales se consideran pertinentes y necesarios para la realización de este trabajo de grado.

Entre dichos antecedentes se encuentra el trabajo que presenta Moreno (2002) sobre la obra de Omar al-Khayyām. Este investigador presenta la vida y leyenda del poeta al-Khayyām, sus fuentes griegas y su trabajo algebraico en donde, particularmente, muestra los aportes algebraicos de este árabe con relación a la resolución sistemática de las ecuaciones cúbicas a través de la intersección de cónicas. Es decir, se muestra las soluciones para los catorce casos de ecuaciones que según Omar al-Khayyām pueden ser resueltos a través de la intersección de hipérbolas, parábolas y semi-círculos.

En la misma línea, otro trabajo que se considera como antecedente es el realizado por Luque, Mora, & Torres (2009), quienes muestran el álgebra de las civilizaciones antiguas y las diversas formas de solucionar ecuaciones algebraicas y entre éstas presentan parcialmente la obra de Omar al-Khayyām para solucionar ecuaciones de tercer grado.

Por otra parte, Población (2012) menciona en su artículo el trabajo de Omar al-Khayyām para hallar las posibles raíces reales de las cúbicas mediante la intersección de diferentes secciones cónicas. Esto se presenta en el marco de una investigación que tiene como objetivo estudiar algunos de los medios con los cuales los profesores de secundaria disponen con el fin de describir su currículo y generar la motivación por parte de sus estudiantes. Es así como se presenta una actividad que tiene que ver con el desarrollo histórico de la resolución de las ecuaciones de segundo y tercer grado y las estrategias motivadoras utilizadas por los profesores para captar la atención de los estudiantes y mostrar a su vez que lo que hoy se conoce y se estudia no ha nacido milagrosamente sino que ha hecho parte de la evolución del pensamiento.

Lo anterior se muestra como base fundamental para la realización de este trabajo de grado, ya que consideran aspectos de gran valor que componen un aporte teórico para este documento. Unas de las investigaciones reflejan la perspectiva histórica y el papel que juega la HM en la Educación Matemática y otras apuntan directamente al objeto matemático de base en este trabajo, es decir, la solución de ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām**.**

1.5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

La metodología se planteó desde una perspectiva descriptiva con relación a los estudios histórico–epistemológicos los cuales se presentan en el siguiente capítulo. Además, se considera de carácter exploratorio en el sentido de identificar las potencialidades de este estudio en la formación profesional del profesor de matemáticas y el papel que juega este objeto de estudio en su propio conocimiento.

Para efectos de lograr los objetivos propuestos e intentar responder la cuestión de interés, se consideraron cuatro fases que guiaron el desarrollo de este trabajo.

Fase I: Documentar la problemática del papel de la HM en la formación profesional del profesor de matemática, documentar los estudios histórico-epistemológicos que se presentan como métodos de investigación educativa; indagar en los Lineamientos Curriculares y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas el interés por el estudio de las ecuaciones polinómicas en la escuela y desde una perspectiva didáctica observar la manera en que se han realizado algunos estudios de la ecuación cúbica en el marco de la resolución de problemas.

Fase II: Se realiza el estudio histórico -epistemológico de la teoría geométrica que Omar al-Khayyām propone para las ecuaciones algebraicas de grado tres. Para este estudio se tomaron en cuenta algunas variables como : el tratamiento geométrico y algebraico de las proporciones en al-Khayyām, el tipo de proporciones que utiliza, el papel que juegan las gráficas en sus demostraciones, el espacio dimensional de los objetos matemáticos, entre otros.

Fase III: Identificación de los posibles usos de la teoría geométrica para solucionar ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām en la formación de un profesor de matemáticas, en el marco de la propuesta realizada por Shulman (1987), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), en cuanto a las dimensiones que constituyen dicho conocimiento profesional.

Fase IV: Escritura de las conclusiones y reflexiones didácticas.

CAPÍTULO II:

MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan elementos teóricos que sustentan esta propuesta de trabajo. En el marco teórico de referencia se presentan tres perspectivas: histórico –epistemológica, curricular y didáctica. En la perspectiva histórico– epistemológica se abordan algunos elementos teóricos relacionados con los estudios históricos. En la perspectiva curricular se toman como referencia los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) que son los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional (MEN) para direccionar el currículo de las Instituciones Educativas en Colombia, con el fin de identificar la existencia o inexistencia de estándares específicos para el estudio de las ecuaciones cúbicas, y el interés por estudiar las ecuaciones polinómicas en general. Por último, en la perspectiva didáctica se ponen de manifiesto dos investigaciones sobre el concepto de ecuación cúbica en el marco de la resolución de problemas.

2. MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este apartado se presentan algunos referentes teóricos que sustentan el desarrollo de este de trabajo de grado. Estos referentes se presentan en tres perspectivas: Histórico – Epistemológica, Curricular y didáctica.

2.1 Perspectiva Histórico - Epistemológica

En esta perspectiva se presentan algunos elementos sobre los estudios Histórico – Epistemológicos como métodos de investigación educativa. De otra parte, se presenta una caracterización del texto *Al-Khayyām Mathématicien* como base para la realización de este trabajo; se hace una presentación del árabe *Omar al-Khayyām* y una breve descripción de su trabajo algebraico bajo la teoría geométrica que él propone.

2.1.1 *Algunos elementos sobre los estudios Histórico – Epistemológicos.*

Los estudios e investigaciones histórico-epistemológicos se constituyen como métodos de Investigación Educativa los cuales se abordan desde diferentes enfoques o perspectivas. Por ejemplo, Sánchez (2001) expone la clasificación de la historia de la ciencia, es decir, la tradicional y la moderna, analizando los factores que potenciaron dicho cambio. En estos cambios está la transición de la corriente internalista a la externalista impulsada por Thomas S. Kuhn. Es así como la historia de las ciencias abandona el enfoque internalista y empieza a considerarse otros enfoques más complejos, pero es Lakatos quien sigue la línea de investigación de la historia interna/externa. Estas corrientes internalista y externalista se presentan como propuestas de estudio y clasificación en algunos trabajos de corte histórico.

En esta dirección, Anacona (2003) hace una presentación de lo que constituyen estas dos posturas. En cuanto a la corriente internalista, expresa que el objeto de la historia de las ciencias es la ciencia misma, esto es, realizar una historia de los conceptos tomando en cuenta su estructura lógica de producción y asumiendo que el desarrollo científico es independiente del contexto sociocultural y más específicamente en el caso de las matemáticas, que desde esta postura es una disciplina no contaminada por el medio. Desde la corriente externalista, las explicaciones que surgen de acontecimientos científicos pueden emerger del ámbito social y pueden verse permeadas de las condiciones políticas, religiosas y económicas en las que emergen los conceptos. Todos estos factores pueden incidir en el estudio histórico que se realice de los conceptos.

Sin embargo, Anacona (2003) expresa que abordar un estudio histórico mediante cada una de estas corrientes de manera independiente no brinda elementos suficientes para obtener una historia íntegra y completa sobre la evolución de los conceptos científicos, por lo que plantea que existe un tercer camino que intenta hacer converger estas dos posturas filosóficas y metodológicas, en donde se tengan en cuenta la evolución, construcción propia y consolidación de los conceptos teniendo en cuenta que estos se desarrollan en contextos socio-culturales. En este sentido, se consideran las matemáticas como una actividad humana, una construcción social que ha tardado varios siglos en gestarse por lo que inevitablemente estas matemáticas están ligadas a su historia.

Por su parte, Anacona (2003) menciona que los estudios desde una perspectiva cultural, exigen que se tenga en cuenta nuevas y ricas variables al analizar los procesos de construcción teórica. Al respecto menciona que:

> En los estudios *histórico-epistemológicos* juega un papel esencial, el análisis del proceso de construcción teórica de un concepto. Sin embargo, éste se realiza teniendo siempre en cuenta el contexto particular de producción teórica. Aunque los estudios se realizan fundamentalmente al interior de la teoría, ellos se elaboran bajo la consideración de que el discurso matemático es una actividad de razonamiento que se desarrolla en un medio sociocultural específico. (Anacona. 2003, pág.32-33).

En esta misma línea, la construcción de una teoría a través de un estudio *histórico-epistemológico*, permiten observar la complejidad que los rodea y todos los aspectos que surgieron en su construcción teórica hasta constituirse en un conocimiento formal y elaborado. A su vez aportan significativamente a la Educación Matemática porque permite formarse una idea completa y enriquecida de un objeto matemático, y en su estudio, pueden evidenciarse aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir directa o indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De otra parte, Cohen (1989) define la investigación histórica como un acto de reconstrucción diseñado para conseguir una representación fiel de una época anterior. Hill y Kerber (1967) citados por Cohen (1989), clasifican por categorías los valores de la investigación histórica. Entre ellos, se encuentra que la investigación histórica facilita soluciones a problemas contemporáneos buscados en el pasado. La investigación histórica también capacita a los profesores para emplear prácticas anteriores o si bien, evaluar las que se emplean actualmente en la enseñanza.

A su vez, Filloy (1999) expresa que la investigación histórica ayuda a cambiar y transformar las condiciones en las que se está dando la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

En este trabajo se aborda una postura que articula lo didáctico y lo histórico en el sentido que se parte de un problema de tipo didáctico y la historia brinda herramientas significativas contribuyendo a la solución de este tipo de problemas. Además, se tiene en cuenta la manera en como un profesor de matemáticas puede apropiarse de cuestiones de tipo histórico para su formación profesional y como aporte para sus competencias profesionales. A su vez, se pretende abordar la perspectiva histórico-epistemológica en donde la base fundamental para el estudio es la obra de Omar al-Khayyām donde soluciona geométricamente a partir de la intersección de las cónicas catorce tipos de ecuaciones que, según el árabe, no pueden ser resueltas geométricamente con la sola ayuda de los *Elementos* de Euclides.

2.1.2 Sobre el autor *Omar al-Khayyām*.

Omar al-Khayyām, poeta persa, matemático, filósofo y astrónomo. Nació a mediados del siglo *XI* en Nishapur que es la capital de la provincia persa de Corasan. Fue famoso durante su vida como un matemático, conocido por estudiar el método para resolver ecuaciones cúbicas por la intersección de cónicas.

Aunque su enfoque ya había sido intentado por Menecmo y otros, al-Khayyām proporciona una generalización extendiéndolo a todos los casos de las ecuaciones cúbicas.

Omar al-Khayyām fue una de las figuras espléndidas de la cultura medieval. La más importante aportación algebraica que hizo es la resolución sistemática de las ecuaciones cúbicas cortando cónicas.

2.1.3 Sobre el libro *Al-Khayyām Mathématicien*

Para la realización del estudio histórico-epistemológico, se toma como fuente principal la obra de al-Khayyām presentada en el texto *Al-Khayyām Mathématicien* (1999) por Rashed. R y Vahabzadeh. B. Estos historiadores consideran la obra de Omar al-Khayyām de gran importancia ya que marcó la historia de la disciplina porque fue la primera formulación de una teoría geométrica de ecuaciones. Este texto está compuesto por dos partes: la primera se refiere a la *Teoría Geométrica de Ecuaciones Algebraicas*, y la segunda se refiere a *Teoría de las Paralelas y Teoría de las Proporciones*. Para lo cual es de interés centrar la atención en la primera parte.

En la primera parte que contiene la *Teoría Geométrica de Ecuaciones Algebraicas* se presenta el *Tratado del álgebra de* $al - muq\bar{a}bala$ que contiene la solución de las ecuaciones de tercer grado y también se presenta el tratado sobre la división de un cuarto de círculo. En cuanto al *Tratado del álgebra de* $al - muq\bar{a}bala,$ se presenta una interpretación moderna que realizan los historiadores Rashed. R y Vahabzadeh de la obra de al-Khayyām, acompañada de un comentario matemático realizado por ellos mismos. El texto también contiene la copia del manuscrito original en árabe, acompañado de una traducción al francés.

Entre la clasificación de fuentes históricas, Cohen (1989) caracteriza el tipo de fuentes secundarias:

> “Las fuentes secundarias son aquellas que no llevan o implican una relación física con el suceso estudiado. Se forman con datos que no pueden describirse como originales. Una fuente secundaria sería así aquella en la cual la persona que describe el hecho no estaba verdaderamente presente pero que obtuvo su descripción de otra persona o fuente. Estas pueden ser o no fuentes primarias”. (Cohen, 1989. pág.85)

A partir de su descripción sobre las fuentes de datos en la investigación histórica, el texto *Al-Khayyām Mathématicien* (1999) por Rashed. R y Vahabzadeh. B en donde se presenta la obra de Omar al-Khayyām corresponde a una fuente histórica secundaria.

2.1.4 Teoría Geométrica de Ecuaciones Algebraicas

El trabajo de al-Khayyām consistió en elaborar una teoría de las ecuaciones de grado mayor o igual a dos, para ampliar la teoría de las ecuaciones de los dos primeros grados hasta las ecuaciones cúbicas. Al-Khwārizmi a principios del siglo IX había dado soluciones por radicales para las ecuaciones de los dos primeros grados y las justificó geométricamente. En la segunda mitad de ese mismo siglo, Thābit ibn Qurra[7] había dado la traducción geométrica completa. Pero en el caso de las ecuaciones cúbicas no se conocía todavía una solución por radicales, por lo

[7] Fue un gran matemático y astrónomo del siglo IX que desarrolló geométricamente algunas ecuaciones algebraicas. Hace una gran contribución a la teoría de números a partir de un teorema que permite hallar pares de números amigos.

que al-Khayyām debía conservar las condiciones del trabajo de Al-Khwārizmī y de su modelo para poder llevar a cabo su teoría geométrica de estas ecuaciones algebraicas.

Al-Khayyām hace una clasificación de las veinticinco ecuaciones resultantes de la combinación de los cuatro términos: número, incógnita, su cuadrado y su cubo. La primera clasificación que realiza aparece en su tratado sobre la división de un cuarto de círculo que en el texto también se presenta. Al-Khayyām parte de la clasificación inicial que hay para los dos primeros grados dadas por Al-Khwārizmī e incluye las ecuaciones obtenidas al introducir el cubo.

Las siguientes son las ecuaciones canónicas de Al-Khwārizmī:

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c,$$

$$bx = c,$$

$$ax^2 + bx = c,$$

$$ax^2 + c = bx,$$

$$ax^2 = bx + c.$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas con la ayuda del segundo libro de los *Elementos*. Al-Khayyām introduce el cubo, y obtiene tres ecuaciones binomias, nueve ecuaciones trinomias y siete cuadrinomias. Después en su tratado modifica esta clasificación retomando la combinación de los términos con la base. Tenemos así seis ecuaciones binomias, doce ecuaciones trinomias y siete ecuaciones cuadrinomias.

Los historiadores Rashed. R y Vahabzadeh consideran que la segunda clasificación realizada por al-Khayyām es más sistemática. Al-Khayyām sitúa las ecuaciones cúbicas reducibles con las ecuaciones de primer y de segundo grado antes del estudio de las ecuaciones cúbicas irreducibles, como por ejemplo $x^3 = c$.

Con relación a lo anterior, la diferencia en la clasificación que hace al-Khayyām y la importancia de su trabajo es que algunas de estas ecuaciones que aparecen en su clasificación pueden ser resueltas con la ayuda de los *Elementos* de Euclides y otras deben ser resueltas con la ayuda de las cónicas.

A continuación se presenta la clasificación que realiza al-Khayyām de las ecuaciones cúbicas según la forma en que se presentan sus términos de diferentes grados. Las dos cónicas que sirven para resolver estas ecuaciones son elegidas a partir de esta clasificación. Así como se menciona en el texto *Al-Khayyām Mathématicien (1999)*, se pueden reagrupar las clases en tres familias:

1. Las ecuaciones en las que figura el cubo (x^3), los lados (bx) y un número (c) son construidas con la ayuda de una parábola y de un círculo si (x^3) y bx están en el mismo lado de la ecuación; de una parábola y de una hipérbola equilátera si no. El cambio de los términos bx y c (ecuaciones 13 y 14) corresponde a la transformación del círculo en una hipérbola equilátera; el cambio de signo de b solamente (ecuación 15) forma otra hipérbola.

2. Las ecuaciones en las que figura el cubo, los cuadrados y un número son construidas con la ayuda de una hipérbola equilátera y de una parábola, situadas de diversas maneras según el signo de sus coeficientes.

3. Las ecuaciones cuadrinomias son construidas con la ayuda de una hipérbola equilátera y de un círculo, o de una segunda hipérbola equilátera. Tenemos un círculo si x^3 y bx están en el mismo lado de la ecuación, y una hipérbola equilátera si no. Las posiciones relativas de las dos curvas

dependen de la repartición de los cuadrados y del número conocido en los dos lados de la ecuación.

Así, la clasificación de las ecuaciones es la siguiente:

Ecuaciones binomias

[1] $bx = c$

[2] $ax^2 = c$

[3] $x^3 = c$ resuelto con la ayuda de una parábola y de una hipérbola.

[4] $ax^2 = bx$

[5] $x^3 = bx$

[6] $x^3 = ax^2$

Ecuaciones trinomias

[7] $x^2 + bx = c$

[8] $x^2 + c = bx$

[9] $x^2 = bx + c$

[10] $x^3 + ax^2 = bx$

[11] $x^3 + bx = ax^2$

[12] $x^3 = ax^2 + bx$

Todas estas ecuaciones a excepción de la ecuación [3] pueden ser resueltas con la ayuda de las "propiedades del círculo", según al-Khayyām, es decir con la regla y el compás. Las que se presentan a continuación, con la ayuda de las cónicas.

[13] $x^3 + bx = c$ círculo - parábola

[14] $x^3 + c = bx$ parábola - hipérbola

[15] $x^3 = bx + c$ parábola - hipérbola

[16] $x^3 + ax^2 = c$ parábola - hipérbola

[17] $x^3 + c = ax^2$ parábola - hipérbola

[18] $x^3 = ax^2 + c$ parábola - hipérbola

Ecuaciones cuadrinomias

[19] $x^3 + ax^2 + bx = c$ círculo - hipérbola

[20] $x^3 + ax^2 + c = bx$ hipérbola - hipérbola

[21] $x^3 + bx + c = ax^2$ círculo - hipérbola

[22] $x^3 = ax^2 + bx + c$ hipérbola - hipérbola

[23] $x^3 + ax^2 = bx + c$ hipérbola - hipérbola

[24] $x^3 + bx = ax^2 + c$ círculo - hipérbola

[25] $x^3 + c = ax^2 + bx$ hipérbola – hipérbola

2.2 Perspectiva Curricular

En esta perspectiva se toman como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional (MEN) para direccionar el currículo en las instituciones educativas.

Con el fin de contribuir a un desarrollo amplio e integral en los estudiantes y potenciar la actividad matemática, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) presentan tres ejes fundamentales que direccionan el currículo institucional por área y la actividad matemática de aula. Estos son: procesos generales, conocimientos básicos y contexto.

Los procesos generales están directamente relacionados con el desarrollo del pensamiento matemático y corresponden a las actividades intelectuales que deben realizar los estudiantes y que van a permitir el desarrollo de competencias matemáticas, estos son: El razonamiento matemático; la resolución y planteamiento de problemas matemáticos; la comunicación en matemáticas; la modelación matemática; la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos matemáticos.

Es importante resaltar que el proceso de modelación tal como se plantea en estos documentos oficiales, se entiende como "el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático". (MEN, 1998. pág. 77.) Así mismo, la matematización o modelación también puede entenderse como "la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente". (MEN, 2006. pág. 53). Este proceso es fundamental a la hora de construir el concepto de ecuación en tanto que los fenómenos de la realidad, ya sean cotidianos o de diferente naturaleza pueden organizarse e interpretarse bajo este proceso general. La modelación mental o gráfica permite al estudiante buscar caminos de solución, verificar si una solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos es posible o no. Las ecuaciones, sistemas de ecuaciones, gráficos, tablas, son maneras de representar modelos matemáticos, y aunque todos los modelos[8] son representaciones[9], no toda representación es necesariamente un modelo. La modelación es importante en el estudio de las ecuaciones para poder producir conjeturas y razonamientos lógicos, obtener resultados y verificar la veracidad de estos.

De igual forma, el razonamiento matemático como proceso general se encuentra de manera paralela con el proceso de modelación en el estudio de las ecuaciones ya que es el que permite formular hipótesis o conjeturas, comprobar la coherencia de procesos algebraicos, entre otros.

Otro proceso general relacionado con el estudio de las ecuaciones es la formulación, tratamiento y resolución de problemas porque es en este contexto en donde el quehacer matemático se dota de sentido. En este contexto, una situación problema puede desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, pensar estrategias para resolver, encontrar resultados, verificar e interpretarlos, además de poder originar otros problemas. (Estándares Básicos de competencias en matemáticas, 2006. pág. 52). Por tanto, estas situaciones en donde el estudiante

---

[8] **Un modelo** puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo.

[9] Según Duval (1999) **las representaciones** mentales son un conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado. De otra parte, las representaciones semióticas son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

En ese sentido, todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo se enfrenta a resolver problemas son fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático.

Los conocimientos básicos que constituyen los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, se integran con los sistemas que han sido propuestos desde la renovación curricular y se constituyen en:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos,
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos,
- Pensamiento métrico y sistemas de medida,
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos y,
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Para desarrollar este trabajo de grado se toma en consideración el pensamiento numérico y los sistemas numéricos ya que el álgebra se puede ver como una extensión de la aritmética, al trabajar con ecuaciones se involucran términos como variables y constantes, pero realmente lo que se obtienen son números, y estos valores numéricos que aparecen en las ecuaciones son los que constituyen los sistemas numéricos llamados *naturales, racionales, enteros,* con los cuales se realizan las diversas operaciones. En este pensamiento también se resalta un nuevo tipo de número llamado imaginario[10] que surge como una nueva conceptualización cuando se presentó fracaso en la solución de ciertas ecuaciones algebraicas.

A su vez, se considera el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos como componente fundamental en este trabajo, ya que como su nombre lo indica, este pensamiento tiene que ver con la identificación y

[10] El número imaginario es un número complejo que puede describirse como el producto de un número real por la unidad imaginaria i. La letra i denota la raíz cuadrada de -1.

caracterización de la variación y el cambio en los sistemas algebraicos y las ecuaciones también se constituyen como sistemas analíticos y algebraicos. Cuando se potencia este pensamiento en la escuela el estudiante podrá desarrollar competencias como poder modelar y representar un fenómeno matemático en distintos sistemas o registros simbólicos. Este pensamiento también involucra el estudio de patrones, la dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, las relaciones de desigualdad, el manejo de ecuaciones e inecuaciones, entre otros., y se puede ir logrando en los estudiantes a partir de la interpretación y estudio de estos conceptos y de algunas representaciones matemáticas como por ejemplo las gráficas, las tablas, etc.

Por último, los contextos tienen que ver con los ambientes en los que se puede construir y presentar la actividad matemática. Del contexto amplio es de donde emergen las situaciones problema, provenientes de las mismas matemáticas, de la vida diaria, o de otras ciencias. Estos son los contextos más propicios e idóneos para poner en práctica el aprendizaje de un concepto matemático, entender las matemáticas como parte de una cultura, así como su utilidad y significado. Tal como lo menciona el MEN:

> El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no solo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. (Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998. pág. 24)

Así, los contextos son ambientes esenciales en el desarrollo de la actividad matemática, y en los que se pueden presentar las ecuaciones en general. Desde la perspectiva histórica, las situaciones provenientes de las mismas matemáticas pueden privilegiar el estudio de un concepto matemático en particular como lo son las ecuaciones.

Por otra parte, se considera importante mencionar los Estándares Básicos de competencias (2006) como otro de los documentos oficiales del MEN.

Los Estándares en Matemáticas (2006) tienen como punto de partida los documentos de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y por tanto son coherentes con su contenido. Estos tienen como uno de sus múltiples propósitos servir como referentes comunes para orientar y guiar los currículos de las Instituciones Educativas. Con el fin de cumplir con este objetivo, se plantean estándares básicos para todas las áreas de estudio y por ciclos o conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo). Los estándares se plantean como criterios claros para medir las expectativas comunes de calidad de los estudiantes en Colombia. A su vez, sirven como referentes y criterios para la realización de las evaluaciones externas las cuales ubican a los estudiantes y a las Instituciones Educativas en niveles de calidad con el fin de diseñar estrategias para mejorar la calidad de la educación en los países.

Dichos estándares pueden interpretarse y entenderse a partir de una coherencia vertical y una horizontal. La primera se refiere a la coherencia que debe existir entre un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda se refiere a la coherencia que debe existir entre un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Los estándares que aluden al estudio de las ecuaciones son principalmente evidentes en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Así como lo menciona el MEN (2006):

> El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de grafica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad ***y el manejo de ecuaciones*** e inecuaciones”.(Estándares Básicos de competencias en Matemáticas, 2006, pág. 67)

Además, desde los primeros grados de escolaridad el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos se hace presente en la escuela:

> "El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas". El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica". (Lineamientos curriculares de matemáticas, 1998. pág. 50)

Así, se toman como punto de partida los Estándares Básicos de Competencias de 8° a 9° del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos ya que desde el grado 8° de la educación básica se presentan de manera sustancial las ecuaciones en la escuela y este pensamiento hace alusión a este concepto matemático. A continuación se presenta el diagrama de la coherencia vertical y horizontal de los estándares básicos que hacen referencia al estudio de las ecuaciones:

Coherencia Vertical

De 4° a 5°: Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

De 6° a 7°: Utilizo métodos informales (ensayo y error, completación) en la solución de ecuaciones.

De 8° a 9°

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales de de las relaciones y operaciones entre ellos.

Coherencia Horizontal

Figura 1. Diagrama de la Coherencia vertical y horizontal de los estándares relacionados con el estudio de las ecuaciones en el pensamiento variacional.

La coherencia horizontal con el pensamiento numérico y sistemas numéricos se hace evidente cuando se trabajan las ecuaciones, donde las soluciones como producto de su tratamiento algebraico son números. En cuanto a la coherencia vertical se muestran los estándares básicos que hacen referencia implícita o explícita al estudio de las ecuaciones en los diferentes ciclos de grados y en el mismo pensamiento variacional. Esto lo que garantiza es que el concepto de ecuación empieza a construirse desde los primeros grados así como la variación y el cambio.

De esta manera, puede observarse que aunque en los Lineamientos curriculares de matemáticas (1998) y en los Estándares básicos de competencias en matemáticas (2006) hay un gran interés por el estudio de las ecuaciones en general, no hay unos estándares específicos que hagan alusión directa a las ecuaciones de tercer grado, considerando que este tipo de ecuaciones conforman la familia de ecuaciones polinómicas. Sin embargo, al estudiarse los polinomios y las propiedades de estos, puede entenderse que en la relación de igualdad están implícitas las ecuaciones en general, es decir, las ecuaciones de grado mayor a dos que también ayudan a potenciar y conseguir los estándares citados anteriormente.

Cabe resaltar también que en Colombia es habitual que los docentes no incorporen el concepto de ecuación cúbica y esto puede notarse en el ámbito educativo con los textos escolares, a partir del análisis de textos. Lo que se esperaría de un profesor de matemáticas, si no incluye este tipo de ecuaciones en los contenidos que enseña (independientemente de las razones o restricciones institucionales por las que no lo hace) es que tenga un conocimiento no solo de las ecuaciones de los dos primeros grados si no de las ecuaciones en general, así como las formas y maneras como se han solucionado y evolucionado estos conceptos a través de la historia porque esto a su vez le permitiría gestionar otras actividades de aula que serían enriquecedoras en gran manera en el aprendizaje de sus estudiantes.

2.3 Perspectiva Didáctica

Una consideración inicial corresponde al hecho de que a nivel nacional e internacional la producción de investigaciones y trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cúbicas es escasa. Los trabajos que se encuentran se centran específicamente en el estudio histórico y los aportes que han hecho Cardano y Tartaglia a la solución de la ecuación cúbica así como las contribuciones de varios personajes importantes en la HM en cuanto al desarrollo de la matemática árabe, pero estos trabajos no articulan aspectos de tipo didáctico como por ejemplo, las dificultades que se han presentado en ese desarrollo histórico y las que podrían presentarse en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a este tipo de ecuaciones. La escasez de investigaciones en cuanto a las dificultades de su enseñanza puede explicarse debido a que el estudio de la ecuación cúbica no tiene un lugar específico en las propuestas curriculares nacionales y por ende, tampoco en la educación básica y media aunque desde su enseñanza pueda aproximarse al desarrollo y la formación del Pensamiento Variacional que plantea el MEN.

A nivel Internacional, también puede evidenciarse en la búsqueda un vacío en cuanto a investigaciones de este tipo. Al respecto, Peralta (1999, pág. 2) afirma que:

> "En cuanto a la resolución de ecuaciones de grado tres, seguramente procede comenzar diciendo que su interés puede surgir de manera natural en el alumno con ciertas inquietudes matemáticas, o en todo caso, cabe ser fomentado fácilmente por el profesor. En efecto, parece obvio señalar que si el objetivo fundamental del álgebra en estos niveles es el estudio de las ecuaciones-específicamente las polinómicas-, y a lo largo de varios cursos únicamente se han conseguido resolver las de grados uno y dos o las reducibles a éstas, es lógico, para completar esta teoría, plantearse la posibilidad de hallar asimismo las soluciones de las ecuaciones de grado tres, y más tarde, las de grado superior".

Según Peralta, el alumnado tiene muy pocos recursos para la resolución de las ecuaciones algebraicas, particularmente las de grado tres y esto es debido a que en los niveles de su escolaridad, solo conocen los métodos de resolución de las ecuaciones de grado uno y dos.

Sin ser exhaustivos, a partir de lo anterior puede decirse que en algunos currículos como por ejemplo en España, hay una tendencia similar en cuanto a no incluir específicamente este tipo de ecuaciones en la escuela.

De esta manera, en esta perspectiva se presentan algunas reflexiones que se consideran importantes de esta escasa producción. De una parte, la solución de la ecuación cúbica en el marco de la resolución de problemas como propuesta para su enseñanza en la educación media. De otra parte, algunas consideraciones con relación al CPPM[11] y su relación con la HM.

2.3.1 La solución de la ecuación cubica y la resolución de problemas.

En los trabajos de Gómez & Velandia (2009) y Mogollón (2012) hay una fuerte relación en privilegiar el ámbito de la resolución de problemas para que los estudiantes se acerquen a las soluciones de las ecuaciones de tercer grado.

Por una parte, Gómez & Velandia (2009) proponen las herramientas de resolución de problemas de Mason, Burton & Stacey (1982) para resolver ecuaciones de tercer grado siguiendo los pasos de abordaje, ataque y revisión. A su vez, tienen en cuenta las tres categorías en donde se presenta la meta cognición según Schoenfeld (1987). Estas son: El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, el control y la autorregulación y por último las creencias e intuiciones en cuanto a las matemáticas que se trabajan y la forma de resolver problemas con ellas. Todo esto con el fin de poder dotar de significado y analizar los procesos de meta cognición que se presentan cuando un estudiante está solucionando ecuaciones de tercer grado. Lo que se pretende a partir de esta investigación es poder utilizar heurísticas propias que sirvan como estrategias generales para resolver un problema, en este caso, con ecuaciones de tercer grado. En general se plantea la resolución de problemas empleando heurísticas como medio para poder llevar a cabo el proceso de enseñanza de las matemáticas en la escuela. Además, una de las características importantes de su trabajo está enfocada a que hacer

[11] La Abreviación CPPM representa el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

matemáticas no se reduce a resolver problemas simplemente sino a dotar de significado y sentido las experiencias vividas cuando se resuelve un problema.

En esta propuesta, se adopta la metodología de los diarios de campo, entrevistas y video-grabaciones para recoger información sobre los procesos cognitivos y significados evidentes en los estudiantes cuando resuelven estas ecuaciones. El profesor juega un papel importante en la investigación porque es quien supervisa los procesos de resolución de sus estudiantes.

Por otra parte, Mogollón (2012) presenta una propuesta de enseñanza de las ecuaciones cúbicas para estudiantes de grado undécimo a partir del desarrollo histórico de las ecuaciones cúbicas y los diversos métodos para solucionarlas como aplicaciones en el aula de clase. A partir de la consideración de que la Educación Matemática tiene como uno de sus propósitos desarrollar habilidades de pensamiento, Mogollón plantea la resolución de problemas y la modelación como algunas de esas habilidades que compone el aprendizaje de las matemáticas a la luz de los documentos del MEN. En este sentido, asume en su propuesta los métodos de resolución de ecuaciones como el espacio en donde el estudiante puede modelar situaciones, plantear y resolver ecuaciones polinómicas.

Sin embargo, Mogollón sostiene que en muy pocas ocasiones en la escuela se hace alusión a las ecuaciones de tercer grado y mucho menos a los aspectos históricos que dieron como resultado las formas de solución de las ecuaciones de tercer grado que se conocen hoy. La autora considera que el estudio de los métodos de resolución de ecuaciones a través del diseño de situaciones en el aula proporciona elementos significativos que pueden acercar a los estudiantes de grado undécimo a resolver ecuaciones de tercer grado, y a su vez, estas situaciones o fichas de trabajo podrían orientar el trabajo del profesor en el aula y ayudarían a puntualizar las posibles dificultades que presenten estos métodos. También se reconoce la importancia de la tecnología tal como calculadoras graficadoras o algún software que realice gráficas de funciones polinómicas para el desarrollo de las actividades en clase.

El tipo de situaciones que se plantean en esta investigación, corresponden a escenarios donde los estudiantes puedan determinar raíces reales de las ecuaciones cúbicas por medio de aproximaciones, aplicar el teorema del factor para determinar todas las raíces de una ecuación cúbica dada, determinar raíces cuadradas de números reales a partir del método babilonio, establecer las condiciones para determinar las raíces de una ecuación cúbica a partir de los criterios de la primera derivada, resolver un problema modelando una ecuación cúbica por medio de doblado de papel o el arte del origami como lo conocemos comúnmente e incluyendo los axiomas de Humiaki Huzita para construir las rectas tangentes a una parábola, determinar la solución de una ecuación cúbica por medio de doblado de papel, reconocer los aspectos principales del desarrollo de la fórmula de Cardano y Tartaglia, aplicar las conclusiones obtenidas en el método de Cardano y Tartaglia para encontrar la solución de ecuaciones cúbicas, reducir ecuaciones cúbicas completas por medio de simplificaciones, determinar la solución de ecuaciones cúbicas por diversos métodos, son las actividades que se sugieren para que los estudiantes de undécimo grado puedan resolver ecuaciones polinómicas hasta de grado tres.

Este tipo de actividades que se sugieren están relacionadas con la significación e interpretación de las soluciones y según Mogollón (2012), les permitirá a los estudiantes razonar y cuestionar antes que aplicar para resolver.

Estas actividades constituyen espacios de reflexión que permiten una visión diferente de las matemáticas y son una propuesta en la que los estudiantes pueden desarrollar los procesos generales existentes en toda actividad matemática y ampliar su conocimiento de las ecuaciones polinómicas en general.

2.3.2 Sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

El profesor de matemáticas como profesional en educación de esta disciplina, debe poseer un compilado de conocimientos, destrezas y habilidades que lo hacen una persona competitiva en su medio para desarrollar sus funciones como educador matemático. En cuanto al CPPM se encuentran varias investigaciones y estudios al respecto.

Por ejemplo, Shulman, citado por Beltrán, Luna & Mora (s.f) y Godino (2009), quien ha trabajado ampliamente sobre esta línea, distingue tres categorías que deben constituir el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas. Estas son: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular.

En esta dirección, Hill, Ball y Schilling (citado por Godino, 2009) clasifican el conocimiento disciplinar o conocimiento del contenido por parte del profesor de matemáticas en: conocimiento común del contenido y conocimiento especializado del contenido. El primero se refiere al conocimiento y las habilidades que se ponen en juego para resolver problemas matemáticos en los que cualquier sujeto con suficiente conocimiento podría resolver. Entre las habilidades que se esperaría de un profesor de matemáticas se encuentran: Reconocer respuestas erradas, capacidad de solucionar las tareas que se les propone a los estudiantes, utilizar de manera adecuada las notaciones, identificar definiciones incorrectas en los libros de texto escolares, etc. Ball (citado por Beltrán, Luna & Mora, s.f). El segundo, se refiere a las habilidades y destrezas con las que el profesional en educación matemática cuenta para su profesión; entre estas, se encuentra poder organizar en secuencias los contenidos que se deben enseñar, contar con un amplio conocimiento para buscar alternativas de enseñanza cuando se encuentran dificultades de aprendizaje, etc.

En el caso del conocimiento pedagógico del contenido, Hill, Ball & Schilling (citados por Godino, 2009) proponen tener en cuenta: El conocimiento del contenido y los estudiantes y el conocimiento del contenido y la enseñanza. El primero es el conocimiento del contenido que tiene en cuenta la manera en como los estudiantes piensan, entienden y aprenden ese contenido. Aquí están incluidos los errores, las dificultades, estrategias, y tener en cuenta la manera en como se desarrolla el razonamiento de los estudiantes. En cuanto al segundo, se refiere a la capacidad que el profesor de matemáticas debe tener para poder corregir los errores y concepciones erróneas de sus estudiantes a partir del análisis del razonamiento de estos mismos y de las estrategias que utilizan cuando hacen matemáticas.

Por último, el conocimiento curricular está relacionado con el conocimiento que tiene el profesor de los programas curriculares en torno a los contenidos a enseñar y también a los propósitos de su enseñanza. Cabe resaltar que el profesor también debe tener un amplio conocimiento de los documentos oficiales que direccionan los currículos para las instituciones.

Sin embargo, otros investigadores como Schoenfeld & Kilpatrick, (2008), citados por Godino (2009), han apuntado sus trabajos en caracterizar las dimensiones que constituyen el CPPM. Este conocimiento profesional está mediado por las competencias profesionales o conocimientos que según los investigadores un profesor de matemáticas debería poseer para que su enseñanza sea de calidad. Las dimensiones que proponen estos autores son: conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud, conocer a los estudiantes como seres pensantes, conocerlos como sujetos que aprenden, capacidad de diseñar ambientes de aprendizaje, construir estrategias que apoyen el aprendizaje de los estudiantes, reflexionar sobre la propia practica que se ejerce.

Puede observarse que estos modelos están directamente relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje que suceden en la escuela. En este sentido, esta caracterización del conocimiento profesional del profesor tienen de alguna manera, la intención de mejorar la calidad de enseñanza, y que los profesores puedan tener herramientas para afrontar los diversos fenómenos que surgen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que como lo menciona Shulman (1987), en los procesos de enseñanza surge un gran interés no solo por lo que debe saber el profesor, sino por lo que debe saber hacer. Estas competencias que constituyen el CPPM emergen no solo del conocimiento propio del saber sino de la práctica de aula y todo lo que el proceso de enseñanza conlleva.

No obstante, como ya se mencionó al principio de este documento, la HM juega un papel importante en la formación profesional de un profesor de matemáticas, en el sentido de que dicha historia puede contribuir al desarrollo de las competencias profesionales que su formación determina. La HM no solo es importante como uno de los organizadores del currículo planteados por Rico (1997), sino que la manera de estudiar y entender la historia por parte del profesor de matemáticas le ayuda a desarrollar competencias para la puesta en acto de su rol como docente con relación a su propio conocimiento, sus estudiantes, su enseñanza y su conocimiento curricular.

Las diversas investigaciones que se encuentran en cuanto a la relación de la HM y el CPPM, hacen referencia a la manera en que dicha historia favorece ese conocimiento profesional. Al respecto se encuentran investigaciones que resaltan algunos aspectos tales como:

- El estudio de la HM permite al profesor apropiarse mejor de dicho conocimiento debido a que le facilita conocer la génesis de los conceptos. En este sentido el profesor amplía su conocimiento al poder reflexionar sobre el significado de los objetos matemáticos. Vidal y Quintanilla (s.f), Furinghetti (2007), Arcavi (1991), Morley (1982)

- La HM le permite comprender al profesor que la actividad matemática es una actividad intelectual en lugar de un corpus de conocimiento o conjunto de técnicas. Furenguetti (2007).
- Dicha historia favorece el desarrollo de la creatividad en el profesor al buscar caminos distintos de resolución o demostración. Vidal y Quintanilla (s.f).
- La exploración de la HM por parte del profesor le ayuda a descubrir los obstáculos epistemológicos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los matemáticos y que a veces se reproducen en los alumnos. Sierra (1997) citado por Vidal Y Quintanilla (s.f)
- Se propone el estudio de fuentes históricas como método para ejercitar la adopción de la perspectiva del otro, ya que según Arcavi & Isoda (2007) para comprender las ideas detrás de una fuente histórica se requiere adoptar una especie de descentración similar a la que se exige para escuchar a los estudiantes; es así como se puede aprender a valorar las aproximaciones parciales de los estudiantes frente a un problema planteado, y se aprende a escuchar sus argumentos.
- La HM promueve un estilo consciente de enseñanza lográndose una apropiación del sentido de enseñanza de los objetos matemáticos que contrarresta la reproducción pasiva del estilo de enseñanza. Furinguetti (2007).
- La HM le brinda al profesor la posibilidad de encontrar recursos o materiales para la enseñanza. En este sentido, los materiales históricos pueden utilizarse con mayor o menor grado de adecuación en las clases. Guacaneme (2011).
- Según D´Amore (2004), el estudio de la HM por parte del profesor hace que estos sean didácticamente activos.

- En este sentido, Fauvel (1991) plantea que el maestro que sabe poco de HM es apto para enseñar técnicas de forma aislada sin relación con el problema e ideas que los generaron.
- La HM le ayuda al profesor a ordenar la presentación de los Tópicos del currículo. Sierra (1997) citado por Vidal y Quintanilla (s.f) y Guacaneme (2011).
- La HM sirve como medio para orientar la actividad docente.
- La HM da cuenta de interrelaciones entre dominios matemáticos o de las matemáticas con otras disciplinas y revela la interdependencia de metaconceptos (demostraciones, rigor, evidencia) con el carácter evolutivo de los conceptos, formas de representación y lenguaje. Guacaneme (2011).
- Furenguetti (2007) citado por Guacaneme (2008) sostiene que los profesores necesitan un contexto que les permita mirar los temas que ellos van a enseñar de una manera diferente. En este sentido, la HM puede aportar dicho contexto.

En este sentido, este trabajo pretende identificar la manera en que el estudio histórico-epistemológico de la solución de las ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām puede potenciar y enriquecer el CPPM y a su vez, aportar una reflexión a docentes en ejercicio y formación para que puedan tomar elementos de la historia y repensar sus actividades de aula. Más específicamente, se espera aportar elementos para que los profesores a la hora de enseñar las ecuaciones, puedan tomar como referencia algunas soluciones o formas de solución de las ecuaciones en general a través de la historia, como por ejemplo el caso particular que aquí se expone.

CAPÍTULO III:

LAS ECUACIONES DE TERCER GRADO SEGÚN AL-KHAYYĀM.

En este capítulo se presentan las demostraciones que hace al-Khayyām para las ecuaciones de tercer grado. En primer lugar, se consideran algunos aspectos preliminares fundamentales para el estudio de las soluciones geométricas de al-Khayyām; seguidamente se presentan las ecuaciones 10, 11 y 12 que según su clasificación, pueden reducirse a grados inferiores para resolverse con la ayuda de los *Elementos* de Euclides.

De igual manera, se presentan los lemas que utiliza para realizar sus demostraciones. Posteriormente, se presentan las catorce (14) ecuaciones que según al-Khayyām no pueden solucionarse geométricamente con la sola ayuda de los *Elementos* de Euclides y para las cuales utiliza la intersección de las cónicas. Por último se exponen algunas consideraciones finales del estudio histórico de los catorce casos de ecuaciones cúbicas.

Para el estudio de estos catorce casos de ecuaciones, se muestra una nueva clasificación a partir de las formas de dichas ecuaciones y los términos que involucra cada una. Esta tipología permite identificar todos los tipos de ecuaciones de tercer grado, clasificadas formalmente según donde se ubican en los miembros de la ecuación, los términos constantes, los de primer grado, los de segundo, y los de tercer grado. Debe tenerse en cuenta que para cada uno de esos tipos, al-Khayyām encuentra una construcción de una raíz positiva para la intersección de dos cónicas.

Cabe anotar que como ya se dijo en los capítulos precedentes, este estudio aborda la perspectiva de los estudios histórico – epistemológicos como métodos de investigación educativa, partiendo de problemas de tipo didáctico y tomando elementos que la HM brinda con el fin de aportar a su solución. En particular, se aborda la obra de Omar al-Khayyām con el fin de identificar las potencialidades que puede tener este estudio en la formación profesional del profesor de matemáticas y la manera en que este puede apropiarse de cuestiones de tipo histórico para fortalecer y desarrollar sus competencias profesionales.

En este estudio histórico, se tomarán en cuenta aspectos como: el tratamiento geométrico que al-Khayyām hace a estas ecuaciones; la elección de las curvas cónicas para la solución de cada una de ellas; el papel que juegan las gráficas en cada solución, el espacio dimensional de los objetos matemáticos; el tipo de proporciones que utiliza, entre otros aspectos.

Cabe resaltar que este estudio se realiza sobre la interpretación moderna de las demostraciones de al-Khayyām que hace R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) en su texto *Al-Khayyām Mathématicien*, tal como se anotó antes. De esta forma, se introducen comentarios de los historiadores así como otros propios.

Igualmente, se subraya la importancia del trabajo de Rashed, R & Vahabzadeh, B, debido a que la interpretación que ellos hacen, corresponde a las reglas lingüísticas del lenguaje algebraico y geométrico moderno al que hoy se tiene acceso.

3.1 Algunas consideraciones preliminares

La obra *Tratado de álgebra de* $Al - muq\bar{a}bala$ por Omar al-Khayyām pertenece al siglo XI y trae consigo el legado matemático de varios geómetras y algebristas de siglos anteriores. De su obra pueden resaltarse varios aspectos que permiten situarla en un momento histórico determinado y a su vez facilitan su comprensión. Estos aspectos tienen que ver con el tipo de lenguaje que utiliza al-Khayyām, el uso de intersección de curvas y el uso implícito de referentes cartesianos en sus predecesores, el significado de algunos conceptos necesarios para entender su obra y el método que utiliza para resolver las ecuaciones algebraicas. Dichos aspectos se mencionan a continuación:

1. ***El lenguaje retórico en las demostraciones de al-Khayyām.***

Se debe comenzar diciendo que las demostraciones de las catorce ecuaciones cúbicas en el manuscrito[12] árabe de al-Khayyām se presentan en un lenguaje puramente retórico[13], sin embargo, el estudio que aquí se presenta se realiza tomando como referencia la interpretación moderna hecha por los historiadores Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) de dicho documento. Al respecto, como lo menciona Oaks (2007), los libros de la matemática árabe medieval fueron escritos en forma retórica, especialmente los enunciados y las soluciones a los problemas. Solamente hasta el siglo XII se presenta una notación para el álgebra un poco más elaborada, y se desarrolló en la edad media limitándose a la parte occidental del norte de África. Oaks expresa que la notación era probablemente desconocida

[12] En la última parte del texto *Al-Khayyām Mathématicien* por Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999), se presenta una edición o copia del manuscrito en árabe en el lenguaje retórico de al-Khayyam así como una traducción al francés. Es de anotarse que según Rashed, R & Vahabzadeh, B, existen diez manuscritos de este tratado pero que la principal edición se le debe a F. Woepcke, quien en 1851 publica una nueva edición acompañada de una traducción al francés tomando como base dos copias del manuscrito en árabe que se encuentran en la Biblioteca Nacional de París y en la Biblioteca de la Universidad de Leiden.

[13] Según Nesselman, citado por Oaks, J (2007), el álgebra retórica es aquella álgebra que se expresa solamente con palabras y en donde los textos se escriben en un lenguaje vernáculo.

para los famosos algebristas científicos en el Oriente, tales como al-Karaji[14] (953 – 1029) y al-Khayyām**.**

La notación a la que se refiere este historiador, es un avance en el desarrollo de los símbolos como por ejemplo el símbolo para la raíz cuadrada y para la división, los cuales ya se extendían por encima de los términos. Tal vez, esa carencia de un lenguaje un poco más elaborado como el que se presenta un siglo después de al-Khayyām, es la razón por la que sus demostraciones se presentan en un lenguaje estrictamente retórico.

Es así como Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) reescriben en un lenguaje moderno estas demostraciones sin distorsionar las significaciones de las ideas propuestas por el árabe. Es decir, mientras en lengua natural al-Khayyām hace referencia a la relación entre áreas y segmentos, Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) simplemente lo escriben en la forma de una proporción tal como se conoce hoy. Por ejemplo, en el esquema tradicional de las demostraciones de al-Khayyām, él dice que la relación de BE a ED[15] es igual a la relación de ED a EC, Rashed, R & Vahabzadeh, B simplemente lo escriben en una notación moderna tal que $\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$. Cabe insistir que para al-Khayyām no era posible escribir dichas relaciones en forma de cociente ya que como se dijo, carecía de un avance en los símbolos que solo se proporciona de manera parcial un siglo después de él, aspecto que también se resaltará más adelante.

[14] Fue un matemático persa que hace grandes aportes no solo en la solución ecuaciones cuadráticas por un método geométrico sino que proporciona métodos aritméticos con los que no es necesario apoyarse en los Elementos de Euclides. También se le reconoce que en sus trabajos de álgebra dio las reglas de las operaciones aritméticas con polinomios.

[15] La designación de letras para estos segmentos varían en las distintas demostraciones dependiendo la gráfica para cada ecuación.

2. *Los predecesores de al-Khayyām y el uso de intersección de cónicas.*

Puede decirse que la idea de al-Khayyām de solucionar ecuaciones algebraicas por medio de la intersección de cónicas emerge de los trabajos de varios algebristas y geómetras predecesores a él, aunque como lo menciona Oaks, J (2007), este enfoque es un sello distintivo de al-Khayyām.

Al respecto, y muy lejos de ser exhaustivos, podrían citarse algunos personajes que se encuentran antes de al-Khayyām y que tuvieron que ver con el estudio de las secciones cónicas. Por ejemplo, Menecmo, matemático y geómetra del siglo IV a quien se le atribuye la introducción y el estudio teórico de las secciones cónicas; Menecmo muestra que dichas secciones tenían importantes propiedades como lugares planos, que se podían traducir en expresiones geométricas las cuales son equivalentes a las ecuaciones que se conocen hoy. Apolonio, quien demuestra en su obra *Las Cónicas* que de un cono se obtienen los tres tipos de secciones al variar la inclinación del plano que corta al cono. Abu Kamil, matemático del siglo IX, resuelve por medio de la geometría ecuaciones de segundo grado apoyándose en los *Elementos* de Euclides. Al-Mahani, en el siglo IX trata de resolver el problema de Arquímedes[16] transformándolo en una ecuación algebraica en donde involucra cubos pero desafortunadamente no fue capaz de resolverlo. Un siglo después, al-Khazini, al igual que Arquímedes resuelve la ecuación representando su solución por medio de la intersección de secciones cónicas y esto se considera un comienzo de la aplicación de la geometría al álgebra. Al-Haytham o Alhacén, matemático árabe del siglo X se cataloga como uno de los primeros matemáticos que tuvo éxito trabajando las ecuaciones cúbicas por medio de la intersección de cónicas.

[16] El problema de Arquímedes consiste en cortar una esfera con un plano de manera que los volúmenes de los segmentos obtenidos estén en una razón dada. Este problema corresponde a la proposición 4 de su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, que en otras palabras se traduce en una ecuación cúbica pero que Arquímedes resuelve geométricamente por medio de la intersección de una parábola y una hipérbola.

Puede pensarse que el trabajo de todos estos matemáticos que preceden a al-Khayyām constituye las herramientas con las que éste último cuenta para elaborar y generalizar la teoría geométrica de las ecuaciones cúbicas. En la introducción[17] de su *Tratado del álgebra de* $al - muq\bar{a}bala$, que es en el que se encuentra la solución geométrica de las ecuaciones de tercer grado, al-Khayyām cita los trabajos de los algebristas contemporáneos a él, al-Mahani y al-Khazini, como evidencia de lo que se conocía hasta el momento pero que nadie había realizado una caracterización y clasificación de todos los tipos de ecuaciones, ni la manera de obtenerlas, ni sus demostraciones, objetivo fundamental del trabajo matemático que presentaría en su tratado. Por cierto, Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) hacen referencia a la importancia del trabajo de al-Khayyām ya que sus predecesores habían traducido algunos problemas sólidos en términos algebraicos teniendo que resolverlos con la intersección de curvas, pero él es el primero en la historia en elaborar y generalizar una teoría geométrica de las ecuaciones algebraicas por medio de la intersección de cónicas.

Pero estos matemáticos y geómetras hasta al-Khayyām no solo son importantes en la historia por haber sido precursores en el estudio de algunos problemas matemáticos por medio de la intersección de secciones cónicas, sino que aportan en gran manera a lo que constituye el álgebra y la geometría que se conoce hoy. Algunos aspectos relacionados se citan a continuación.

3. *Los predecesores de al-Khayyām y el uso implícito de referentes cartesianos.*

Como se verá en las demostraciones, al-Khayyām interpreta la raíz de la ecuación cúbica como la abscisa de la intersección de las cónicas, lo que parece indicar que

[17] Esta introducción aparece en la copia del manuscrito original en árabe con la que Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) hacen la presentación del tratado de al-Khayyām. Como ya se dijo anteriormente, aparece en la parte final del texto Al-Khayyām Mathématicien.

implícitamente está usando un referente como sistema de coordenadas que es similar al referente cartesiano de Descartes. Coherentemente con lo anterior, aquí nuevamente se presenta un legado en cuanto al uso de líneas como sistemas de referencia. Como lo menciona González (2007), Menecmo, Apolonio e incluso Pappus trabajaron el equivalente de un sistema de coordenadas aunque carecieron del algebra simbólica de Vieta del siglo XVI. En cuanto a Apolonio, González (2007, pág. 208-209) menciona:

> "En el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia*-diámetros conjugados o diámetro-tangente-, que juegan un papel de *coordenadas*. Al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción-propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como lugar geométrico- se traduce en una relación entre las *abscisas* y las correspondientes *ordenadas*, que Apolonio llamaba *symptoma* de la curva y que no es si no la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva."

Para él, los métodos que utiliza Apolonio, -al igual que los métodos utilizados por al-Khayyām en cuanto al uso de rectas como sistemas de referencia-, son muy parecidos a los que utiliza Descartes en el siglo XVI en su geometría, y por eso se considera el inicio de la singladura histórica hacia las geometrías analíticas de Fermat y Descartes.

Como ya se ha dicho, al-Khayyām justifica cada una de sus demostraciones con los elementos matemáticos de *Las cónicas de Apolonio*. Es por esta razón que el trabajo de al-Khayyām guarda cierta similitud con el trabajo de Apolonio, particularmente, en la manera en que al-Khayyām interpreta la raíz de cada ecuación cúbica por medio de las abscisas que corresponden al punto del intersección de las cónicas. Sin embargo, es hasta el siglo XIV que aparece un segundo estadio en la introducción de coordenadas con Oresme (1323-1382). El trabajo de Oresme se basó en introducir la noción de gráfico para mostrar la variación de una magnitud, eligiendo un punto origen en una recta horizontal. El llama <<longitudo>> o longitud a lo que hoy se conoce como abscisa, y eleva una perpendicular, la cual llama <<latitudo>> o latitud, que corresponde a la ordenada. Aunque según Gonzalez (2007), Oresme estaba más interesado en la variación del área bajo la curva que en el estudio analítico de la curva, por eso es que su aporte se acerca más al cálculo infinitesimal que a la geometría analítica. Finalmente, es con Descartes y Fermat que empieza a originarse la geometría analítica y con ella el uso de coordenadas cartesianas que se conocen hoy.

4. *Magnitudes vs proporción y los conceptos de dimensión, superficie, cuerpo y número en al-Khayyām.*

En la introducción de su tratado el *álgebra de* $al - muq\bar{a}bala,$ al-Khayyām menciona que las magnitudes son las cantidades conocidas que son cuatro: la línea, la superficie, el cuerpo y el tiempo. Análogamente, puede observarse que la concepción que él tiene del término magnitud coincide parcialmente con la definición de Euclides. Para este último, las magnitudes se refieren a las cantidades continuas y extensas de la geometría tales como ángulos, líneas, superficies y sólidos y con las cuales se puede establecer una razón entre magnitudes de la misma especie; es decir, dos líneas, dos superficies o dos sólidos. Esta idea es retomada por al-Khayyām así como el concepto de magnitud. En la misma línea, debe decirse que al-Khayyām en su lengua retórica entiende la proporción como la relación entre magnitudes homogéneas las cuales establece a partir de las propiedades y relaciones geométricas de las curvas dadas para cada ecuación. De esta forma, al-Khayyām utiliza las proporciones en un sentido geométrico debido a que está tratando con magnitudes a partir de las gráficas, aunque después les da un tratamiento algebraico - a pesar de su lengua retórica- para convertir dichas proporciones en una nueva representación que corresponde a la raíz de la ecuación cúbica.

En cuanto a los conceptos de línea, superficie y cuerpo, al-Khayyām retoma las ideas de Euclides cuando hace referencia a que una línea tiene solamente longitud, por lo que su dimensión es uno; una superficie no tiene espesor ni altura, por lo que tiene dimensión dos, es decir, ancho y largo; y un cubo o cuerpo sólido tiene entonces dimensión tres, es decir, largo, ancho y alto. Estos conceptos son claramente visibles en las demostraciones que se presentan en este apartado. Así como en Euclides, al-Khayyām desea obtener figuras planas y sólidos a partir de líneas y superficies. Este hecho es la base de todas las demostraciones en donde a partir de una superficie cuadrada, construye un sólido o cubo que tiene como base dicho cuadrado.

De otra parte, hay que mencionar que al-Khayyām conserva el proyecto algebraico de al-Khwarizmi, debido a que este último había dado soluciones por radicales para las ecuaciones de los dos primeros grados, pero para las ecuaciones cúbicas no se conocía aún una solución de este tipo, por lo que al-Khayyām retoma la clasificación de las ecuaciones canónicas de al-Khwarizmi para incluir unas nuevas. Este hecho hace que al-Khayyām conserve algunos de sus términos primitivos que son eminentemente de tipo teórico y algebraico, y a otros de esos términos él les atribuye un sentido geométrico bien sea desde el plano o desde el espacio. Así, al-Khayyām menciona que:

> “Y si el algebrista emplea el cuadrado-cuadrado en los problemas de geometría, es metafóricamente, y no propiamente, dado que es imposible que el cuadrado-cuadrado forme parte de las magnitudes. Lo que se encuentra en las magnitudes es primero una sola dimensión, es decir la raíz, o, llevada a su cuadrado, el lado. Después las dos dimensiones, es decir la superficie –el cuadrado ($m\bar{a}l$, x^2) en las magnitudes es pues la superficie cuadrada. Finalmente, las tres dimensiones, es decir el cuerpo – el cubo en las magnitudes es el sólido limitado por seis cuadrados.” Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999, pág. 9)

Y es así como define los conceptos de cuerpo, superficie, dimensión, magnitud y cuadrado. En cuanto al término número, al-Khayyām lo define en un sentido geométrico:

> “Y cuantas veces en el tratado nosotros decimos: un número es igual a una superficie, nosotros entendemos por número un cuadrilátero de ángulos rectos, uno de los dos lados es uno y el otro es perpendicular e igual en medida a un número dado. Y cuantas veces decimos: un número es igual a un sólido, entendemos por "número" un paralelepípedo rectángulo cuya base es el cuadrado de la unidad y cuya altura es igual a un número dado.” Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999, pág. 9)

A partir de esta concepciones, Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) expresan que para al-Khayyām la unidad plana es el cuadrado de ésta última y la unidad sólida constituye un sólido cuya base es la unidad plana, es decir, dicho cuadrado y la altura una unidad lineal. Como se verá en las demostraciones, al-Khayyām utiliza estos conceptos como el de unidad plana, es decir el cuadrado, que como ya se dijo, es la base del sólido que desea construir.

Es así como para los antiguos incluyendo a al-Khayyām, los números eran conjuntos de unidades, pero con la llegada de Vieta (1540-1603) y Simon Stevin (1548-1620), los números pasaron a ser instrumentos de medida y de esta forma, las magnitudes y los números ya no estaban tan separados.

En este sentido, la historia también muestra que hay una reformulación del concepto de proporción ya que con Stevin, las magnitudes ya serían sustituidas por la cantidad, es decir, lo que se compara ahora es la medida numérica de dos magnitudes homogéneas, de esta manera el número se empieza a asociar con la magnitud, y esto permite que el concepto de proporción avance. Pero el último paso para conocer la idea de proporción como cociente entre dos magnitudes se le debe a John Wallis (1616-1703) y a William Oughtred (1574-1660). Este último es quien expresa las proporciones numéricas en forma de cociente, es decir, dividiendo el antecedente entre el consecuente. En cuanto al primero, Yuste (2004, pág. 9) menciona:

> "Wallis aplicó este concepto también a las razones, afirmando que la razón entre A y B es la denominada $\frac{A}{B}$, es decir, la cantidad que resulta al dividir A entre B. Desde esta perspectiva algebraica, Wallis se permitió realizar productos de magnitudes, porque únicamente manejaba sus cantidades numéricas. Proporcionalidad significaba entonces algo tan sencillo como igualdad de cocientes, y de su esquema tradicional "A es a B como C es a D" [18] concluimos otro bien distinto: "$M = k \cdot N$".

[18] Este es el esquema que aparece en el lenguaje retórico de las demostraciones de al-Khayyām.

Es así como puede evidenciarse que cuando se avanza en el concepto de número, se avanza en el concepto de proporción en donde puede representarse como un cociente entre dos magnitudes.

5. *El método de al-Khayyām.*

Otro aspecto importante a resaltar es que el procedimiento para resolver las ecuaciones de tercer grado por medio de la intersección de cónicas es sistemático en todos los casos, y al igual que otros matemáticos de la historia han utilizado un método[19] para resolver problemas de distinta índole en álgebra y en geometría, al-Khayyām también adquiere su propio método.

En el caso de al-Khayyām, en síntesis el método para resolver ecuaciones de tercer grado es el siguiente:

a) Establece unas condiciones iniciales semejantes en todos los casos.
b) Traza las dos secciones cónicas, cuya elección depende de la forma en que están repartidos los distintos términos en los miembros de cada ecuación. Estos miembros claramente corresponden a los términos constantes, los de primer grado, los de segundo y los de tercer grado.
c) Identifica el punto de intersección de las cónicas.

---

[19] Se puede empezar citando a al-Khwarizmi en donde la proeza de su trabajo consiste -a partir de una teoría de términos primitivos tales como tesoros, raíces y simples números-, en identificar las seis formas normales a las que se puede reducir una ecuación; mostrar las reglas para solucionar dichas ecuaciones así como sus soluciones; y presentar aplicaciones y ejemplos prácticos. En la obra Ars Magna de Cardano (1501-1576), se puede encontrar otro método que se resume en exponer la regla para resolver ecuaciones, luego enunciarla en forma general, la muestra para un caso particular y por último hace la validación geométrica por medio de un gráfico. Según González (2007), en Descartes los pasos a seguir para resolver cualquier problema geométrico consisten en dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios, suponer el problema resuelto, se plantea la ecuación entre las longitudes conocidas y desconocidas, se resuelve la ecuación y por último, realiza la construcción geométrica de la solución.

d) Establece las proporciones a partir de las propiedades y relaciones geométricas de cada curva, dependiendo de la manera en que se exponen en la gráfica.
e) Combina estas dos proporciones haciendo una manipulación de sus términos, en un sentido algebraico.
f) Finalmente, el resultado de esta combinación indica la raíz de la ecuación cúbica que no es otra que la abscisa correspondiente a dicho punto de intersección.

Este es el camino sistemático que sigue al-Khayyām en los catorce casos de ecuaciones cúbicas. Cabe resaltar que para cada tipo de ecuación, al-Khayyām encuentra una construcción de una raíz positiva para la intersección de las dos cónicas.

Con este referente en el que se evocan rápidamente aspectos importantes de la obra de al-Khayyām, y en el que se hace posible ubicar a este matemático del siglo XI en un determinado momento histórico, es en el que se presenta la interpretación moderna que hacen Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) de la obra *Tratado de álgebra de* $al - mu q\bar{a}bala$ por Omar al-Khayyām**.**

3.2 Solución de las ecuaciones de tercer grado reducibles a grados inferiores.

Tomando como referencia la clasificación[20] que hace al-Khayyām de las ecuaciones cúbicas, es decir, las reducibles a grados inferiores y las irreducibles,

[20] Debe recordarse que al-Khwarizmi en el siglo IX había dado solución por radicales para las ecuaciones de los dos primeros grados, pero para las ecuaciones cúbicas aún no se tenía una solución por radicales, por lo que al-Khayyām debe partir de la clasificación inicial de al-Khwarizmi y considerar inicialmente las seis formas normales de ecuaciones a las que se puede reducir una ecuación, y a éstas les introduce el cubo y obtiene seis ecuaciones binomias, doce ecuaciones trinomias y siete ecuaciones cuadrinomias entre las cuales las últimas trece ecuaciones cúbicas más una de las ecuaciones binomias deben ser resueltas

en este apartado se muestran aquellas ecuaciones que según él pueden reducirse a grados inferiores y resolverse con la sola ayuda de los *Elementos* de Euclides. A continuación se presentan las tres ecuaciones tal y como aparecen en la copia del manuscrito original en árabe de al-Khayyām y como podrá observarse, ellas se presentan en un lenguaje puramente retórico.

3.2.1 **Ecuación [10]:** $x^3 + ax^2 = bx$

Un cubo más dos cuadrados son iguales a dos raíces.[21]

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos el cubo $ABCDE$, Prolonguemos AB hasta G y consideremos que AG es igual al número de cuadrados. Completemos el sólido $AGHICD$ como prolongación del cubo AE, así como se hace habitualmente. El sólido AI es entonces igual al número de cuadrados. El sólido BI que es el cubo más un número dado de cuadrados, es entonces igual al número dado de raíces. Construyamos el rectángulo K igual al número dado de raíces. La raíz es el lado del cubo, es decir AD. El rectángulo K, si lo multiplicamos por AD, es entonces igual al número dado de lados. El rectángulo HB, si lo multiplicamos por AD, da el cubo más el número dado de cuadrados. Pero estos dos sólidos son iguales, es decir el sólido BI y el sólido construido sobre K y de altura AD. Sus bases son entonces inversamente proporcionales a sus alturas. Ahora bien, sus alturas son iguales. Sus bases son por consecuencia iguales. Pero la base HB es igual al cuadrado CB más el rectángulo HA, que es igual al número de raíces de este cuadrado, número que había sido dado por los cuadrados ($amw\bar{a}l$). K, número

geométricamente por medio de la intersección de dos curvas cónicas, efectivamente estas son las que demuestra. De las otras once ecuaciones, tres son cúbicas pero según al-Khayyām , estas pueden reducirse a grados inferiores.

[21] Como puede observarse, en estas tres ecuaciones como en las que vendrán, los coeficientes de las ecuaciones son enteros naturales como en las ecuaciones de su antecesor al-Kwharizmi.

dado por las raíces es entonces igual a un cuadrado más el número de raíces dadas por el cuadrado. Esto era lo que queríamos demostrar.

A continuación se muestra la gráfica correspondiente a esta ecuación según al-Khayyām:

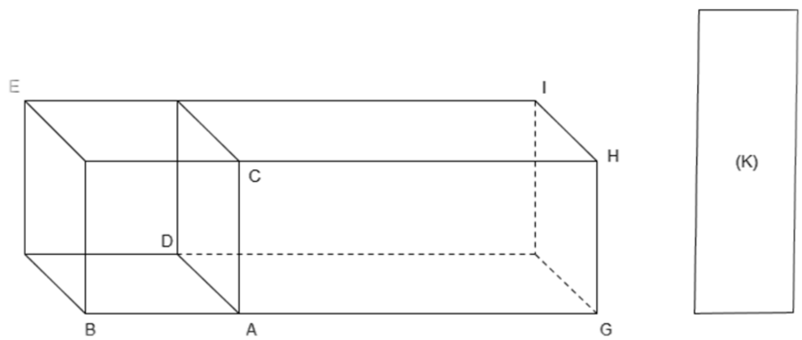

Figura 2. Representación de los sólidos en la ecuación 10 según al-Khayyām.

En un lenguaje moderno, se puede decir que la conclusión dada por al-Khayyām:

"K*, número dado por las raíces, es entonces igual a un cuadrado más el número de raíces dadas por el cuadrado",*

se puede rescribir en la siguiente expresión algebraica:

$$b = x^2 + ax$$

Y esta expresión es la que obtenemos actualmente sacando factor común y dividiendo por x uniformemente en la ecuación cúbica inicial. Esto es:

$$x^3 + ax^2 = bx$$

$$x(x^2 + ax) = bx$$

Por tanto,

$$x^2 + ax = b$$

Así, la ecuación cúbica queda reducida a una ecuación de segundo grado que según al-Khayyām, ya puede resolverse con la ayuda de los *Elementos* de Euclides.

3.2.2 Ecuación [11]: $x^3 + bx = ax^2$

Un cubo más dos raíces son iguales a tres cuadrados. Un cuadrado más dos son iguales a tres raíces.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos el cubo $ABCDE$, el cual, junto con dos de sus raíces sea igual a tres cuadrados; consideremos el cuadrado H igual a CB y K igual a tres. El producto de H por K es entonces tres cuadrados de la raíz del cubo AE. Construyamos sobre AC un rectángulo igual a dos y completemos el sólido $AGCID$, será entonces igual al número de raíces. Pero cuando multiplicamos la recta GB por el cuadrado de AC, resulta el sólido BI, y el sólido AI es igual al número de lados. El sólido BI es entonces igual a un cubo más un número igual al de sus lados. El sólido BI es entonces igual al número de cuadrados. La recta GB, es entonces igual a tres, y el rectángulo BL es un cuadrado más dos. Un cuadrado más dos, son entonces igual a tres raíces, puesto que el rectángulo BL es el producto de AB por tres. Es lo que necesitábamos demostrar.

A continuación se muestra la gráfica de al-Khayyām:

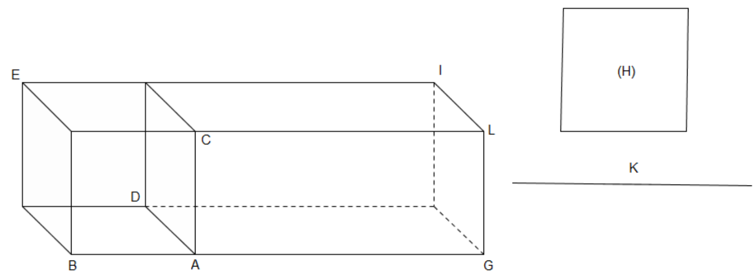

Figura 3. Representación de los sólidos en la ecuación 11 según al-Khayyām

En un lenguaje moderno, se puede decir que la conclusión dada por al-Khayyām:

“Un cuadrado más dos, son entonces igual a tres raíces”,

se puede rescribir en la siguiente expresión algebraica:

$$x^2 + b = ax$$

Y esta expresión es la que obtenemos actualmente sacando factor común y dividiendo por x uniformemente en la ecuación cúbica inicial. Esto es:

$$x^3 + bx = ax^2$$

$$x(x^2 + b) = ax^2$$

Por tanto,

$$x^2 + b = ax$$

Así, la ecuación cúbica queda reducida a una ecuación de segundo grado que según al-Khayyām, ya puede resolverse con la ayuda de los *Elementos* de Euclides.

3.2.3 Ecuación [12]: $x^3 = ax^2 + bx$

Un cubo es igual a un cuadrado más tres raíces. Un cuadrado es igual entonces a una raíz más tres en número.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos el cubo $ABCDE$, que sea igual aun cuadrado más tres de sus lados. Separemos la recta AB, que es su lado, la recta AG igual al número de sus cuadrados, que es uno, y completemos el sólido $AGIHC$. El sólido $AGHIC$ es entonces igual al número dado de cuadrados. Queda el sólido GE igual al número dado de lados. Pero la relación de estos dos sólidos entre ellos es igual a la relación de la base GC a la base GL, así como se demostró en el *onceavo libro de los Elementos*, porque las dos alturas son iguales. Pero el rectángulo GC es igual a una vez la raíz del cuadrado $CB,$ y el rectángulo GL es igual al número de raíces, que es tres. El cuadrado CB es entonces igual a una sola raíz más tres en número. Es lo que queríamos demostrar.

A continuación se muestra la gráfica de al-Khayyām:

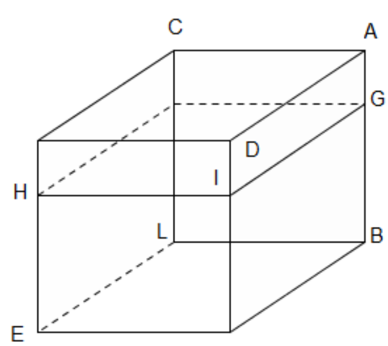

Figura 4. Representación del sólido en la ecuación 10 según al-Khayyām.

En un lenguaje moderno, se puede decir que la conclusión dada por al-Khayyām:

“El cuadrado CB es entonces igual a una sola raíz más tres en número”,

se puede rescribir en la siguiente expresión algebraica:

$$x^2 = ax + b$$

Esta expresión es la que obtenemos actualmente sacando factor común y dividiendo por x uniformemente en la ecuación cúbica inicial. Esto es:

$$x^3 = ax^2 + bx$$

$$x^3 = x(ax + b)$$

Por tanto,

$$x^2 = ax + b$$

Así, la ecuación cúbica queda reducida a una ecuación de segundo grado que según al-Khayyām, ya puede resolverse con la ayuda de los Elementos de Euclides.

3.3 Solución de las ecuaciones de tercer grado irreducibles a grados inferiores.

En este apartado se presentan las catorce ecuaciones que no pueden ser resueltas geométricamente con la sola ayuda de los *Elementos* de Euclides, si no con la intersección de cónicas.

Para ello, al-Khayyām presenta tres lemas[22] necesarios en sus demostraciones. En el primer lema indica la elección de curvas cónicas convenientes para la

[22] Cabe resaltar que estos lemas tal y como se presentan aquí, son una interpretación moderna que hacen los historiadores Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999). Estos lemas aparecen también en lenguaje retórico en la copia del manuscrito original en árabe de al-Khayyām.

demostración geométrica de cada ecuación. El segundo y el tercer lema hacen alusión a la construcción de un sólido igual a un sólido dado y son importantes para garantizar la existencia del sólido buscado.

A continuación se presentan dichos lemas.

LEMA 1:

Encontrar dos segmentos entre dos segmentos dados tales que los cuatro estén en una proporción continua.

Sean AB y BC dos segmentos dados tales que $AB \perp BC$. Trazar una parábola $\mathcal{P}_1$ de vértice B, de eje BC y de lado recto BC; su posición es conocida, y por la *proposición 32 del Libro I de las Cónicas*[23], ella es tangente a AB en B. Trazar una segunda parábola $\mathcal{P}_2$ de vértice B, de eje AB y de lado recto AB, su posición es conocida, y por la *proposición 52 del Libro I de las Cónicas*[24], ella es tangente a BC en B. Por lo tanto la parábola $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se cortan en un punto, sea D ese punto; ese punto es de posición conocida. Sean I y H las proyecciones ortogonales de D en AB y BC respectivamente:

[23] *Proposición 32 del Libro I de las Cónicas de Apolonio*: La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección.

[24] *Proposición 52 del libro I de las cónicas de Apolonio*: Dada en un plano una recta terminada en un punto, construir en el plano la sección cónica llamada parábola tal que su diámetro sea la recta dada, su vértice el extremo de esta y el cuadrado de toda recta trazada de la sección al diámetro bajo un ángulo dado equivalga al rectángulo limitado por la recta que se separa a partir del vértice y otra recta dada.

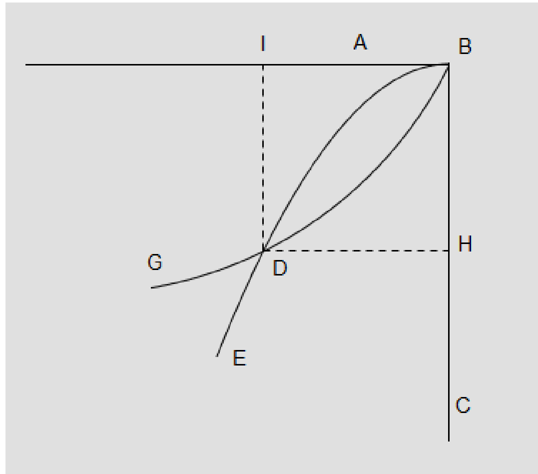

Figura 5. Representación de la intersección de las dos parábolas según al-Khayyām.

$$D \in \mathcal{P}_1 => HD^2 = BH \cdot BC$$

De donde

$$\frac{BC}{HD} = \frac{BC}{BI} = \frac{HD}{BH} = \frac{BI}{BH}$$

$$D \ \in \ \mathcal{P}_2 => \ DI^2 = BH^2 = BA \cdot BI$$

De donde

$$\frac{BI}{BH} = \frac{BH}{BA}$$

Y finalmente,

$$\frac{BA}{BH} = \frac{BH}{BI} = \frac{BI}{BC}$$

Los segmentos BH y BI son los segmentos buscados.

Según los historiadores Rashed, R & Vahabzadeh, B , la elección de las curvas según al-Khayyām se explica por dicha proporción. Este lema se ha demostrado muchas veces antes de al-Khayyām, empezando por Menecmo[25] según Eutocio[26], Diocles[27].

LEMA 2:

Sea $(ABCDE)$ *un paralelepípedo rectangular de base cuadrada* $(ABCD)$ *y* (MH) *otro cuadrado dado. Construir sobre* (MH) *un paralelepípedo rectangular igual al sólido* $(ABCDE)$.

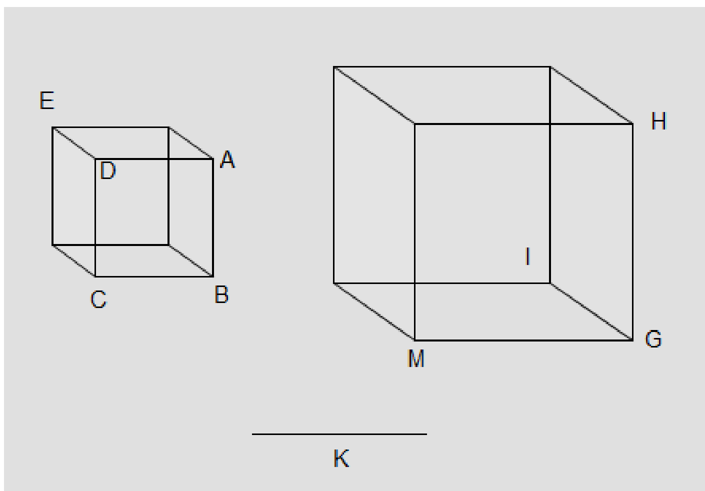

Figura 6. Representación de los dos paralelepípedos rectangulares según al-Khayyām.

Sea MG un lado de (MH) y K un segmento tal que

[25] Matemático y geómetra del siglo IV quien hizo varios aportes a la historia de las matemáticas, en especial, con su trabajo sobre el estudio de las secciones cónicas y sus propiedades.

[26] Matemático griego del siglo VI del cual no se conoce mucho. Entre lo poco que se sabe de él, se dice que se le conoce por los comentarios sobre las obras de Arquímedes y Apolonio y con los cuales hizo trabajos importantes.

[27] Matemático y geómetra de la Antigua Grecia que vivió en el siglo III . Fue contemporáneo de Apolonio de Perge Sus trabajos tuvieron gran influencia en la matemática árabe y también comentó la obra de las Cónicas de Apolonio.

$$(1) \qquad \frac{AB}{MG} = \frac{MG}{K}$$

Sea el segmento ED la altura de $(ABCDE)$ y GI un segmento tal que $GI \perp (MH)$ en G y que:

$$(2) \qquad \frac{AB}{K} = \frac{GI}{ED} \quad ;$$

Entonces $(MGIH)$ es el sólido buscado. En efecto, tenemos

$$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{AB}{K},$$

Y

$$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{AB^2}{MG^2} = \frac{AB}{MG} \cdot \frac{MG}{K} \qquad por\ (1)$$

De donde

$$\frac{(AC)}{(MH)} = \frac{GI}{ED},$$

Y

$$\frac{AB}{K} = \frac{GI}{ED} \qquad por\ (2)$$

Por la *proposición 34 del Libro XI de los Elementos*[28], los dos sólidos son iguales. De esta manera podemos construir un paralelepípedo de base cuadrada, igual a

[28] *Proposición 34 del libro XI de los Elementos de Euclides:* Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y en aquellos sólidos paralelepípedos, las bases de los cuales están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.

otro paralelepípedo de base cuadrada. En el siguiente lema, es la altura a la que se hace referencia.

LEMA 3:

Sea $(ABCD)$ *un paralelepípedo rectangular de base cuadrada* AC*; construir un paralelepípedo rectangular de base cuadrada y de altura igual a un segmento* EI *dado que sea igual al sólido* $(ABCD)$.

Sea un segmento K tal que

$$\frac{EI}{BD} = \frac{AB}{K}$$

Y un segmento $EG \perp EI$ tal que

$$\frac{AB}{EG} = \frac{EG}{K} \qquad (1)$$

Completamos el sólido $(HEIG)$, con $HE \perp IG$ y $HE = GE$. El sólido de base cuadrada (HG) y de altura EI es igual al sólido $(ABCD)$.

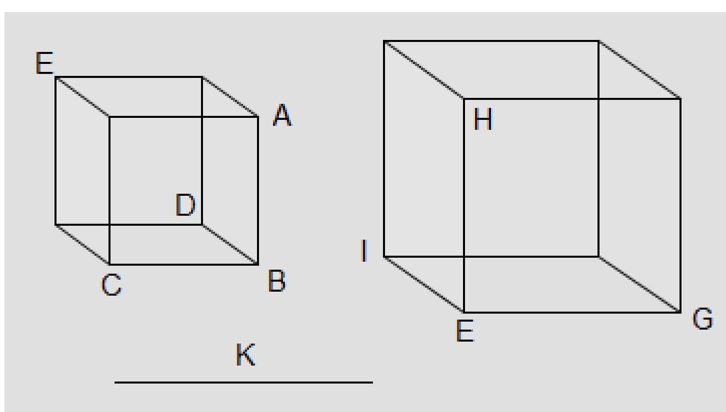

Figura 7. Representación de los dos paralelepípedos rectangulares según al-Khayyām.

En efecto,

$$\frac{(AC)}{(HG)} = \frac{AB}{K}$$

Además,

$$\frac{(AC)}{(HG)} = \frac{AB^2}{EG^2} = \frac{AB}{EG} \cdot \frac{EG}{K} \qquad por\ (1).$$

De donde

$$\frac{(AC)}{(HG)} = \frac{EI}{BD}$$

De otra parte, la tipología obtenida por al-Khayyām le permite identificar todos los tipos de ecuaciones de tercer grado, clasificadas formalmente según donde se ubican en los miembros de la ecuación, los términos constantes, los de primer grado, los de segundo y los de tercer grado.

A continuación se presenta una clasificación de las ecuaciones cúbicas irreducibles a grados inferiores, a partir de la forma en que se presentan los términos de diferentes grados, esto con el fin de poder realizar el estudio de las mismas ya que el procedimiento que realiza al-Khayyām es sistemático. La clasificación es la siguiente:

1. Ecuaciones binomias en donde aparece el cubo (x^3) y el número (c).
   En su clasificación, se encuentra una sola ecuación de esta forma.

2. Ecuaciones trinomias en donde aparece el cubo (x^3) el número (c) y el lado (bx).
   En su clasificación, se encuentran tres ecuaciones que incluyen estos términos.

3. Ecuaciones trinomias en donde aparece el cubo (x^3), el número (c) y el cuadrado (ax^2).

   En su clasificación, se encuentran tres ecuaciones que incluyen estos términos.

4. Ecuaciones cuadrinomias en donde aparece cubo (x^3), el número (c) el lado (bx) y el cuadrado (ax^2).

   En su clasificación, se encuentran siete ecuaciones que incluyen estos términos.

En la siguiente tabla se aprecia dicha clasificación:

Ecuaciones binomias en donde aparece el cubo (x^3) y el número (c).		
3	Cubo de la cosa igual a número	$x^3 = c$
Ecuaciones trinomias en donde aparece el cubo (x^3), el número (c) y el lado (bx).		
13	Cubo de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + bx = c$
14	Cubo de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + c = bx$
15	Cubo de la cosa igual a cosa más número	$x^3 = bx + c$
Ecuaciones trinomias en donde aparece el cubo (x^3), el número (c) y el cuadrado (ax^2).		
16	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número	$x^3 + ax^2 = c$
17	Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + c = ax^2$
18	Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 = ax^2 + c$
Ecuaciones cuadrinomias en donde aparece cubo (x^3), el número (c), el lado (bx) y el cuadrado (ax^2).		
19	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + ax^2 + bx = c$
20	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + ax^2 + c = bx$
21	Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + bx + c = ax^2$
22	Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número	$x^3 = ax^2 + bx + \mathrm{c}$
23	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número	$x^3 + ax^2 = bx + \mathrm{c}$
24	Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 + bx = ax^2 + \mathrm{c}$
25	Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa	$x^3 + c = ax^2 + bx$

Tabla 1. Clasificación de las ecuaciones irreducibles a partir de la forma en que se presentan los términos de los diferentes grados.

3.3.1 Ecuación [3]: $x^3 = c$

Cubo de la cosa igual a número

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza el Lema 1 que se demuestra a partir de la intersección de dos parábolas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $AB = BC = 1$ y $BD \perp (AC)$ y un punto B tal que $BD = c$.

El sólido $(ABCD) = c$.

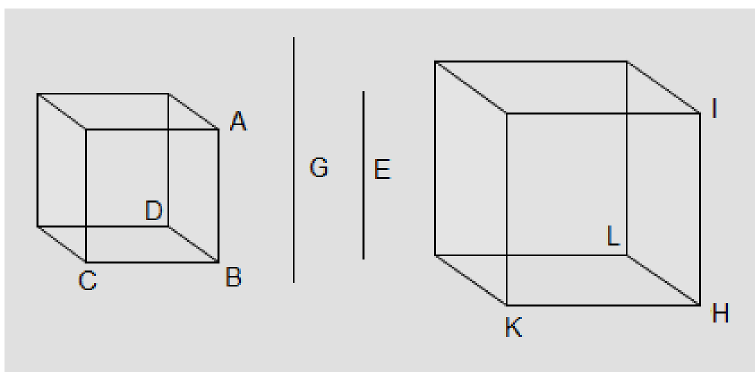

Figura 8. Representación de los dos sólidos según al-Khayyām.

Se pueden encontrar dos segmentos E y G tales que

$$\frac{AB}{E} = \frac{E}{G} = \frac{G}{BD}$$

Por el Lema 1 esto es posible.

Debe recordarse que el Lema 1 garantiza que, en este caso, a partir de AB y BD se pueden encontrar E y G tales que se pueda cumplir la anterior relación.

Supongamos que $HI = E$ y construimos el cubo $(IHKL)$, entonces el es igual a $(ABCD)$. En efecto

$$\frac{(AC)}{(IK)} = \frac{AB^2}{HK^2} = \frac{AB}{G} = \frac{HK}{BD},$$

En otras palabras, lo que indica esta expresión es:

$$HK^3 = AB^2 \cdot BD$$

En el lenguaje retórico de al-Khayyām , puede concluirse que el cubo de HK es igual al sólido que tiene como base el cuadrado de AB y altura BD. Así, la raíz de la ecuación es HK, y en términos modernos corresponde a decir que $x = HK$. Además por hipótesis se tiene que $BD = c$ y que en este caso $AB = 1$. Por tanto, si se quiere escribir algebraicamente una expresión equivalente a la anterior, se tiene que:

$$x^3 = 1 \cdot c \ \rightarrow x^3 = c$$

Según Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999), para mostrar la existencia del lado x del cubo igual a c, al-Khayyām aplica el Lema 1 y la demostración es la de las dos parábolas. Para determinar las longitudes E y G, el utiliza la intersección de la parábola $\mathcal{P}_1$ de ecuación $uy = x^2$ y la parábola $\mathcal{P}_2$ de ecuación $\frac{uy^2}{c} = \frac{x}{u}$, u designa la unidad de la longitud. Ellas se cortan en un punto donde las ordenadas son las longitudes buscadas.

En términos de x y y, se puede decir que a partir del Lema 1 es posible encontrar dos segmentos x y y tales que:

$$\frac{AB}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{BD}$$

Pero por hipótesis se tiene que $AB = BD = 1$ y además $BD = c$, por lo que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{c}$$

De aquí se tiene que $x^2 = y$ y entonces:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{c} = \frac{x^2}{c}$$

De donde

$$x^3 = c$$

Se debe recordar que la base de esta demostración es el Lema 1 que al-Khayyām sustenta con la intersección de dos parábolas.

En esta ecuación notoriamente la solución es el segmento x.

A partir de esta ecuación, al-Khayyām solamente trabajará con segmentos de recta con los que opera para obtener la raíz de cada ecuación en los diversos casos de ecuaciones cúbicas.

3.3.2 Ecuación [13]: $x^3 + bx = c$

Cubo de la cosa más cosa igual a número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la circunferencia.

DEMOSTRACIÓN:

Sea AB el lado de un cuadrado k, de área igual a b. BC será la altura del sólido construido sobre el cuadrado k tal que:

$$AB^2 \cdot BC = c$$ [29]

Esta expresión en la demostración de Rashed, R & Vahabzadeh, B corresponde según el Lema 2 (recordemos que al-Khayyām demuestra estos lemas para garantizar la existencia de los sólidos construidos en sus demostraciones) al volumen del paralelepípedo que se construye sobre el cuadrado k. El lado AB al cuadrado corresponde a que la base del paralelepípedo es cuadrada. Así, el producto entre las longitudes del largo, ancho y alto determina el volumen del sólido construido sobre el cuadrado k. En otras palabras, la idea de al-Khayyām es construir un paralelepípedo a partir del cuadrado k como base, considerando que según el Lema 2, es posible hallar la altura de un segundo paralelepípedo conociendo un lado de la base y la altura de un primer paralelepípedo, en este caso, se conoce una cara del paralelepípedo que es el cuadrado k. Esto significa según lo que puede observarse en esta demostración y según Rashed, R &

[29] Como se anotó antes, esta forma de escritura en donde se involucran algunas expresiones algebraicas, proporciones en forma de cocientes, corresponde a una interpretación moderna que hacen Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) de la demostración de al-Khayyām dada en lenguaje retórico. Esta expresión en el lenguaje de al-Khayyām significa que: Se construye un sólido donde la base es igual al cuadrado de AB y donde la altura es igual a BC, este sólido es igual a un número.

Vahabzadeh, B que al-Khayyām garantiza a partir del lema 2 que estos sólidos existen.

Podría suponerse que la manera en que al-Khayyām inicia su demostración, trae consigo las formas de razonamiento de la matemática y la geometría griega particularmente de Apolonio, Euclides y Pappus, ya que al garantizar la existencia del sólido construido a través de los tres Lemas que demuestra, se evidencian elementos del método analítico[30] de sus antecesores y que siglos después de al-Khayyām se despliega con mayor auge en la solución de ecuaciones cúbicas realizadas por Cardano, Tartaglia, Descartes, Vieta, entre otros.

Prosiguiendo con la demostración, se tiene que $BC \perp AB$. Se prolonga AB hasta el punto G. Se traza la parábola HBD de vértice B, de eje BG y de lado recto AB. Esta parábola será de posición conocida y será tangente a BC en B.

Se traza un semi-círculo de diámetro BC y que corta necesariamente a la parábola en un punto D. Este punto D es de posición conocida. Sea $DG \perp BG$ y $DE \perp BC$; las dos perpendiculares DG y DE son también de posición conocida.

Como puede observarse en la demostración de Rashed, R & Vahabzadeh, B y por consiguiente, en la de al-Khayyām**,** el diámetro de este semi-circulo que se

[30] Este método es enunciado por Pappus de Alejandría (S. III d.C) en el libro VII de su colección matemática. Así como lo describe Fernández et al (2012), el método analítico consiste en “asumir como dado (verdadero) lo que se pretende construir (demostrar) hasta que de esta hipótesis se obtenga una condición (o enunciado) alcanzada por una síntesis previa”. Estos autores mencionan también que algunos escritos matemáticos como por ejemplo *El Libro de las cónicas de Apolonio* presenta proposiciones que han sido demostradas bajo la constitución de dicho método. Cabe resaltar nuevamente que en sus demostraciones, al-Khayyām justifica gran parte de sus razonamientos, con el *libro de las cónicas de Apolonio,* como consecuencia de esto, podría pensarse que esa es la razón por la que en sus trabajos sigue predominando este legado de muchos siglos anteriores a él.

Así mismo, González (2007), expresa que el método analítico asume como verdadero lo que se debe probar, y a su vez se hacen razonamientos para alcanzar un resultado que podría ser cierto debido a que fue previamente establecido. González afirma que a partir del estudio de los trabajos de Descartes puede observarse que él realiza una aplicación directa del proceso análisis-síntesis de los griegos cuando considera como resueltos los problemas que va a solucionar.

construye corresponde a la altura del paralelepípedo dado inicialmente. La altura del nuevo paralelepípedo construido será la que se determinará a partir del punto de intersección entre las cónicas.

Vale aclarar que el cuadrado k de lado $\sqrt{b}$ sobre el cual al-Khayyām construye el paralelepípedo, puede construirse a partir de la *proposición 13 del libro VI de los Elementos*, la cual explica que a partir de dos rectas, en este caso, CE y EB, puede encontrarse una media proporcional de ellas. Para ello se inscribe el semi-circulo de diámetro BC que al-Khayyām menciona en su demostración. A partir del punto E se construye una línea recta perpendicular a CB que cortará el semi-circulo en un punto D. Al unirse las líneas BD y DC se obtiene el triángulo BDC. Como ED resulta a partir de un ángulo recto perpendicular a la base CB, entonces ED es una media proporcional de CE y EB. La ilustración se muestra a continuación:

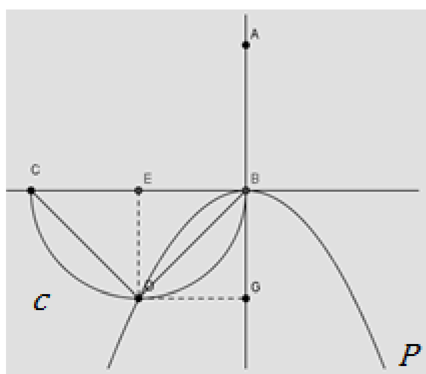

Figura 9. Representación de la media proporcional $\boldsymbol{ED}$ dada por la proposición 13 del Libro VI de los Elementos de Euclides.

Siguiendo con la demostración, la ecuación de la parábola resulta:

$$DG^2 = BG \cdot AB$$ [31]

[31] Aunque como ya se dijo, esta expresión está escrita en un lenguaje moderno por los investigadores, corresponde a la traducción de las expresiones que presenta al-Khayyām en leguaje retórico. Es evidente que al-Khayyām reconoce muy bien las propiedades de las cónicas y para cada una de ellas presenta la relación entre sus áreas y sus longitudes en forma de proporción, tal como aparece en todas las demostraciones.

A continuación se presenta la gráfica de la intersección de las cónicas:

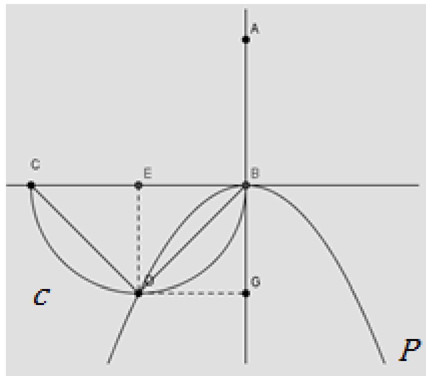

Figura 10. Representación de la intersección de la parábola y el semi-circulo según al-Khayyām.[32]

Pues

$$\frac{AB}{DG} = \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BG} = \frac{BE}{ED}$$

Pero

$$\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$$

(Potencia de un punto[33] con relación a un círculo), pues

[32] Esta gráfica y todas las que se mostrarán en adelante, son una adaptación de las que aparecen en el texto de *Al-Khayyām Mathématicien* por los historiadores. La diferencia entre las gráficas de al-Khayyām y las de los historiadores es que la designación de letras para los segmentos en la gráfica de al-Khayyām están en su lengua vernácula árabe.

Como se mencionó antes de presentar la solución a estas ecuaciones, las líneas de referencia que utiliza al-Khayyām en sus gráficas, juegan un papel de sistemas de coordenadas que vienen a presentarse como tal seis siglos después de al-Khayyām con Descartes y Vieta en su geometría analítica. Es así como para al-Khayyām, los referentes cartesianos que se conocen hoy, siguen siendo interpretados como en Apolonio.

[33] En geometría elemental, la expresión *potencia de un punto* se refiere a un resultado que relaciona a las longitudes de segmentos de recta que pasan por dicho punto y cortan a una circunferencia fija. El término potencia para referirse a este concepto matemático fue introducida por Jakob Steiner en un artículo de 1826 aunque el teorema al que hace referencia ya se encontraba en los Elementos de Euclides.

$$\frac{AB}{BE} = \frac{ED}{EC}$$

De donde

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EC}$$

Además

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{BE}{ED} = \frac{BE}{EC}$$

Pues

$$AB^2 \cdot EC = BE^3$$

Así, la demostración de al-Khayyām dada por Rashed, R & Vahabzadeh, B (1999) puede sintetizarse de la siguiente forma:

En un sentido geométrico, la idea de al-Khayyām es encontrar dos proporciones a partir de las relaciones y propiedades geométricas de las dos secciones cónicas, teniendo en cuenta la manera en que se muestran estas curvas en la figura 10.

Como ya se mencionó, a partir del triángulo CDB inscrito en el semi-círculo (*mirar figura 9*), se obtienen dos triángulos rectángulos DEB y DEC que son semejantes[34] entre sí. Como DE es media proporcional de los segmentos BE y CE,

---

En términos euclidianos, esta proporción es la que representa la media proporcional de los segmentos BE y EC que se sustenta con la proposición 13 del libro VI de los Elementos de Euclides la cual se citó anteriormente.

Como puede observarse, a cada segmento de recta al-Khayyām asocia letras. Este hecho guarda similitud con el trabajo de Descartes quien designa letras a los segmentos con los que opera.

[34] *La proposición 8* y el *corolario* de la *proposición 8 del Libro VI de los Elementos* de Euclides sustenta que si en un triángulo rectángulo, se dibuja una perpendicular a la base, formando de esta manera un ángulo recto con la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes entre sí, en otras palabras, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina. En este caso,

las relaciones geométricas que explican este hecho, están dadas por la siguiente proporción:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$$

De otra parte, como D está sobre la segunda sección cónica que es la parábola, a partir de las relaciones y propiedades geométricas de esta curva, se establece la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED}$$

Al-Khayyām combina[35] estas dos proporciones, haciendo una manipulación algebraica de sus términos y así se obtiene en términos geométricos lo siguiente:

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{BE}{ED}$$

Y cancelando los términos ED se tiene que:

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EC}$$

---

el triángulo rectángulo es BDC, la base es BC y la perpendicular a la base es DE que fue construida a partir de la media proporcional de la *proposición 13 del libro VI de los Elementos* que ya se anotó antes.

[35] Puede observarse que si $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED}$ y a su vez $\frac{BE}{ED} = \frac{ED}{EC}$, por transitividad se tiene que $\frac{AB}{BE} = \frac{ED}{EC}$. Ahora, si combinamos la primera proporción con esta última, tenemos que $\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{ED} \cdot \frac{ED}{EC}$ y de aquí es que se cancelan los términos ED para llegar a la expresión final que alude en términos modernos a la raíz buscada x. Como puede observarse, al-Khayyām efectúa las mismas operaciones que se utilizan en la aritmética, para llegar a expresar los volúmenes de los sólidos. En todas las demostraciones podrá notarse evidentemente este hecho.

Esta proporción según al-Khayyām indica que las alturas BE y EC son inversamente proporcionales a sus bases que son los cuadrados de AB y BE. De esta proporción se deduce que:

$$AB^2 \cdot EC = BE^3$$

Esta es la expresión que aparece en la demostración de al-Khayyām dada por Rashed, R & Vahabzadeh (1999). Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base cuadrada es AB y de altura EC, es igual al cubo de BE. (implícitamente este resultado muestra la aplicación del Lema 2 y 3 descritos anteriormente).

Para al-Khayyām, la solución de la ecuación es el último término que está elevado al cubo después de haber combinado las dos proporciones que resultan de las propiedades y relaciones geométricas de las dos cónicas en la gráfica. En otras palabras, el término BE corresponde a la raíz buscada de la ecuación y no es más que la abscisa para la cual se encuentra el punto de intersección de las secciones cónicas, que en términos modernos corresponde a x. La solución de la ecuación en todas las demostraciones, al-Khayyām la expresa como la igualdad entre los dos sólidos.

A partir de la interpretación moderna en términos geométricos dada por Rashed, R & Vahabzadeh (1999) podría hacerse otra interpretación algebraica considerando entonces $x = BE$. Esta interpretación es la siguiente:

Como el segmento $BE = x$ y el lado del cuadrado k inicial es AB y de área b, entonces,

$$AB = \sqrt{b}$$

Entonces la ecuación que se quiere resolver, se puede rescribir remplazando términos, así:

$$x^3 + bx = BE^3 + AB^2 \cdot BE$$

Pero como $AB^2 \cdot EC = BE^3$, que es el resultado de combinar las dos proporciones, entonces sustituyendo tenemos que:

$$x^3 + bx = AB^2 \cdot EC + AB^2 \cdot BE$$

Ahora, sacando factor común AB^2 tenemos:

$$x^3 + bx = AB^2(BE + EC)$$

Pero $BE + EC = BC,$ entonces remplazando, tenemos:

$$x^3 + bx = AB^2 \cdot BC$$

Pero recordemos que la altura inicial del sólido que al-Khayyām construye sobre el cuadrado k es BC , y además que $AB = \sqrt{b}$. Por tanto,

$$x^3 + bx = AB^2 \cdot BC = b \cdot h = c$$

El comentario matemático que hace R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) es importante debido a que ellos explican en términos algebraicos la elección de las curvas que hace al-Khayyām. Es decir, ellos mencionan que si se consideran los ejes (AB, BC) como los ejes $(Ox, Oy),$ la ecuación [13] se reescribe:

$$\frac{x^4}{b} = \frac{c}{b}x - x^2$$

a partir de las ecuaciones algebraicas de las cónicas. Esto es,

$y^2 = x\left(\frac{c}{b} - x\right)$ Ecuación del círculo $\mathscr{C}$

$y\sqrt{b} = x^2$ Ecuación de la parábola $\mathcal{P}$

Y efectivamente, nótese que si al lado derecho de la expresión $\frac{x^4}{b} = \frac{c}{b}x - x^2$, se saca factor común x, la expresión resulta ser la ecuación del círculo $\mathscr{C}$. Así, se puede decir que:

$$\frac{x^4}{b} = y^2$$

Y también que,

$$y^2 = \frac{c}{b}x - x^2$$

Pero según la ecuación de la Parábola $\mathcal{P},\ y\sqrt{b} = x^2$.
Lo anterior implica que:

$$y^2 = \frac{x^4}{b}$$

Y así:

$$\frac{x^4}{b} = \frac{c}{b}x - x^2$$

Por lo que la ecuación [13] puede rescribirse a partir de las ecuaciones algebraicas del círculo y la parábola. Al-Khayyām combina las proporciones que resultan de las relaciones geométricas de las dos secciones cónicas en la gráfica, y por otro lado, R. Rashed & B. Vahabzadeh (1999) muestran que al combinar las ecuaciones algebraicas de dichas cónicas, efectivamente corresponde al procedimiento realizado geométricamente por Al-Khayyām en el siglo XI. En el caso de la parábola, la ecuación que presenta al-Khayyām en términos modernos es:

$$DG^2 = BG \cdot AB$$

Y corresponde también a la ecuación de la parábola que se escribe en el comentario matemático de los historiadores R.Rashed y B.Vahabzadeh:

$$y\sqrt{b} = x^2$$

Siendo $EB^2 = x^2 = DG^2,\ AB = \sqrt{b}$, y $BG = y$.
Es así como al-Khayyām muestra que si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ se cortan en un punto (x_0, y_0) - $(0{,}0)$ entonces este punto es raíz de la ecuación [13]. En efecto tenemos:

$$\frac{\sqrt{b}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{\frac{c}{b} - x_0}$$

Pues,

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{x_0}{\frac{c}{b} - x_0}$$

De donde se deduce

$${x_0}^3 = b\left(\frac{c}{b} - x_0\right)$$

En este caso, como D es el punto en el que se cortan las dos curvas, D es raíz de la ecuación [13]. Si $b > 0$ y $c > 0$, la ecuación [13] tiene una sola solución, la solución es positiva y es la que al-Khayyām determina, además es la única solución que reconoce. También consideran que la elección del semi-círculo y de la parábola no es la única posible. Se puede considerar la parábola de ecuación $y = x^2 + b$ y la hipérbola de ecuación $y = c/x$, de manera que se puede escribir la ecuación [13] bajo la forma $x(x^2 + b) = c;$ pero esto va en contra de la homogeneidad[36].

[36] Al respecto, debe observarse que en todas las proporciones de al-Khayyām, las relaciones se hacen con términos homogéneos, es decir, al igual que Euclides, él trata con dos superficies, o dos segmentos de la misma especie. Es por esto, que aunque la ecuación puede resolverse más directamente con otras dos curvas distintas a las que emplea al-Khayyām, él no lo hace para respetar dicha homogeneidad en los términos.

3.3.3 Ecuación [14]: $x^3 + c = bx$

Cubo de la cosa más número igual a cosa

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $AB = \sqrt{b},\ BC \perp AB;$ se construye

$$AB^2 \cdot BC = c$$

Esta expresión es la misma consideración inicial que en la ecuación inmediatamente anterior, donde AB es un lado del cuadrado k inicial y BC la altura del sólido construido sobre el cuadrado k inicial. Cabe anotar que como se dijo en la ecuación precedente, esta expresión se debe a que la base del sólido es cuadrada, por lo que el producto entre las longitudes del largo, ancho y alto que corresponden al volumen del sólido, es igual a c.

Se traza la parábola DBE de vértice B, de eje AB y de lado recto AB, así como la hipérbola ECG de vértice C, de eje BC y de diámetro transverso BC. Por la *proposición 54 del Libro I de las Cónicas*[37], la hipérbola ECG es de posición conocida. La parábola y la hipérbola pueden encontrarse o no.

[37] *La proposición 54 del Libro I de las cónicas* garantiza la existencia y construcción de la hipérbola dadas dos rectas perpendiculares entre sí, y construyendo la hipérbola sobre la prolongación de una de ellas del lado del ángulo recto.

A continuación se presenta la gráfica en la que puede observarse la intersección de las cónicas.

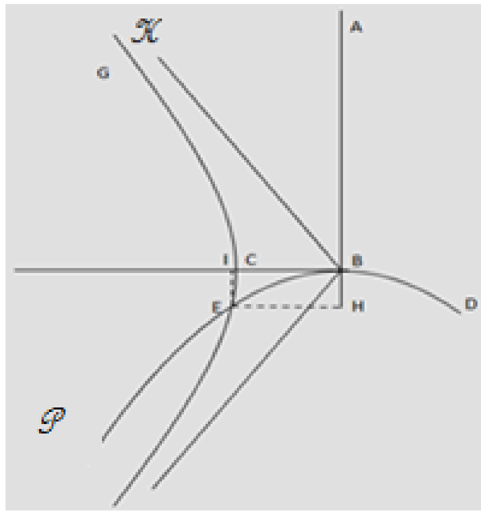

Figura 11. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām**.**

Es de anotarse que igualmente que en la ecuación anterior, aquí $BC \perp AB$, por lo que se puede dar el mismo significado a estos segmentos. A su vez, se hacen las prolongaciones de ellos. De nuevo, se identifica el punto de intersección de las dos secciones cónicas como se verá a continuación en el *caso 3*.

Hay que tener en cuenta que es necesario presentar los casos que se muestran en la demostración y resaltar que para Omar al-Khayyām no existen soluciones negativas ni mucho menos soluciones donde involucre números complejos.

Continuando con la demostración, los casos que pueden presentarse son los siguientes:

- (DBE) y (ECG) no se encuentran, en este caso el problema es imposible.
- Ellas se encuentran en un solo punto que es un punto de tangencia.

- Ellas se encuentran en dos puntos, esos puntos serán conocidos. Sea E un punto de encuentro; sean I y H las proyecciones de E sobre BC y BA respectivamente. EI y EH son de magnitud y de posición conocida.

Tenemos que $E \in (ECG)$, pues

$$\frac{EI^2}{BI \cdot IC} = \frac{BC}{BC}$$

Por la *proposición 21 del Libro I de las Cónicas*[38]

Pues

$$EI^2 = BI \cdot IC,$$

De donde

$$\frac{BI}{IE} = \frac{IE}{IC}$$

De otra parte

$$BI^2 = EH^2 = BH \cdot BA$$

Porque $E \in (DBE)$, por la *Proposición 11 del Libro I de las Cónicas*[39]*;* de donde

---

[38] La *proposición 21 del Libro I de las Cónicas* dice que los cuadrados de las rectas trazadas ordenadamente en la hipérbola, en la elipse o en la circunferencia, es decir, EI^2 y BH^2 (En este caso solo se considera la recta EI), sobre el diámetro (según la hipótesis, el diámetro es BC o BI·IC) son a las áreas limitadas por las rectas que determinan a partir de los extremos del lado transverso de la figura, como el lado recto de esta (BC) es al transverso (BC), y serán entre sí como las áreas limitadas por las rectas.

[39] *Proposición 11 del Libro I de las Cónicas* : Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano, secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH} = \frac{BI}{EI} = \frac{IE}{IC}$$

Pues

$$\frac{AB^2}{BI^2} = \frac{BI}{IC}$$

Pues

$$BI^3 = AB^2 \cdot IC$$

Cabe resaltar que al-Khayyām utiliza las mismas proporciones en esta ecuación y en la precedente, identificando el punto de encuentro de las dos cónicas, con la diferencia de que en la ecuación anterior es una parábola y un circulo, sin embargo se le da el mismo significado a los segmentos AB y BC.

Así, la demostración de al-Khayyām puede sintetizarse de la siguiente manera:

En un nivel propiamente geométrico, al-Khayyām establece las propiedades y relaciones geométricas de la hipérbola en la figura 11, mediante la siguiente proporción:

$$\frac{BI}{IE} = \frac{IE}{IC}$$

De otra parte, por ser E un punto de la parábola, se establecen las relaciones geométricas de esta curva mediante la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH}$$

Considerando que los segmentos BH y EI son iguales, al-Khayyām combina estas dos proporciones mediante una manipulación algebraica de sus términos y tiene que:

$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH} = \frac{BI}{EI} = \frac{EI}{IC}$$

Por tanto,

$$\frac{AB^2}{BI^2} = \frac{BH^2}{CI^2} = \frac{BI \cdot CI}{CI^2} = \frac{BI}{CI}$$

Con $EI^2 = BH^2 = BI \cdot IC$ (a partir de la parábola)

Cancelando los términos CI, se tiene:

$$\frac{AB^2}{BI^2} = \frac{BI}{CI}$$

De donde se deduce:

$$BI^3 = AB^2 \cdot IC$$

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el cubo de BI es igual a un sólido donde la base es el cuadrado de AB y de altura IC.

Nuevamente, aunque la demostración de al-Khayyām no indica explícitamente que $x = BI$, debido a su lenguaje retórico, para él la raíz de la ecuación cúbica en este caso es BI que corresponde de nuevo a la abscisa para la cual se encuentra el punto de intersección E.

Interpretando modernamente el significado de BI para al-Khayyām, tenemos que $BI = x$, entonces la ecuación que se quiere resolver, se puede reescribir remplazando términos, así:

$$c + x^3 = AB^2 \cdot BC + BI^3$$

Ya que por hipótesis $c = AB^2 \cdot BC$. Pero como $BI^3 = AB^2 \cdot IC$, remplazando se tiene:

$$c + x^3 = AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot IC$$

Sacando factor común AB^2, se tiene:

$$c + x^3 = AB^2(IC + CB)$$

Pero $IC + CB = BI$. Además se está considerando que el segmento $BI = x$ y por hipótesis, el lado del cuadrado k inicial es AB y de área igual a b, entonces,

$$AB = \sqrt{b}$$

Por último tenemos:

$$c + x^3 = AB^2 \cdot BI = bx$$

Igualmente, R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) interpretan la elección de las curvas en otros términos considerando a AB y BC como los ejes Oy y Ox respectivamente y de esta manera reescriben la ecuación [14] en la siguiente expresión:

$$\frac{x^4}{b} = x\left(x - \frac{c}{b}\right)$$

A partir de las ecuaciones algebraicas de las cónicas:

$y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot x^2$ Ecuación de la parábola $\mathcal{P}$

$y^2 = x\left(x - \frac{c}{b}\right)$ Ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$

Haciendo el mismo proceso que en la ecuación anterior, se puede observar cómo la manera en que los historiadores reescriben la ecuación [14] coincide con el procedimiento geométrico realizado por al-Khayyām en el siglo XI.

Según los historiadores, al-Khayyām es consciente de que en la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$, solo basta un cambio de signo en los coeficientes para que la hipérbola equilátera de esta ecuación [14] se convierta en un círculo. Esta es la diferencia entre las cónicas de esta ecuación y de la anterior.

Así, al intersectar $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$:

$$\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x - \frac{c}{b}}$$

Entonces,

$$\frac{b}{x^2} = \frac{x}{x - \frac{c}{b}}$$

Por consiguiente x es una solución.

Las condiciones geométricas que x debe verificar son $\sqrt{b} > x > \frac{c}{b}$

En este caso, BI representa la raíz buscada.

3.3.4 Ecuación [15]: $x^3 = bx + c$

Cubo de la cosa igual a cosa más número

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $AB = \sqrt{b},\ BC \perp AB$; se construye

$$AB^2 \cdot BC = c$$

Como en las ecuaciones [13] y [14], para la demostración se tienen en cuenta las mismas consideraciones:

- $AB^2 \cdot BC = c$ (corresponde a que la base del sólido es cuadrada, por lo que el producto entre las longitudes del largo, ancho y alto equivale al volumen del sólido y es igual a c.)
- AB es un lado del cuadrado k inicial.
- BC es la altura del sólido construido sobre el cuadrado k inicial.

Se traza la parábola DBE de vértice B, de eje AB y de lado recto AB. Por la *Proposición 32 del Libro I de las Cónicas*[40], esta parábola es tangente a BC. Se traza la hipérbola GBE de vértice B, de eje BC y de diámetro transverso BC, ella es

[40] *Proposición 32 del Libro I de las Cónicas:* La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección. Por esto, al-Khayyām dice que la parábola DBE será tangente a BC.

tangente a AB. Las dos curvas se cortan necesariamente; sea E el punto de intersección.

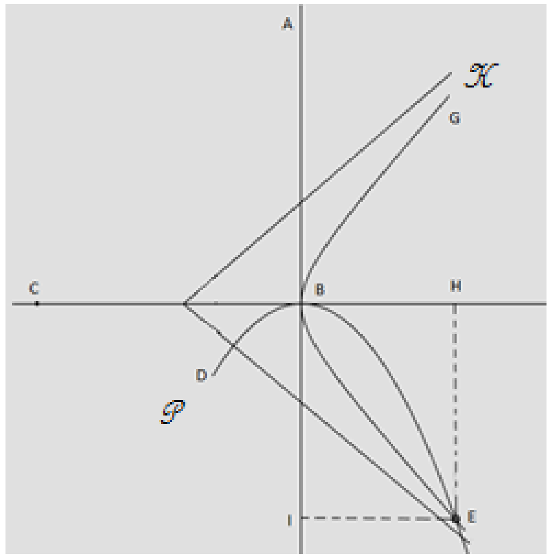

Figura 12. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām.

Las dos curvas DBE y GBE son conocidas, E también es conocido.

Como aparece en su demostración, al-Khayyām vuelve a considerar los segmentos BH y BI que corresponden a las coordenadas del punto de intersección con relación a su perpendicularidad con las rectas AB y BC dadas desde el inicio de sus demostraciones y las cuales tienen el mismo significado en estas demostraciones.

Siguiendo con la demostración, sea $EI \perp AB$ y $EH \perp BC$, ellos son de magnitud y posición conocida. Se tiene:

$$EH^2 = CH \cdot BH \qquad \text{Ecuación de la hipérbola}$$

De donde,

$$\frac{CH}{EH} = \frac{EH}{BH}$$

Pero,

$$EH = BI \; y \; HB = EI$$

Y

$$EI^2 = AB \cdot BI \qquad \text{Ecuación de la parábola}$$

De donde

$$\frac{BI}{EI} = \frac{EI}{AB}$$

Pues

$$\frac{AB}{HB} = \frac{HB}{BI} = \frac{BI}{CH}$$

De donde

$$\frac{AB^2}{HB^2} = \frac{HB}{CH}$$

Tenemos pues

$$HB^3 = AB^2 \cdot CH$$

En síntesis, la demostración de al-Khayyām dada por R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) es la siguiente:

En un sentido geométrico, a partir de las relaciones y propiedades geométricas de las dos curvas y del punto de intersección -y sus proyecciones ortogonales HE y EI con los segmentos HB y BI respectivamente- en la figura 12, al-Khayyām establece las siguientes proporciones:

$$\frac{CH}{EH} = \frac{EH}{BH} \; y \; \frac{BI}{EI} = \frac{EI}{AB}$$

Pero como $EH = BI \; y \; HB = EI$

Se remplazan los términos en las proporciones y se tiene:

$$\frac{CH}{BI} = \frac{BI}{BH} \ y \ \frac{BI}{BH} = \frac{HB}{AB}$$

Al-Khayyām combina estas dos proporciones haciendo una manipulación algebraica de sus términos. Así, se obtiene que:

$$\frac{AB^2}{HB^2} = \frac{EH^2}{CH^2} = \frac{CH \cdot BH}{CH^2} = \frac{HB}{CH}$$

Ya que por la ecuación de la hipérbola se tiene $EH^2 = CH \cdot BH$. Así, cancelando los términos CH, se tiene:

$$\frac{AB^2}{HB^2} = \frac{HB}{CH}$$

de donde se deduce $HB^3 = AB^2 \cdot CH$

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el cubo de HB es entonces igual a un sólido donde la base es el cuadrado de AB y de altura CH.

Nuevamente, puede observarse que HB es la raíz buscada de la ecuación. Modernamente podría decirse que $x = HB$.

Considerando $BH = x$, entonces la ecuación que se quiere resolver, se puede reescribir remplazando términos, así:

$$x^3 = HB^3 = AB^2 \cdot CH$$

Pero $CH = (BC + BH)$, entonces remplazando, tenemos:

$$x^3 = HB^3 = AB^2(BC + BH)$$

Distribuyendo el término AB^2 tenemos:

$$x^3 = HB^3 = AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot BH$$

Pero por hipótesis tenemos que $c = AB^2 \cdot BC$. Además el lado del cuadrado k inicial es AB y de área igual a b, por lo tanto $AB = \sqrt{b}$.

Entonces sustituyendo estos valores, la solución resulta:

$$x^3 = HB^3 = c + b \cdot BH$$

Siendo $BH = x$.

En este caso, BH representa la raíz buscada y está sobre la prolongación de BC; aquí se utiliza la otra rama de la hipérbola equilátera[41] y la parábola es la misma que en la ecuación anterior.

Los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh interpretan la elección de las curvas y para ello consideran nuevamente AB y BC como los ejes (Ox, Oy) respectivamente. La ecuación [15] se rescribe:

$$\frac{x^4}{b} = x\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Las ecuaciones algebraicas de las cónicas son las siguientes:

$y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ Ecuación de la parábola $\mathcal{P}$

$y^2 = x\left(x + \frac{c}{b}\right)$ Ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$:

[41] Cabe señalar que en todos los casos en donde se utilizan hipérbolas para la solución de la ecuación, en las construcciones que al-Khayyām encuentra para la intersección de las cónicas solo considera una rama de la hipérbola, ya que para la otra rama, la solución encontrada sería la misma, por eso basta hacerlo con una sola.

[42] La ecuación de la parábola es la misma porque esta cónica es igual en estas tres últimas ecuaciones.

La ecuación de la hipérbola difiere de la presentada en la ecuación [14] solamente en un signo debido a que esta vez se considera la rama derecha de la hipérbola equilátera.

Al intersectar $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$:

$$\frac{x}{b^{1/2}} = \frac{y}{x} = \frac{x + \frac{c}{b}}{y}$$

De donde

$$\frac{b}{x^2} = \frac{x}{\left(x + \frac{c}{b}\right)}$$

x es pues la solución.

Según R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) la ecuación [15] admite en todos los casos para $b > 0$ y $c > 0$, una raíz positiva ya que es aquella que al-Khayyām reconoce. También se puede admitir en ciertos casos dos raíces negativas o una raíz doble negativa.

3.3.5 Ecuación [16]: $x^3 + ax^2 = c$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea un cubo igual a c y H un lado, $H^3 = c$, $AB = a$. La construcción de este cubo es posible utilizando el lema 1 y la ecuación [3]. Sea I sobre la prolongación de AB, tal que $BI = H$, y se completa el cuadrado $BIDC$.

Como lo menciona al-Khayyām**,** es posible la construcción del cubo y de la arista BI a partir del cuadrado $BIDC$ por la ecuación [3] demostrada anteriormente.

Se traza la hipérbola EDN de asíntotas BC y BI usando la *proposición 4 del Libro II* [43] *y la proposición 59 del libro I* [44] *de las Cónicas*. El punto D y las asíntotas son de posición conocida. Se traza la parábola AEK de vértice A, de eje AI, y de lado recto BC. Las dos curvas se cortan necesariamente en el punto E. Igualmente, $EG \perp AI$ y $EL \perp BC$, EG y EL son de posición y de magnitudes conocidas.

A continuación se muestra la gráfica de la intersección de las cónicas:

---

[43] *Proposición 4 del libro II de las Cónicas:* Por un punto dado en el interior del ángulo de dos rectas dadas, se puede trazar una hipérbola tal que las dos rectas sean asíntotas de ella.

[44] *Proposición 59 del Libro I de las Cónicas:* Dadas dos rectas limitadas, perpendiculares entre sí, construir las secciones opuestas [de una hipérbola] tales que sea diámetro una de las rectas dadas y sus extremos vértices y los cuadrados de las trazadas bajo un ángulo dado en ambas secciones sean equivalentes a las áreas aplicadas a la otra recta aumentadas en un rectángulo semejante al de las rectas dadas.

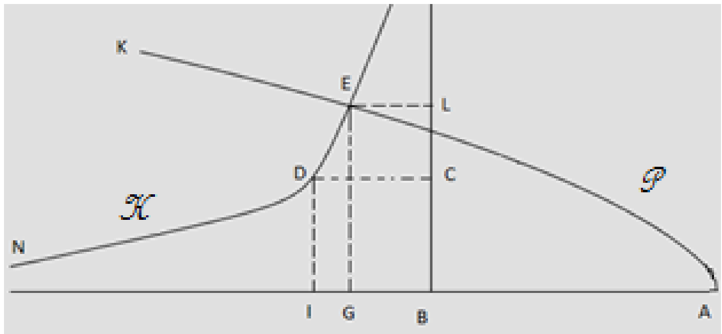

Figura 13. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām.

Siguiendo con la demostración de esta ecuación, se plantean algunos casos en los que se justifica que es imposible que la hipérbola EDN y la parábola AEK se corten en un punto de abscisa igual o superior a BI. En efecto:

- Se supone que $BG = BI$, entonces $EG^2 = AG \cdot BI = AI \cdot BI$. Pero $EG = DI$ y $BI^2 = DI^2$, pues $BI = AI$; lo cual es absurdo, pues $G \neq I$.
- Se supone que $BG > BI$. Y que $EG < ID$. Esto dará como resultado un caso absurdo también.

Al-Khayyām, sin embargo, utiliza la propiedad de la hipérbola EDN cuando se aproxima a su asíntota BI; en efecto, esto sería

$$EG^2 < ID^2 = IB^2$$

Pero,

$$EG^2 = AG \cdot BC = AG \cdot BI$$

Pues,

$$BI^2 > AG \cdot BI,$$

Pues,

$$BI > AG$$

Lo cual es absurdo.

Puede observarse que al-Khayyām intenta demostrar que no es posible que $BG > BI$ y que el punto de intersección de las dos cónicas debe ser el punto de abscisa BG que es la solución que mas adelante mostrará. Por lo que BG debe ser menor que BI.

Continuando con la demostración:

$$E \in (AEK) \rightarrow EG^2 = AG \cdot BC$$

pues

$$\frac{AG}{EG} = \frac{EG}{BC}$$

Por otra parte, por la *proposición 12 del Libro II de las Cónicas*[45], tenemos que $E \in (EDN) \rightarrow (EB) = (DB)$, pues

$$\frac{EG}{BC} = \frac{BC}{BG}$$

De donde

$$\frac{AG}{EG} = \frac{EG}{BC} = \frac{BC}{BG}$$

Pues

$$\frac{BG^2}{BC^2} = \frac{BC}{AG}$$

[45] *Proposición 12 del Libro II de las Cónicas:* Si por un punto de una hipérbola se trazan dos rectas cualesquiera a las asíntotas y por otro punto paralelas a estas rectas, el rectángulo de las paralelas es equivalente al de dichas rectas.

Puede notarse que el proceso de al-Khayyām es sistemático en todas las ecuaciones, así, al identificar las ecuaciones de sus dos curvas, considera las proporciones que resultan de sus relaciones geométricas en la gráfica, las combina y con la nueva proporción llega a la solución de la ecuación. En otras palabras:

En un nivel propiamente geométrico, al-Khayyām establece las relaciones geométricas de la hipérbola dada en la *figura 13* mediante la siguiente proporción:

$$\frac{EG}{BC}=\frac{BC}{BG}$$

De otra parte, a partir del punto de intersección E que está sobre la parábola, se establecen dichas relaciones geométricas dadas en la *figura 13* mediante la siguiente proporción:

$$\frac{AG}{EG}=\frac{EG}{BC}$$

Al-Khayyām nuevamente combina estas dos proporciones haciendo una manipulación algebraica en sus términos y se tiene que:

$$\frac{BC^2}{BG^2}=\frac{AG^2}{EG^2}$$

Pero,

$$\frac{AG^2}{EG^2}=\frac{AG\cdot AG}{AG\cdot BC}$$

Ya que como se dijo anteriormente, por ser E un punto que pertenece a la parábola, $EG^2=AG\cdot BC$. Por tanto cancelando los términos AG, tenemos:

$$\frac{AG^2}{EG^2}=\frac{BC^2}{BG^2}=\frac{AG}{BC}$$

Y de esta expresión resulta que $BC^3=BG^2\cdot AG$.

Que es la expresión que aparece en la demostración de al-Khayyām**.** Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el cubo de BC es entonces igual a un sólido donde la base es el cuadrado de BG y la altura AG.

Así, la raíz de la ecuación [16] es BG.

Como el segmento $BG = x$ y por hipótesis se tiene que $AB = a$, entonces, la ecuación que se quiere resolver, puede reescribirse de la siguiente manera:

$$x^3 + ax^2 = BG^3 + BG^2 \cdot AB$$

Sacando factor común BG^2 tenemos:

$$x^3 + ax^2 = BG^2(BG + BA)$$

Pero $BG + BA = AG$, entonces:

$$x^3 + ax^2 = BG^2 \cdot AG$$

Pero el resultado de haber combinado las proporciones que resultan de ser E un punto común de las dos cónicas es: $BC^3 = BG^2 \cdot AG$. Por tanto, sustituyendo términos tenemos:

$$x^3 + ax^2 = BC^3 = c$$

Se debe recordar que al iniciar su demostración, al-Khayyām considera que $H^3 = c$ y además H es un lado del cubo y que $BI = H$. Si se observa en la gráfica de esta demostración, $BC = BI = H$ y por lo tanto $BC^3 = H^3 = c$.

Es importante resaltar, que para R. Rashed y B. Vahabzadeh un estudio de la ecuación [16] con $a > 0$ y $c > 0$ muestra de que siempre tiene una raíz positiva; para algunos valores de a y c se tienen dos raíces negativas y una raíz doble negativa. Al-Khayyām sólo considera la raíz positiva, ya que como se dijo anteriormente, son las únicas raíces que reconoce.

El punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{P} \cap H$ donde:

$$\frac{x_0 + a}{y_0} = \frac{y_0}{c^{1/3}} = \frac{c^{1/3}}{x_0}$$

De donde

$$c = {x_0}^2(x_0 + a)$$

Y x_0 es una solución de la ecuación [16].

Por último, R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) aseguran que también pueden considerarse para la solución de esta ecuación, las curvas $xy = c$ y $y = x^2 + ax$, pero esta elección iría en contra de la homogeneidad.

3.3.6 Ecuación [17]: $x^3 + c = ax^2$

Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $AC = a$, se tiene que $a > x$. Sea H un segmento tal que $H^3 = c$. Pueden presentarse tres casos: $H = AC$, $H > AC$ y $H < AC$.

Al-Khayyām comienza por examinar varios casos:

- Si $H = AC$ el problema es imposible

Se presentan tres casos para saber si la solución x_0 es mayor, menor o igual a H.

Para $x_0 = H$, se tiene que $a{x_0}^2 = H^3 = c$; lo cual es imposible.

Para $x_0 < H$, se tiene que $a{x_0}^2 < c$, de donde $a{x_0}^2 < c < {x_0}^3 + c$ lo cual es absurdo.

Para $x_0 > H$, se tiene que ${x_0}^3 > a{x_0}^2$; lo cual es absurdo.

- Si $H > AC$, el problema es imposible.

Para $x_0 = H$, se tiene que $x_0 > a$ y ${x_0}^3 > a{x_0}^2$ lo cual es imposible.

Para $x_0 < H$, se tiene que $a{x_0}^2 < H^3 = c$ entonces $H > a$, lo cual es igualmente imposible.

Para $x_0 > H$, se tiene que $x_0{}^3 > ax_0{}^2$, entonces $H > a$, lo cual es igualmente imposible.

Por lo tanto la condición necesaria es que $H < AC$, es decir, $c < a^3$.

Entonces si $H < AC$, se toma un punto B en AC tal que $BC = H$, y se examinan nuevamente tres casos de la figura, así: (1) $BC = AB$, (2) $BC > AB$, (3) $BC < AB$.

Primer caso de la figura: $\boldsymbol{BC = AB \leftrightarrow c^{1/3} = a/2}$.

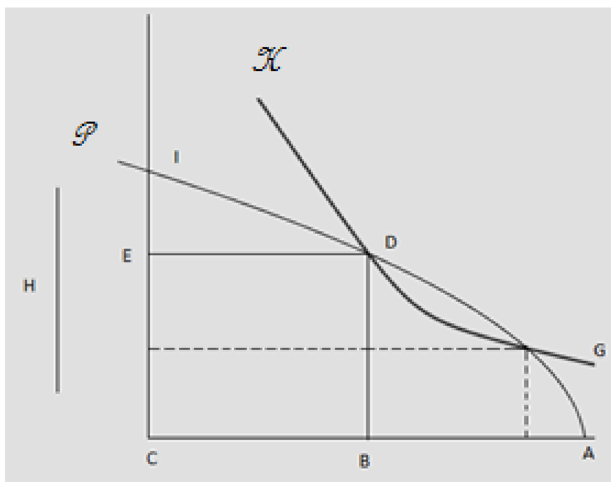

Figura 14. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām.

Se completa el cuadrado DC y se traza la hipérbola $\mathscr{H}$ que pasa por D y tiene como asíntotas a AC y CE. Se traza igualmente la parábola $\mathcal{P}$ de vértice A, de eje AC y de lado recto BC.

La parábola $\mathcal{P}$ pasa por D, entonces,

$$DB^2 = AB \cdot BC \quad \text{Ecuación de la parábola,}$$

pues $\mathscr{H}$ y $\mathcal{P}$ se cortan en D. Pero como lo menciona al-Khayyām, $\mathcal{P}$ corta a $\mathscr{H}$ en otro punto también.

Segundo caso de la figura: $\boldsymbol{BC > AB \leftrightarrow c^{1/3} > a / 2}$.

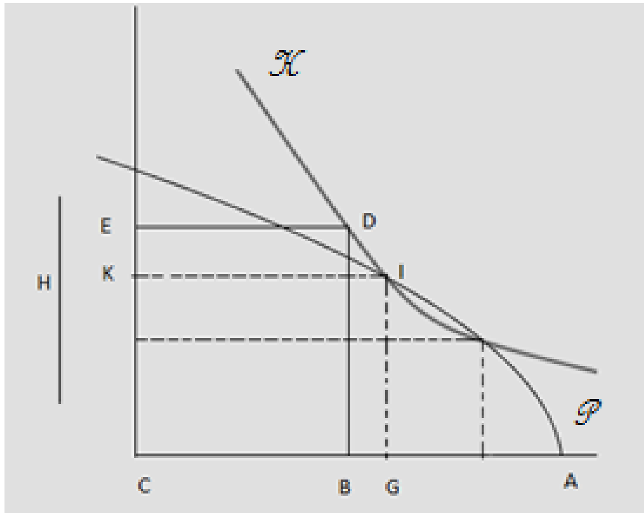

Figura 15. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām.

Se completa el cuadrado DC; se traza la hipérbola $\mathscr{H}$ que pasa por D y la parábola $\mathcal{P}$. El punto D se encuentra fuera de la parábola, entonces,

$$DB^2 > AB \cdot BC$$

Entonces la demostración dice que si $\mathcal{P}$ y $\mathscr{H}$ se cortan o son tangentes en un punto $D_1 \neq D$, la proyección de D_1 en AC está necesariamente entre A y B, y el problema es posible, de lo contrario, no lo será.

Tercer caso de la figura: $BC < AB \leftrightarrow c^{1/3} < a / 2$.

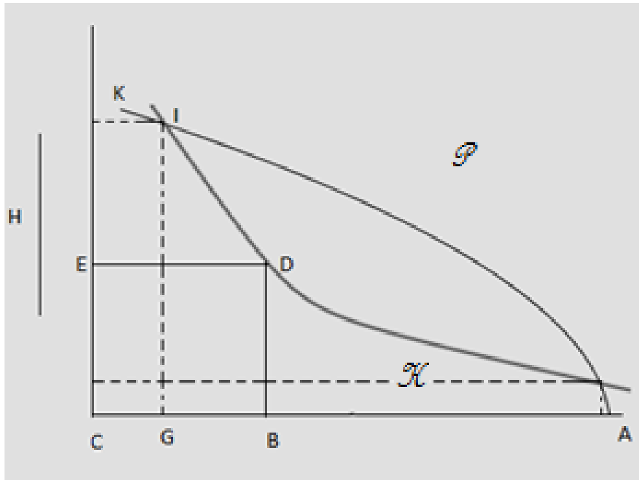

Figura 16. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām.

.

En este caso, el punto D está en el interior de la parábola $\mathcal{P}$; $\mathcal{H}$ y $\mathcal{P}$ se cortan en dos puntos.

En todos los casos de las figuras, sea I la unión de las dos intersecciones de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{P}$. Sea G la proyección de I en CA en la *figura 16.*

$(IC) = (DC)$ Por la ecuación de la hipérbola.

Pues,

$$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{IG}$$

Pero $I \in \mathcal{P}$, de donde,

$$IG^2 = AG \cdot BC$$

Pues,

$$\frac{BC}{IG} = \frac{IG}{GA}$$

Pues,

$$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{IG} = \frac{IG}{GA}$$

De donde,

$$\frac{GC^2}{BC^2} = \frac{BC}{GA}$$

De donde,

$$c = BC^3 = GC^2 \cdot GA$$

Donde GC es la solución.

El procede de la misma manera para los otros dos casos de la figura.

Como puede verse en la demostración de al-Khayyām dada por los investigadores, el justifica por qué el lado H del cubo que proyecta en la gráfica debe ser menor que el segmento AC. A partir de esta premisa, se presentan tres nuevos casos, y por consiguiente tres nuevas gráficas en donde siendo $H < AC$ o que es lo mismo $BC < AC$ se tienen:

- $BC = AB \leftrightarrow c^{1/3} = a/2$
- $BC > AB \leftrightarrow c^{1/3} > a/2$
- $BC < AB \leftrightarrow c^{1/3} < a/2$

Cuyos casos presentan solución, pero él realiza la demostración para el tercer caso, es decir, cuando H está más cerca de C. En síntesis, la demostración de al-Khayyām se resume así:

En un sentido propiamente geométrico, puede observarse que a partir de las propiedades y relaciones geométricas de la hipérbola y de la parábola en la *figura 16*, se establecen las siguientes proporciones respectivamente:

$$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{IG} \;\; y \;\; \frac{BC}{IG} = \frac{IG}{GA}$$

Al combinar y hacer una sustitución de estas dos proporciones manipulando algebraicamente sus términos, se tiene que:

$$\frac{GC^2}{BC^2} = \frac{IG^2}{GA^2}$$

Pero,

$$\frac{IG^2}{GA^2} = \frac{AG \cdot BC}{GA \cdot GA}$$

Ya que como se dijo anteriormente, por ser I un punto que pertenece a la parábola, $IG^2 = AG \cdot BC$. Por tanto cancelando los términos AG, tenemos:

$$\frac{GC^2}{BC^2} = \frac{BC}{GA}$$

Y de esta expresión resulta $BC^3 = GC^2 \cdot GA$.

Que es la expresión que aparece en la demostración de al-Khayyām. Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el cubo de BC es entonces igual a un sólido donde la base es el cuadrado de GC y de altura GA.

Haciendo la misma interpretación moderna para la raíz de esta ecuación cúbica según al-Khayyām se considera entonces a $GC = x$ y por hipótesis tenemos que $AC = a$, entonces la ecuación que se quiere resolver, puede reescribirse de la siguiente manera:

$$x^3 + c = GC^3 + BC^3$$

Pero según el resultado de la combinación de las proporciones, $BC^3 = GC^2 \cdot GA$

Entonces sustituyendo, tenemos:

$$x^3 + c = GC^3 + BC^3 = GC^3 + GC^2 \cdot GA$$

Sacando factor común GC^2 tenemos:

$$x^3 + c = GC^2(GC + GA)$$

Pero $GC + GA = AC$, entonces: $x^3 + c = GC^2 \cdot AC$

Por tanto, sustituyendo términos, tenemos:

$$x^3 + c = ax^2$$

que es la ecuación que se quiere mostrar. Por otra parte, se puede observar también que el procedimiento se hace de la misma manera que en la ecuación precedente. La única diferencia, que puede notarse en el cambio de signo de los coeficientes, es que la concavidad de la hipérbola está en la otra dirección.

La interpretación de la elección de las curvas según los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh se hace de manera análoga que en los otros casos. Consideran el sistema de ejes (CA, CE), es decir (Ox, Oy) y el punto $D\ (c^{1/3}, c^{1/3})$. La ecuación [17] se rescribe:

$$c^{1/3}(a - x) = \frac{c^{4/3}}{x^2}$$

Teniendo en cuenta que con cero no hay solución.

Así,

$$y = \frac{c^{2/3}}{x} \quad \text{Ecuación de } \mathscr{H}$$

$$y^2 = c^{1/3}(a - x) \quad \text{Ecuación de } \mathcal{P}$$

3.3.7 Ecuación [18]: $x^3 = ax^2 + c$

Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de la parábola y la hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea un segmento $AB = a$, BC tal que $BC \perp AB$. Al-Khayyām construye con la ayuda del Lema 3 un sólido S de base cuadrada y de lado BC tal que:

$$S = BC^2 \cdot AB = c$$

Se traza la hipérbola $\mathscr{H}$ de asíntotas AB y AD y que pasa por C, y una parábola $\mathcal{P}$ de eje AB y de lado recto AB. Las dos curvas se cortan necesariamente, sea E ese punto de intersección.

Sea $EI \perp AD$ y $EK \perp AB$. Entonces,

$(EA) = (CA)$ Ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}$

Es de anotarse que el segmento BC en esta demostración es un lado del cuadrado que a su vez es base del paralelepípedo que al-Khayyām proyecta en la gráfica y que tiene como altura $AB = a$ y volumen c. Como él lo menciona, la construcción es posible por el Lema 3 que al principio demostró.

A continuación se muestra la gráfica correspondiente a esta ecuación:

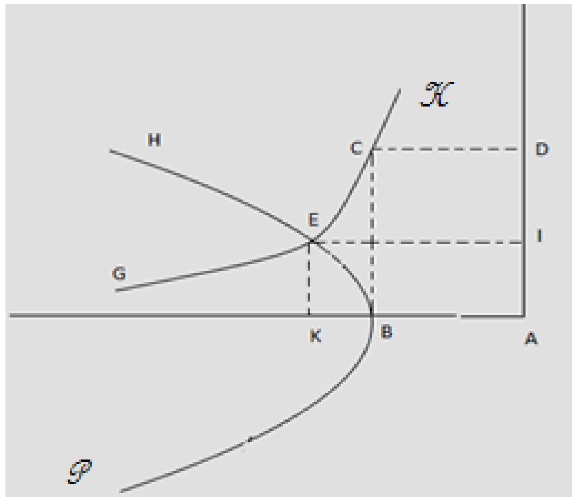

Figura 17. Representación de la intersección de la hipérbola y la parábola según al-Khayyām**.**

Siguiendo con la demostración, se tiene

$$\frac{AK}{BC} = \frac{AB}{EK}$$

Además $EI = AK$ y $AB = CD$, y también

$$\frac{AK^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{EK^2}$$

Pero

$$EK^2 = KB \cdot AB \text{ Ecuación de la parábola } \mathcal{P}$$

pues

$$\frac{AB^2}{EK^2} = \frac{AB}{KB}$$

Y además

$$\frac{BC^2}{AK^2} = \frac{BK}{AB}$$

De donde,

$$BC^2 \cdot AB = AK^2 \cdot BK$$

pues

$$AK^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB = AK^3$$

pues

$$a \cdot AK^2 + c = AK^3$$

donde AK es la solución buscada.

En otras palabras, la demostración de al-Khayyām dada por los historiadores se resume en los siguientes pasos:

A partir de las propiedades y relaciones geométricas de la hipérbola y la parábola en la figura 17, se establecen las siguientes proporciones respectivamente:

$$\frac{AK}{BC} = \frac{AB}{EK} \; y \; \frac{AB}{EK} = \frac{EK}{BK}$$

Al-Khayyām combina nuevamente estas dos proporciones haciendo una manipulación algebraica en sus términos, así se tiene que:

$$\frac{AK^2}{BC^2} = \frac{EK^2}{BK^2}$$

Pero,

$$\frac{EK^2}{BK^2} = \frac{KB \cdot AB}{KB \cdot KB}$$

Ya que E es un punto que pertenece a la parábola, se tiene $EK^2 = KB \cdot AB$. Por tanto cancelando los términos KB, tenemos:

$$\frac{AK^2}{BC^2} = \frac{AB}{KB}$$

Esta proporción indica que las dos alturas AB y KB son inversamente proporcionales así como las dos bases. Y de aquí se tiene que:

$$BC^2 \cdot AB = AK^2 \cdot BK$$

Que es la expresión que aparece en la demostración de al-Khayyām**.** Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido donde la base es el cuadrado de BC y de altura AB es entonces igual a un sólido donde la base es el cuadrado de AK y de altura BK.

Modernamente la raíz AK encontrada por al-Khayyām corresponde a x**.** Así, con $AK = x$ y con las consideraciones iniciales de la demostración, tenemos que $AB = a$, entonces la ecuación que se quiere resolver puede reescribirse algebraicamente de la siguiente manera:

$$x^3 = AK^3 = AK^2 \cdot AK$$

Pero $AK = AB + BK$, entonces reemplazando tenemos:

$$x^3 = AK^3 = AK^2 \cdot (AB + BK)$$

Distribuyendo el término AK^2 tenemos,

$$x^3 = AK^3 = AK^2 \cdot AB + AK^2 \cdot BK$$

Pero el resultado de haber combinado las proporciones es: $BC^2 \cdot AB = AK^2 \cdot BK$

Entonces sustituyendo tenemos:

$$x^3 = AK^3 = AK^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB$$

Por tanto, sustituyendo términos tenemos:

$$x^3 = AK^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB \ = ax^2 + c$$

Siendo $x = AK$ y por hipótesis $BC^2 \cdot AB = c$ *y* $AB = a.$

Para cada par de números positivos (a, c), la ecuación [18] tiene una única raíz real y es estrictamente positiva.

Como lo mencionan los investigadores, las dos curvas se cortan necesariamente en un punto (x_0, y_0). Entonces $x_0 y_0 = \sqrt{ac}$, de donde

$$\frac{x_0}{\left(\frac{c}{a}\right)^{1/2}} = \frac{a}{y_0} \quad y \quad \frac{{x_0}^2}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a^2}{{y_0}^2}$$

Del mismo modo, se tiene por la ecuación de $\mathcal{P}$

$$\frac{a}{y_0} = \frac{y_0}{x - a} \quad y \quad \frac{a^2}{{y_0}^2} = \frac{\mathrm{a}}{x_0 - a}$$

Pues,

$${x_0}^2(x_0 - a) = c$$

En todos los casos, los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh muestran también que efectivamente a partir de las ecuaciones de las cónicas que al-Khayyām elige, puede reescribirse la ecuación algebraica de grado tres.

3.3.8 Ecuación [19]: $x^3 + ax^2 + bx = c$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de un semi-circulo y una hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $BE = b^{1/2}$, BC tal que $BC \perp BE$ y,

$$BE^2 \cdot BC = c$$

$BC = c/b$ y es posible su construcción gracias a la ecuación [13].

Sea $BD = a$ sobre la prolongación de BC. Se traza el semi-circulo $\mathcal{C}$ de diámetro DC, y se completa el rectángulo $(BCKE)$. Se traza la hipérbola $\mathcal{H}$ que pasa por C y que tiene como asíntotas a BE y EK. La hipérbola $\mathcal{H}$ corta a $\mathcal{C}$ en el punto C. La hipérbola corta necesariamente a $\mathcal{C}$ en otro punto G, ese punto es de posición conocida, así como $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}$ lo son.

Sea $GI \perp EK$ y $GA \perp EA$. Entonces,

$(GE) = (BK)$ Ecuación de la hipérbola.[46]

Tal como puede observarse en la siguiente gráfica:

[46] Se debe recordar que desde la matemática griega, se utilizaban las letras de la diagonal para designar una superficie.

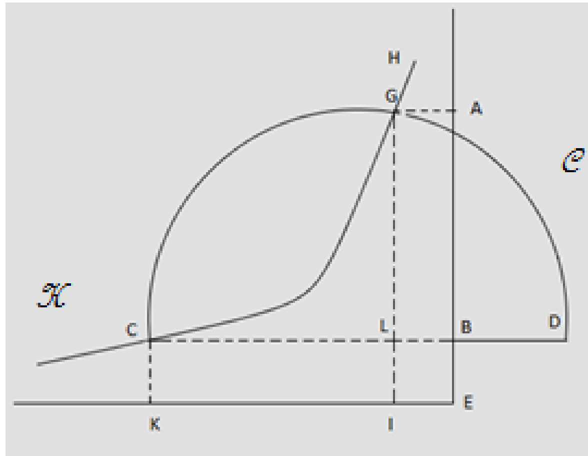

Figura 18. Representación de la intersección de la hipérbola y el semi-circulo según al-Khayyām.

Quitando a ambos lados (EL), tenemos,

$$(GB) = (LK)$$

De donde,

$$\frac{GL}{LC} = \frac{EB}{LB}$$

Además $EB = IL$, de donde,

$$\frac{GL^2}{LC^2} = \frac{EB^2}{LB^2}$$

Pero

$$\frac{GL^2}{LC^2} = \frac{DL}{LC}$$

Porque $GL^2 = LC \cdot DL$ (potencia de un punto con relación a un círculo), pues,

$$\frac{EB^2}{LB^2} = \frac{DL}{LC}$$

La *proposición 32 del Libro III de los Elementos*[47] justifica esta proporción.

De donde

$$EB^2 \cdot LC = LB^2 \cdot DL$$

Pero

$$BL^2 \cdot DL = BL^3 + BL^2 \cdot BD = BL^3 + a \cdot BL^2$$

De donde

$$EB^2 \cdot LC + EB^2 \cdot BL = BL^3 + a \cdot BL^2 + b \cdot BL$$

De donde,

$$c = BL^3 + a \cdot BL^2 + b \cdot BL$$

Así, BL es la solución buscada.

Es así como a partir de las propiedades geométrica de la hipérbola en la figura 18, se tiene que $GE = BK$. En un nivel propiamente geométrico puede observarse que la idea de al-Khayyām es quitar de los rectángulos GE y BK su parte común EL obteniendo dos rectángulos GB y KL que tienen igual superficie. A partir de este hecho, al-Khayyām establece la relación geométrica de las dos superficies como la siguiente proporción:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{EB}{LB}$$

Con $EB = IL$.

[47] La *proposición 32 del Libro III de los Elementos* dice que si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo.

De otra parte, por la proposición 8 y el corolario de la proposición 8 del libro VI de los *Elementos* de Euclides, se tiene que el triángulo GDC inscrito en el semi-círculo es rectángulo y GL es media proporcional de DL y CL, entonces los triángulos GLD y GLC son semejantes, por lo que la relación geométrica que explica este hecho está dada por la siguiente proporción:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{DL}{GL}$$

de donde se deduce que $GL^2 = LC \cdot DL$.

Debido a que la solución de la ecuación cúbica está determinada por la intersección de las dos curvas, al-Khayyām combina estas dos anteriores proporciones para obtener la raíz de la ecuación. Así, en un sentido algebraico al-Khayyām hace una manipulación en los términos de las proporciones que halla a partir de las gráficas de la hipérbola y el semi-.círculo,y combinándolas se tiene que:

$$\frac{EB^2}{LB^2} = \frac{DL \cdot GL}{LC \cdot GL} = \frac{DL}{LC}$$

Y se deduce según las propiedades de las proporciones que:

$$EB^2 \cdot LC = LB^2 \cdot DL$$

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido donde la base es el cuadrado de EB y de altura LC es igual a un sólido donde la base es el cuadrado de LB y de altura DL.

Así, la raíz de la ecuación es BL, que actualmente corresponde a decir que $x = BL$, y por hipótesis se tiene que $a = BD$, $c = BE^2 \cdot BC$, $BE = \sqrt{b}$,

Entonces, la ecuación que se quiere resolver, puede reescribirse:

$$x^3 + ax^2 + bx = BL^3 + BD \cdot BL^2 + BE^2 \cdot BL$$

Sacando factor común BL^2 tenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx = BL^2(BL + BD) + BE^2 \cdot BL$$

Como $BL + BD = DL$, tenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx = BL^2 \cdot DL + BE^2 \cdot BL$$

Pero el resultado de combinar las dos proporciones es $EB^2 \cdot LC = LB^2 \cdot DL$.

Entonces,

$$x^3 + ax^2 + bx = BE^2 \cdot CL + BE^2 \cdot BL$$

Sacando factor comúnBE^2:

$$x^3 + ax^2 + bx = BE^2(CL + BL)$$

Pero $CL + BL = BC$, entonces reemplazando términos tenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx = BE^2 \cdot BC = c$$

A partir de la demostración de al-Khayyām, los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) mencionan que para todas las ternas de números reales positivos (a, b, c), la ecuación [19] tiene una raíz estrictamente positiva y es la que al-Khayyām determina utilizando un semicírculo y una hipérbola equilátera.

Para comprender la elección de las curvas, los investigadores sugieren considerar de nuevo (EK, EA) un sistema de ejes (Ox, Oy); la ecuación [19] se rescribe:

$$x + a = \frac{b}{x^2}\left(\frac{c}{b} - x\right)$$

Multiplicando a ambos lados por $\left(\frac{c}{b} - x\right)$ se tiene

$$\left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) = \left(\frac{cb^{-1/2}}{x} - b^{1/2}\right)^2$$

Entonces,

$$\left(y - b^{1/2}\right)^2 = \left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) \quad \text{Ecuación del Circulo } \mathcal{C}$$

Y

$$\left(y - b^{1/2}\right)^2 = \left(\frac{cb^{-1/2}}{x} - b^{1/2}\right)^2$$

De las dos hipérbolas:

$$y = \frac{cb^{-1/2}}{x} \text{ Ecuación de } \mathcal{H}$$

Y

$$y = 2b^{-1/2} - \frac{cb^{-1/2}}{x} \quad \text{Ecuación de } \mathcal{H}^{\prime}$$

Al-Khayyām opta por $\mathcal{H}$. Aunque $\mathcal{H}^{\prime}$ es simétrica de $\mathcal{H}$ con respecto a CD, la intersección $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ y $\mathcal{H}^{\prime} \cap \mathcal{C}$ son simétricas y tienen las mismas abscisas.

Las dos curvas se cortan necesariamente en un punto (x_0, y_0). Entonces se tiene,

$$C\left(\frac{c}{b},\ b^{1/2}\right) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$$

Existe por lo tanto un punto (x_0, y_0). $\in \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ y (x_0, y_0). $\neq \left(\frac{c}{b},\ b^{1/2}\right)$. En efecto,

$$(x_0, y_0).\ \in \mathcal{H} \rightarrow x_0 y_0 = b^{1/2} \cdot \left(\frac{c}{b}\right),$$

De donde

$$x_0\left(y_0 - b^{1/2}\right) = b^{1/2}\left(\frac{c}{b} - x_0\right)$$

Pues (*):

$$\frac{y_0 - b^{1/2}}{\frac{c}{b} - x_0} = \frac{b^{1/2}}{x_0}$$

Pero

$$(x_0, y_0) \epsilon \quad \mathcal{C} \rightarrow \left(y_0 - b^{1/2}\right)^2 = (x_0 + a)\left(\frac{c}{b} - x_0\right)$$

De donde

$$\frac{\left(y_0 - b^{1/2}\right)^2}{\left(\frac{c}{b} - x_0\right)^2} = \frac{x_0 + a}{\frac{c}{b} - x_0}$$

Y por (*),

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{x_0 + a}{\frac{c}{b} - x_0}$$

y

$$b\left(\frac{c}{b} - x_0\right) = {x_0}^2(x_0 + a)$$

Y en consecuencia, se obtiene la ecuación [19].

Puede corroborarse que si se sustituyen estos valores por los segmentos que se utilizan en la demostración de al-Khayyām, efectivamente, esta expresión corresponde a la combinación de las dos proporciones que ya se mostró.

3.3.9 Ecuación [20]: $x^3 + ax^2 + c = bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de dos hipérbolas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $AB^2 = b$, $BC = a,\ BC \perp AB$. Sea BD sobre la prolongación de BC tal que

$$AB^2 \cdot BD = c$$

BD se puede construir con la ayuda de la ecuación [13]. Se completa el rectángulo $(ABDE)$. Se traza la hipérbola $\mathscr{H}_1$ que pasa por D y tiene como asíntotas a AB y AE. Se traza $\mathscr{H}_2$ de vértice $D,$ de lado recto DC, de lado transverso DC y el eje sobre la prolongación de BD. Las dos hipérbolas se cortan necesariamente en D. Si ellas se cortan en otro punto que no sea D, el problema es posible, si no, es imposible. Si $\mathscr{H}_2$ es tangente a $\mathscr{H}_1$, D será el único punto común. Si $\mathscr{H}_2$ corta a $\mathscr{H}_1$, ellas se cortan en dos puntos. Estos diferentes casos fueron establecidos por al-Khayyām con la ayuda de las proposiciones del *Libro IV de las Cónicas* de Apolonio.

Tal como se muestra en la siguiente gráfica, D es un punto de intersección de las dos cónicas:

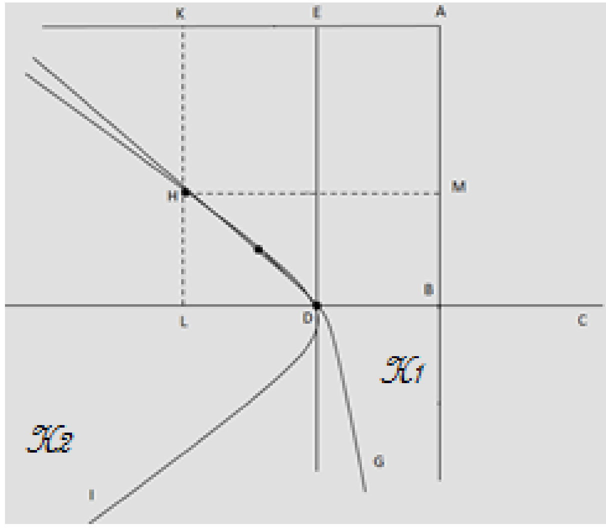

Figura 19. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

Sea H uno de los puntos comunes a $\mathscr{H}_2$ y a $\mathscr{H}_1$. Sea $HM \perp AB$ y $KHL \perp BD$. HM y KHL son de posición y de magnitudes conocidas, porque H es de posición conocida. Tenemos

$$(AH) = (AD) \text{ Ecuación de } \mathscr{H}_1$$

Quitando (EM),

$$(MD) = (EH)$$

Añadiendo (DH),

$$(ML) = (EL)$$

De donde

$$\frac{AB}{BL} = \frac{HL}{LD}$$

Se tiene que además,

$$\frac{AB^2}{BL^2} = \frac{HL^2}{LD^2}$$

Pero

$$\frac{HL^2}{LD^2} = \frac{CL}{LD}$$

por

$$HL^2 = LC \cdot LD \quad \text{Ecuación de } \mathscr{H}_2$$

pues

$$\frac{AB^2}{BL^2} = \frac{CL}{LD}$$

De donde,

$$AB^2 \cdot LD = BL^2 \cdot CL$$

Pero

$$BL^2 \cdot CL = BL^3 + BC \cdot BL^2 = BL^3 + a \cdot BL^2$$

De donde

$$AB^2 \cdot BL = AB^2 \cdot LD + AB^2 \cdot BD = BL^3 + a \cdot BL^2 + c$$

Donde BL es la solución.

Según los historiadores, al-Khayyām observa que puede haber dos soluciones distintas de ese problema. Las dos soluciones corresponden a los otros dos puntos de intersección distintos de D.

Nuevamente como en la ecuación precedente, a partir de las relaciones y propiedades geométricas de la primera hipérbola dadas en la *figura 19*, se tiene que $AH = AD$. Así, la idea de al-Khayyām es quitar de los rectángulos AH y AD su parte común EM y añadir HD que es el lugar geométrico en donde se encuentran ubicados los puntos de intersección de las dos cónicas. Así se obtienen dos rectángulos EL y ML que tienen igual superficie. A partir de este hecho, al-Khayyām establece la relación geométrica de estas dos superficies como la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{BL} = \frac{HL}{DL}$$

De otra parte, como el punto de intersección H está obviamente sobre la segunda hipérbola, se tiene que:

$$\frac{HL}{DL} = \frac{CL}{HL}$$

De donde se deduce que $HL^2 = CL \cdot DL$

Al combinar estas dos proporciones a partir de una manipulación algebraica de sus términos, al-Khayyām obtiene la raíz de la ecuación. Entonces:

$$\frac{AB^2}{BL^2} = \frac{CL}{HL} \cdot \frac{HL}{DL} = \frac{CL}{DL}$$

de donde resulta que $AB^2 \cdot DL = BL^2 \cdot CL$.

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido de altura DL y de base el cuadrado de AB es entonces igual a un sólido donde la base es el cuadrado de BL y de altura LC.

Entonces, haciendo la misma interpretación que en las ecuaciones anteriores, $x = BL,$ y por hipótesis se tiene que $a = BC,$ $AB^2 = b$ y $AB^2 \cdot BD = c,$ entonces la ecuación que se quiere resolver puede reescribirse:

$$x^3 + ax^2 + c = BL^3 + BC \cdot BL^2 + AB^2 \cdot BD$$

Sacando factor común BL^2, se tiene:

$$x^3 + ax^2 + c = BL^2(BL + BC) + AB^2 \cdot BD$$

Pero $BL + BC = CL$, entonces tenemos:

$$x^3 + ax^2 + c = BL^2 \cdot CL + AB^2 \cdot BD$$

Y a partir de la combinación de las proporciones tenemos que $AB^2 \cdot DL = BL^2 \cdot CL$. Por lo tanto, la ecuación que se quiere resolver resulta:

$$x^3 + ax^2 + c = AB^2 \cdot DL + AB^2 \cdot BD = AB^2 \cdot BL = bx$$

Como lo mencionan los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999), en la ecuación, se tiene inmediatamente la condición $0 < x < b^{1/2}$.

Para hacer la interpretación algebraica de las dos cónicas en cuestión, se hace el mismo procedimiento que en las otras ecuaciones. Sea (BC, BA) un sistema de ejes (Ox, Oy). La ecuación [20] se rescribe:

$$x^2(x + a) = bx - c$$

De donde

$$\frac{b}{x^2} = \frac{a + x}{x - \frac{c}{b}}$$

Entonces

$$\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{y}{x - \frac{c}{b}} \qquad (con\ y = HL)$$

Entonces

$$xy = b^{1/2}\left(x - \frac{c}{b}\right) \text{ Ecuación de } \mathscr{H}_1$$

Y

$$y^2 = \left(x - \frac{c}{b}\right)(x + a) \text{ Ecuación de } \mathscr{H}_2$$

Donde $(\frac{c}{b}, 0) = D \in \mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_{2.}$

Si $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{ D \}$, el problema no tiene solución.

Si $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 \neq \{ D \}$, entonces existen dos puntos diferentes de D que pertenecen a $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_{2.}$ Sea (x_0, y_0) un punto de la intersección, entonces

$$(x_0, y_0) \in \mathscr{H}_1 \rightarrow x_0 y_0 = b^{1/2}\left(x_0 - \frac{c}{b}\right) \rightarrow \frac{b^{1/2}}{x_0} = \frac{y_0}{\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)}$$

De donde,

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{{y_0}^2}{\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)^2}$$

$$(x_0, y_0) \in \mathscr{H}_2 \rightarrow \frac{{y_0}^2}{\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)^2} = \frac{x_0 + a}{x_0 - \frac{c}{b}}$$

de donde

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{(x_0 + a)}{x_0 - \frac{c}{b}}$$

En la ecuación [20] $x_{0,}$ es una solución.

La elección de las curvas es similar que en la ecuación [19], el cambio de signo en los coeficientes es debido a que aquí se reemplaza el círculo por una hipérbola equilátera.

3.3.10 Ecuación [21]: $x^3 + bx + c = ax^2$

Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de un semi-círculo y una hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

A partir de la ecuación, se necesita que $0 < x < a$ y $b < (a - x)x$. Se puede verificar que el problema es imposible si $b^{1/2} \geq \frac{a}{2}$

Sea $BE = a$, $BC^2 = b$ tal que $BC \perp BE$. Sea AB la prolongación de BE tal que

$$BC^2 \cdot AB = c$$

AB se puede construir por la ecuación [13].

Se traza un semi-círculo $\mathcal{C}$ de diámetro AE y se considera un punto C que puede estar al interior de $\mathcal{C}$, sobre $\mathcal{C}$ o al exterior de $\mathcal{C}$.

1. El punto C está al interior de $\mathcal{C}$.

La prolongación de BC corta a $\mathcal{C}$ en G. Completamos el rectángulo (AC). Sea $(CH) = (AC)$ un rectángulo construido sobre CG. Así H es de posición conocida porque GC y (CH) también lo son. Entonces H está en $\mathcal{C}$ o al exterior de $\mathcal{C}$.

1.1 H está en $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola que pasa por H y tiene como asíntotas a GC y CM.

Entonces H corta necesariamente a $\mathcal{C}$ en dos puntos, sean L y N esos puntos. Estos puntos son de posición conocida.

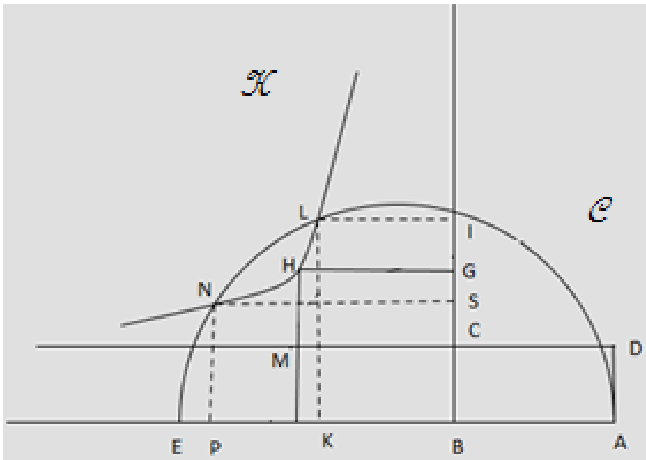

Figura 20. Representación de la intersección del semi-círculo y la hipérbola según al-Khayyām.

Sea $NP \perp AE$, $LK \perp AE$ y $LI \perp BG$. Entonces

$(LC) = (CH) = (CA)$ Ecuación de la hipérbola.

Añadiendo (CK),

$$(DK) = (IK)$$

pues

$$\frac{LK}{KA} = \frac{DA}{LI} \quad y \quad \frac{LK^2}{KA^2} = \frac{DA^2}{LI^2}$$

pero

$$\frac{LK^2}{KA^2} = \frac{EK}{KA}$$

entonces

$$LK^2 = EK \cdot KA$$

(potencia de un punto con respecto a un círculo); pues

$$\frac{BC^2}{BK^2} = \frac{EK}{KA}$$

De donde

$$BC^2 \cdot KA = BK^2 \cdot EK$$

Entonces,

$$BC^2 \cdot KA = b \cdot BK + c$$

Sumando BK^3, tenemos

$$BK^3 + b \cdot BK + c = (EK + BK)BK^2 = BE \cdot BK^2 = a \cdot BK^2$$

Donde BK es la solución de la ecuación.

Por tanto, teniendo en cuenta que $BC = DA$, $BK = LI$, se puede observar que:

De las relaciones y propiedades geométricas de la hipérbola en la *figura 20*, se tiene que $LC = CH = CA$. Entonces al-Khayyām añade CK a LC y CA. Así, obtiene dos rectángulos que tienen igual superficie. A partir de este hecho, las relaciones geométricas entre estos dos rectángulos se presenta en la siguiente proporción:

$$\frac{BC}{BK} = \frac{BI}{KA}$$

De otra parte, por la *proposición 8* y el *corolario de la proposición 8 del libro VI de los Elementos* de Euclides, se tiene que LK es media proporcional de EK y KA; además, a partir del triángulo ELA que puede inscribirse en el semi-círculo, en relación con la media proporcional LK se obtienen dos triángulos semejantes ELK y KLA. Ésta relación geométrica está dada por la siguiente proporción:

$$\frac{BI}{KA} = \frac{EK}{BI}$$

Con $BI = LK$.

Entonces al-Khayyām combina estas dos proporciones manipulando algebraicamente sus términos. Esto es:

$$\frac{BC^2}{BK^2} = \frac{EK}{BI} \cdot \frac{BI}{KA} = \frac{EK}{KA}$$

De donde se tiene que $BC^2 \cdot KA = BK^2 \cdot EK$.

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base cuadrada es BC y de altura KA, es entonces igual al sólido donde la base es el cuadrado de BK y la altura EK.

Así, con $x = BK$, y por hipótesis se tiene que $BC^2 \cdot AB = c$, $BC^2 = b$ y $BE = a$, la ecuación que se quiere resolver puede reescribirse:

$$x^3 + bx + c = BK^3 + BC^2 \cdot BK + BC^2 \cdot AB$$

Sacando factor común BC^2, tenemos:

$$x^3 + bx + c = BK^3 + BC^2(BK + AB)$$

Pero $BK + AB = AK$, entonces:

$$x^3 + bx + c = BK^3 + BC^2 \cdot AK$$

Pero el resultado de combinar las proporciones es $BC^2 \cdot KA = BK^2 \cdot EK$.

Por lo tanto al reemplazar tenemos:

$$x^3 + bx + c = BK^3 + BK^2 \cdot EK$$

Sacando factor común BK^2:

$$x^3 + bx + c = BK^2(BK + EK) = BK^2 \cdot EB = ax^2$$

Análogamente se puede mostrar que BP es otra solución de la ecuación.

Los otros casos que se presentan en la demostración son los siguientes:

1.2 H está al exterior de $\mathcal{C}$.

Si la hipérbola $\mathscr{H}$ pasa por H, se encuentra con $\mathscr{C}$ en un punto de tangencia y en dos puntos de intersección, entonces el problema se reduce a los precedentes.

Si $\mathscr{H}$ no se encuentra con $\mathscr{C}$, en la construcción del rectángulo el segmento será más pequeño que GC o más grande, para encontrar un punto de $\mathscr{H}$ en el interior del círculo.

Si $\mathscr{H}$ después de todos esos intentos, no se encuentra con $\mathscr{C}$, el problema será imposible y la demostración será la inversa del caso precedente.

2. C está en $\mathscr{C}$ o al exterior de $\mathscr{C}$.

Se Prolonga CG y se construye un rectángulo tal que su vértice sea opuesto a C, un punto por donde pasa la hipérbola que corta a $\mathscr{C}$. La demostración es fácil según al-Khayyām**.**

3. Se puede demostrar los casos imposibles invirtiendo la demostración de los casos posibles.

En efecto, para que el problema sea posible, es necesario que

$$x < a = EB$$

Si $x = a$, entonces

$$x^3 = ax^2$$

Lo cual es imposible, porque

$$x^3 + bx + c = ax^2$$

Y si $x > a$, entonces

$$x^3 > ax^2$$

Lo cual es imposible.

Sea entonces $BP = x$. Sea $PN \perp BE$ y N en $\mathcal{C}$. Entonces N está necesariamente en $\mathcal{H}$, pero esto es absurdo ya que $\mathcal{H}$ no se encuentra con el círculo.

De hecho, como $BP = x$, entonces

$$BP^3 + BC^2 \cdot BP + BC^2 \cdot AB = BE \cdot BP^2 = BP^3 + PE \cdot BP^2$$

Por lo tanto

$$BC^2 \cdot BP + BC^2 \cdot AB = PE \cdot BP^2$$

$$\rightarrow AP \cdot BC^2 = PE \cdot BP^2$$

$$\rightarrow \frac{BC^2}{BP^2} = \frac{PE}{AP}$$

Pero $N \in \mathcal{C}$

$$\rightarrow \frac{NP^2}{PA^2} = \frac{PE}{AP} = \frac{BC^2}{BP^2} = \frac{AD^2}{BP^2}$$

De donde

$$NP \cdot PB = PA \cdot AD$$

pues

$$(SP) = (DP)$$

pues

$$(SP) - (CP) = (DP) - (CP)$$

Es decir,

$$(NC) = (CA) = (CH)$$

Por lo tanto N está sobre la hipérbola que pasa por H y que tiene como asíntotas a CG y CM. El método seguido en este problema según los investigadores, es el siguiente:

Sea BC y C. Se construye en la prolongación de BC un rectángulo de vértice C e igual a (AC).

Sea $CM \perp GC$. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola que pasa por el vértice opuesto a C y a las asíntotas GC y CM. Si $\mathcal{H}$ se encuentra con $\mathcal{C}$ por tangencia o por intersección, el problema es posible. De lo contrario, es imposible.

En síntesis, al-Khayyām plantea los casos según si: el punto C está dentro de la circunferencia, sobre la circunferencia o fuera de ella. Para todos los casos según al-Khayyām puede haber solución. El considera el primer caso donde el punto C está dentro de la circunferencia. Aquí nuevamente se presentan tres casos ya que el punto de intersección H también puede estar en la circunferencia, o fuera de ella. Al-Khayyām hace la demostración para el caso en que H esté en la circunferencia.

Para explicar la elección de las curvas, los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh consideran de nuevo a (BA, BC) un sistema de ejes (Ox, Oy); entonces la ecuación [21] se reescribe:

$$(a-x)\left(x+\frac{c}{b}\right)=\frac{b}{x^2}\left(x+\frac{c}{b}\right)^2$$

por

$$y^2=\left(x+\frac{c}{b}\right)(a-x) \text{ Ecuación de } \mathcal{C}.$$

y

$$xy=b^{1/2}\left(x+\frac{c}{b}\right) \text{ Ecuación de } \mathcal{H}.$$

Por último, se debe tener en cuenta que la elección de las curvas se hace de manera análoga que en la ecuación [19]. Los cambios de signo de los coeficientes se deben a un cambio de posición del círculo y de la hipérbola.

3.3.11 Ecuación [22]: $x^3 = ax^2 + bx + c$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de dos hipérbolas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $EB = b^{1/2}$ y sea $AB \perp BE$ tal que $BE^2 \cdot AB = c$. El segmento $AB = c/b$ se puede construir a partir de la ecuación [13]. Sea $BC = a$ sobre la prolongación de AB. Se construye el rectángulo (AE) y el rectángulo (EH) sobre EM (M está sobre la prolongación de BE) tal que $(EH) = (AE)$.

Se traza la hipérbola $\mathscr{H}_1$ que pasa por H y tiene como asíntotas a EM y ES. Se traza una segunda hipérbola $\mathscr{H}_2$ de vértice C, cuyo eje está sobre la prolongación de BC y de lado recto y transverso igual a AC. Las dos hipérbolas se cortan necesariamente; sea I el punto de intersección. Se construyen las perpendiculares ID y IN a BM y BC respectivamente; además

$$(IE) = (EH) = (EA)$$

Además I y H están en $\mathscr{H}_1$; y $HM \cdot ME = BE \cdot BA$ por hipótesis.

Tal como se muestra en la siguiente gráfica:

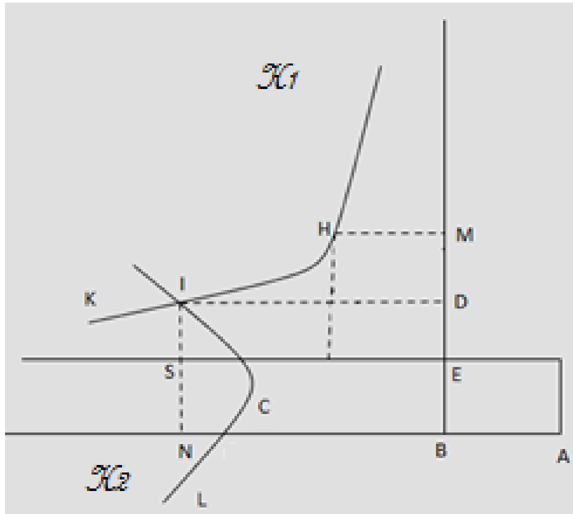

Figura 21. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

De donde

$$(IE) + (EN) = (EA) + (EN)$$

De donde

$$(AS) = (IB)$$

Por lo tanto,

$$\frac{IN}{AN} = \frac{BE}{BN}$$

Esto en la demostración de al-Khayyām indica que las longitudes de los lados de los rectángulos son inversamente proporcionales, así como el cuadrado de ellas, que es la proporción que viene a continuación:

$$\frac{IN^2}{AN^2} = \frac{BE^2}{BN^2}$$

Pero

$$\frac{IN^2}{AN^2} = \frac{NC}{AN}$$

$I \in H_2 \rightarrow IN^2 = NC \cdot AN \rightarrow \frac{IN^2}{AN^2} = \frac{NC}{AN}$

De donde

$$\frac{BE^2}{BN^2} = \frac{NC}{AN}$$

De donde

$$BE^2 \cdot AN = BN^2 \cdot NC$$

Como el punto de intersección I pertenece a la segunda hipérbola, se tiene que:

$$\frac{IN}{AN} = \frac{CN}{IN}$$

Que corresponde a la segunda proporción que al-Khayyām utilizará para resolver la ecuación.

Entonces,

$$BE^2 \cdot AN = BE^2 \cdot AB + BE^2 \cdot BN = c + b \cdot BN$$

Donde BN es la solución.

Como puede observarse, en un nivel propiamente geométrico, a partir de las dos hipérbolas dadas en la figura 21, se tiene que $IE = EA$. Al-Khayyām añade EN a IE y EA. Así obtiene dos rectángulos IB y AS que tienen igual superficie. De este hecho se deducen las relaciones geométricas de las dos superficies mediante la siguiente proporción:

$$\frac{EB}{BN} = \frac{BD}{AN}$$

Con $IN = BD$.

Además, como el punto de intersección I pertenece a la segunda hipérbola. Las relaciones geométricas que explican este hecho están dadas por la siguiente proporción:

$$\frac{BD}{AN} = \frac{CN}{BD}$$

Con $BD = IN$.

Al-Khayyām combina estas dos proporciones haciendo una manipulación algebraica de sus términos. Entonces se tiene:

$$\frac{EB^2}{BN^2} = \frac{CN}{BD} \cdot \frac{BD}{AN} = \frac{CN}{AN}$$

De donde se deduce que $EB^2 \cdot AN = BN^2 \cdot CN$.

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base es el cuadrado de EB y de altura AN es entonces igual al sólido cuya base es el cuadrado de BN y de altura CN.

Entonces como $x = BN$, y por hipótesis $EB^2 = b$, $BE^2 \cdot AB = c$, $BC = a$, entonces la ecuación que se quiere resolver se puede reescribir:

$$x^3 = BN^3 = BN^2(BC + CN) = BN^2 \cdot BC + BN^2 \cdot CN$$

Pero el resultado de la combinación de las proporciones es $EB^2 \cdot AN = BN^2 \cdot CN$. Entonces sustituyendo términos, tenemos:

$$x^3 = BN^2 \cdot BC + EB^2 \cdot AN$$

Pero $AN = BN + AB$, entonces:

$$x^3 = BN^2 \cdot BC + EB^2(BN + AB)$$

$$x^3 = BN^2 \cdot BC + EB^2 \cdot BN + EB^2 \cdot AB$$

$$x^3 = ax^2 + bx + c$$

Cabe anotar que como lo mencionan los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999), la ecuación [22] tiene una raíz positiva. La ecuación puede tener una raíz doble negativa, o dos raíces negativas. Para determinar la raíz positiva, al-Khayyām traza una primera hipérbola equilátera y después otra hipérbola equilátera de la misma especie y muestra que ellas se cortan en un punto común que corresponde a la raíz. Para comprender la elección de las curvas, hay que recordar que 0 no es una raíz de la ecuación. Esto puede reducirse a

$$\frac{BE^2}{BN^2} = \frac{NC}{AN} \qquad \left[\Leftrightarrow \frac{b}{x^2} = \frac{x-a}{x+\frac{c}{b}} \right]$$

Sea (BA, BE) un sistema de ejes (Ox, Oy). Entonces

$$x - a = \frac{b}{x^2}\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Se multiplica en ambos lados por $\left(x + \frac{c}{b}\right)$, entonces

$$\left(x + \frac{c}{b}\right)(x - a) = \frac{b}{x^2} \quad \left(x + \frac{c}{b}\right)^2$$

En primer lugar, se debe considerar si

$$\left(y + b^{1/2}\right)^2 = (x - a)\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Y se obtiene la hipérbola $\mathscr{H}_2$ de diámetro AC; y luego se debe considerar si

$$\left(y + b^{1/2}\right)^2 = \left(b^{1/2} + \frac{cb^{-1/2}}{x}\right)^2$$

Y se obtiene la hipérbola $\mathscr{H}_1$ de ecuación

$$y = \frac{cb^{-1/2}}{x}$$

Al-Khayyām muestra que si $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ se cortan en un punto $I\ (Ox, Oy)$, ese punto es raíz de la ecuación [22]. En efecto

$$I\ (x_0, y_0) \in H_1 \to y_0 = \frac{cb^{-1/2}}{x_0}$$

$$\to x_0\left(y_0 + b^{1/2}\right) = b^{1/2}\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)$$

$$\to \frac{y_0 + b^{1/2}}{x_0 + \frac{c}{b}} = \frac{b^{1/2}}{x_0}$$

pero

$$I\ (x_0, y_0) \in H_2 \to \frac{\left(y_0 + b^{1/2}\right)^2}{\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)^2} = \frac{x_0 - a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

pues

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{x_0 - a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

de donde

$${x_0}^3 = a{x_0}^2 + bx_0 + c$$

Como puede observarse, efectivamente este es el resultado de la ecuación que se quiere resolver. Coincide exactamente con la combinación de las ecuaciones algebraicas de las cónicas elegidas por al-Khayyām en su demostración geométrica.

3.3.12 Ecuación [23]: $x^3 + ax^2 = bx + c$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de dos hipérbolas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $BD = b^{1/2}$, $CB = a$ tal que $CB \perp BD$. Sea S tal que $BD^2 \cdot S = c$.

Se puede construir S con la ayuda de la ecuación [13]. Se presentan tres casos dependiendo si el segmento es más pequeño, igual o más grande que BC.

Primer caso: $BC > BA = S \Leftrightarrow a > \frac{c}{b}$ tal como se muestra en la gráfica:

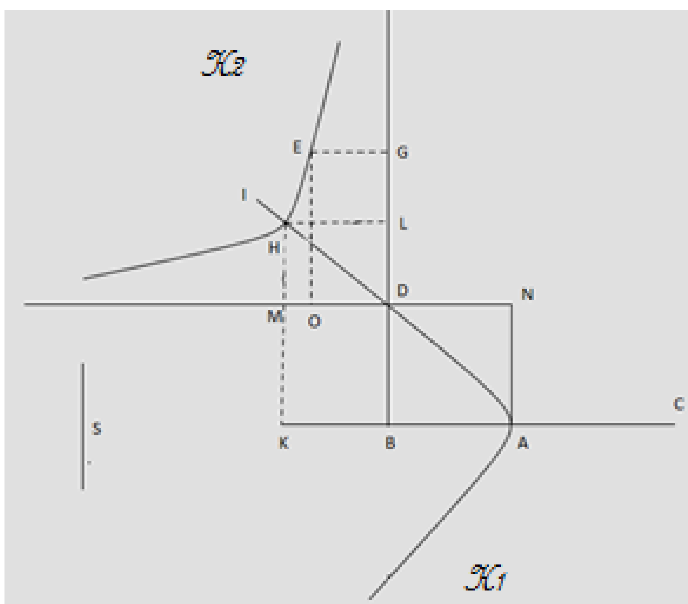

Figura 22. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

Sea A entre B y C tal que $AB = S$. Se completa el rectángulo (AD). Sea G la prolongación de BD. Sea $(ED) = (AD)$ construido sobre DG. El punto E es de posición conocida al igual que EG y GD son de magnitud y de posición conocida.

Sea (EH) la hipérbola que pasa por E y tiene como asíntotas a GD y DO.

Sea $\mathscr{H}_1$ la hipérbola de vértice A, de eje AB, de lado recto y transverso AC. La hipérbola $\mathscr{H}_1$ corta necesariamente a (EH) en un punto H.

Sea HK y HL perpendiculares a AB y BD respectivamente. Entonces

$$(HD) = (ED) = (AD)$$

Y $E \epsilon (EH)$ y $H \epsilon (EH)$, y por hipótesis $(ED) = (AD)$, de donde

$$(HD) + (DK) = (AD) + (DK)$$

Pues

$$(HB) = (AM)$$

También se tiene que,

$$\frac{BL}{KA} = \frac{KM}{HL}$$

Esta proporción representa que los dos rectángulos tienen la misma superficie después de añadir el rectángulo DK. Así, las longitudes de los lados de los rectángulos son inversamente proporcionales, como también el cuadrado de ellas:

$$\frac{BL^2}{KA^2} = \frac{KM^2}{HL^2}$$

Pero

$$\frac{HK^2}{KA^2} = \frac{CK}{AK}$$

Y $H \epsilon\ \mathscr{H}_1 \rightarrow BL^2 = KA \cdot CK,$ pues,

$$\frac{BD^2}{KB^2} = \frac{CK}{AK}$$

De donde

$$BD^2 \cdot AK = KB^2 \cdot CK$$

Pero

$$KB^2 \cdot CK = KB^3 + CB \cdot KB^2 = KB^3 + a \cdot KB^2$$

Por otra parte

$$BD^2 \cdot AK = BD^2 \cdot AB + BD^2 \cdot KB = c + b \cdot KB$$

Pues

$$KB^3 + a \cdot KB^2 = c + b \cdot KB$$

Pues KB es la solución.

Segundo Caso: $BC = AB = S \Leftrightarrow a = \frac{b}{c}$

Aquí BD es la solución buscada. En efecto,

$$BD^3 = BD^2 \cdot BD = b \cdot BD$$

$$c = BD^2 \cdot S = BD^2 \cdot BC = a \cdot BD^2$$

Pues

$$BD^3 + a \cdot BD^2 = c + b \cdot BD$$

Pero igualmente

$$BD^3 + c = a \cdot BD^2 + b \cdot BD$$

Por lo tanto, se ve que en este caso, BD es también solución de la ecuación

$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

Que es del tipo de la ecuación [25].

Tercer caso: $BC < BA = S \Leftrightarrow a < \frac{b}{c}$

Sea C entre A y B tal que $AB = S$. Se construye la segunda hipérbola que pasa esta vez por C, en lugar de A, y con el lado recto y transverso igual a AC. Las dos hipérbolas se cortan necesariamente; la solución es entonces BK. La demostración es análoga a la precedente, a excepción de que esta vez:

$$\frac{HK^2}{KA^2} = \frac{AK}{KC}$$

Tal como se muestra en la gráfica:

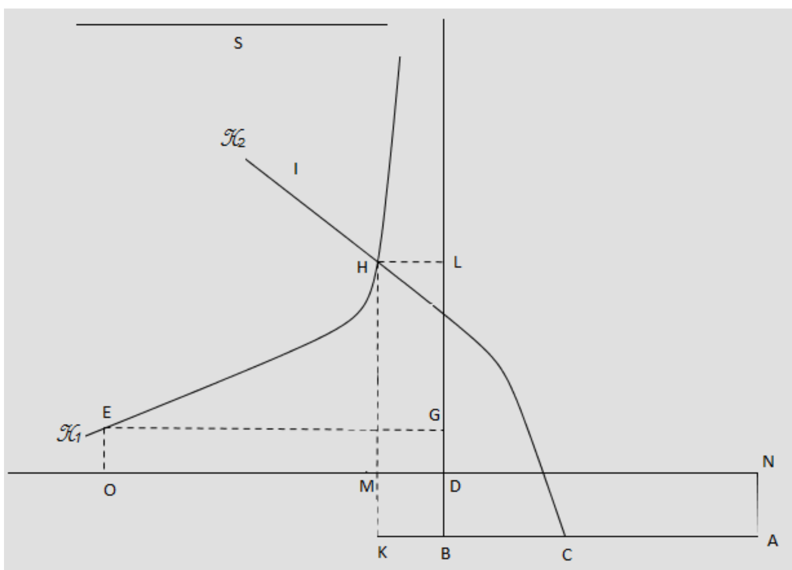

Figura 23. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

Por lo tanto, estos tratamientos presentan en diferentes casos la ecuación que se va a tratar más adelante:

$x^3 + c = ax^2 + bx$ Ecuación [25]

En síntesis, al-Khayyām considera tres casos en los cuales: El segmento $BC > BA$, $BC = BA$, y por último cuando $BC < BA$. Al-Khayyām demuestra el primer caso para el cual KB es la solución. Para el caso de que $BC < BA$ la solución es $\sqrt{b}$ o si bien BD.

La doble implicación en la siguiente expresión hace que las dos partes de la expresión sean equivalentes:

$$BC > BA = S \leftrightarrow a > \frac{c}{b}$$

Como por hipótesis $a = CB, c = BD^2 \cdot BA$ y $b = BD^2$, reemplazando tenemos:

$$BC > BA = S \leftrightarrow BC > \frac{BD^2 \cdot BA}{BD^2}$$

Para el caso de que $BC > BA$ se tiene:

En un nivel propiamente geométrico, a partir de la forma en que están dadas las hipérbolas en la *figura 22*, al-Khayyām establece las relaciones geométricas entre ellas. Inicialmente se tiene que $HD = DA$ entonces al-Khayyām añade DK a HD y DA. Así se obtienen dos rectángulos HB y MA que tienen igual superficie.

A partir de este hecho, al-Khayyām establece las relaciones geométricas de estos rectángulos mediante la siguiente proporción:

$$\frac{BD}{BK} = \frac{BL}{AK}$$

Con $HL = BK$ y $KM = BD$.

De otra parte, como el punto de intersección H está sobre la segunda hipérbola, dicha relación geométrica se establece mediante la siguiente proporción:

$$\frac{BL}{AK} = \frac{CK}{BL}$$

Para combinar estas dos proporciones, al-Khayyām hace una manipulación algebraica en sus términos. Así se obtiene que:

$$\frac{BD^2}{BK^2} = \frac{CK}{BL} \cdot \frac{BL}{AK} = \frac{CK}{AK}$$

De donde se tiene que $BD^2 \cdot AK = BK^2 \cdot CK$.

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base es el cuadrado de BD y de altura AK es entonces igual al sólido cuya base es el cuadrado de BK y de altura CK.

Entonces con $x = KB$, y por hipótesis: $BD^2 \cdot BA = c,\ CB = a\ y\ BD^2 = b$, la ecuación que se quiere resolver se puede reescribir:

$$x^3 + ax^2 = KB^3 + KB^2 \cdot BC$$

Sacando factor común KB^2, tenemos:

$$x^3 + ax^2 = KB^2(KB + BC)$$

Además $KB + BC = CK,$ entonces remplazando tenemos:

$$x^3 + ax^2 = KB^2 \cdot KC$$

Pero el resultado de combinar las dos proporciones es $BD^2 \cdot AK = BK^2 \cdot CK$. Entonces remplazando, tenemos:

$$x^3 + ax^2 = BD^2 \cdot AK$$

Además tenemos que $AK = AB + BK$, entonces:

$$x^3 + ax^2 = BD^2 \cdot (KB + BA) = BD^2 \cdot KB + BD^2 \cdot BA = bx + c$$

Cabe resaltar que como lo mencionan los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999), la ecuación [23] tiene tres números reales estrictamente positivos (a, b, c) y una raíz estrictamente positiva; puede tener también dos raíces negativas o una raíz doble negativa. Al-Khayyām solo reconoce la raíz positiva y para determinarla utiliza las dos hipérbolas. Para explicar la elección de las curva los historiadores vuelven a considerar como en las ecuaciones precedentes, el sistema de ejes $(AB, BD) = (Ox, Oy)$.

Para la elección de las curvas, al-Khayyām acude – en el primer caso- a la ecuación

$$\frac{BD^2}{KB^2} = \frac{CK}{AK} \qquad \left[\Leftrightarrow \frac{b}{x^2} = \frac{x+a}{x+\frac{c}{b}}\right]$$

Multiplicando en ambos lados por $\left(x + \frac{c}{b}\right)^2$

$$\frac{b}{x^2}\left(x + \frac{c}{b}\right)^2 = (x+a)\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Lo que equivale a introducir la raíz $x = -\frac{c}{b}$ pues

$$\left(y + b^{1/2}\right)^2 = (x+a)\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}_2$ de vértice $A\left(-\frac{c}{b}, -b^{1/2}\right)$ y de eje transverso CA; y

$$\left(y + b^{1/2}\right)^2 = \left(b^{1/2} + \frac{c}{xb^{1/2}}\right)^2$$

De donde

$$y = \frac{c}{xb^{1/2}}$$

Ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}_1$.

Estas dos ramas se cortan en un punto $H\ (Ox, Oy)$, entonces

$$H\ (x_0, y_0) \in H_1 \rightarrow x_0 y_0 = cb^{-1/2} \Rightarrow \left(y_0 + b^{1/2}\right) = b^{1/2} + \frac{c}{x_0 b^{1/2}}$$

$$\rightarrow x_0\left(y_0 + b^{1/2}\right) = cb^{-1/2} + x_0 b^{1/2} = b^{1/2}\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)$$

Pues

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{\left(y_0 + b^{1/2}\right)^2}{\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)^2}$$

Pero

$$H(x_0, y_0) \in H_2 \Rightarrow \frac{\left(y_0 + b^{1/2}\right)^2}{\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)^2} = \frac{x_0 + a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

Y se tiene

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{x_0 + a}{x_0 + \frac{c}{b}}$$

Es decir,

$${x_0}^3 + a{x_0}^2 = bx_0 + c$$

Para $\frac{c}{b} > a$ se muestra de la misma manera que la abscisa del punto de intersección $H\ (Ox, Oy)$ es una raíz de la ecuación [23].

Para $\frac{c}{b} = a,\ \ x_0 = b^{1/2}$ es solución por

$$b \cdot b^{1/2} + c = b^{3/2} + \frac{c}{b} \cdot b$$

Recordemos que para el caso $C = A$, la ecuación de $\mathscr{H}_2$ se reescribe:

$$y + b^{1/2} = \pm(x + a)$$

Y por lo tanto $\mathscr{H}_2$ se descompone en dos rectas, donde una de las ecuaciones es $y = x + a$ y corta a $\mathscr{H}_1$ en un punto $H\ (Ox, Oy)$ con $x_0 = b^{1/2}$.

3.3.13 Ecuación [24]: $x^3 + bx = ax^2 + c$

Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número.

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de un semi-círculo y una hipérbola.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $BC = a$, $BD = b^{1/2}$ y $BD \perp BC$. Sea S un segmento tal que $BD^2 \cdot S = c$. El segmento S se construye gracias a los lemas y la ecuación [13]. Se presentan tres casos dependiendo si S es menor, igual o mayor a BC.

Primer caso: $S < BC \Leftrightarrow \frac{c}{b} < a$

Sea $BA = S$, se completa el rectángulo (AD). Sea (AKC) el semi-círculo $\mathcal{C}$ de diámetro AC. Se traza la hipérbola $\mathcal{H}$ que pasa por A y que tiene como asíntotas a BD y DG. La hipérbola $\mathcal{H}$ corta a la tangente del círculo AG en A; y corta a $\mathcal{C}$ en otro punto. Tal como se muestra en la gráfica:

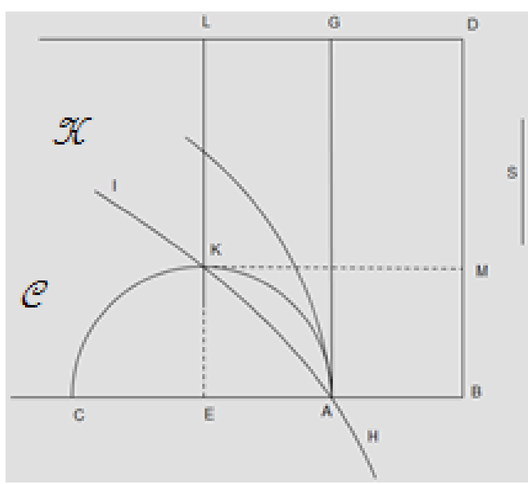

Figura 24. Representación de la intersección del semi-círculo y la hipérbola según al-Khayyām.

En efecto, se supone en la demostración que $\mathscr{H}$ pasa entre $\mathscr{C}$ y AG. Entonces, por la *proposición 49 del Libro II de las cónicas*[48], se puede dibujar una tangente a $\mathscr{H}$ y a A. Esta tangente estaría entre $\mathscr{C}$ y AG, lo cual es absurdo, o más allá de AG entonces AG estaría entre $\mathscr{H}$ y la tangente, lo cual es igualmente absurdo.

Por lo tanto $\mathscr{H}$ corta a $\mathscr{C}$ en otro punto K, que será de posición conocida.

Sea $KE \perp BC$ y $KM \perp BD$, KE y KM son de posición y magnitudes conocidas. Se prolonga KE hasta L que está sobre DG y completamos (KD). Entonces

$$(AD) = (KD)$$ Ecuación de la hipérbola

Y quitando (MG) y añadiendo (AK), tenemos

$$(BK) = (AL)$$

pues

$$\frac{EK}{EA} = \frac{EL}{EB}$$

Esto en la demostración de al-Khayyām indica que las longitudes de los lados de los rectángulos son inversamente proporcionales, así como el cuadrado de ellos:

$$\frac{EK^2}{EA^2} = \frac{EL^2}{EB^2}$$

Pero,

$$\frac{EK^2}{EA^2} = \frac{EC}{EA}$$

Y $EK^2 = EA \cdot EC$ (K pertenece al círculo), de donde

$$\frac{BD^2}{BE^2} = \frac{EC}{EA}$$

[48] Proposición 49 del Libro II de las Cónicas: Trazar una tangente a una sección cónica dada por un punto dado no situado en su interior.

De donde

$$BD^2 \cdot EA = BE^2 \cdot EC$$

pues

$$BE^3 + BD^2 \cdot EA = (EC + EB)\, EB^2 = BC \cdot EB^2 = a \cdot BE^2$$

pues

$$BE^3 + BD^2(EA + AB) = a \cdot \ BE^2 + BD^2 \cdot AB$$

$$BE^3 + b \cdot BE = a \cdot \ BE^2 + c$$

Donde BE es la solución.

Segundo Caso: $S = BC$

BC será la solución buscada. En efecto,

$$BC^3 = BC \cdot BC^2 = a \cdot BC^2$$

Y

$$BD^2 \cdot BC = b \cdot BC = BD^2 \cdot S = c$$

De donde

$$BC^3 + b \cdot BC = a \cdot BC^2 + c$$

BC es una solución también de ecuaciones que tienen la forma de la ecuación [25], entonces

$$BC^3 + b \cdot BC = BC^3 + c = a \cdot BC^2 + b \cdot BC$$

Es decir, $x = BC$ verifica:

$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

Tercer caso: $S > BC$

Sea $AB = S$ y el semi-círculo (AKC) de diámetro AC. Entonces la hipérbola que pasa por A corta al semi-círculo en K, como ya se mostró.

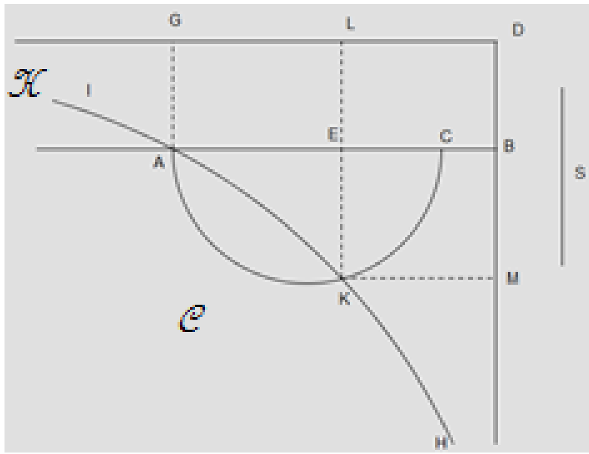

Figura 25 Representación de la intersección del semi-círculo y la hipérbola según al-Khayyām.

Sea $KE \perp AB$, $KM \perp BD$.

EB será la solución buscada. La prueba es idéntica a la precedente.

Se quita (ED) y se tiene

$$\frac{EK}{EA} = \frac{AG}{EB} \ y \ \frac{EK^2}{EA^2} = \frac{AG^2}{EB^2}$$

Y la secuencia es idéntica.

En resumen, en esta ecuación al-Khayyām considera tres casos en los que:

$$AB < BC, \qquad AB = BC, \qquad AB > BC$$

Al-Khayyām demuestra el primer caso, cuando $AB < BC$.

En síntesis, a partir de la manera en que se presentan las dos cónicas y su intersección en la *figura 24*, al-Khayyām establece las propiedades geométricas y sus relaciones mediante las siguientes proporciones:

En un nivel propiamente geométrico, a partir de la hipérbola se tiene que $AD = KD$. Al-Khayyām quita MG y añade AK a los rectángulos AD y KD. De esta forma, obtiene dos rectángulos BK y AL que tienen igual superficie. De este hecho, se establecen sus relaciones geométricas mediante la siguiente proporción:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BM}{AE}$$

De otra parte, como K también pertenece al semi-círculo, a partir de las relaciones geométricas que se tienen del triángulo rectángulo AKC inscrito en el semi-círculo, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{BM}{AE} = \frac{EC}{BM}$$

Con $BD = EL,\ BM = EK.$

Al-Khayyām nuevamente combina estas dos proporciones manipulando algebraicamente sus términos y obtiene:

$$\frac{BD^2}{BE^2} = \frac{EC}{BM} \cdot \frac{BM}{AE} = \frac{EC}{AE}$$

Y así, se llega a que $BD^2 \cdot AE = BE^2 \cdot EC$.

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base es el cuadrado de BD y de altura AE es entonces igual al sólido cuya base es el cuadrado de BE y de altura EC.

Entonces con $x = BE$, y por hipótesis, $BC = a,\ BD^2 = b,\ BD^2 \cdot AB = c$, la ecuación que se quiere resolver puede reescribirse:

$$x^3 + bx = BE^3 + BD^2 \cdot BE$$

Además $BE = BA + AE$, entonces:

$$x^3 + bx = BE^3 + BD^2\,(BA + AE) = BE^3 \cdot BD^2 \cdot BA + BD^2 \cdot AE$$

Pero el resultado de la combinación de las proporciones es $BD^2 \cdot AE = BE^2 \cdot EC$. Entonces,

$$x^3 + bx = BE^3 + BE^2 \cdot EC + BD^2 \cdot BA$$

Sacando factor común BE^2, tenemos:

$$x^3 + bx = BE^2(BE + EC) + BD^2 \cdot BA$$

Además $BE + EC = BC$, entonces:

$$x^3 + bx = BE^2 \cdot BC + BD^2 \cdot BA = x^2a + c = ax^2 + c$$

Como lo mencionan los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999), esta vez se tienen tres números reales estrictamente positivos (a, b, c), y al menos una raíz positiva. Para algunos valores de (a, b, c), ella puede tener una raíz doble positiva o dos raíces positivas. Al-Khayyām busca determinar solo una raíz positiva porque son las que él reconoce.

Para la elección de las curvas, al-Khayyām acude a la ecuación

$$\frac{BD^2}{BE^2} = \frac{EC}{EA} \qquad \left[\Leftrightarrow \frac{b}{x^2} = \frac{a - x}{x - \frac{c}{b}} \right]$$

En el sistema de ejes $(DG, DB) = (Ox, Oy)$. Multiplicando por $x - \frac{c}{b}$, y se introduce la raíz $x = \frac{c}{b}$, se tiene

$$(a - x)\left(x - \frac{c}{b}\right) = \frac{b}{x^2}\left(x - \frac{c}{b}\right)^2 = \left(b^{1/2} - \frac{cb^{-1/2}}{x}\right)^2$$

Se tiene:

$$\left(y - b^{1/2}\right)^2 = (a - x)\left(x - \frac{c}{b}\right) \text{ Ecuación del círculo } \mathcal{C}:$$

de diámetro AC, y $A\left(\frac{c}{b}, b^{1/2}\right)$ y $C\left(a, b^{1/2}\right)$

Por otra parte

$$\left(y - b^{1/2}\right)^2 = \left(\frac{cb^{-1/2}}{x} - b^{1/2}\right)^2$$

De donde

$xy = cb^{-1/2}$ Ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}$:

A continuación se presenta la explicación de los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh (1999) a partir de los casos considerados por al-Khayyām:

Primer caso: $c < ab$

Para la construcción $A \epsilon\ \mathscr{C}\ \cap\ \mathscr{H}$. Al-Khayyām muestra que las dos curvas se cortan en otro punto $K\ (Ox, Oy)$, de lo contrario puede trazarse una tangente a $\mathscr{H}$ y a un punto A que corte a $\mathscr{C}$, lo cual es absurdo. Entonces

$$K\ (x_0, y_0) \in H \to x_0 y_0 = cb^{-1/2} \Rightarrow y_0\left(x_0 - \frac{c}{b}\right) = \frac{c}{b}\left(b^{1/2} - y_0\right)$$

De donde

$$b^{1/2}\left(x_0 - \frac{c}{b}\right) = x_0\left(b^{1/2} - y_0\right)$$

De donde

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{\left(b^{1/2} - y_0\right)^2}{\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)^2}$$

Pero $K(x_0, y_0) \in C \Rightarrow \left(b^{1/2} - y_0\right) = (a - x_0)\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)$

De donde

$$\frac{\left(b^{1/2} - y_0\right)^2}{\left(x_0 - \frac{c}{b}\right)^2} = \frac{a - x_0}{x_0 - \frac{c}{b}}$$

Y finalmente

$$\frac{b}{{x_0}^2} = \frac{a - x_0}{x_0 - \frac{c}{b}}$$

x_0 es también raíz de la ecuación [24].

Segundo caso: $c = ab$

Se verifica que $x_0 = a$ es una solución. Entonces

$$a^3 + ba = a \cdot a^2 + c$$

Tercer caso: $c > ab$

En este caso, $\mathscr{H}$ y $\mathscr{C}$ se cortan en otro punto distinto a A, por las mismas razones que en los casos precedentes; sea $K\ (Ox, Oy)$, ese punto. Entonces la ecuación de $\mathscr{H}$

$$x_0 y_0 = cb^{-1/2} \Rightarrow x_0\left(y_0 - b^{1/2}\right) = b^{1/2}\left(\frac{c}{b} - x_0\right)$$

De donde

$$\frac{{x_0}^2}{b} = \frac{\left(\frac{c}{b} - x_0\right)}{x_0 - a}$$

Y x_0 es también solución de la ecuación [24].

3.3.14 Ecuación [25]: $x^3 + c = ax^2 + bx$

***Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa*.**

Para la solución de esta ecuación al-Khayyām utiliza la intersección de dos hipérbolas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $BC = a$, $BD = b^{1/2}$ y $BD \perp BC$. Sea S un segmento tal que $BD^2 \cdot S = c$. El segmento S se construye gracias a los lemas y la ecuación [13]. Sea $BA = S$. Se presentan tres casos dependiendo si BC es superior, inferior o igual a S.

Primer caso: $S < BC \Leftrightarrow c < ab$

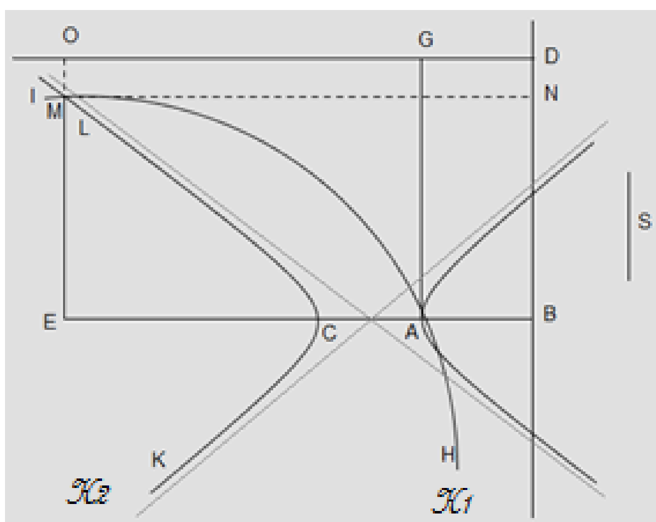

Figura 26. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

Se completa el rectángulo (BG) y se traza la hipérbola equilátera $\mathcal{H}_1$ que pasa por A y tiene como asíntotas a BD y DG. Se traza otra hipérbola $\mathcal{H}_2$ de vértice C, de eje BC y de lado recto y transverso igual a AC. Las dos curvas son de posición conocida y se cortan necesariamente en un punto M.

Sea $MN \perp DB$, $EMO \perp AB$. Las rectas MN y EMO son de posición y de magnitudes conocidas. Pues

$$(DA) = (DM) \text{ Ecuación de } \mathscr{H}_1$$

Se deduce como antes que:

$$(NE) = (GE)$$

Por

$$(NE) = (DA) - (NG) + (AM)$$

$$(GE) = (DM) - (NG) + (AM)$$

De donde

$$\frac{ME}{EA} = \frac{BD}{BE}$$

Esto en la demostración de al-Khayyām indica que las longitudes de los lados de los rectángulos son inversamente proporcionales, así como el cuadrado de ellas:

$$\frac{ME^2}{EA^2} = \frac{BD^2}{BE^2}$$

Pero

$$\frac{ME^2}{EA^2} = \frac{CE}{EA}$$

Como $M \in \mathscr{H}_2 \rightarrow ME^2 = CE \cdot EA$, pues

$$BD^2 \cdot EA = BE^2 \cdot CE$$

De donde

$$BE^2 \cdot BC + BD^2 \cdot EA = BE^3$$

Entonces

$$BC \cdot BE^2 + BD^2 \cdot BA + BD^2 \cdot EA = a \cdot BE^2 + b \cdot BE = BE^3 + c$$

Donde BE es la solución.

En síntesis, la demostración de al-Khayyām dada por los historiadores se reduce a lo siguiente:

A partir de la forma en que están dadas las dos hipérbolas y su intersección en la *figura 26*, al-Khayyām establece las relaciones geométricas mediante las siguientes proporciones:

En un nivel propiamente geométrico puede observarse que al-Khayyām quita GN y añade MA a los rectángulos DA y DM. Así obtiene dos rectángulos NE y GE que tienen igual superficie. Las relaciones geométricas de estos dos rectángulos a partir de la *figura 26* están dadas en la siguiente proporción:

$$\frac{ME}{EA} = \frac{BD}{BE}$$

Por otra parte, como el punto de intersección M pertenece también a la segunda hipérbola, se tiene que $ME^2 = CE \cdot EA$, lo que indica que:

$$\frac{ME}{CE} = \frac{EA}{ME}$$

Así, al combinar estas dos proporciones, manipulando algebraicamente sus términos, se tiene:

$$\frac{BD^2}{BE^2} = \frac{CE}{ME} \cdot \frac{ME}{EA} = \frac{CE}{EA}$$

Y cancelando los términos ME se tiene finalmente que:

$$BD^2 \cdot EA = BE^2 \cdot CE.$$

Esta expresión en los términos retóricos de al-Khayyām indica que el sólido cuya base es el cuadrado de BD y de altura AE es entonces igual al sólido cuya base es el cuadrado de BE y de altura CE.

Entonces haciendo la misma interpretación que en las ecuaciones anteriores $x = BE$.

Por tanto, se puede hacer una interpretación algebraica para resolver la ecuación cúbica con este procedimiento geométrico dado por al-Khayyām.

Entonces, con $x = BE$, y por hipótesis se tiene que $BC = a$, $BD = b^{1/2}$ y $BD^2 \cdot BA = c$, la ecuación que se quiere resolver puede rescribirse así:

$$x^3 + c = BE^3 + BD^2 \cdot AB$$

Pero $BE = BC + CE$ entonces BE^3, se puede descomponer:

$$x^3 + c = BE^2(BC + EC) + BD^2 \cdot AB$$

Distribuyendo el término BE^2:

$$x^3 + c = BE^2 \cdot BC + BE^2 \cdot EC + BD^2 \cdot AB$$

Pero el resultado de combinar las dos proporciones es $BD^2 \cdot EA = BE^2 \cdot CE$. Entonces remplazando, tenemos:

$$x^3 + c = BE^2 \cdot BC + BD^2 \cdot EA + BD^2 \cdot AB$$

Sacando factor común BD^2:

$$x^3 + c = BE^2 \cdot BC + BD^2(EA + AB)$$

Pero $EA + AB = EB$. Entonces finalmente se tiene:

$$x^3 + c = BE^2 \cdot BC + BD^2 \cdot EB$$

$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

A continuación se muestran los otros casos que al-Khayyām considera para esta ecuación, y la solución se da de la misma manera que se acaba de mostrar.

Segundo caso: $S = BC$

Entonces BC es la solución:

$$BC^3 = BC \cdot BC^2 = a \cdot BC^2$$

$$c = BD^2 \cdot BC = b \cdot BC$$

De donde

$$BC^3 + c = a \cdot BC^2 + b \cdot BC$$

Se tiene que igualmente BC es la solución de la ecuación

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

Por $BC^3 + b \cdot BC = a \cdot BC^2 + c$.

Tercer caso: $S > BC$

Sea $BA = S$. Se completa el rectángulo (BG). Sean las dos hipérbolas precedentes a diferencia de que esta vez las dos pasen por A. Ellas se cortan en A. Si ellas se intersecan en otros dos puntos de intersección o en otro punto de tangencia, tal como se muestra en el Libro IV de las Cónicas, el problema es entonces posible; si no es imposible. Si ellas se cortan, los dos puntos de intersección dan dos soluciones, y la demostración es idéntica a la del primer caso.

A continuación se muestra la gráfica correspondiente:

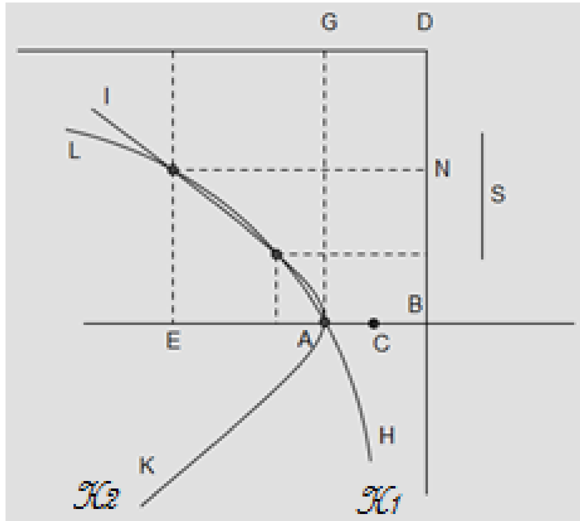

Figura 27. Representación de la intersección de las dos hipérbolas según al-Khayyām.

Para explicar la elección de las curvas según al-Khayyām, los historiadores consideran el sistema de ejes $(DO, DB) = (Ox, Oy)$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\left(x - \frac{c}{b}\right)^2$, e introduciendo la raíz $x = \frac{c}{b}$, y se tiene:

$$(x-a)(x-\frac{c}{b}) = \frac{b}{x^2}\left(x-\frac{c}{b}\right) = b^{1/2} - \frac{cb^{-1/2}}{x}$$

Además:

$$\left(y - b^{1/2}\right)^2 = (x-a)(x-\tfrac{c}{b}) \text{ Ecuación de } \mathscr{H}_2$$

Y

$$b^{1/2} - y = b^{1/2} - \frac{cb^{1/2}}{x}$$

de donde

$$xy = cb^{-1/2} \quad \text{Ecuación de } \mathscr{H}_1$$

3.4 Algunas consideraciones finales

Se finaliza este capítulo presentando algunas características comunes en las soluciones geométricas de las ecuaciones algebraicas de grado tres.

En primer lugar, con relación a las soluciones de las ecuaciones de tercer grado, este estudio histórico ha exigido plantearse algunos interrogantes como: ¿Con qué tipo de magnitudes opera al-Khayyām?, ¿Qué papel juegan los segmentos de recta en la determinación de las proporciones?, ¿De dónde surgen las proporciones que al-Khayyām utiliza en sus demostraciones?, ¿Qué caracteriza a estas proporciones?, ¿Qué relación se encuentra entre el trabajo de al-Khayyām y los trabajos realizados en la matemática griega?.

- Con relación al primer interrogante, puede reconocerse en todas las soluciones que las magnitudes con las que opera al-Khayyām son las representaciones de segmentos de recta y superficies a partir de la construcción de las cónicas para cada tipo de ecuación.

- En este sentido, al-Khayyām utiliza la representación de las magnitudes a partir de la gráfica para establecer las proporciones con las que deduce la raíz buscada.

- A partir de los procedimientos que realiza al-Khayyām en sus demostraciones, puede destacarse un nivel geométrico y otro algebraico en el origen y tratamiento de las proporciones, respectivamente.

  Respecto del primero, puede observarse que las proporciones surgen de las relaciones geométricas de segmentos de recta y superficies determinadas por el punto de intersección de las cónicas utilizadas para cada ecuación; en este sentido, la gráfica es fundamental para la determinación de las proporciones en al-Khayyām. En el segundo nivel, combina dichas proporciones al realizar un tratamiento que implica una manipulación algebraica de los términos de ellas para hallar una expresión equivalente a la raíz de la ecuación (como en el caso de las ecuaciones 13 a la 17 y en la ecuación 3), por ejemplo, $AB^2 \cdot EC = BE^3$, donde actualmente $x = BE$; en otros casos halla una expresión a partir de la cual puede deducir dicha raíz (como en el caso de la ecuación 18 a la 25), por ejemplo, $BC^2 \cdot AB = AK^2 \cdot BK$, donde actualmente $x = AK$. Es así como la ecuación que representa la igualdad entre dos sólidos, permite deducir la raíz buscada, que para al-Khayyām corresponde a la abscisa de uno de los puntos de intersección de las cónicas, y que modernamente corresponde a x.

Como ya se mencionó, estos dos niveles también se observan en el caso de las ecuaciones 19 hasta la 25, donde una de las curvas es una hipérbola y la otra en algunos casos es un semi-círculo o una segunda hipérbola. Sin embargo, en el caso de la primera hipérbola, puede observarse que en las gráficas de estas ecuaciones, las proyecciones ortogonales de los puntos de intersección de las cónicas con relación a las líneas de referencia o ejes coordenados, forman rectángulos con los cuales es posible determinar en la gráfica relaciones geométricas de los segmentos y superficies.

En este sentido, al-Khayyām añade o quita las partes comunes de los rectángulos obteniendo dos cuadriláteros que tienen igual superficie. Al-Khayyām establece las relaciones geométricas de dichos rectángulos mediante una proporción. De otra parte, al-Khayyām obtiene una nueva proporción a partir de las relaciones geométricas de la segunda cónica y de la manera en que ésta se presenta en cada gráfica. Al igual que en las otras ecuaciones, en estas siete últimas, hace un tratamiento sobre los términos de las proporciones con el fin de combinarlas y obtener una nueva proporción de donde se deduce la raíz de la ecuación.

En el nivel algebraico, es de anotarse que al-Khayyām efectúa sobre la representación de los segmentos, las mismas operaciones que se realizan con números en la aritmética.

Cabe resaltar también que en los casos donde utiliza una hipérbola equilátera, él solo considera una de las ramas de la hipérbola ya que por su carácter simétrico, la abscisa que representa la solución en ambas curvas, sería la misma.

- Además, debe tenerse en cuenta que en todas las proporciones que al-Khayyām utiliza para dar solución a las catorce ecuaciones, él respeta la homogeneidad de los términos con los que opera, tratando en cada caso con dos superficies o dos segmentos, pero todos de la misma especie.

  Este tipo de procedimiento muestra un legado de las formas de razonamiento de Euclides quien también establece las relaciones entre magnitudes tales como dos líneas, dos superficies o dos sólidos. Cabe mencionar que según González (2007) este principio de homogeneidad tiene sus raíces en lo que se ha denominado *Álgebra geométrica de los griegos* que tiene como resultado la geometrización de los métodos algebraicos de los babilónicos, donde sustituyen números por segmentos de recta; además las operaciones entre ellos se realizaban mediante construcciones geométricas en las cuales era estrictamente necesario mantener la homogeneidad en los términos.

- Al-Khayyām emplea uno de los métodos utilizados por los griegos en su álgebra geométrica para resolver ecuaciones. Este es el método de las proporciones en donde construían un segmento que modernamente representa a la variable x, hallando la cuarta proporcional a partir de la proposición 12 del Libro VI de *los Elementos* de Euclides, o si bien, en el caso del semi-círculo, aplicando la media proporcional a partir de la proposición 13 del mismo libro.

- En términos generales, la obra de al-Khayyām evidencia un legado de la matemática griega de sus predecesores en cuanto al uso de segmentos de recta que sustituyen a los números, la resolución de problemas matemáticos por medio de la geometría, el uso de líneas de referencia para trabajar con objetos geométricos en un espacio bidimensional, las relaciones entre magnitudes homogéneas, la representación de áreas y longitudes en forma de proporción como en Apolonio.

- Sin embargo, puede notarse una diferencia entre el trabajo de Apolonio y el de al-Khayyām. En el caso del primero, su propósito fue estudiar la forma en que a partir de un cono se pueden obtener los tres tipos de secciones, lo que hace posible describirlas mediante una construcción geométrica. Así, este estudio permite deducir las propiedades geométricas de las curvas con el fin de representarlas en un plano eminentemente geométrico. Por otro lado, al-Khayyām parte de las construcciones geométricas de las curvas para representar la solución de una ecuación algebraica, por lo que aplica las propiedades de dichas curvas estudiadas por Apolonio en su tratado *Las Cónicas*.

En segundo lugar, se reconoce el papel fundamental de las gráficas en las demostraciones de al-Khayyām. Al respecto pueden considerarse algunos aspectos:

- Cabe resaltar que para cada tipo de ecuación, al-Khayyām encuentra una construcción de una raíz positiva para la intersección de dos cónicas. Esto significa que a partir de la gráfica, es posible encontrar únicamente aquellas soluciones positivas de la ecuación porque el objetivo de al-Khayyām es representar geométricamente las soluciones que él reconoce.

- A su vez, las gráficas juegan un papel importante en el estudio de las ecuaciones ya que mediante su visualización se pueden verificar las relaciones o propiedades geométricas por las cuales se establecen las proporciones.

- A partir de las gráficas es posible concatenar, comprender y justificar los razonamientos de al-Khayyām, dotando de significado e interpretación sus soluciones geométricas.

- Al visualizar la gráfica es posible entender la significación de algunos conceptos para al-Khayyām, por ejemplo hallar la media proporcional de dos segmentos, entre otros.

- Otro caso particular del papel primordial de la gráfica es que en las soluciones de al-Khayyām expuestas en el texto *Al-Khayyām Mathématicien,* no se explica el por qué aparecen algunas proporciones, pero con la ayuda de la gráfica pueden entenderse. Además, en las gráficas también puede observarse que las abscisas para las cuales las cónicas se cortan, son las soluciones de la ecuación.

- Al-Khayyām no solo presenta en su lenguaje retórico la ecuación de las cónicas sino que también acude a un sistema de representación gráfico, lo que indica que para apoyar sus razonamientos, la gráfica era un medio indispensable en sus demostraciones.

- Otro aspecto importante tiene que ver con las propiedades métricas o topológicas del objeto matemático que se está estudiando. Aunque en las gráficas de las demostraciones, las figuras se visualizan en un espacio de dos dimensiones en donde solo se muestra por ejemplo en el caso del cuadrado *k*, la longitud del ancho y el largo de la figura en ese plano, se puede pensar que al-Khayyām hace una proyección del paralelepípedo que va a construir sobre el cuadrado k para hacerse una representación mental y comprender el volumen de dicha figura.

- Cabe señalar que en al-Khayyām puede evidenciarse una limitación de orden ontológico en el sentido que las construcciones geométricas realizadas por él, solo permiten dar cuenta de las raíces positivas de la ecuación cúbica. Este hecho se debe a que el propósito de al-Khayyām es representar solo aquellas raíces positivas debido a que para él no existen las negativas.

En tercer lugar, se resalta la importancia del trabajo de al-Khayyām ya que a partir de un problema algebraico, se apropia de un lenguaje puramente geométrico donde involucra secciones cónicas y las proporciones que se derivan de sus relaciones geométricas en la gráfica, para dar solución a cada ecuación algebraica.

- Tal como se muestra en estas ecuaciones, al-Khayyām presenta en sus demostraciones un encadenamiento lógico de razonamientos que permiten observar que es posible equiparar o cotejar las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación con las propiedades geométricas de las curvas que él asocia para su demostración.

- En este sentido, el trabajo de al-Khayyām permite observar que es posible reescribir las ecuaciones cúbicas a partir de las propiedades geométricas de las curvas.

- Como pudo notarse, al-Khayyām está entrelazando la geometría y el álgebra en todos los sentidos principiando con que él está pensando en un cubo algebraico como un cubo geométrico, y esto es precisamente uno de los puntos más interesantes de su trabajo, la manera en que puede llevar los sólidos a una ecuación de grado tres.

En cuarto lugar, pueden encontrarse algunas similitudes y diferencias en los trabajos de al-Khayyām y al-Kwarizmi (780-850 d.C). Cabe anotar que para realizar una teoría geométrica de ecuaciones algebraicas, al-Khayyām debe conservar el proyecto algebraico de al-Kwarizmi ya que éste había dado solución por radicales a las ecuaciones de grado menor a tres. Al respecto, aquí se citan algunas diferencias y similitudes:

- Un aspecto importante a resaltar, tiene que ver con el dominio de los coeficientes en sus demostraciones. Los coeficientes de las ecuaciones algebraicas que presenta al-Khayyām son enteros naturales como en la aritmética de su antecesor al-Kwarizmi.

- Así como al-Kwarizmi clasifica las ecuaciones canónicas a las que en principio, todo problema debería poderse reducir, al-Khayyām hace también una clasificación de todas las ecuaciones de tercer grado en búsqueda de una teoría general para resolver ecuaciones cúbicas. La tipología obtenida, permite que todos los tipos de ecuaciones de tercer grado puedan reducirse a esos catorce casos.

- Una diferencia notoria, es que en al-Kwarizmi, el uso y la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas emerge como una necesidad de tratar problemas de la vida cotidiana tales como repartición de herencias, agrimensura y comercio. En al-Khayyām, el uso de ecuaciones y el interés por generalizar una teoría geométrica no emerge de una necesidad particular con relación a problemas externos de la matemática, sino una necesidad propia en el desarrollo de las mismas matemáticas.

- Una diferencia más consiste en que en el tratado de Al-Khayyām, puede observarse que la geometría es el medio fundamental para solucionar las ecuaciones de tercer grado, mientras que en al-Kwarizmi, la geometría se usa para validar la solución de un procedimiento eminentemente algebraico.

En quinto lugar, también pueden reconocerse algunas similitudes en los trabajos de al-Khayyām en el siglo XI y en el de Descartes seis siglos después. Al respecto, pueden citarse algunos aspectos que muestran el trabajo de este árabe como una antelación a los realizados posteriormente a él.

Tal como lo mencionan los historiadores en el texto *Al-Khayyām Mathématicien,* los dos trabajos que brevemente parecen resaltar la evolución de la geometría de Descartes son los siguientes: El primero se orienta hacia el cumplimiento de un proyecto científico conocido seis siglos antes, resolviendo ecuaciones algebraicas por medio de la geometría, proyecto que notoriamente se dió bajo otras circunstancias dadas por la época y los limitados avances que se tenían; el segundo consiste en el principio de un estudio de las curvas, en donde aparecen también las *curvas mecánicas* y se intenta hacer un nuevo proyecto matemático cuya realización podría darse con la geometría algebraica de Cramer y Bézout.

En este sentido, respecto al primer trabajo de Descartes se pueden enumerar algunas similitudes con la obra de al-Khayyām:

- La más notable similitud entre estos dos personajes tiene que ver con el propósito de llevar los problemas que involucran sólidos, a ecuaciones algebraicas de tercer grado que se resuelven por intersección de dos cónicas.

  Descartes, antes de afrontar el problema de Pappus, había resuelto tanto como al-Khayyām, todas las ecuaciones de tercer grado con la intersección de cónicas. En su geometría, él procede como al-Khayyām, y da solución a todas las ecuaciones de tercer y cuarto grado por la intersección de dos cónicas, pero, él se limita a una parábola dada y a un círculo variable según el tipo de ecuación.

- Una segunda similitud tiene que ver con que al-Khayyām está siguiendo uno de los pasos que componen el método de Descartes para solucionar problemas geométricos y es asociar o designar letras a los segmentos con los que opera.

- Otra similitud importante que se resaltó brevemente en las demostraciones es que al-Khayyām garantiza la existencia del sólido que va a construir a partir de los Lemas que demuestra. Esto se relaciona como ya se dijo, con el método analítico de Pappus, que después se presenta con mayor auge en la obra de Descartes. Al igual que al-Khayyām, ambos asumen como cierto lo que se va a probar.

- Finalmente, una similitud más tiene que ver con el uso implícito de referentes cartesianos como ya se mencionó al iniciar la presentación de las soluciones.

Sin embargo, aunque al-Khayyām puede considerarse como un gran antecesor a Descartes, en cuanto a la solución geométrica de ecuaciones algebraicas, la idea de *lo geométrico* empleada por al-Khayyām difiere de la idea de Descartes. Puede decirse que el trabajo de al-Khayyām se relaciona con una geometría proyectiva y descriptiva[49] en el sentido que, en las gráficas que él expone para cada ecuación proyecta[50] implícitamente un sólido sobre un plano, representando un espacio tridimensional como lo es el cubo sobre una superficie bidimensional. A su vez, se relaciona con una geometría de posición en la que el tratamiento del problema depende de la posición relativa de los elementos geométricos.

---

[49] Se llama geometría proyectiva a la rama de la matemática que estudia las propiedades de incidencia de las figuras geométricas, pero abstrayéndose totalmente del concepto de medida. Aquí se tratan las proyecciones de las figuras sobre un plano. La geometría descriptiva se encarga del estudio de las propiedades geométricas y de la relación espacial de las figuras partiendo de sus proyecciones ortogonales sobre una superficie plana.

[50] Se debe recordar que la noción de proyección subyace en el contexto de la geometría euclidiana para denotar la proyección del espacio euclidiano de tres dimensiones sobre un plano contenido en él.

Finalmente, como pudo observarse en todos los casos de las ecuaciones, los historiadores R. Rashed y B. Vahabzadeh hacen un trabajo importante al traducir en un lenguaje moderno las soluciones dadas por al-Khayyām para estas ecuaciones cúbicas, lo que facilita una mejor comprensión de su trabajo geométrico y algebraico. Además, realizan un comentario matemático en donde muestran que a partir de las ecuaciones algebraicas del par de cónicas en cada solución se puede reescribir la ecuación algebraica de grado tres.

Por último, es de anotarse que en la época medieval árabe, tal como lo menciona Oaks (2007), la geometría se había convertido en el escenario en que se podía probar todo en matemáticas, y tal vez por esta razón es que no había un motivo para reelaborar las teorías que se tenían bajo una forma algebraica. Sin embargo, este hecho se debe precisamente a ese momento de la historia en el que eran limitados los avances para elaborar teorías algebraicas con notaciones modernas como las que se conocen hoy; y más allá de catalogar este hecho como un estancamiento de las matemáticas en la historia, deben resaltarse los grandes aportes realizados por algebristas tan destacados de la época como Omar al-Khayyām.

CAPÍTULO IV:

LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE TERCER GRADO Y LA FORMACIÓN PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. ALGUNAS REFLEXIONES Y CONCLUSIONES.

En este capítulo se presentan reflexiones didácticas sobre algunas potencialidades que tiene el estudio de las soluciones geométricas de las ecuaciones cúbicas según al-Khayyām, en la formación profesional del profesor de matemáticas. En virtud de lo anterior, se acogen los modelos planteados por Shulman (1987), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), en cuanto a las dimensiones que constituyen dicho conocimiento profesional, las cuales se presentaron en el segundo capítulo.

4.1 La solución de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y la formación profesional del profesor de matemáticas.

Según las categorías que constituyen el CPPM dadas por Shulman (1987) y su articulación con las dimensiones señaladas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), puede encontrarse una relación directa con el papel que juega la HM en el CPPM según investigaciones que abordan esta problemática. En esta dirección, es posible identificar algunos aspectos que el estudio de las soluciones geométricas dadas por al-Khayyām aporta al CPPM.

En primer lugar, en este capítulo interesa presentar un esquema de la articulación de las dimensiones ya mencionadas, con los aspectos que surgen de las investigaciones en relación a la HM y el conocimiento profesional del profesor.

En segundo lugar, se presentan algunas reflexiones didácticas a partir del estudio de las soluciones geométricas para las ecuaciones de grado tres dadas por al-

Khayyām. Estas reflexiones se muestran en tres niveles: Ecuaciones cúbicas según al-Khayyām y conocimiento del contenido; Ecuaciones cúbicas según al-Khayyām y conocimiento pedagógico del contenido; Ecuaciones cúbicas según al-Khayyām y conocimiento curricular del profesor de matemáticas.

Finalmente, se presentan algunas conclusiones generales con relación al estudio realizado y a los objetivos específicos planteados al inicio del documento.

A continuación se presenta la articulación de las dimensiones que constituyen el conocimiento profesional y una breve síntesis a partir de las investigaciones estudiadas en cuanto a la relación H.M y CPPM:

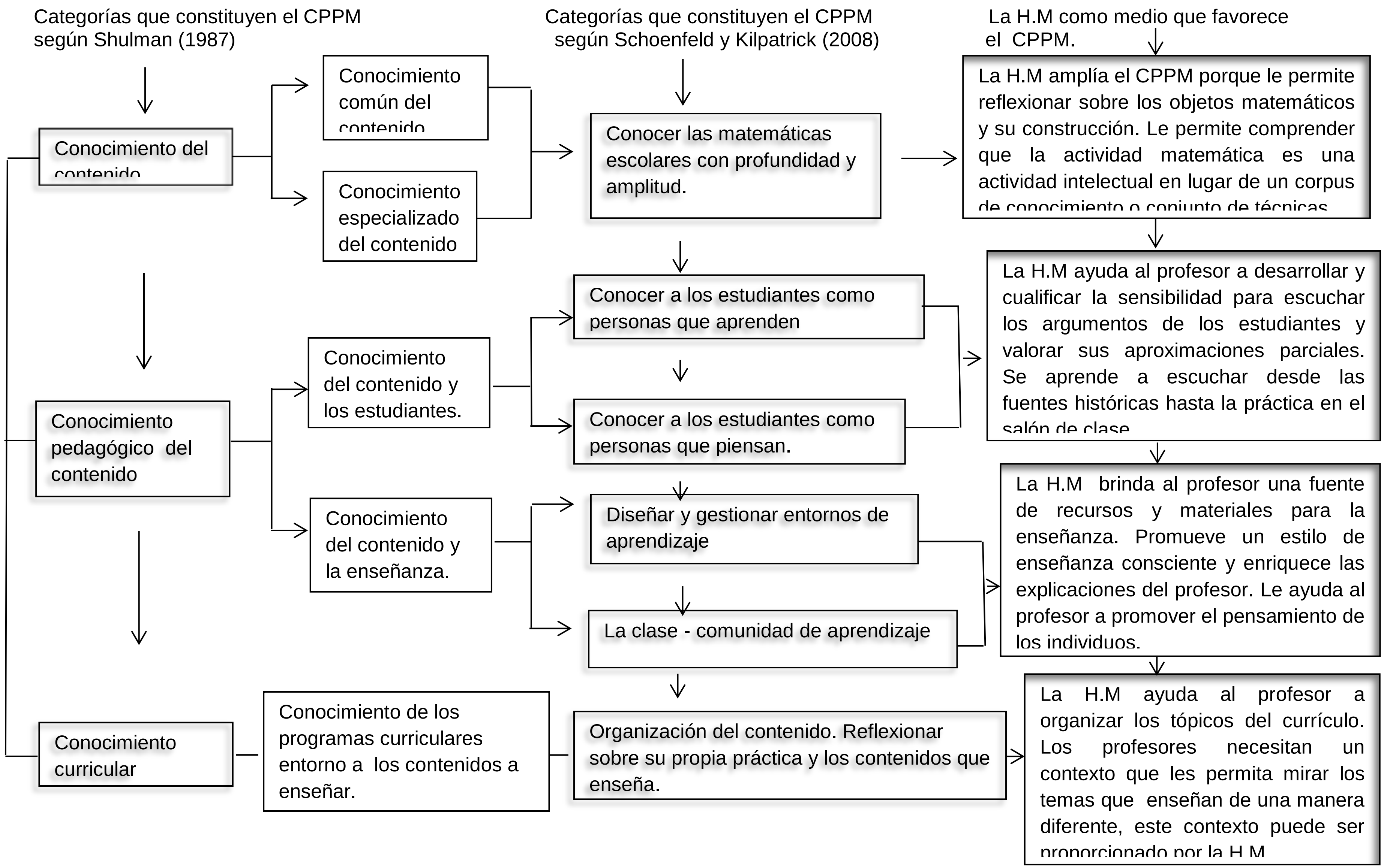

Figura 28. Articulación de las dimensiones que constituyen el conocimiento profesional y la HM.

Tal como se muestra en la figura 28, puede apreciarse en la columna izquierda, las categorías que según Shulman (1987) constituyen el conocimiento profesional del profesor. En el centro de la figura 28, se presentan las dimensiones con relación al conocimiento profesional según Schoenfeld & Kilpatrick (2008). Finalmente, en la columna derecha se presenta una breve síntesis a partir de las investigaciones estudiadas con relación a la HM y el CPPM,

Este esquema permite comprender la articulación de las dimensiones que constituyen dicho conocimiento profesional con la HM como medio para favorecer el conocimiento profesional del profesor. En este sentido, la HM puede aportar al desarrollo de las competencias profesionales permeadas por la formación profesional del profesor. Es así como el estudio histórico de las soluciones de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām, permite identificar algunos aportes a las categorías señaladas por Shulman (1987), Schoenfeld & Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), en cuanto al conocimiento profesional.

A continuación se mencionan algunos aportes del estudio histórico realizado al CPPM en el marco de las categorías ya señaladas.

4.1.1 Las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y el Conocimiento del contenido del profesor de matemáticas.

A partir de las categorías señaladas por Shulman (1987) en cuanto al CPPM, y con relación al conocimiento del contenido que puede ser un conocimiento común o especializado; y además, articulado con una de las dimensiones señaladas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008),- citados por Godino (2009)-, la cual hace alusión al *conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud* como un elemento fundamental en la formación profesional del profesor de matemáticas; este estudio desde una perspectiva histórico-epistemológica, permite identificar algunos aspectos relacionados con el conocimiento del contenido. Más específicamente, se alude al conocimiento especializado del contenido, con relación a los siguientes argumentos:

- El estudio de las soluciones dadas por al-Khayyām, aporta a un conocimiento especializado del contenido, porque le permite al profesor conocer sobre otros significados y formas de representación de las ecuaciones de tercer grado. De esta forma, el estudio permite que el profesor amplíe los campos semánticos de este objeto matemático al conocer que este tipo de ecuaciones algebraicas pueden tener un referente geométrico a partir de un sólido que se construye cuando surgen segmentos de recta y superficies en la intersección de las cónicas elegidas para cada tipo de ecuación.

  Cabe aclarar que los campos semánticos son formas de producir significados, de constituir objetos y de producir justificaciones de lo que estos objetos son, así, los campos semánticos actúan como modos distintos de representación para otorgar significado a los objetos matemáticos. En el sentido de Campos (1994), es posible dotar de significado una expresión ya sea algebraica o geométrica, tras las múltiples representaciones que puede tener dicha expresión, por lo que en cada representación se adquieren diferentes significados que facilitan la enseñanza y la comprensión de los objetos matemáticos.

  En este caso, la solución geométrica de las ecuaciones de tercer grado actúan como otro campo semántico u otro modo de representación que permite dotar de diferentes significados este objeto matemático y que a su vez enriquece el conocimiento especializado que el profesor tiene de este tema en particular.

De otra parte, la idea de producir significados a partir de diversas representaciones, no solo aporta al conocimiento especializado del profesor de matemáticas con relación a un objeto matemático, sino que conlleva a transformar las aulas de clase en un espacio donde los estudiantes sean concientes de la construcción de su propio conocimiento, produciendo justificaciones de sus formas de razonamiento, y este hecho induce a los estudiantes al desarrollo de un pensamiento crítico y analítico de las matemáticas que aprenden. En concordancia con lo expuesto por Campos (1994), solo es posible que se dé conocimiento cuando el sujeto que aprende puede explicar sus razonamientos y producir justificaciones, en este sentido, los distintos modos de producir significado, los distintos campos semánticos en los que se opera, las transformaciones posibles y los métodos utilizados para representar de diversas formas un objeto matemático, resultan ser un camino para generar conocimiento en los estudiantes.

En términos de Duval (1999), el estudio realizado le permite al profesor conocer otro registro semiótico[51] para representar las soluciones de las ecuaciones de tercer grado. Este hecho también tiene implicaciones pedagógicas ya que cuando el profesor tiene una mayor apropiación de un conocimiento, conociendo otras formas de representación[52] u otros

[51] Entre los distintos registros semióticos se encuentran: lenguaje natural, aritmético, algebraico, gráfico, figural. Según Duval (1999) en matemáticas los registros pueden ser discursivos, es decir, usando una lengua natural, o una lengua formal; y no discursivos, como las figuras geométricas o sistemas de coordenadas.

[52] Según Duval (1999) las representaciones mentales son un conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado. De otra parte, las representaciones semióticas son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.

registros semióticos de los objetos matemáticos, puede hacer uso de distintas transformaciones que implican procesos de conversión[53] y tratamiento[54] y esto puede influir en el diseño de actividades o en la enseñanza misma de un conocimiento particular.

Sin embargo, en el estudio de las soluciones dadas por al-Khayyām, puede reconocerse una limitación de orden ontológico, pues las soluciones que él busca representar geométricamente para cada ecuación cúbica son soluciones positivas, porque son las que él reconoce. Por esta razón, él encuentra una construcción para estas raíces por medio de la intersección de cónicas, pero dicha construcción no da cuenta de las raíces negativas de la ecuación. No obstante, se puede reconocer el trabajo de al-Khayyām como una fuente valiosa de conocimiento para el profesor de matemáticas, otra forma de representar este tipo de ecuaciones, una forma no convencional la cual no se había considerado funcional en este ámbito donde solo se reconoce un camino algebraico para sus soluciones.

- A su vez, el estudio de las soluciones de las ecuaciones de tercer grado, como un documento histórico del siglo XI, implicó la indagación de otras fuentes bibliográficas, puesto que el análisis del solo documento histórico resultaba insuficiente para comprender y justificar los razonamientos de al-Khayyām. En este sentido, el estudio aporta al conocimiento especializado del contenido porque al indagar otras fuentes bibliográficas, se tienen diferentes posturas en cuanto a la evolución de los conceptos, también se pueden encontrar elementos comunes en las distintas fuentes que le

[53] La transformación de conversión es la que permite la representación pasando de un registro semiótico a otro, por ejemplo, convertir en un lenguaje algebraico una expresión dada en lenguaje natural.

[54] La transformación de tratamiento, como su nombre lo indica, es la que hace posible la representación dentro de un mismo registro semiótico, por ejemplo, dos formas diferentes de representar en el registro semiótico gráfico.

permiten al profesor apropiarse mejor de un conocimiento y comprender el documento histórico que se estudia.

Al respecto, puede mencionarse que para comprender el lenguaje retórico de las demostraciones de al-Khayyām, la manera en que se presentan las gráficas, el significado de proporción en sus demostraciones, la idea de trabajar problemas algebraicos con intersección de cónicas, el sentido de trabajar con magnitudes homogéneas, la inexistencia de raíces negativas, implicó acudir a otras fuentes bibliográficas que dieran cuenta de la trascendencia de estos conceptos en la historia antes y después de al-Khayyām. Es así como el documento histórico no solo enriquece un conocimiento especializado del contenido en el profesor sino que en el ejercicio de comprender el documento histórico de interés, la búsqueda bibliográfica aporta en gran manera a dicho conocimiento.

A partir del estudio histórico, se observa la manera en que algunos conceptos se han ido construyendo, evolucionando y adquiriendo más rigor a través de la historia. A este respecto, el estudio de otras fuentes deja entrever cómo se avanza en el concepto de proporción a partir de la constitución del concepto de número ya que aún en la obra de al-Khayyām se conservan raíces griegas donde la proporción se considera como una relación entre magnitudes homogéneas. De igual manera sucede con las líneas de referencia como ejes coordenados utilizadas desde las matemáticas griegas y que se presentan varios siglos después con mayor auge en la geometría de Descartes. Estos y otros aspectos permiten ampliar la visión que se tiene del concepto de proporción, de las cónicas, de las ecuaciones polinómicas, que comúnmente se enseñan en la escuela, y a su vez, aporta directamente a un conocimiento especializado del contenido.

- En la misma línea de lo anterior, la investigación histórica de los conceptos matemáticos, tales como su origen, desarrollo y diversas aplicaciones a lo largo del tiempo -en particular la que aquí se expone- permite pensar además que su actual concepción es el resultado de un complejo legado de tradiciones y culturas que han aportado rigor y formalismo con el tiempo. Al hacer el estudio, puede reconocerse la importancia del trabajo matemático de al-Khayyām como un antecesor a Descartes, y que a su vez trae consigo una construcción de saberes que tardaron siglos para gestarse.

  Es así como al observar la evolución de los conceptos, el profesor puede reconocer que los objetos matemáticos no son estáticos, que han tenido unos significados propios en un momento particular histórico debido a los avances y limitaciones dados por la época. En este caso, puede observarse que en el momento histórico en el que se presentan estas soluciones de las ecuaciones cúbicas, no se contaba con simbolismos más elaborados para presentar una teoría algebraica para este tipo de ecuaciones. Sin embargo, con el paso del tiempo, la historia muestra cómo la evolución de los objetos matemáticos ha permitido que adquieran más rigor y formalismo hasta llegar al conocimiento que se tiene hoy.

  Este hecho, también tiene implicaciones de tipo pedagógico en el sentido que le permite al profesor aceptar el carácter dinámico del saber matemático cuando se construye el conocimiento en las aulas de clase, un conocimiento que puede ser falible y que tiene lugar al error pero también a las satisfacciones; un conocimiento lejos de ser estático tal como suele aparecer en los libros de texto, como un compendio de reglas y técnicas que desde esa óptica, impiden el desarrollo de un pensamiento analítico y crítico de las matemáticas.

- En un nivel más general, el estudio de las soluciones geométricas de ecuaciones algebraicas dadas por al-Khayyām ha motivado el deseo de indagar en la historia sobre otros registros semióticos o formas de representación de otros objetos matemáticos acudiendo al origen, evolución y desarrollo de tales conceptos a lo largo de la HM. Este hecho también admite que se amplíe el conjunto de saberes con los que cuenta el profesor de esta disciplina.

4.1.2 Las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y el Conocimiento pedagógico del contenido del profesor de matemáticas.

El conocimiento pedagógico del contenido según Shulman (1987), puede catalogarse en el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza. En cuanto al primero, el profesor debe entrelazar su conocimiento del contenido con una reflexión que permite analizar la manera en como los estudiantes piensan y aprenden dicho contenido. En este sentido, el profesor puede ser capaz de valorar la comprensión del alumno y sus razonamientos. En cuanto al segundo, es la capacidad que tiene el profesor de integrar el conocimiento del contenido con su enseñanza, seleccionando estrategias pertinentes para corregir sus errores, para desarrollar pensamiento matemático, etc.

De otra parte, Schoenfeld & Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), hacen referencia por un lado, a la capacidad que tiene el profesor para conocer a sus estudiantes como personas que aprenden y como personas que piensan, lo que le proporciona información sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y la manera en que construyen sus conocimientos. Por otro lado, a la capacidad que tiene el profesor para gestionar entornos de aprendizaje en los que el conocimiento matemático pueda transmitirse de una manera eficaz, diseñar actividades que promuevan el razonamiento matemático, etc.

A partir del estudio realizado, pueden señalarse algunos aspectos relacionados más específicamente con el conocimiento del contenido y la enseñanza, con relación a los siguientes argumentos:

- La profundización y ampliación del conocimiento por medio de un estudio histórico permite al profesor de matemáticas adquirir herramientas de tipo pedagógico que pueden traducirse en el diseño de actividades en el aula para enriquecer y promover el pensamiento y razonamiento matemático de los estudiantes, así como también incentiva la creatividad y una actitud crítica ante la clase.

  En este sentido, el uso de un software de geometría dinámica puede ser un medio para que los estudiantes al realizar la construcción de la intersección de las cónicas, observen las abscisas para las cuales se encuentra el punto de corte y la manera en que dicho punto puede variar al aplicar la propiedad de arrastre sobre las cónicas.

  Según Duval (1999), uno de los tipos de razonamiento que se pueden identificar en la tarea de demostrar, es el razonamiento visual, el cual integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones que se pueden observar. En este sentido, las representaciones actuarían como estímulo para los sentidos en la construcción de nuevas estructuras mentales en los estudiantes.

  Otras actividades pueden incluir la aplicación del método de al-Khayyām identificando las proporciones a partir de las relaciones geométricas que surgen de la curva en la gráfica, y encontrando la raíz de la ecuación al manipular algebraicamente dichas proporciones. A su vez, el estudiante puede verificar la solución mediante el software de geometría dinámica. De esta manera, los estudiantes pueden aproximarse de una forma experimental al trabajo matemático realizado por al-Khayyām.

Cabe resaltar que el sentido de este tipo de actividades no es presentar las soluciones dadas por al-Khayyām como un método más para resolver actualmente ecuaciones cúbicas, -puesto que el concepto ha evolucionado-, sino que los estudiantes puedan reconocer que esta manera de solucionarlas hace parte de la construcción y posterior re conceptualización de los métodos para resolver ecuaciones cúbicas.

- En cuanto a las actividades de aprendizaje, puede aludirse a la caracterización que hace Tyler (1973). Al respecto, el menciona cuatro tipos de actividades que el profesor puede diseñar:

  - ✓ Actividades de aprendizaje para desarrollar el pensamiento.
  - ✓ Actividades de aprendizaje útiles para adquirir conocimiento.
  - ✓ Actividades de aprendizaje útiles para adquirir actitudes sociales.
  - ✓ Actividades de aprendizaje que sirven para suscitar intereses.

  En este sentido, la introducción de actividades de aprendizaje que involucren las soluciones de las ecuaciones cúbicas según al-Khayyām puede aportar al desarrollo del pensamiento matemático puesto que: el estudiante podrá realizar transformaciones de conversión para representar las soluciones positivas de la ecuación cúbica mediante otro registro semiótico; en este nuevo registro, el estudiante podrá realizar distintas transformaciones de tratamiento manipulando las proporciones; podrá comprender de una manera más amplia el significado de proporción, los distintos usos de las secciones cónicas para resolver problemas algebraicos, por medio de la visualización de las representaciones gráficas podrán verificar las relaciones o propiedades geométricas de cada solución. Este tipo de actividades implican que el estudiante pueda dotar de significado las ecuaciones de tercer grado asintiendo una mayor comprensión de éstas.

A su vez, estas actividades suscitan el interés y la motivación al poder vivenciar y experimentar otras formas de solución a través de la historia y enriquecer el conocimiento que tiene de las ecuaciones polinómicas en general.

Con relación a lo expuesto por Campos (1994), este tipo de actividades en las que los estudiantes pueden producir significados de un objeto matemático mediante diversas representaciones, puede permitirle al profesor observar la manera en que sus estudiantes aprenden, lo cual aporta a un conocimiento pedagógico del contenido y sus estudiantes, en donde el profesor puede valorar los razonamientos de ellos y sus aproximaciones parciales.

- De otra parte, sería interesante que el estudiante observara las distintas representaciones que puede tener un objeto matemático a partir de las transformaciones de tratamiento y conversión. Precisamente, en las soluciones a estas ecuaciones dadas por R. Rashed y B. Vahabzadeh, se evidencian las distintas formas de representación. En términos de Duval, el trabajo que presentan R. Rashed y B. Vahabzadeh difiere del presentado por al-Khayyām en que los historiadores para dar una interpretación moderna de dichas soluciones deben cambiar el registro semiótico original de las soluciones de al-Khayyām en lenguaje natural, a un nuevo registro semiótico en un lenguaje formal. Sin embargo, en las dos presentaciones puede observarse las distintas transformaciones de tratamientos que al-Khayyām realiza para transformar una representación en otra del mismo sistema. Un ejemplo particular de estas transformaciones de tratamiento que realiza al-Khayyām en todas sus soluciones se presenta en la ecuación [13]:

Registro semiótico: lenguaje natural, debido al lenguaje retórico de al-Khayyām:

Representación 1:

La relación del cuadrado de AB y del cuadrado de BE es igual a la relación de BE y EC.Entonces,

Representación 2:

El sólido donde la base es el cuadrado de AB y de altura EC es igual al cubo de BE.

Registro semiótico: lenguaje formal dado por R. Rashed y B. Vahabzadeh:

Representación 1:

$$\frac{AB^2}{BE^2} = \frac{BE}{EC}$$

Representación 2:

$$AB^2 \cdot EC = BE^3$$

Como puede observarse, se presenta de manera distinta una misma representación en un mismo registro semiótico. Este es un caso particular de la ecuación [13], pero en todas las soluciones son similares las transformaciones de tratamiento que se hacen.

En cuanto a la transformación de conversión, el caso más puntual en la misma ecuación [13] es: dada la ecuación de la parábola en el registro semiótico de al-Khayyām o en el de R. Rashed y B. Vahabzadeh, se cambia de registro semiótico a uno gráfico que corresponde a la sección cónica llamada parábola. Es decir:

Representación 1:

Registro semiótico: lenguaje natural, debido al lenguaje retórico de al-Khayyām:

Construimos la parábola HBD, que tiene su vértice en el punto B, de eje BG y de lado recto AB. La recta DG es una ordenada de la sección. Entonces el cuadrado de ella es igual al producto de BG y AB.

Registro semiótico: lenguaje formal dado por R. Rashed y B. Vahabzadeh:

$DG^2 = BG \cdot AB$ *Ecuación de la parábola.*

A continuación, la transformación de conversión de la representación 1.

Representación 2:

Registro semiótico: lenguaje gráfico en las soluciones de al-Khayyām y R. Rashed & B. Vahabzadeh:

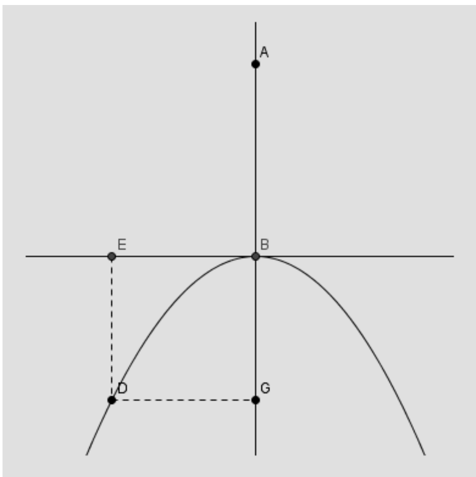

Figura 29. Representación de la parábola según al-Khayyām

Y en este caso, los tres registros semióticos (lenguaje natural, lenguaje formal, lenguaje gráfico) están representando la parábola.

Se considera importante mostrar a los estudiantes cómo las distintas formas de representación, sea gráfica, en lenguaje natural, en lenguaje formal, están representando el mismo objeto matemático en el caso de la transformación de conversión. En el caso de la transformación de tratamiento, que el estudiante pueda observar que en un mismo sistema, por ejemplo, en lengua formal, se puede representar de manera distinta una misma expresión.

- De otra parte, conocer otras formas de representación, -por ejemplo la representación geométrica de las ecuaciones de tercer grado-, y poder apropiarse mejor de un conocimiento a través de la evolución de los objetos matemáticos, no solo promueve la creatividad de los estudiantes sino que también puede aproximarlos a ser matemáticamente competentes.

  En los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 1998, pág. 50, 51) se alude a lo que significa ser matemáticamente competente:

  > "Es utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas. Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz. Es utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos"

- Esta conceptualización permite pensar que en el intento de dar atención al interés por estudiar las ecuaciones polinómicas en general según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, podrían incluirse algunas actividades de corte histórico que le permitan reconocer a los estudiantes la manera en que se han ido constituyendo los objetos matemáticos, etc. En relación a esto, no solo sería interesante que los estudiantes conocieran la forma geométrica de resolver ecuaciones cúbicas según al-Khayyām sino otras maneras de resolverlas por algunos algebristas del siglo XVI como Tartaglia, Cardano, Bombelli, Vieta y Descartes en el siglo XVII.

Según Peralta (1999), si el objetivo fundamental del álgebra en los últimos grados de escolaridad es el estudio de las ecuaciones polinómicas en general, y a lo largo de los cursos solo se trabajan las ecuaciones de los dos primeros grados, resultaría lógico introducir el estudio de las ecuaciones cúbicas para complementar esta teoría. La idea de presentar a los alumnos otra forma de representar las soluciones de las ecuaciones de tercer grado estriba en la idea de Peralta, ya que al introducir su estudio, de manera paralela pueden mostrarse distintas formas de resolución a lo largo de la historia.

- Además, en cuanto al conocimiento pedagógico del contenido y la enseñanza, un conocimiento amplio de los objetos matemáticos producto de una investigación histórica permite que el docente en matemáticas adquiera destrezas para dar una clase en la cual los conceptos no sean estáticos y carentes de sentido y significado, como suelen aparecer en los libros de texto,- los cuales reducen y limitan el conocimiento a un conjunto de técnicas y pasos-, por el contrario, que el profesor posea la capacidad de resolver los "porqué" que surgen en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes.

En este sentido, conocer maneras alternas de solucionar ecuaciones algebraicas a través de su historia puede enriquecer las explicaciones del profesor, y permite que pueda movilizarse con gran habilidad en el tema que enseña creando nexos entre diversos tópicos.

En el sentido de Duval (1999) la comprensión amplia de un concepto implica la articulación coherente entre distintos registros de representación semiótica. Es así como un amplio conocimiento de la materia permite al profesor establecer nexos entre diferentes tópicos dentro de un tema y proporcionar explicaciones conceptuales en lugar de explicaciones puramente algorítmicas. Shulman, citado por Acevedo & Losada (2000, pág.249).

4.1.3 Las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām y el Conocimiento curricular del profesor de matemáticas.

El conocimiento curricular al que hace referencia Shulman (1987) está relacionado con el conocimiento que tiene el profesor de los programas curriculares en torno a los contenidos a enseñar y también a los propósitos de su enseñanza.

Schoenfeld y Kilpatrick (2008), citados por Godino (2009), señalan que en el ejercicio de construir relaciones que apoyen el aprendizaje de los estudiantes, el profesor debe trabajar para organizar el contenido, sus diversas representaciones y poner en relación a los estudiantes entre sí con el contenido. Además debe reflexionar sobre su propia práctica con relación a los contenidos que enseña.

A partir del estudio histórico realizado, y haciendo alusión a algunos aspectos señalados en la perspectiva curricular del segundo capítulo, se resaltan algunas consideraciones al respecto:

- Es evidente que a partir de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas como los documentos oficiales para direccionar los currículos de las instituciones educativas en Colombia, se muestra un interés por el estudio de las ecuaciones polinómicas en general. Sin embargo, no se encuentran unos estándares específicos que hagan alusión al estudio de las ecuaciones de tercer grado.

  No obstante, la actuación del profesor influye en la manera en que adapta o diseña los tópicos que se pueden integrar a partir de las necesidades de sus estudiantes y de los fines que desea alcanzar la escuela. Es en esta dirección que la investigación histórica de los objetos matemáticos permite al profesor modificar, adaptar e incorporar algunos tópicos que se consideren pertinentes para el aprendizaje de los estudiantes según sus necesidades, seleccionando y organizando convenientemente los contenidos y experiencias de aprendizaje como estrategia para alcanzar los fines que se ha propuesto desde su enseñanza.

Con relación al argumento de Peralta (1999) citado anteriormente, y a partir de la autonomía del profesor en cuanto a la re estructuración y organización de su plan de área, podría pensarse en incorporar el estudio de las ecuaciones cúbicas ya que este tipo de ecuaciones también integran la familia de ecuaciones polinómicas. En este sentido, la inclusión de este tipo de ecuaciones podría realizarse presentando de manera paralela momentos históricos culminantes en el desarrollo de estos conceptos, a partir de trabajos tan valiosos por grandes matemáticos como Omar al-Khayyām.

- De otra parte, desde los diseños actuales de los currículos de matemáticas que se enseñan en los colegios, se refleja una separación de los contenidos relacionados con el álgebra y la geometría, por ser dos asignaturas independientes. Este hecho, en cierto sentido, puede implicar una ruptura en la profunda integración y relación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, e impide que puedan crear conexiones, comprender e interiorizar por ejemplo, una representación geométrica traducida en un lenguaje algebraico. Así, puede notarse que cuando el estudiante piensa en álgebra, permite la existencia de variables, constantes, discriminantes, raíces complejas, reales, factorización; pero cuando piensa en geometría, la existencia de figuras geométricas, puntos, rectas, planos, etc., son las representaciones que admite en este campo de la matemática.

En este sentido, lo que se esperaría, es que el profesor pueda mostrar que los objetos matemáticos que constituyen el núcleo de las matemáticas, pueden tener múltiples representaciones en sus distintas ramas, y que se piense en la posibilidad de crear conexión entre los diversos tópicos que se enseñan en estas asignaturas.

Particularmente, el estudio histórico que aquí se expone, muestra cómo es posible representar geométricamente las soluciones de una ecuación algebraica entrelazando estas dos ramas de la matemática que permiten representar un objeto matemático de una manera diferente. Este hecho, se considera de suma importancia puesto que cuando el profesor es consciente de la convergencia de las distintas ramas de la matemática al representar los objetos matemáticos que enseña, podrá lograr que los estudiantes comprendan que los contenidos que se enseñan en estas dos asignaturas aparentemente independientes, tienen relación entre sí.

Es en este sentido, que el estudio realizado aporta al conocimiento curricular del profesor de matemáticas, no solo incentivándolo a la inclusión de este tipo de ecuaciones sino mostrando la convergencia del álgebra y la geometría para solucionar problemas en matemáticas. A su vez, el estudio permite observar que es posible equiparar y cotejar las propiedades analíticas y algebraicas de una curva con sus propiedades geométricas. Este hecho se puede reconocer con el trabajo que hacen los historiadores, quienes muestran que el resultado de combinar dos proporciones derivadas de las cónicas elegidas para cada solución, equivale a combinar las ecuaciones algebraicas de dichas cónicas.

Otro punto de convergencia del álgebra y la geometría, en el trabajo de al-Khayyām, está presente en sus demostraciones donde se evidencia un nivel geométrico y otro algebraico para llegar a la expresión de la que se deduce la raíz de la ecuación. En este sentido, al-Khayyām muestra que es posible hallar la raíz de una ecuación a partir de las proporciones que surgen de las relaciones geométricas de los segmentos de recta y superficies en la construcción de las cónicas, pero que es indispensable al combinarlas, hacer una manipulación de tipo algebraico para obtener las raíces buscadas de la ecuación.

4.2 Conclusiones generales

Aludiendo al primer objetivo específico con relación a la documentación de las soluciones de las ecuaciones de tercer grado según Omar al-Khayyām a partir del papel que juega la teoría geométrica en dichas soluciones, se puede afirmar que:

- El estudio realizado permite concluir que el método utilizado por al-Khayyām para solucionar geométricamente ecuaciones de tercer grado, puede considerarse como un antecedente al trabajo realizado por Descartes en el siglo XVII para la solución de este tipo de ecuaciones, relacionando cónicas para solucionar ecuaciones algebraicas, llevando problemas que involucran sólidos a una ecuación polinómica, designando letras a los segmentos que utiliza para hallar la solución de la ecuación, utilizando líneas de referencia que se traducen en ejes coordenados en la geometría de Descartes y garantizando la existencia de los sólidos que construye a partir de la intersección de cónicas.

- A su vez, el método de al-Khayyām trae consigo un legado de la matemática griega considerando las proporciones como relaciones entre magnitudes homogéneas, designando un réctangulo por las letras de su diagonal, utilizando como coeficientes en sus ecuaciones enteros naturales, asumiendo la geometría como medio fundamental para solucionar problemas matemáticos, el intento por realizar la generalización de una teoría geométrica que incluyera una clasificación de ecuaciones a las que se pudiera reducir cualquier problema en matemáticas, el uso de segmentos de recta que sustituyen a los números, la representación de áreas y magnitudes en forma de proporción.

- El papel de la gráfica en la comprensión de los razonamientos de al-Khayyām es fundamental porque permiten verificar las relaciones geométricas por las que surgen las proporciones utilizadas en cada solución; permiten observar que aunque la gráfica alude a un espacio bidimensional, al-Khayyām realiza una proyección del sólido que desea construir para interpretar el volumen por medio de un cubo geométrico. El papel de la gráfica para al-Khayyām es fundamental puesto que las proporciones utilizadas surgen de las relaciones geométricas de segmentos de recta y superficies determinadas por el punto de intersección de las cónicas en la gráfica.

- El método realizado por al-Khayyām muestra un encadenamiento lógico de razonamientos que permiten representar las raíces positivas de una ecuación cúbica mediante un referente geométrico que involucra la intersección de secciones cónicas para cada solución. Debido a las limitaciones de la época y el no reconocimiento de las raíces negativas, las construcciones realizadas por al-Khayyām solo permiten dar cuenta de aquellas raíces positivas representadas por la abscisa para la cual se encuentra el punto de intersección de las dos curvas.

Con relación al segundo objetivo específico el cual implica la identificación de elementos de tipo histórico, epistemológico y didáctico que este estudio aporta a la formación profesional de profesores de matemáticas con relación a sus competencias profesionales, se puede concluir que:

- La solución de las ecuaciones de tercer grado según al-Khayyām aporta a un conocimiento especializado del contenido en tanto que amplía los campos semánticos que el profesor tiene de este objeto matemático, mostrándole que este tipo de ecuaciones pueden tener otro tipo de representaciones por medio de las cuales es posible dotarlas de otros significados, otro registro semiótico mediante un referente geométrico que permite la solución de las raíces positivas de una ecuación.

- El estudio realizado implicó la indagación de otras fuentes bibliográficas puesto que el análisis del solo documento histórico resultaba insuficiente para comprender el lenguaje retórico de las demostraciones de al-Khayyām; la manera en que se presentan las gráficas; el significado de proporción en sus demostraciones; la idea de trabajar problemas algebraicos con intersección de cónicas; el sentido de trabajar con magnitudes homogéneas, la inexistencia de raíces negativas. En este sentido, cuando se estudia un texto histórico, deben considerase otras fuentes bibliográficas para lograr su comprensión, aportando a su vez a un conocimiento especializado del contenido por parte del profesor.

- Igualmente, el estudio realizado aporta a un conocimiento pedagógico del contenido y la enseñanza porque al observar la evolución de los conceptos matemáticos le permite al profesor aceptar el carácter dinámico del saber matemático cuando se construye el conocimiento en las aulas de clase; un conocimiento lejos de ser estático como suele aparecer en los libros de texto, como un compendio de reglas y técnicas que desde esa óptica, impiden el desarrollo de un pensamiento analítico y crítico de las matemáticas en sus estudiantes. Además, conocer maneras alternas de solucionar ecuaciones algebraicas a través de su historia puede enriquecer las explicaciones del profesor, y permite que pueda movilizarse con gran habilidad en el tema que enseña creando nexos entre diversos tópicos.

- El estudio histórico de las soluciones geométricas de las ecuaciones cúbicas permite pensar el diseño de actividades de aprendizaje en la que puedan incluirse momentos históricos culminantes que han sido determinantes para la construcción y posterior re conceptualización de las ecuaciones cúbicas. Actividades de aprendizaje que desarrollen el pensamiento matemático de los estudiantes y motiven la creatividad y actitud crítica ante la clase.

- A su vez, aporta también al conocimiento curricular que tiene el profesor puesto que conocer otras maneras de representar las soluciones de las ecuaciones cúbicas motiva al profesor a modificar y adaptar los tópicos que se enseñan en su currículo, dando especial atención a la inclusión de las ecuaciones cúbicas como parte de la familia de las ecuaciones polinómicas que desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se procuran enseñar.

  No obstante, aunque en estos documentos oficiales para direccionar las instituciones educativas en Colombia no se encuentren unos estándares específicos que hagan referencia a las ecuaciones cúbicas, el profesor está en la autonomía de incluir el estudio de estas ecuaciones para una mayor comprensión de las ecuaciones polinómicas por parte de sus estudiantes y paralelo a esto, la inclusión de otras formas de representación que pueden encontrarse en la HM.

- Del estudio realizado, subyace la intención de integrar en los contenidos que constituyen el programa curricular de matemáticas, algunas situaciones que lleven a los estudiantes a reconocer el carácter dinámico de los conceptos que aprenden y sus diversas representaciones en las diferentes ramas de la matemática, soslayando la idea que el álgebra y la geometría admiten representaciones que no guardan conexiones ni vínculos entre sí.

- En un nivel más general, a partir de este tipo de estudios históricos el profesor puede repensar la manera en que se enseñan algunos tópicos del currículo con el ánimo de mostrar a los estudiantes en vez de un conjunto de técnicas y fórmulas aisladas, un saber que no es estático y que puede representarse de diversas formas, en pro de inducir en los estudiantes un pensamiento analítico y crítico en la construcción de su propio conocimiento, y la producción de significados que den sentido a las matemáticas que aprenden.

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, M & Losada, M.(2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (003), 245-264.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 111-129.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*. Investigación e innovación en educación matemática*, 8*(1), 30-46.

Apolonio de Pérgamo. *Las cónicas*. Traducción realizada por Rashed, R. (2008), (2009), (2010). Walter de Gruyter GmbH & Co. Berlín. New York.

Beltrán, A. Luna, F. & Mora, L. (s.f.). El conocimiento Profesional de un Formador de Profesores de Matemáticas, un mundo por explorar. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Recuperado el 8 de Enero de 2014 de: https://www.google.com.co/?gfe_rd=cr&ei=wK7nUu-aD4bzgATc_YG4CA#q=El+conocimiento+Profesional+de+un+Formador+de+Profesores+de+Matem%C3%A1ticas%2C+un+mundo+por+explorar

Campos, R. (1994). Campos semánticos y el problema del significado en álgebra. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*. (1), 45-56.

Cohen, M. (1989). Estudios histórico-epistemológicos. En Filloy, E y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. (pág. 82-89) México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Peter Lang S.A.. Editions scientifiques européennes,

1995. Universidad del Valle, Instituto de Educación y pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Edición en castellano. Traducción Myriam Vega Restrepo,

Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. Curso del doctorado en Educación, énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, grupo de Educación Matemática. Cali, Noviembre de 1.999. Traducción Myriam Vega.

Escobar, N. (2012). *Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la Educación Básica*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Euclides. (Trad, 1991). Los Elementos. Traducción realizada por María L. Puertas. Universidad de Barcelona. Ed, Gredos, S.A.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics, Vol. 11, No. 2, Special Issue on History in Mathematics Education (Jun., 1991), pp. 3-6.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *ZDM,* 29(4), 138-140.

Fernández, D. García, M. Martínez, C. Martínez, I. Pérez, K. Rodríguez, A. et al (2012). Sobre un porisma de Euclides y su dualización. *Miscelánea matemática.* (54), 81-98.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del algebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas.UNIÓN: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (20), 13-31. Recuperado el 20 de enero de 2014 de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

González, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA*. (30), 205-236.

Gómez, O. & Velandia, A. (2009). Ecuaciones cúbicas: elaboración de significados por medio de heurísticas propias". Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 4 de enero de 2014 de: http://funes.uniandes.edu.co/707/1/ecuaciones.pdf

Guacaneme, E. (2008). Una aproximación a la relación "Historia de las matemáticas – Educación Matemática". Unpublished Essay.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt*, 2(2).

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.

Grugnetti, L. (2000). The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems. In V. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective (pp. 29-35).

Jankvist, T & Hoff, T. (2010). New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring. *Springer*. 2-32.

Luque, C, Mora, L, & Torres, J. (2009). Representar estructuras algebraicas no enumerables. Universidad Pedagógica, Bogotá, Colombia.

MEN, (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, Santa Fé de Bogotá D.C. Colombia: Ed. MEN.

MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. (pp. 46 – 94). Santa Fé de Bogotá D.C. Colombia. Ed. MEN.

Mogollón, M. (2012). Algunos métodos para resolver problemas que involucran ecuaciones cúbicas en la enseñanza media. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 15 de enero de 2014 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/7257/

Moreno, R. (2002). Omar Jayyam, poeta y matemático. Madrid : Nivola.

Morley, A. (1982). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? For the Learning of Mathematics. *An International Journal of Mathematics Education*, 2(3), 46.

Murcia, L. (2009). *La transición del algebra clásica al álgebra moderna: algunos aspectos históricos – epistemológicos en el desarrollo de la noción de estructura a través de la teoría de ecuaciones*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Oaks, J. (2007). Medieval Arabic Algebra as an Artificial Language. *Springer.* (35) p. 543-575.

Peralta, J. (1999). Algunas ideas para la resolución de ecuaciones. *Revista Suma*. (32) p. 79-89

Piaget, J. & García, R. (1989). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México: Siglo Veintiuno Editores.

Población, A. (2012). Resolución de la cúbica a lo largo de la Historia. *Revista de Didáctica de las matemáticas UNO.* 60 (18), 24-32.

Poblete, A & Díaz, V (2003). Competencias profesionales del profesor de matemáticas. *Números*, (53), 3-13.

Rashed, R & Vahabzadeh B (1999). Al-Khayyām mathématicien, Editions Albert Blanchard, París.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas. Universidad de Granada.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. Artículo de sección. *Revista digital matemática*.12 (1), 1-5.

Sánchez, I. (2001). Historia, Historia de la ciencia y Epistemología pedagógica. Recuperado el 17 de diciembre de 2013 de: https://www.google.com.co/?gfe_rd=cr&ei=wK7nUu-aD4bzgATc_YG4CA#q=historia%2C+historia+de+la+ciencia+y+epistemologia+pedagogica+-+ignacio+sanchez.

Sierra, M. (1997). "Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria". En "La Educación Matemática en la enseñanza secundaria". Cuadernos de formación del profesorado, V. 12. Editorial Horsori. 2º edición. Barcelona, España.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Tyler, R. (1973). *Principios básicos del currículo*. Argentina: Editorial Troquel.

Torres, L. & Guacaneme, E. (2010). *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas. (próximo a publicarse).*Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Vasco, C. (2002). Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas. Conferencia inaugural de la Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas, ELHEM1. Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Vidal, R & Quintanilla, M. (s. f). La historia de la matemática y su incorporación en el aula una síntesis de algunas propuestas. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Yuste, P. (2004). Razón y proporcionalidad en la geometría euclídea. Versión previa, publicada en: *Revista Española de Física*, 18 (1), 1-10.