DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A PARTIR DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES GRÁFICOS - ICÓNICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Karen Lizeth Hernández García
Código: 0943867
Karol Julieth Tapiero Castellanos
Código: 0937155

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
AGOSTO DE 2014

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A PARTIR DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES GRÁFICOS - ICÓNICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Karen Lizeth Hernández García
Código: 0943867
Karol Julieth Tapiero Castellanos
Código: 0937155

Requisito para optar el título de licenciadas en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Director
Cristian Andrés Hurtado Moreno

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA ÉNFASIS EN MATEMÁTICA
AGOSTO DE 2014

AGRADECIMIENTOS

Para la realización de este trabajo de grado primero queremos agradecerle a Dios por darnos la sabiduría en todo nuestro proceso académico y permitirnos hacer parte de la Universidad del Valle, "la mejor para los mejores".

A nuestras familias y novios por apoyarnos constantemente para el cumplimiento de nuestros objetivos a lo largo de esta hermosa carrera.

A nuestro director de tesis Cristian Andrés Hurtado Moreno por la dedicación y orientación en el desarrollo del trabajo de grado.

A nuestros docentes que nos compartieron conocimientos, consejos y experiencias en nuestra formación integral.

A nuestros amistades, compañeros, por colaborarnos solidariamente en cada una de las etapas de nuestra formación docente.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 2

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN 6

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA 7

1.2 OBJETIVOS 14

1.2.1 Objetivo general 14

1.2.2 Objetivos específicos 14

1.3 JUSTIFICACIÓN 15

1.4 ANTECEDENTES.. 19

1.5.1 Aportes de los antecedentes 23

CAPÍTULO II: REFERENTES CONCEPTUALES 25

2.1 PERSPECTIVA CURRICULAR 26

2.1.1 Sobre los Lineamientos Curriculares de Matemáticas 26

2.1.2 Sobre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas ... 31

2.2 PERSPECTIVA MATEMÁTICA 35

2.2.1 Sucesiones 35

2.2.2 La proporcionalidad directa como modelo de función lineal 36

2.3 PERSPECTIVA DIDÁCTICA 40

2.3.1 Los procesos de generalización de patrones.................................... 40

2.3.2 Sobre los patrones... 44

2.3.3 Razonamiento algebraico 47

2.3.4 Razonamiento proporcional 49

2.4 PERSPECTIVA SEMIÓTICA.. 52

CAPÍTULO III: GENERALIZACIÓN DE PATRONES GRÁFICOS – ICÓNICOS 55

3.1 Sobre la secuencia didáctica... 56

3.1.1 Descripción general de la secuencia 57

3.1.2 La secuencia didáctica.. 59
3.1.3 Análisis de la secuencia didáctica: justificación y propósitos de las actividades 64
3.2 METODOLOGÍA.. 71
3.2.1 La metodología de implementación 74
3.3 Resultados y análisis de los resultados.. 75
3.3.1 Resultados y análisis de los resultados de la situación 1 76
3.3.2 Resultados y análisis de los resultados de la situación 2 97
3.3.3 Resultados y análisis de los resultados de la situación 3 112
3.4. Algunos hallazgos generales de los resultados....................................... 125
CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS 129
4.1 CONCLUSIONES... 130
4.2 REFLEXIONES DIDÁCTICAS.. 134
REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS 137
ANEXOS 142
Anexo 1: protocolo de la pregunta 3, actividad 1, situación 1. 142
Anexo 2: protocolo de la pregunta 1, actividad 3, situación 1. 143
Anexo 3: protocolo de la pregunta 2, actividad 2, situación 2. 144
Anexo 4: protocolo de la pregunta 3, actividad 1, situación 3 145
Anexo 5: protocolo de la pregunta 5, actividad 1, situación 3 147
Anexo 6: Situación 1 148
Anexo 7: Situación 2 152
Anexo 8: Situación 3 155

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ejemplo de Proporcionalidad directa como modelo de función lineal. (Tomado de Azcárate & Deulofeu, 1990). 38

Tabla 2. Ejemplo de patrones numéricos 45

Tabla 3. Configuración de la secuencia didáctica 58

Tabla 4. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 1 77

Tabla 5. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 1 79

Tabla 6. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 1 81

Tabla 7. Tipificación pregunta 4, actividad 1, situación 1. 83

Tabla 8. Tipificación pregunta 5, actividad 1, situación 1. 84

Tabla 9. Tipificación pregunta 1, actividad 2, situación 1. 86

Tabla 10. Tipificación pregunta 2, actividad 2, situación 1. 88

Tabla 11. Tipificación pregunta 3, actividad 2, situación 1. 89

Tabla 12. Tipificación pregunta 1, actividad 3, situación 1 91

Tabla 13. Tipificación pregunta 2, actividad 3, situación 1 93

Tabla 14. Tipificación pregunta 3, actividad 3, situación 1. 96

Tabla 15. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 2. 97

Tabla 16. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 2. 100

Tabla 17. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 2. 102

Tabla 18. Tipificación pregunta 1, actividad 2, situación 2. 104

Tabla 19. Tipificación pregunta 2, actividad 2, situación 2. 106

Tabla 20. Tipificación pregunta 3, actividad 2, situación 2. 109

Tabla 21. Tipificación pregunta 4, actividad 2, situación 2. 110

Tabla 22. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 3. 113

Tabla 23. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 3. 116

Tabla 24. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 3. 118

Tabla 25. Tipificación pregunta 4, actividad 1, situación 3. 121

Tabla 26. Tipificación pregunta 5, actividad 1, situación 3. 123

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES Y ESQUEMAS

Esquema 1. Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados a desarrollar en la propuesta. (Esquema tomado del MEN, 2006, p.79) 34

Esquema 2. Metodología empleada para el desarrollo del trabajo.................. 73

Ilustración 1. Situación que ejemplifica las etapas en el proceso de generalización (Ejemplo tomado de Mason et al., 1985)................................. 43

Ilustración 2. Ejemplo de Patrones pictóricos.. 46

Ilustración 3. Pregunta 1, actividad 1, situación 1. 78

Ilustración 4. Pregunta 2, actividad 1, situación 1. 80

Ilustración 5. Medios semióticos de objetivación para explicar lo argumentado en la L3 y L5. Pregunta 3, actividad 1, situación 1. 82

Ilustración 6. Pregunta 4, actividad 1, situación 1. 83

Ilustración 7. Pregunta 1, actividad 2, situación 1. 87

Ilustración 8. Pregunta 2, actividad 2, situación 1. 88

Ilustración 9. Pregunta 3, actividad 2, situación 1. 90

Ilustración 10. Pregunta 3, actividad 2, situación 1. 90

Ilustración 11. Descripción de la regularidad del patrón evidenciada en L1 y L3 a partir de la tabla. Pregunta 1, actividad 3, situación 1. 92

Ilustración 12. Pregunta 1, actividad 3, situación 1. 93

Ilustración 13. Pregunta 3, actividad 3, situación 1. 96
Ilustración 14. Secuencia de señales que utiliza un estudiante. Pregunta 1, actividad 1, situación 2. 98
Ilustración 15. Pregunta 1, actividad 1, situación 2. 99
Ilustración 16.Pregunta 1, actividad 1, situación 2. 99
Ilustración 17. Pregunta 2, actividad 1, situación 2. 101
Ilustración 18. Pregunta 3, actividad 1, situación 2. 102
Ilustración 19. Pregunta 1, actividad 2, situación 2. 105
Ilustración 20. Pregunta 1, actividad 2, situación 2. 105
Ilustración 21.Pregunta 2, actividad 2, situación 2. 107
Ilustración 22. Pregunta 3, actividad 2, situación 2. 110
Ilustración 23. Pregunta 4, actividad 2, situación 2. 111
Ilustración 24. Pregunta 1, actividad 1, situación 3. 114
Ilustración 25. Pregunta 1, actividad 1, situación 3. 114
Ilustración 26. Pregunta 1, actividad 1, situación 3. 115
Ilustración 27. Pregunta 2, actividad 1, situación 3. 117
Ilustración 28. Pregunta 2, actividad 1, situación 3. 117
Ilustración 29. Pregunta 4, actividad 1, situación 3. 121
Ilustración 30. Pregunta 4, actividad 1, situación 3. 121
Ilustración 31. Pregunta 4, actividad 1, situación 3. 122
Ilustración 32. Pregunta 4, actividad 1, situación 3. 122

RESUMEN

El siguiente trabajo, presenta los resultados obtenidos de una secuencia didáctica aplicada a estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria, que involucra actividades respecto a desarrollar razonamiento algebraico, a partir de la generalización de patrones gráficos – icónicos. Esta secuencia didáctica está compuesta por tres situaciones que se realizaron en dos sesiones con el fin de que intercambiaran sus ideas y reafirmaran sus conjeturas.

En los resultados obtenidos de dicha implementación, se evidencia que los estudiantes lograron progresivamente ciertos niveles de abstracción y generalización en sus procesos de aprehensión visual y en las relaciones cuantitativas que percibían a partir de la secuencia de gráficos expuestos, identificando variaciones y covariaciones.

Este trabajo de investigación permite reconocer la necesidad de desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros ciclos de escolaridad, pues es importante que el docente implemente actividades que involucren la generalización de patrones, de tal forma que logre así posteriormente dotar de sentido y significados la emergencia de símbolos.

Palabras Claves: Razonamiento algebraico, Generalización de patrones, Gráficos – Icónicos, Educación Básica Primaria.

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas distintas investigaciones tanto a nivel internacional como nacional (Castro, 2012, Valoyes & Malagón, 2006, Garriga, 2011), han centrado su atención en analizar dificultades asociadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra en la escuela. Estas investigaciones han reportado que muchas de ellas surgen en el paso de la aritmética al álgebra, pues este último campo se presenta frecuentemente en las aulas de clase de manera abrupta, es decir, sin procesos que medien de manera paulatina en la transición de un campo a otro.

Algunas de las investigaciones generales en didáctica del álgebra, tales como las reportadas por Castro (2012), Socas (2011) y Molina (2006), recomiendan que para mediar en las dificultades que comúnmente se presentan en la transición mencionada, es necesario el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros ciclos de la Educación, el cual es posible desarrollar a partir de actividades como la observación y descripción de comportamientos y regularidades, la generalización y formalización de patrones, el reconocimiento de relaciones y variaciones entre magnitudes u objetos; de tal forma que estas actividades potencien en los estudiantes habilidades como la argumentación, la justificación, la formulación de conjeturas, entre otras; permitiendo dotar de sentido y significado el posterior trabajo algebraico. Lo anterior según los investigadores arriba mencionados, favorece el hecho que cuando los estudiantes se enfrenten con el sistema de representación simbólico – algebraico y sus tratamientos se logre un aprendizaje significativo sobre este sistema a partir de un trabajo más natural en el aula de clase.

De acuerdo con esta idea el MEN (1998, 2006) reconocen que es posible dar un sentido y significado más espontáneo y natural a los sistemas algebraicos y analíticos si se inicia el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros ciclos de escolaridad a partir del estudio de fenómenos de variación y cambio, en donde el centro de interés sea la exploración, percepción, identificación, reconocimiento y caracterización de regularidades en distintos contextos, los criterios que rigen las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, entre otros.

Tal como se aprecia, tanto en la propuesta del MEN (1998, 2006) como la de los investigadores mencionados, se coincide en que es necesario promover desde los primeros ciclos de escolaridad actividades de aula que busquen que los estudiantes se enfrenten a situaciones en donde la variación, las regularidades y los patrones se hagan presentes con el propósito de desarrollar pensamiento matemático.

La anterior convergencia de ideas, hace necesario resaltar que mientras el pensamiento variacional tal y como se propone desde el MEN (1998, 2006) se puede desarrollar desde múltiples acercamientos, actividades y conceptos propiamente matemáticos (e.g.: en relación con el pensamiento aritmético, espacial, conceptos como el de razón de cambio, entre otros), el razonamiento algebraico da cuenta del desarrollo de este pensamiento a partir del estudio de la generalización de patrones tal como se mencionó anteriormente, en otras palabras es posible afirmar, que el razonamiento algebraico es una vía para el desarrollo del pensamiento variacional, así pues es posible concebir este último desde una perspectiva más amplia que el primero.

En este orden de ideas, en este trabajo se pretende el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria de una institución educativa particular de la ciudad Santiago de Cali, a partir de una secuencia didáctica enfocada hacia la generalización de patrones gráficos – icónicos. Lo anterior con el fin de aportar elementos conceptuales, metodológicos y propuestas de aula que muestren la posibilidad de desarrollar este razonamiento desde los primeros ciclos de escolaridad, rompiendo, ciertamente, con la manera tradicional en que los sistemas simbólicos y algebraicos emergen en las aulas de clases, esto es, carente de sentido para los estudiantes.

Para presentar lo anterior, este trabajo se organiza en cuatro capítulos, tal como se sigue.

En el **primer capítulo** se exhiben los aspectos que estructuran el desarrollo del trabajo, esto es, la problemática que lo sustenta, los objetivos, la justificación y algunos antecedentes en relación con el desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros ciclos de escolaridad.

En el **segundo capítulo** se presentan los referentes de orden conceptual sobre los cuales se apoya el diseño de la secuencia didáctica y además el posterior análisis de los resultados obtenidos de su implementación con los estudiantes que son el objeto de estudio, de este modo, en este capítulo se presenta la perspectiva curricular, matemática, didáctica y semiótica.

En el **tercer capítulo** se expone la secuencia didáctica implementada en el grado quinto de la Educación Básica Primaria, junto con el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de dicha secuencia.

Por último, en el **cuarto capítulo** se presentan las conclusiones del trabajo en general y algunas reflexiones didácticas, que emergen del mismo, esto teniendo en cuenta los objetivos trazados en el trabajo, así como los resultados y los análisis de la secuencia didáctica en contraste con los referentes teóricos.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se abordan los aspectos generales que estructuran el trabajo. De este modo, se presenta la problemática que se basa en algunas dificultades que reportan distintas investigaciones en torno a la transición de la aritmética al álgebra, y la importancia de afrontar dichas dificultades a partir de la introducción del razonamiento algebraico en los primeros ciclos de escolaridad; también se encuentran los objetivos de la investigación, tanto el general como los específicos, la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la educación matemática y en la formación docente, y por último se reportan algunos antecedentes que giran en torno al desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros ciclos.

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar ha sido y sigue siendo un tema de indagación y preocupación en el campo de la Educación Matemática. Múltiples investigadores como Castro (2012), Valoyes & Malagón (2006), Garriga (2011), Godino & Font (2003), Kieran & Filloy (1989), entre otros, reconocen y evidencian diversas dificultades que presentan tanto profesores como estudiantes en el momento en que el álgebra es objeto de enseñanza y aprendizaje en el aula. Muchas de las dificultades reportadas por estos investigadores se ubican, en particular, en el paso de la aritmética al álgebra, siendo este momento un escenario prolífico de dificultades; es así como Castro (2012), por ejemplo, afirma que esta transición está plagada de obstáculos didácticos[1].

En efecto, uno de los fenómenos que podría explicar la situación descrita es que tradicionalmente la aritmética se presenta en las aulas de clase con un carácter procedimental, ligada a las operaciones y centrándose en el cálculo y la obtención de un resultado. Esta manera de trabajar la aritmética en la escuela es usualmente la misma que se sigue para la introducción del álgebra, en donde el foco de atención es la presentación de reglas sintácticas que comúnmente se resumen en la manipulación de expresiones algebraicas, solución de ecuaciones y algoritmos para encontrar algún "resultado" (Ameron, 2003). Esta manera de trabajar el álgebra oscurece su carácter estructural que permite reflexionar sobre el significado de objetos tales como variables, incógnitas, ecuaciones, funciones, entre otros.

---

[1] Un obstáculo es un conocimiento adquirido que genera respuestas inadecuadas o incorrectas cuando se utiliza fuera de su contexto en el que valido (Socas, 1997).

Dicha manera de trabajar el álgebra en la escuela, es decir, de manera semejante al trabajo aritmético, introduciéndose desde un punto de vista exclusivamente operacional, es comúnmente reconocida por la comunidad académica como *aritmética generalizada*. Al respecto, por ejemplo, Valoyes y Malagón (2006) caracterizan esta manera de introducir el álgebra en la escuela como una extensión de la aritmética, donde los símbolos algebraicos representan exclusivamente números reales y las fórmulas algebraicas se utilizan únicamente como instrumentos para realizar cálculos y no como representaciones o relaciones entre objetos matemáticos. Además, los problemas que se plantean a los estudiantes son exclusivamente del campo numérico cuyas incógnitas solo representan números, alejando la posibilidad de representar otro tipo de objetos.

La concepción del álgebra como una extensión de la aritmética es una realidad dominante dentro del sistema de enseñanza (Gascón, 1999), en donde el énfasis está puesto en la manipulación sin sentido de símbolos algebraicos. Este hecho claramente hace poco por mejorar el aprendizaje de los estudiantes, pues se hace común entonces que se sigan empleando las mismas técnicas y significados que se adquieren en aritmética para pensar los nuevos objetos algebraicos, los cuales deben rebasar éstas ideas (Castro, 2008). Un ejemplo de esta situación se evidencia con el tratamiento y concepción que tienen los estudiantes de las ecuaciones aún en sus estudios algebraicos, en las cuales es común asignarles un carácter unidireccional, esto es, operación y respuesta, ubicándose esta última casi siempre en el lado derecho. La falta de cierre es otro ejemplo claro que debe ser superado en el trabajo algebraico, para lo cual se hace necesario superar ciertas ideas aritméticas y poder aceptar que una expresión algebraica puede ser respuesta de una situación (Torres, 2010).

Los anteriores y otros ejemplos se describen a continuación, pueden ubicarse por la concepción que se tiene del álgebra como aritmética generalizada, es decir, una posible explicación a la presencia de estas dificultades en los estudiantes puede relacionarse con presentar el álgebra en la escuela bajo el enfoque en cuestión:

La concepción de las letras: en el trabajo aritmético los estudiantes suelen concebir las letras como etiquetas o abreviaciones para relacionar objetos, por ejemplo, 5 manzanas la representan como $5m$, ignorando por completo su significado.

Freudenthal (citado por Valoyes y Malagón, 2006) se refiere a lo anterior diciendo que el estudiante debe construir el significado de las letras en al menos cuatro modos distintos: la letra como incógnita, la letra como variable, la letra como nombre polivalente y la letra como parámetro. Refiriéndose específicamente a la letra como etiqueta o variable menciona que es una fuerte dificultad que enfrentan los estudiantes en el paso de la aritmética al álgebra debido a que deben darle un significado y un sentido para poder comprenderla.

*Carácter operacional y estructural de los signo*s: en la aritmética los signos (+/ -) hacen referencia a realizar una acción, la de operar, por ejemplo, ante la situación $2+3$ los estudiantes hacen la operación, la ejecutan, obteniendo como resultado 5. En álgebra estos símbolos no necesariamente indican una acción, sino que representan una relación de objetos matemáticos como en $2x+3z$, para lo que es indispensable que los estudiantes identifiquen tanto la naturaleza de las letras como la finalidad del álgebra, esto es, el estudio de las relaciones.

La concepción del signo igual: en la aritmética este símbolo indica la ejecución de una determinada operación que lleva a un resultado, viéndose comúnmente de izquierda a derecha, es decir, señala la necesidad de buscar una consecuencia de una operación. Lo anterior no ocurre en el trabajo algebraico, en donde el símbolo del signo igual representa una relación de equivalencia, siendo indispensable para entender el significado de una ecuación y así contribuir al conocimiento algebraico (Castro, 2012).

La interpretación que se le da al signo igual en la escuela hace difícil ver este símbolo en términos de relación y no permite que en el paso de la aritmética al algebra progrese dicha concepción en los estudiantes, debido al poco énfasis que se le brinda en la aritmética; esto se evidencia en los trabajos realizados por Knut, Alibali, McNeil, Weinber y Stephens (citado por Castro, 2012) con estudiantes de sexto a octavo grado, en los cuales encontraron evidencias que apoyan que no hay cambio en la concepción del signo igual a lo largo de los cursos de la secundaria.

Aceptación de la falta de cierre: esta dificultad se presenta en el álgebra escolar cuando los estudiantes no admiten que los objetos que operan no siempre dan a lugar un valor numérico como posible “resultado”, pues dichas expresiones no son concebidas como objetos matemáticos sino como procesos (Molina, 2006). Esto se puede evidenciar en expresiones algebraicas como $2x + 3y = 5xy,$ donde los estudiantes se ven obligados a dar una respuesta numérica para simplificar la expresión, sin admitir que la expresión no requiere de un resultado.

Resolución de ecuaciones: el enfoque de resolución de ecuaciones, según Kieran y Filloy (1989), se clasifica en tres tipos: intuitivo, sustitución por tanteo y formal. Por ejemplo al resolver $5+n=8$, se recuerda que $5+3$ es 8; o se cuenta 5, 6, 7, 8 y se observa que hay tres números para ir de 5 a 8, donde se utiliza el método intuitivo y sustitución por tanteo. Sin embargo para resolver ecuaciones de tipo $2x+9=5x+3$ no es posible por el método de sustitución, por tanto se hace necesario usar el método formal, por el cual se reconocen las propiedades que intervienen en la solución de la ecuaciones (e.g: uniforme de la igualdad, inversos aditivos y multiplicativos) siendo el método sustitución útil para verificar o validar la solución. Según estos autores, los estudiantes tienen más éxito cuando dominan simultáneamente los métodos intuitivos y formales que cuando dominan sólo uno de ellos.

Sin embargo, y pese a que en múltiples investigaciones se han reconocido distintas dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, algunas de las cuales fueron expuestas, al ser concebida el álgebra como una aritmética generalizada, autores como Castro (2012) comparten la idea de que la aritmética puede ser una vía efectiva para la enseñanza del álgebra. Lo anterior lo justifica tomando como fundamento que la enseñanza de la primera no sea exclusivamente operacional; sino también que en dicha enseñanza emerja el carácter relacional de los objetos matemáticos que ahí se abordan; es decir, que los alumnos desarrollen habilidades de manera que trabajen el cálculo guiado a la búsqueda de generalización de patrones y relaciones matemáticas, que Molina (2006) define como actividades que desarrollan *pensamiento relacional*[2], y crear un vínculo potente entre aritmética y álgebra, muy diferente al que se suele presentar en las escuelas cuando se muestra esta última como extensión de la primera.

Claramente la concepción de la aritmética generalizada como un camino para enseñar álgebra hace que esta última se vea de una forma limitada, restringiéndose a la manipulación exclusiva de símbolos y operaciones, lo cual deja de lado el desarrollo del razonamiento algebraico, que investigadores como Bell y Kieran (citado por Castro, 2012) caracterizan como aquel que permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, hacer generalización de patrones, resolver problemas, modelizar y justificar situaciones que involucran objetos matemáticos. Es por ello que si bien es cierto, la necesidad de realizar cambios significativos en la enseñanza del álgebra de secundaria, también es cierto que desde la Educación Básica Primaria se debe aproximar a estos cambios de manera que favorezcan en los estudiantes el desarrollo de razonamiento algebraico.

Una manera en que dicho razonamiento puede ser desarrollado desde los primeros ciclos de escolaridad corresponde con la exploración y generalización de patrones, lo que ha sido ampliamente documentado por investigadores como Mason, Graham, Pimm & Gower (1985) y Bednarz, Kieran, & Lee (1996). Tal exploración no quiere decir que se pretenda que los estudiantes manipulen letras sin sentido, sino que puedan detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, generalizar datos y

[2] Se entiende como la actividad intelectual (interna) que consiste en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir para alcanzar un objetivo. (Molina, 2006).

relaciones matemáticas, de tal forma que desarrollen habilidades indispensables para el aprendizaje del álgebra.

Las situaciones problemáticas son un camino para que el estudiante logre desarrollar las habilidades anteriormente mencionadas, puesto que contribuyen a que este le de significado y utilidad a las matemáticas, tal y como menciona el MEN (1998) es necesario implementar situaciones problemasticas en las cuales los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos.

En virtud de lo anterior, en este trabajo se pretende desarrollar el razonamiento algebraico en la Educación Básica Primaria a través de una secuencia didáctica que promueva la generalización de patrones en ambientes gráficos- icónicos, con el fin de que el estudiante alcance distintas habilidades tales como: proponer, ordenar, justificar, relacionar, conjeturar, probar, generalizar, entre otras, que serán vitales para el desarrollo el razonamiento algebraico y la construcción con sentido del trabajo algebraico, esto es, la manipulación o tratamiento de un sistema matemático de signos.

Por las razones expuestas, en este trabajo se intenta responder a la pregunta:

¿Cómo a partir de una secuencia didáctica sobre la generalización de patrones gráficos - icónicos, se favorece el desarrollo del razonamiento algebraico en un grupo de estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Favorecer, a partir de una secuencia didáctica sobre la generalización de patrones, el desarrollo del razonamiento algebraico en un grupo de estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar elementos teóricos que favorezcan el diseño de una secuencia didáctica en torno al desarrollo del razonamiento algebraico a través de la generalización de patrones gráficos – icónicos.

- Diseñar una secuencia didáctica a partir de los referentes teóricos identificados, con el propósito de implementarla con estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria de la Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría Colegio Compartir de la ciudad Santiago de Cali.

- Proponer elementos de reflexión para docentes en formación o en ejercicio en torno a las necesidades y posibilidades de desarrollar razonamiento algebraico en estudiantes de los primeros ciclos de la educación escolar.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Tal como se ha expuesto en los objetivos, en este trabajo se pretende, finalmente, el desarrollo del razonamiento algebraico en un grupo particular de estudiantes de los primeros ciclos de la educación escolar, siendo este un trabajo que responde al llamado que múltiples investigadores como Castro (2012), Socas (2011), Molina (2006), Castro, Godino, & Rivas (2011), entre otros, han realizado en torno a la necesidad y pertinencia de desarrollar este razonamiento en los estudiantes desde edades tempranas.

Algunos de estos investigadores afirman que la introducción temprana al razonamiento algebraico colabora en la disminución de muchas de las dificultades que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra, tal es el caso, por ejemplo, de las dificultades asociadas al concepto de variable, pues las letras emergen en los trabajos de los estudiantes de manera espontánea, con un sentido y significado, y no simplemente porque el maestro impone en el aula de clase un trabajo con letras y números. Al respecto Trigueros, Reyes, Ursini, & Quintero (1996) afirman: “El concepto de variable es complejo. Cuando se revisa su papel dentro del álgebra se encuentra que éste se usa con diversos significados en diferentes contextos” (p.352).

Es importante resaltar que el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros ciclos de escolaridad no alude necesariamente a que se pretenda impartir un curso de álgebra[3] a los estudiantes, sino de desarrollar un tipo de razonamiento que incluye, entre otras actividades, el estudio de patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), la representación,

[3] Solo en este apartado se entiende por álgebra la exclusiva manipulación sintáctica sobre un sistema matemático de símbolos, tal como es expuesto por Vasco (1999).

generalización y formalización de dichos patrones, la observación sobre comportamientos y regularidades de las relaciones y variaciones entre objetos. Sin embargo, es indispensable que los alumnos conforme avanzan en su escolaridad, además de reconocer las relaciones puedan expresarlas algebraicamente, produciendo otras equivalentes que pueden o no ser más útiles para la resolución de ciertos problemas.

De acuerdo con lo anterior, la introducción de este razonamiento en la Educación Básica Primaria tiene en cuenta una concepción más amplia del trabajo algebraico, poniendo énfasis, entre otras cuestiones, en actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y, que a su vez, expliciten la transición de las concepciones procedimentales, usuales en el trabajo aritmético, a las estructurales, usuales en el trabajo algebraico (Socas, 2011).

A propósito de la relación entre el trabajo aritmético y algebraico, investigadores como Garriga (2011) afirman que la introducción temprana del razonamiento algebraico en la escuela facilita la transición del uno al otro, ya que se propone desplazar el interés en el aprendizaje de reglas y manipulación sintáctica, dejando de ver esa separación estricta o ruptura entre aritmética y álgebra.

Además de lo anterior, este trabajo se hace importante en virtud de que reconoce y propone que la práctica en el aula de clase debe estar dirigida al desarrollo de actividades y procesos tales como el razonamiento, justificación, modelación, exploración, entre otras, que les permitan a los estudiantes ser socialmente competentes, es decir, desenvolverse y actuar sobre la realidad, de este modo se desmiente la idea que el trabajo algebraico del aula debe fundamentarse exclusivamente en desarrollo de procedimientos algorítmicos.

Por tal razón, en relación con el estudio del álgebra se debe mencionar que lo que realmente debería importar en el trabajo del aula es el sistema conceptual que se desarrolla con la manipulación sintáctica del sistema de símbolos. En este sentido y de acuerdo con Vasco (1999), lo que se debería cultivar en los estudiantes es un tipo de razonamiento que no dé exclusivo valor a los sistemas operacionales y algebraicos, sino a referentes conceptuales que permitan desarrollar habilidades a los estudiantes.

La anterior reflexión contribuye a que el docente reconozca lo que se entiende y debería ser el trabajo algebraico, pero sobre todo, que replantee las actividades que propone y favorece en las aulas de clase, pues gran parte del trabajo que realizan los estudiantes gira en torno a la aprehensión de técnicas y manipulación de símbolos, comúnmente, sin sentido (Ameron, 2003; Gascón 1999). De este modo este trabajo favorece el diseño de actividades para el desarrollo del sistema conceptual al que debería apuntar el trabajo algebraico, es decir, al razonamiento algebraico.

Tal diseño se expone en virtud de lo que autores como Blaton y Kaput (citado por Molina, 2006) reconocen en relación con la manera de abordar el trabajo algebraico, esto es, a partir de la exploración, observación y generalización de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, además de crear un ambiente escolar donde los alumnos discutan, argumenten y comprueben sus ideas y también practiquen habilidades de cálculo, con el fin de disminuir diversas dificultades en torno al aprendizaje del álgebra.

En efecto, la generalización de patrones, tal como se ha expuesto, en relación con el desarrollo del razonamiento algebraico consiste en considerar casos particulares de situaciones que presentan variaciones o cambios para el estudio de las regularidades y la detección de los criterios que las rigen para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades, entendidas como unidades de repetición, se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos o formas, uno detrás de otro, en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón que puede percibir a través de las fotografías y representaciones pictóricas e icónicas entre otros.

Por lo tanto, la generalización de patrones gráficos - icónicos involucra la visualización, exploración y manipulación de la figura, facilitando la construcción de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes (Bednarz et al., 1996), siendo ésta, una forma significativa de potenciar el razonamiento algebraico y aproximarse al estudio de los símbolos de los sistemas algebraicos.

En síntesis, la propuesta optada en este trabajo para el desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones en un contexto particular, favorece la reflexión para que los docentes identifiquen la importancia en desarrollar este razonamiento en los estudiantes, y que es necesario y posible potenciar en los primeros ciclos de escolaridad, con lo cual ellos pueden construir bases sólidas para el aprendizaje del álgebra, adquiriendo habilidades que podrán utilizar tanto en la escuela como su diario vivir.

1.4 ANTECEDENTES

Existen muchas investigaciones acerca de la introducción del razonamiento algebraico en los primeros ciclos de escolaridad y la generalización de patrones, a continuación se da a conocer algunas de ellas:

- Acevedo (1991) en su artículo propone una tipología de patrones de razonamiento proporcional con aplicación a las tareas matemáticas y científicas. Además describe algunos procedimientos y estrategias utilizados por los estudiantes en el momento de resolver dichas tareas, luego un análisis a partir de los resultados obtenidos y por último se hacen algunas sugerencias para la enseñanza de la noción de proporcionalidad.
- Godino y Font (2003) indagan sobre el razonamiento algebraico en la Educación Básica Primaria y proponen diferentes situaciones a partir de recursos en internet y libros de texto, que los docentes pueden utilizar para el desarrollo de dicho razonamiento. Las situaciones se clasifican en cuatro categorías: comprensión de patrones, relaciones y funciones, representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y análisis del cambio en contextos diversos.
- Butto (2005) indagó sobre la introducción temprana del pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje con estudiantes de 5º y 6º de primaria (10-11 años), con dos rutas de acceso al álgebra: razonamiento proporcional y procesos de generalización. El trabajo se fundamentó en cuatro etapas: 1) Diseño de rutas didácticas iniciales sobre

el razonamiento proporcional y los procesos de generalización; 2) Diseño de secuencias didácticas sobre razonamiento proporcional y procesos de generalización; 3) Estudio con grupos pequeños de alumnos de primaria y secundaria de escuelas públicas para la enseñanza de temas matemáticas concernientes a las dos rutas conceptuales en dos entornos tecnológicos: Logo, Expresser y Excel; 4) Diseño de rutas didácticas finales sobre el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. Los resultados revelaron que los estudiantes son capaces de comprender las ideas de variación proporcional, descubren un patrón y formulan una regla general.

- Sessa (2005) realizó un estudio sobre la problemática didáctica del álgebra escolar, dicho estudio tiene como propósito analizar una vía de entrada al trabajo algebraico que se apoya en las ideas de fórmulas, de variable y de generalización, además muestran algunas dificultades que tienen los alumnos cuando se les introduce el concepto de ecuación a temprana edad, llevando así a proponer una manera más o menos explícita de la simplificación de los objetos y algoritmos de las prácticas.
- Molina (2006) en su tesis doctoral indaga sobre el desarrollo del pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los estudiantes de educación primaria ponen de manifiesto en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas, contextualizado con la propuesta Early - Algebra que consiste en la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones y situaciones matemáticas.
- Castro (2008) indaga acerca de las competencias de los maestros de educación primaria en formación para abordar la enseñanza del

"razonamiento algebraico elemental", focalizados en dos aspectos: las dificultades que los estudiantes experimentan cuando se enfrentan al estudio del álgebra y la problemática de la formación de profesores de matemáticas con destino a la educación primaria; sin que éstos dejen a un lado la identificación de los significados y los conflictos de significado, que se manifiestan en la solución de problemas de razonamiento algebraico elemental, que pueden ser resueltos tanto con técnicas aritméticas como algebraicas.

- Butto & Rojano (2010) presentan un estudio sobre la transición de la aritmética al álgebra, basado en un modelo de enseñanza que incorpora fuentes de significados relacionados con el razonamiento proporcional numérico y geométrico, aspectos de la variación proporcional y procesos de generalización. El estudio se realiza a estudiantes de 10 a 11 años de edad de una escuela primaria a partir de proponer actividades con secuencias que involucren la variación.
- Castro, Godino & Rivas (2011) realizaron un estudio exploratorio sobre las competencias de análisis didáctico de dos grupos de futuros maestros. Se comenta su desempeño en el análisis de dos tareas, en el contexto del diseño de una Unidad Didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental. La diversidad exhibida por los dos grupos de futuros maestros, al hacer los análisis epistémicos, se vincula con la necesidad de reforzar el estudio de este tipo de tareas en la formación inicial de maestros
- Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2012) presentan un modelo en el que se diferencian tres niveles de razonamiento algebraico elemental que puede utilizarse para reconocer características algebraicas en la resolución de

tareas matemáticas junto con ejemplos de actividades matemáticas, clasificadas según el nivel de algebrización. Estas actividades se proponen con el fin de que puedan ser usadas en la formación de profesores a fin de capacitarlos para el desarrollo del sentido algebraico en sus alumnos.

- Merino (2012) Presenta una investigación que consistió en realizar una prueba escrita diseñada por investigadores, a estudiantes de 5º grado de primaria (10- 11 años), donde se analizó las respuestas de dicha prueba, enfocándose en la capacidad de generalización que muestran al uso de patrones para llegar a generalizar y al tipo de representaciones que utilizan (verbales, tabulares, pictóricas, simbólicas, entre otras).
- Rivera y Sánchez (2012), presentaron los resultados de una secuencia de actividades aplicada a estudiantes de grado tercero de una entidad privada, relacionada con la generalización de patrones como una alternativa para desarrollar el pensamiento variacional a partir de la Educación Básica Primaria, dicha secuencia está organizada por una serie de actividades agrupadas en cuatro situaciones efectuadas en 8 secciones.
- Trigueros et al. (1996) teniendo en cuenta una serie de aspectos que son fundamentales en la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria, tal como desarrollar capacidades a los alumnos que les permitan resolver exitosamente problemas y ejercicios que involucran los distintos usos de las variables, dichos investigadores estructuran un *Modelo 3UV* (tres usos de variables: incógnita, número general y en relación funcional) con sus respectivas características, las cuales serán fundamentales para que los estudiantes en determinada actividad puedan reconocer e identificar los

diferentes usos de las variables además que pudieran simbolizar y determinar valores para poder resolver los problemas planteados.

- Vergel (2014) en su trabajo doctoral propone una investigación para identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria (9-10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones; dicho trabajo aportó conocimiento relacionado con estrategias que los estudiantes ponen en juego cuando abordan problemas de generalización de patrones y con la caracterización del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes.

1.5.1 Aportes de los antecedentes

A partir de la revisión de los antecedentes descritos se reconoce algunos elementos de interés para este trabajo, los cuales se presentan a continuación:

El primer aspecto permite confirmar la necesidad y pertinencia de plantear actividades que tengan como fin desarrollar la generalización de patrones y el razonamiento algebraico en la educación primaria, sin ser exclusivo de algún grado en particular.

El segundo, alude a la necesidad de que los maestros en formación reconozcan la importancia de desarrollar el razonamiento algebraico en la Educación Básica Primaria, teniendo en cuenta que no se refiere solamente a la simple manipulación de técnicas y símbolos, sino aquel que permite desarrollar habilidades en los estudiantes tales como realizar predicciones, conjeturas, justificar argumentos, entre otros.

Otro aspecto importante, es que algunos de estos antecedentes permiten percibir diferentes actividades, las cuales pueden contribuir en la construcción de la secuencia didáctica, de acuerdo a la propuesta de trabajo.

Y por último, los trabajos reportados aquí permiten reconocer diferentes etapas que dan cuenta de los momentos por cuales pasa el estudiante cuando se plantean actividades que incluyen la generalización de patrones, que contribuyen a la explicación y el establecimiento de relaciones entre conceptos y procedimientos.

CAPÍTULO II: REFERENTES CONCEPTUALES

Para el diseño de la secuencia didáctica y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en este trabajo se han considerado cuatro perspectivas: la curricular, matemática, didáctica y semiótica. La primera se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006); en la segunda perspectiva se encuentran algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la secuencia didáctica; en la tercera perspectiva se sitúan los procesos de generalización, los distintos tipos de patrones, y se caracterizan el razonamiento algebraico y el razonamiento proporcional; finalmente en la cuarta perspectiva se toma como referencia los trabajos de Radford (2003) y Vergel (2014) para caracterizar los medios semióticos de objetivación que emergen en distintas etapas de generalización de patrones.

2.1 PERSPECTIVA CURRICULAR

Para el diseño y el análisis de la secuencia didáctica propuesta en este trabajo, esta perspectiva toma como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), abarcando el razonamiento algebraico como una manera de desarrollar el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, los procesos generales y el contexto; y desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se seleccionan los estándares del grado quinto de Educación Básica Primaria, que se asocian a los propósitos de este trabajo y se muestran posibles relaciones con otros estándares, haciendo énfasis a la coherencia vertical y horizontal.

2.1.1 Sobre los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se propone una estructura que busca articular el quehacer matemático en la escuela, la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los procesos que los estudiantes siguen al aprender y las relaciones de la matemática con la cultura y otras disciplinas, de tal manera que se propicie un aprendizaje significativo y duradero, que no solo haga énfasis en procedimientos sino en el desarrollo de pensamientos útiles para desempeñarse en la sociedad. La articulación de todos los elementos parte del reconocimiento de que el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros han construido y cultivado, adquiriendo un conjunto de elementos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla.

De este modo, el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, en donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás; para ello, es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con su experiencia cotidiana, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

Además de las consideraciones anteriores y en relación con el quehacer matemático y el contexto, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) mencionan la importancia del conocimiento matemático en la escuela, este es considerado como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven sin dejar a un lado el papel que juega el docente, pues él es el encargado de crear y propiciar situaciones problemas en el aula de clases en las que los estudiantes exploren, reflexionen, planteen preguntas, predigan, realicen conjeturas, las validen, justifiquen, entre otras.

Las anteriores consideraciones son fundamentales para consolidar la propuesta curricular que se hace en este documento oficial, la cual tiene por objetivo orientar los currículos de las instituciones educativas de Colombia. Dicha propuesta toma como referencia, de manera coherentemente y articulada, los siguientes tres grandes aspectos:

Los **Procesos generales**: son aquellos que “tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (MEN, 1998, p. 18).

El *razonamiento,* estimula la exploración, comprobación y aplicación de ideas; apoyándose en los contextos y materiales que permitan percibir regularidades y relaciones, para que las matemáticas se comprendan sin necesidad de verlas como una memorización de reglas y algoritmos. En matemáticas el razonamiento alude esencialmente a formular y justificar las estrategias y los distintos procedimientos utilizados en los planteamientos o en la resolución de problemas; además de realizar conjeturas, predicciones y encontrar patrones, dependiendo de la situación propuesta, para luego expresarlas matemáticamente.

La *comunicación*, permite establecer vínculos entre las distintas nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas, pues a partir de las distintas representaciones como las simbólicas, verbales, pictóricas, entre otras, los estudiantes pueden hacer apreciaciones sobre las diferentes situaciones planteadas.

La *modelación*, se entiende como una construcción o artefacto material o mental que puede usarse como referencia para comprender un concepto matemático, es decir, crear un modelo matemático para representar determinadas situaciones de la vida real les permite a los estudiantes formular y visualizar un problema en diferentes formas, ayudándoles a descubrir relaciones y regularidades.

La *resolución y planteamiento de problemas,* es considerada una actividad muy importante en las matemáticas, puesto que los estudiantes desarrollan habilidades como formular diferentes problemas a partir de las situaciones planteadas, generando distintas estrategias para resolverlos, además de encontrar resultados e interpretarlos.

La *elaboración, ejercitación y comparación de procedimientos,* se refiere a las destrezas, estrategias, métodos y técnicas que necesitan desarrollar los estudiantes para poder resolver diferentes situaciones que se le presentan en su diario vivir, como por ejemplo efectuar operaciones, hacer cálculos, graficar, transformar y medir, de tal manera que comprueben los procedimientos o resultados ellos mismos, sin que dependa de la respuesta de un libro de texto, del profesor o una herramienta tecnológica.

Los **Conocimientos Básicos** es el segundo componente clave en la propuesta curricular del MEN (1998), tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con los sistemas propios de cada uno de estos pensamientos. De este modo dichos conocimientos se clasifican en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, el espacial y sistemas geométricos, el métrico y sistemas de medida, el aleatorio y sistemas de datos, y el variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Cabe resaltar que los sistemas fueron vinculados a cada uno de estos pensamientos desde la Renovación Curricular, en virtud de relacionar el desarrollo de estos pensamientos con estructuras, conceptos, objetos, propiedades y relaciones matemáticas, es decir, con los sistemas matemáticos.

El objetivo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela debe ser el desarrollo de cada pensamiento a partir de la enseñanza de su respectivo sistema, aunque claro está, estos últimos no agotan los primeros. Así, por ejemplo, al trabajar con figuras geométricas, debería pretenderse el desarrollo del pensamiento espacial, entre otros.

El contexto es el último componente esencial en la propuesta curricular en cuestión. Este tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que dan sentido a las matemáticas que aprende. En los ambientes propuestos por los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), se distinguen tres tipos de contextos: los procedentes de la vida diaria, de las matemáticas mismas y lo relacionado con otras ciencias.

Es preciso señalar que la manera de dar cuenta de estos contextos es a partir de las situaciones problemáticas, estas son el eje transversal en la propuesta curricular del MEN (1998) en tanto articulan los conocimientos básicos, los procesos generales y el contexto. Es decir, las situaciones problemáticas ponen en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento, para contribuir significativamente al sentido y a la utilidad de las matemáticas.

En consideración con todo lo anterior, es necesario resaltar que la propuesta de trabajo en el aula que en este proyecto se favorece, a propósito de potenciar el razonamiento algebraico en un grupo particular de estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria a partir de la generalización de patrones gráficos-icónicos, se ubica, en relación con los conocimientos básicos, en el pensamiento variacional[4] y sistemas algebraicos y analíticos; pues para el desarrollo de este pensamiento se contempla el reconocimiento, la percepción la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos.

Una manera de iniciar el aprendizaje del pensamiento variacional puede ser a partir de actividades que involucren generalización de patrones, en este sentido el MEN (2006) señala que:

[4] En este trabajo se asume una diferencia "sutil" entre el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico, debido a que se considera que este último abarca el primero, estando por tanto íntimamente ligados. En la dimensión didáctica presentada en este capítulo se aclara con detalle la diferencia y relación a la cual aquí se alude entre ambos.

> Las actividades de generalización de patrones involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras siendo una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la educación secundaria, pues preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de una formulación verbal de una “regla” recursiva que muestre como construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guie a dicha expresión algebraica (p.67).

En relación con los procesos generales, se privilegia aquí el razonamiento y la comunicación, pues son de gran importancia para las situaciones propuestas en la secuencia didáctica, debido a que involucran elementos que contribuyen y, además, caracterizan el desarrollo del razonamiento algebraico. Es importante resaltar que no se excluye en ningún momento la presencia de los otros procesos generales como la modelación y el planteamiento y resolución de problemas, no obstante, se considera que el centro de atención son los mencionados.

Finalmente los contextos que se favorecen en la secuencia son, principalmente, los procedentes de la vida diaria debido a que las situaciones problemáticas propuestas en el diseño de la secuencia están motivadas con situaciones cercanas a los sujetos que tienen sentido en prácticas cotidianas.

2.1.2 Sobre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En concordancia con los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) también reconocen la necesidad de cultivar el pensamiento variacional en los estudiantes a partir de los primeros ciclos de la escolaridad. Situaciones como el reconocimiento de patrones, el estudio de regularidades y el análisis de fenómenos de variación y cambio en campos geométricos, numéricos o de la vida cotidiana, a partir de distintos tipos de sistemas de representación como los icónicos, gráficos, tabulares, entro otros; son actividades preponderantes para alcanzar este propósito, es decir, para favorecer el desarrollo de este pensamiento en los sujetos.

Tales situaciones son reconocidas como un escenario propicio para empezar a dotar de sentido la construcción, manipulación y significación de los sistemas algebraicos y analíticos en los estudiantes, incluso antes de ser objeto de estudio en años posteriores. Se debe señalar que el trabajo con algunos fenómenos de generalización de patrones en cualquier tipo de representación da lugar al estudio de conceptos como el de razón y proporción, de tal forma que su estudio puede ser significativo por esta vía (MEN, 1998, 2006).

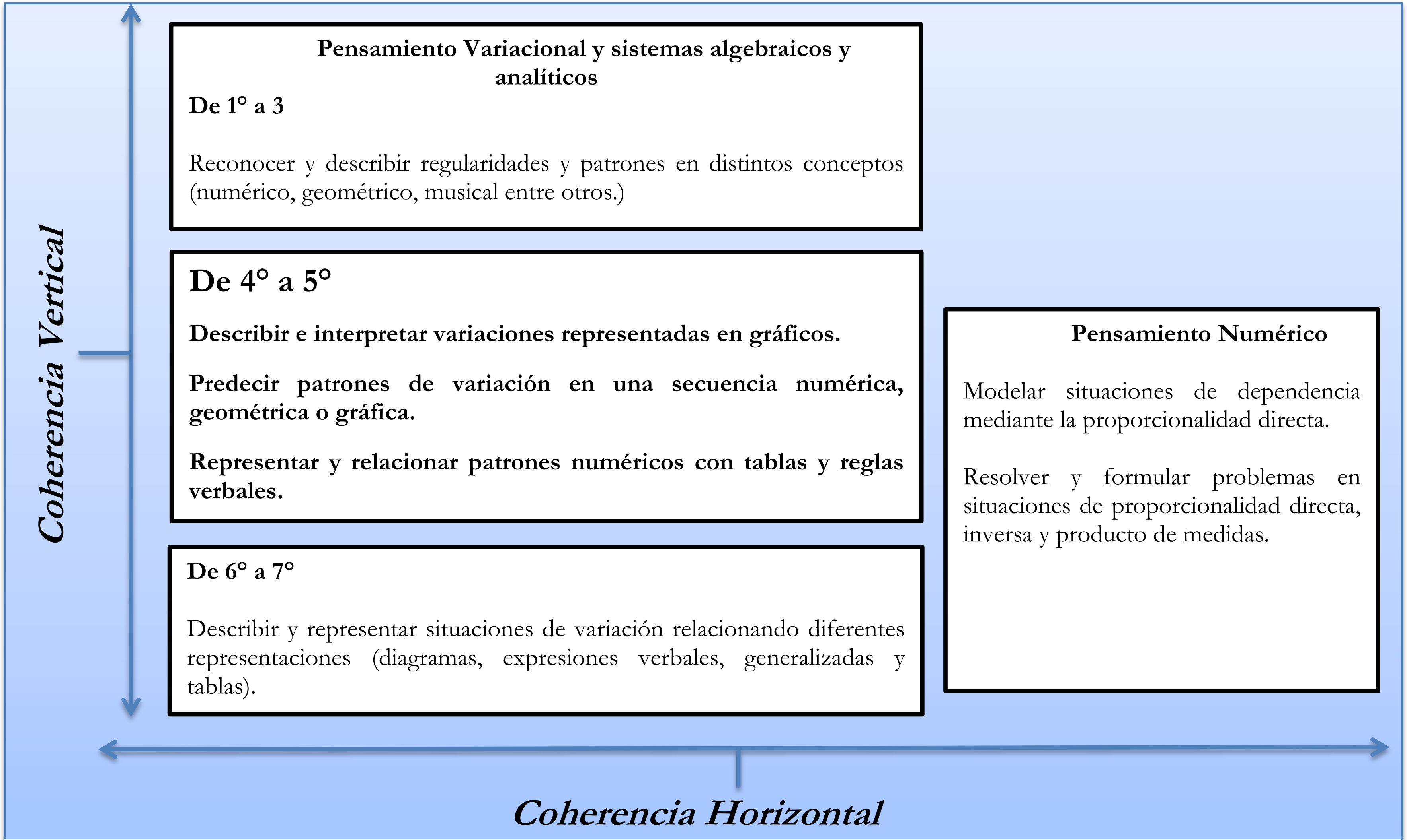
Ahora bien, los estándares propuestos por el MEN (2006) están organizados según el nivel escolar de los estudiantes, a partir de unas competencias matemáticas que requieren de ambientes de aprendizajes enriquecidos por situaciones significativas y comprensivas que posibiliten avanzar a niveles de competencias más complejos, buscando así, formar un ser matemáticamente competente.

En virtud de que el diseño de la secuencia didáctica está pensado para estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria y que se relaciona con el estudio de fenómenos de variación y el cambio, se tienen en cuenta los siguientes estándares ubicados en el ciclo de cuarto a quinto grado en relación con el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:

- Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.

Teniendo en cuenta que en este documento oficial se alude a la coherencia vertical, como aquella relación que existe entre estándares del mismo pensamiento y de diferentes conjuntos de grados, y a la coherencia horizontal que se refiere a la relación que guardan los estándares en distintos pensamientos pero en el mismo conjunto de grados; el diseño de la secuencia didáctica que en este trabajo se propone responde a estas dos coherencias en tanto se exhibe la relación entre el pensamiento variacional y el pensamiento numérico. Por ejemplo, al cuantificar las variaciones que se presentan entre las representaciones icónicas y dar paso al estudio de regularidades y patrones con niveles de abstracción y generalidad mayor en donde el sistema simbólico - algebraico cobra especial relevancia, lo que abre paso para el estudio del álgebra escolar en grados posteriores a quinto grado.

De acuerdo a lo anterior en el esquema 1, se exhiben los estándares que guardan tanto coherencia vertical como horizontal con los ya mencionados, los cuales enfocarán de manera central en la secuencia didáctica.



Esquema 1. Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados a desarrollar en la propuesta. (Esquema tomado del MEN, 2006, p.79)

Cabe resaltar que en la coherencia horizontal presentada en el esquema anterior se evidencia la relación del pensamiento variacional con el pensamiento numérico, con el fin de considerar la proporcionalidad directa como una vía para potenciar el razonamiento algebraico a través de la generalización de patrones.

2.2 PERSPECTIVA MATEMÁTICA

La perspectiva matemática se aborda a partir de dos conceptos matemáticos, el primero describe lo que se entiende por sucesiones en matemáticas, esto en virtud de que el diseño de la secuencia didáctica se propone a partir de actividades que involucran sucesiones de gráficos - icónicos; el segundo concepto es el de modelo de función, en particular, el modelo de función lineal, a partir del cual se describen algunas características de las regularidades que guardan los patrones objeto de estudio en las sucesiones de gráficos - icónicos presentados en la secuencia didáctica.

La caracterización que aquí se hace de estos conceptos matemáticos se realiza tomando como referencia los trabajos de Larson, Hostetler & Edwards (1999), Azcárate & Deulofeu (1990) y Holguín (2012).

2.2.1 Sucesiones

La palabra sucesión hace referencia a una serie de objetos o sucesos que están organizados de tal forma que alguno de ellos se identifica como el primero, otro como el segundo, etc.

Larson et al. (1999) afirman que: “una sucesión se define como una función cuyo dominio lo constituyen los números enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, suelen denotarse mediante notación de subíndices en lugar de la notación habitual de las funciones" (p.620). A continuación se muestra la notación de una sucesión:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

Al número 1 le corresponde a_1, al número 2 le corresponde a_2, y así sucesivamente. Los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son los términos de la sucesión. El número a_n es el término de la sucesión *n*-ésimo o término general de la sucesión y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

De acuerdo a lo anterior, los primeros cinco términos de la sucesión $a_n = 2n + 1$, corresponderían a: $3, 5, 7, 9, 11 \dots$

2.2.2 La proporcionalidad directa como modelo de función lineal

Es importante resaltar que la pertinencia de caracterizar el modelo de función lineal y su respectiva relación con la proporcionalidad tal como lo señala Azcárate & Deulofeu (1990) no se realiza en virtud de movilizar este concepto en la secuencia didáctica, es decir, no se pretende en este trabajo que los estudiantes logren un aprendizaje del concepto de función lineal, sin embargo, no se puede desconocer el modelo de función lineal que describen las variaciones de ciertas cantidades propuestas en las sucesiones de gráficas – icónicas presentadas en la secuencia didáctica, motivo por el cual aquí se caracteriza este modelo. Así, se reconoce que la variación y el cambio están íntimamente ligados con distintos modelos de función, tal como lo reconoce desde el MEN (2006):

> El estudio de patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional (…) y con distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones como las lineales y las afines (p.67).

Además de esto se debe señalar que el MEN (2006) propone que el estudio de los modelos de función lineal debe articularse con el estudio de la proporcionalidad directa, por lo que es posible reconocer que ciertos tipos de fenómenos variación y cambio llevan consigo el estudio de modelos de función lineal y con ello el de la proporcionalidad directa.

En atención con lo anterior, Azcarate y Deulofeu (1990) indican que el modelo de función lineal también se puede considerar como una proporcionalidad directa en el sentido de que una de las propiedades principales de este modelo es la existencia de una razón entre los cambios que se producen en fenómenos variables, en otras palabras, un modelo de función lineal es tal en tanto los factores de variación entre las dos variables sean iguales, esto es, lo cambios entre algunas de las variables en un cierto factor (dos veces, tres veces, media vez, etc.) debe generar cambios en ese mismo factor en la otra variable. (Gobernación de Antioquia [GA], 2006, p.108).

Así pues, de acuerdo con estos autores la proporcionalidad directa (simple) se puede representar por una función lineal tal que:

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}$$

Donde $\boldsymbol{k}$ es llamada constante de proporcionalidad

Además, estos mismos investigadores indican que la proporcionalidad directa cumple con dos propiedades: la homogeneidad con respecto a la suma y la homogeneidad con respecto al producto, la primera se refiere a:

> (…) cuando en un espacio de medida, una cantidad es una combinación aditiva de otros valores del mismo espacio de medida, entonces, la cantidad correspondiente en el otro espacio de medida, es la suma de los valores correspondientes a cada uno de los sumandos que la componen. Esto es, si X,

Y y Z, son tres cantidades en un espacio de medidas tales en $Z = X + Y$, entonces $f(Z) = f(X + Y) = f(X) + f(Y)$. (GA, 2006, p.109).

Y en la segunda propiedad se alude a que:

> (…) si dos cantidades en el mismo espacio de medida son tales que si una es un factor de λ veces la otra, entonces, las respectivas cantidades correspondientes en el otro espacio de medida conservan ese mismo factor λ. Esto es si X y Y son tales que $Y = \lambda \bullet X$, entonces $f(Y) = f(\lambda \bullet X) = \lambda \bullet f(X)$. Con λ un real positivo. (GA, 2006, p.109).

Las propiedades anteriores se ejemplifican a partir de la tabla 1 en donde se observan algunos valores de dos magnitudes relacionadas denotadas x y y, las cuales representan la altura de un árbol y la longitud de su sombra respectivamente, dadas en metros, a determinadas horas.

$\boldsymbol{x}$ **(*altura* árbol)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{y}$ **(*long. sombra*)**	1.5	3	4.5	6	7.5

Tabla 1. Ejemplo de Proporcionalidad directa como modelo de función lineal. (Tomado de Azcárate & Deulofeu, 1990).

Se tiene que la relación entre las magnitudes x y y (variable independiente y dependiente respectivamente) es directamente proporcional, ya que las variaciones entre ambas magnitudes (altura del árbol y la longitud de su sombra) conservan un factor de variación igual, lo que hace posible determinar una constante de proporción o razón[5] a partir de las proporciones[6] que se forman de la covariación de las variables, tal como se muestra a continuación.

---

[5] Holguín (2012) define el concepto de razón como cierta relación (usualmente de comparación) entre las medidas de dos magnitudes. Las magnitudes pueden ser del mismo tipo (magnitudes homogéneas) o de diferente tipo (magnitudes heterogéneas).

[6] Holguín (2012) denomina proporción a la igualdad entre dos razones. Simbólicamente se representa de la siguiente manera: Sean $\mathrm{a, b, c, d, e} \in \mathrm{z}^{+}$ que representan medidas de las magnitudes A, B, C y D, respectivamente. Sean ${}^{\mathrm{a}}/_{\mathrm{b}}$ y ${}^{\mathrm{c}}/_{\mathrm{d}}$ dos de las razones que pueden obtener dichas medidas ($\mathrm{b} \neq 0$ y $\mathrm{d} \neq \mathrm{o}$) se cumple que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{1.5}{1} = \frac{3}{2} = \frac{7.5}{5} = 1.5 \quad k = 1.5$$

De este modo, la covariación entre la altura del árbol y la longitud de su sombra se pueden modelar mediante la función:

$$f(x) = y = k \cdot x$$

Según el ejemplo, se tiene que cuando el valor de la longitud de la sombra del árbol es $6\,metros$, equivale a multiplicar la constante de proporción ($k = 1.5$) por la altura del árbol cuando corresponde a $4\,metros$. Esto es:

$$6 = 1.5 \cdot 4$$

Respecto a las dos propiedades de la proporcionalidad directa, la homogeneidad de la multiplicación se cumple en el sentido que existe un factor λ que se conserva entre las dos cantidades involucradas, en este caso, la altura de un árbol y la longitud de su sombra. Por ejemplo, si $\lambda = 2$, al multiplicarlo por un valor de la altura del árbol, específicamente $2\,metros$, corresponderá al valor de la altura del árbol cuando es $4\,metros$, e igualmente en sus respectivas longitudes de sombra conservarán este mismo factor λ, es decir, al multiplicar la longitud de la sombra cuando es $3\,metros$, da como resultado la longitud de la sombra cuando es $6\,metros$. Tal como se evidencia a continuación.

Si $\lambda = 2$, *entonces* $2 \cdot \lambda = 4$ y $3 \cdot \lambda = 6$

Con respecto a la homogeneidad de la suma, cuando el valor de la altura del árbol es $3\,metros$, es igual a tener la composición aditiva del valor de la altura del árbol cuando es $1\,metro$ y $2\,metros$, entonces también la suma de los valores de la longitud de sus sombras correspondientes dan como resultado la longitud de la sombra respectiva a la altura del árbol cuando es $3\,metros$, que es igual a $4.5\,metros$. Esto es,

$$Si\ 1+2=3 \quad entonces \quad 1.5+3=4.5$$

Es importante señalar que las variaciones que emergen en las sucesiones de gráficos- icónicos que se presentan en la secuencia didáctica conservan un mismo factor de variabilidad, por lo que la covariación entre las magnitudes es exclusivamente de proporcionalidad directa, con lo cual se alude únicamente al modelo de función lineal.

2.3 PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En esta perspectiva se presentan los procesos de generalización que describe Mason et al. (1985) a partir de unas fases por las cuales pueden pasar los estudiantes para el reconocimiento de un patrón, así mismo, se muestra la caracterización y diferencia entre el razonamiento algebraico y el pensamiento variacional, y por último se caracteriza el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico.

2.3.1 Los procesos de generalización de patrones

Uno de los procesos esenciales de la actividad matemática es la generalización, puesto que es requerida en las diferentes formas de "hacer matemáticas", como por ejemplo en la resolución de problemas, la modelación, entre otras. Es por ello que investigadores como Mason (1996) afirman, que la generalización es el corazón de las matemáticas, pues permite acceder a la construcción de los conceptos matemáticos y el establecimiento de las relaciones entre ellos.

La generalización es la expresión de relaciones o propiedades entre diferentes objetos de manera que se perciban regularidades entre dichos objetos y puedan ser enunciadas verbal o simbólicamente, siendo considerada por Radford (citado por Vergel, 2014) como una de las principales vías para introducir el álgebra en la escuela, debido a que hace posible que los estudiantes se aproximen a situaciones de variación, lo que se constituyen como importante para el desarrollo del pensamiento algebraico, favoreciendo el tratamiento sintáctico del sistema simbólico. Tal como indica Mason et al. (1985) el reconocimiento de patrones a través de la generalización deben ser desarrollados a lo largo del ciclo de educación básica.

Los procesos de generalización permiten una división en fases que conviene también desde un punto didáctico (Mason et al., 1985):

a) La visión de la regularidad, la diferencia, la relación - Ver un patrón
b) Su exposición verbal - Describir un patrón
c) Su expresión escrita de la manera más concisa posible - Registrar un patrón.

A continuación se caracterizan cada una de estas fases del proceso de generalización:

"Ver un patrón" consiste en identificar y reconocer entre lo que es propio de cada situación o ejemplo y lo que es común a todos ellos. Aunque en ocasiones y dependiendo de la situación, la visualización pueda ser un proceso rápido e intuitivo para los sujetos, hay otras situaciones en las que este mismo proceso se puede complejizar a tal punto que se requiera hacer un análisis de las situaciones planteadas, estudiando sus características o propiedades, de manera que se manipule la información y se pueda llegar al reconocimiento del patrón.

"Describir un patrón" consiste en describir la regularidad percibida que inicialmente se hace en lenguaje natural y de manera oral. Es frecuente que a los estudiantes les resulte algo difícil pasar del ver al describir un patrón, por eso es importante que se destine un tiempo al trabajo en grupo para que puedan aclarar sus ideas, discutiendo sus observaciones y percepciones.

La descripción obliga a que los estudiantes hagan una organización de sus ideas y por medio de la comunicación con sus compañeros verifiquen sus conjeturas o las reformulen. Por tal motivo es importante que el maestro favorezca actividades que le permitan dar tal paso de una fase a otra.

"Registrar un patrón" implica una variedad de formatos que no necesariamente es el simbólico sino que pueden ser a través de escritos, dibujos, gráficos o tablas, o una combinación de estas, como dibujos apoyados con palabras. Hay que resaltar que una buena razón para registrar los patrones es el hecho de que las ideas en la mente tienden a dar vueltas y ser fugaces, en cambio una vez que están plasmadas en el papel son fáciles de analizar, discutir y de llegar a más personas, siendo también una forma de exponer las ideas a la crítica. Este registro debe ser propio del estudiante, es decir que sea el mismo quien lo genere a partir de los elementos matemáticos o conceptuales con los que cuente.

A continuación se caracteriza a partir de la ilustración 1 las distintas fases mencionadas:

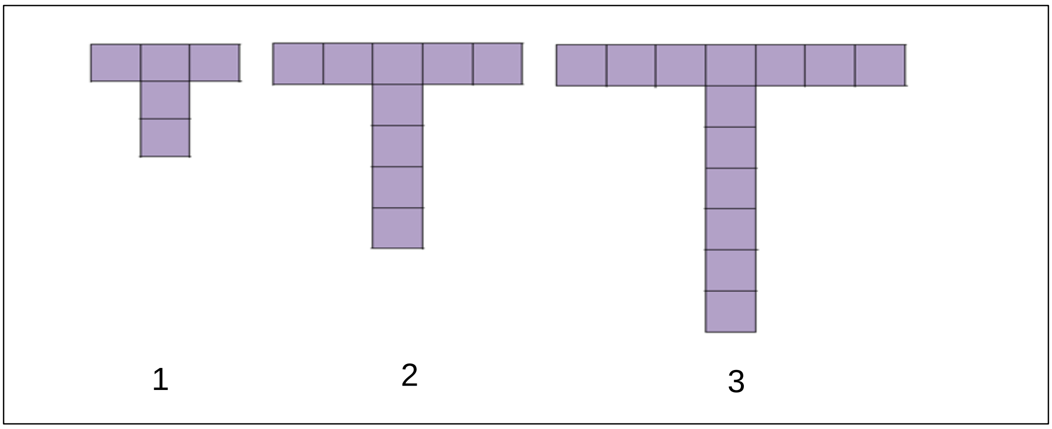


Ilustración 1. Situación que ejemplifica las etapas en el proceso de generalización (Ejemplo tomado de Mason et al., 1985).

La primera fase *Ver un patrón* se ilustra cuando el estudiante puede visualizar que la figura 1 presenta una forma estándar, en este caso de T, la cual está compuesta por cuadrados pequeños. Es importante en esta primera fase que el estudiante pueda dar cuenta que los números que conforman la T son impares y que entre una T y la anterior hay una diferencia de 4 cuadrados.

Con relación en la segunda fase *Describir un patrón,* se espera que el estudiante enuncie sus hipótesis y las compruebe, teniendo en cuenta lo que ha observado. Por ejemplo, para el caso de la figura 1, el número de cuadrados siempre será un número impar, y se necesita multiplicar el número de la posición en la secuencia por 4 y luego adicionar 1 para obtener así el número total de cuadrados que configuran cada una de las figuras en la sucesión.

Finalmente la tercera fase del proceso de generalización *Registrar un patrón* alude de acuerdo a la figura 1, a que el estudiante escriba mediante cualquier tipo de representación lo que en la fase anterior había descrito, es decir, el patrón con la regularidad que representa la sucesión de figuras, por ejemplo, registrarlo utilizando el lengua natural, o por medio de símbolos.

Si bien se puede reconocer en los procesos de generalización una valiosa herramienta para entender y explicar la relación de distintas situaciones, también está sujeta a que surjan diferentes errores debidos al uso incorrecto de las generalizaciones, como por ejemplo en el caso que los estudiantes pretendan adaptar las reglas que habitualmente acostumbran a trabajar a otras situaciones en las que no funcionan dichas reglas, en otras palabras se extienden a un dominio en que el no son válidas dichas propiedades.

2.3.2 Sobre los patrones

Una de las actividades que se pueden establecer sobre los patrones es llegar a generalizarlos para poder describirlos y cuantificarlos, puesto que a partir de la observación de las regularidades y verificación de los patrones en una determinada situación, se permite generalizar dicho patrón. De este modo los patrones juegan un papel destacado en los procesos de generalización, puesto que estimulan la observación, formulación, argumentación y validación de conjeturas.

Los patrones se consideran como "algo" que se repite con regularidad (Castro, 1995). Un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición y composición. Se entienden así los patrones como una sucesión de signos que bien puede ser orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc., los cuales se construyen siguiendo una regla de repetición o de recurrencia.

Existen diversos tipos de patrones entre los cuales se pueden reconocer principalmente los numéricos, geométricos y pictóricos, entre otros. Para efectos de este trabajo a continuación se caracteriza cada uno de estos patrones.

Los patrones numéricos hacen referencia a una serie de números que siguen una secuencia. El siguiente ejemplo expuesto en la tabla 2, se puede observar que los números de la *fila 2* son el resultado del producto de un número *(n)* y el siguiente *(n+1)* de la *fila* 1.

Por ejemplo, el número correspondiente a 3 en la fila 2 es el producto de $3x4$, dando como resultado 12.

Fila 1	1	2	3	4	5	6	…
Fila 2	2	6	12	20	30	42	?

Tabla 2. Ejemplo de patrones numéricos

Por otra parte, los patrones geométricos son aquellos que utilizan el espacio o las figuras geométricas sobre las cuales hay que hacer un tipo de razonamiento respecto a las propiedades de dichos patrones.

Por ejemplo: *¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono, expresada en términos del número de lados?*[7]

Si necesitamos saber cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono, tendremos que referir ese polígono al número de triángulos que lo forman y multiplicar por 180°, que es la suma de los ángulos interiores de cada triángulo. Lo que se puede representar de la siguiente manera:

$$(n-2)\times 180$$

Donde n es igual al número de lados del polígono.

Por ejemplo, para saber la suma de los ángulos interiores de un hexágono, al trazar sus diagonales se forman cuatro triángulos que al multiplicarlo por 180º, da como resultado 720º, esto es:

$$(6-2)\times 180$$

$$4\times 180 = 720$$

[7] Ejemplo tomado de Mason et al. (1985). Routs to/Roots of algebra

Y por último, los patrones icónicos, los cuales se privilegian en este trabajo, son aquellos que están dados por una serie de objetos como gráficos o dibujos, en los que se puede hacer uso de figuras geométricas como triángulos, rectángulos, cuadrados para seguir una secuencia que guarde una relación de semejanza con la figura dada. Esto quiere decir que a partir de una secuencia de figuras dadas se debe hacer un reconocimiento de los objetos representados según la relación de semejanza entre la forma escogida inicialmente, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

De acuerdo a la ilustración 2, se observa una secuencia palillos ordenados de forma triangular, de tal manera que a medida que aumenta una posición, aumenta un triángulo. ¿Cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición 4ª? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100? [8]

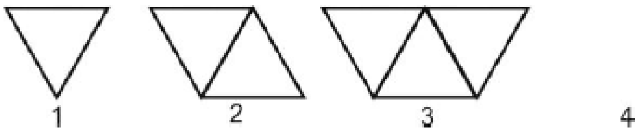


Ilustración 2. Ejemplo de Patrones pictóricos.

En la posición 4, de acuerdo a la secuencia presentada se necesitarían 9 palillos, y para formar el dibujo de la figura 50, se necesitarían 101 palillos y para la posición 100, se requieren 201 palillos. La expresión algebraica de dicha sucesión es:

$$2n + 1$$

Tal como se aprecia en la ilustración 2 se debe hacer una percepción visual de la semejanza sobre la forma que guardan dichas figuras para poder

[8] Ejemplo tomado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi. (2012). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. p 12.

determinar tanto el patrón gráfico, como numérico y así lograr generalizar este último.

2.3.3 Razonamiento algebraico

Tal como se aprecia en este trabajo, el centro de interés es dar cuenta del razonamiento algebraico aun cuando en la dimensión curricular presentada, se alude al pensamiento variacional, ante esto es importante resaltar que no se desconoce el pensamiento variacional sino que tanto este como el razonamiento algebraico se toman de manera articulada, por lo que es necesario caracterizarlos, describirlos y además establecer diferencias entre ellos.

De acuerdo con diferentes investigadores como Godino (citado por GA, 2006) es posible entender que:

> El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas concebidas como la ciencia de los patrones y el orden, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos centrales de las matemáticas. (p.18)

De modo semejante, Kaput (citado por GA, 2006) lo caracterizan de la siguiente manera:

> Por razonamiento algebraico, nos referimos al compromiso de los estudiantes en actos regulares de generalización acerca de los datos, las relaciones y las operaciones matemáticas, estableciendo sus generalizaciones a través de actos públicos de elaborar conjeturas y de argumentación, las cuales se expresan en formas cada vez crecientes de formalización. (p.19)

Como se puede evidenciar en ambas citas, los investigadores plantean que el centro del razonamiento algebraico son los procesos de generalización, puesto que el desarrollo del razonamiento algebraico implica promover dichos procesos, con el ánimo de que se estimule en los sujetos actividades como la justificación, la argumentación, el establecimiento de conjeturas, la caracterización de comportamientos, entre otras y que se logre llegar a mayores niveles de formalización.

Ahora el pensamiento variacional de acuerdo con el MEN (2006) se entiende como:

> (…) el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (p.66)

Una manera de promover situaciones de variación y cambio en la Educación Básica Primaria, puede ser a partir del estudio de los patrones, a través contextos de la vida cotidiana, tales como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. Igualmente, los fenómenos de variación y el cambio pueden ser abordados desde distintas actividades, procesos, conceptos, metodologías, entre otros, tales como el estudio de la derivada o de las funciones.

Si bien el razonamiento algebraico no desconoce los fenómenos de variación y cambio, presenta una manera particular de abordar tal estudio a partir de la generalización (entre patrones), es decir se considera aquí que el pensamiento variacional se entiende como una forma amplia de pensar matemáticamente y el razonamiento algebraico una manera de dar cuenta de dicho pensamiento.

De acuerdo con lo anterior se coincide con GA (2006) al indicar la relación entre el pensamiento variacional y el razonamiento algebraico.

> (…) En este sentido, aquí el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente, orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Por su parte, el razonamiento algebraico alude al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional.

En suma, es posible afirmar que el desarrollo del pensamiento variacional se da sobre lo que se entiende aquí por razonamiento algebraico, es decir por los procesos de generalización de patrones.

2.3.4 Razonamiento proporcional

Una mirada a la propuesta del MEN (1998) hace notar que no se caracteriza ahí el razonamiento proporcional, sin embargo, es posible inferir que se encuentra estrechamente relacionado con el pensamiento variacional, debido a la cuantificación de la variación a través de las cantidades y magnitudes y la relación entre estas últimas, en contextos que así lo amerite.

De este modo el cambio relativo de estas magnitudes o mejor aún, la covariación le da un especial significado a la proporcionalidad.

En este mismo sentido, autores como Lesh, Post y Behr (citado por Mochón, 2012) afirman que el razonamiento proporcional involucra un sentido de variación entre dos cantidades para comparar múltiples valores, de tal manera que es posible identificar la estrecha relación que guarda el estudio de la variación y el cambio con el estudio de la proporción. En relación con estas ideas GA (2006) reconocen también que una de las maneras de desarrollar en uno de sus inicios el razonamiento proporcional es a partir del estudio de covariaciones entre magnitudes que varían, tal como se reconoce a continuación:

> El razonamiento proporcional implica establecer relaciones entre relaciones (relaciones de segundo orden), y al involucrar la covariación, implica que dos o más variables están relacionadas de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las variables están correlacionadas, lo que hace posible que el razonamiento proporcional se constituya en la cúspide del desarrollo del pensamiento aritmético, y en la puerta de entrada al pensamiento algebraico. (p.81)

El estudio de las perspectivas de Holguín (2012) y Koellner y Lesh (2003) al caracterizar el razonamiento proporcional hace posible identificar que este es un tipo de pensamiento complejo que estudia el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes, implica la comprensión de conceptos de razón y proporción, y la capacidad de utilizar dichos conceptos apropiadamente para resolver y evaluar nuevas situaciones problema. Es necesario mencionar que no puede entenderse como una herramienta de pensamiento y resolución de problemas sino como una forma para que el estudiante pueda reconocer las relaciones existentes entre las magnitudes.

En relación con lo anterior, Koellner y Lesh (2003) proponen cinco fases por las cuales atraviesan los estudiantes durante el desarrollo del razonamiento proporcional. En la primera fase el estudiante centra su atención en la información relevante del problema; en la segunda se identifican las variables del problema, y su correlación de manera cualitativa; la tercera fase se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva, más que multiplicativa, utilizando reglas que permiten comparar, incrementar, decrecer, o hacer relaciones parte todo; la cuarta fase consiste en el reconocimiento de estructuras y relaciones que coordinan la variación de dos cantidades; y la última fase se fundamenta en la comprensión de la relación de proporcionalidad propiamente dicha a partir del establecimiento de la constante de proporcionalidad como una razón que relaciona cualquier par de valores correspondientes a cada uno de las cantidades que se comparan.

Es importante señalar que autores como Piaget e Inhelder (citado por Ruiz y Valdemoros, 2006) establecen dos tipos de pensamiento proporcional, el cualitativo y el cuantitativo, el primero de estos se caracteriza a través de categorías, como aumento o disminución, apoyándose en reconocimientos lingüísticos, considerando aspectos intuitivos y empíricos que brindan los sentidos y el segundo tipo de pensamiento como aquel que logra el estudiante cuando puede hacer uso de las razones y las proporciones para enfrentar problemas matemáticos .

En la secuencia didáctica propuesta en este trabajo se hace énfasis en el pensamiento proporcional cuantitativo, ya que se hace importante que el estudiante identifique las variaciones y covariaciones que guardan las sucesiones de patrones gráficos – icónicos involucradas en la secuencia, con el fin de que pueda avanzar en la abstracción de los procesos de generalización de dichos patrones, apuntando así al desarrollo del razonamiento algebraico, objetivo principal de este trabajo.

De acuerdo con lo presentado en este trabajo es posible observar como el razonamiento proporcional se desarrolla en relación con fenómenos de variación y cambio particularmente en el estudio de la covariación entre magnitudes y cantidades. Esto evidencia que a través del razonamiento proporcional se pueden modelar situaciones que involucran distintos niveles de la igualdad y de las variables, lo cual no excluye el trabajo con el reconocimiento de las regularidades en el proceso de generalización de patrones que son propias del razonamiento algebraico.

2.4 PERSPECTIVA SEMIÓTICA

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas la semiótica juega un papel fundamental, puesto que a partir de ella se puede dar sentido y significado a los diferentes signos emergentes en la actividad matemática, a través de la relación entre el individuo y el contexto cultural.

De acuerdo a esto, Radford (citado por Vergel, 2014) propone la teoría de la objetivación que se caracteriza, principalmente, por considerar que los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico - cultural, teniendo como base concebir el aprendizaje de estos objetos en la adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo, sin considerarse como una mera transmisión de contenidos conceptuales sino un esfuerzo por dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. Tal objetivación de conocimiento se da pues a través de los medios semióticos de objetivación, los cuales caracteriza Radford (2003, p. 41) como:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es importante señalar que para las actividades propuestas en la secuencia didáctica interesan las investigaciones realizadas por Radford (2003) y Vergel (2014) respecto a los signos, gestos, señales, deícticos, etc., que surgen en la actividad matemática respecto al estudio de los procesos de generalización de patrones, lo cual es central en el presente trabajo. En relación con esto último, Radford (2003) indica que hay dos tipos de generalizaciones: pre - simbólicas y las simbólicas, las cuales se examinan en términos de los medios semióticos de objetivación que los estudiantes utilizan en los procesos matemáticos de generalización.

La generalización pre - simbólico se divide a su vez en dos categorías, la generalización de hecho y la contextual. A continuación se presenta una descripción de cada una de ellas.

La generalización de hecho consiste en percibir las regularidades de las acciones en la forma de un esquema operativo que permanece fijo en un nivel concreto, evidenciándose cuando los sujetos centran su atención visual en cada una de los elementos de la secuencia por separado para intentar establecer algunas características comunes. Esta generalización se apoya de medios semióticos de objetivación tales como: la percepción, los gestos, las señas, palabras y dibujos que les permite avanzar en sus procesos de generalización.

La generalización contextual es la etapa donde los estudiantes escriben o cuestionan lo percibido y producen un discurso para explicar la regularidad del patrón. Esta generalización abarca una abstracción de los objetos específicos y cifras concretas involucrados en la regularidad, para así aplicarla a todos los términos de la secuencia. Se apoya de medios semióticos de objetivación tales como los términos lingüísticos genéricos y locativos que se refieren a objetos no presentes, como por ejemplo "la siguiente figura", "la figura anterior", "así sucesivamente" entre otros.

Y por último, en la generalización simbólica se tiene en cuenta las generalizaciones anteriores, donde los estudiantes deben expresar de manera estándar la regularidad del patrón, buscando una manera de establecer un vínculo simbólico con la figura dada, la siguiente y todos los que harían parte de la sucesión. Es así como Radford (2010) afirma que lo que anteriormente fue distinguido en las generalizaciones anteriores a través de gestos, lingüística y deícticos se distingue ahora a través de los signos y expresiones algebraicas.

Es importante resaltar que los tipos de generalización presentados tienen estrecha relación con las fases que caracterizan Mason et al (1985) en el proceso de generalización (ver, describir y registrar un patrón), debido a que los medios semióticos de objetivación que surgen en esos tipos de generalización se ubican dentro de las fases caracterizadas por estos investigadores, así, es posible afirmar que dentro de cada una de las fases de *ver, describir y registrar un patrón*, se vinculan medios semióticos de objetivación propios a cada una de ellas.

De este modo, la articulación que es posible establecer entre las fases y los tipos de generalización en relación con los medios semióticos de objetivación, dotan a las autoras de este trabajo de elementos teóricos importantes para enriquecer el análisis de las respuestas producidas por los estudiantes en cada una de las actividades que configuran la secuencia didáctica.

CAPÍTULO III: GENERALIZACIÓN DE PATRONES GRÁFICOS – ICÓNICOS

En este capítulo se presentan los aspectos relacionados con el diseño e implementación de la secuencia didáctica acerca de la generalización de patrones gráficos - icónicos, como, una propuesta para contribuir con el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria**.** De este modo se exponen la descripción de la secuencia didáctica, los propósitos por los cuales cada una de las actividades fueron diseñadas, la descripción de la metodología, la población objeto de estudio, y, finalmente, se presentan la sistematización de los resultados obtenidos de la implementación junto con los análisis de estos.

3.1 Sobre la secuencia didáctica

El objetivo principal de la secuencia didáctica es permitir que los estudiantes de quinto grado de la Educación Básica Primaria, a través de las situaciones propuestas, puedan explorar, reconocer fenómenos de variación y cambio, realizar conjeturas, describir generalizaciones, entre otros, con el fin de identificar patrones gráficos - icónicos.

Para esto, el diseño de la secuencia didáctica propuesta toma como referencia los aportes de Godino (citado por GA et al., 2006) y Berdnarz et al. (1996) los cuales afirman que el razonamiento algebraico puede ser desarrollado desde los primeros ciclos de escolaridad a partir de actividades que promuevan en los estudiantes la exploración, formulación de conjeturas y la generalización de relaciones matemáticas, entre otras.

Además de esto, se tienen en cuenta los aportes de Azcarate & Deulofeu (1990) los cuales son necesarios en el diseño de la secuencia en tanto se movilizan aspectos relacionados con la proporcionalidad directa como un modelo de función lineal, teniendo en cuenta, a su vez, la caracterización del razonamiento proporcional que se articula con el desarrollo del razonamiento algebraico y en general con el estudio de fenómenos de variación y cambio.

También, el diseño de la secuencia didáctica se nutre de los aportes de Mason et al. (1985) donde se reconocen las fases del proceso de generalización, así algunas preguntas apuntan a que el estudiante *vea* y *describa* las regularidades que se presentan en las distintas situaciones con el ánimo de que pueda llegar incluso, a registrarlas a través de distintos medios semióticos de objetivación que menciona Radford (2003).

3.1.1 Descripción general de la secuencia

La secuencia didáctica diseñada en el presente trabajo se configura a partir de tres situaciones, en los cuales giran alrededor de contextos cotidianos para los estudiantes en el sentido planteado por el MEN (1998, 2006). Cada una de estas situaciones ha sido diseñada con un número particular de actividades, y a su vez estas movilizan un número particular de consignas bajo unos propósitos previamente establecidos, de este modo la situación 1 se compone de 3 actividades, la situación 2 contiene dos actividades, y por último la situación 3 solo contiene 1 actividad.

En general lo que se busca en cada situación es que el estudiante pueda realizar conjeturas, argumentaciones sobre los gráficos - icónicos que se les presenta, predecir sucesos, identificar variaciones, etc., para que puedan identificar el patrón gráfico y numérico presente en dicha situación de tal modo que puedan incluso registrarlos haciendo uso de representaciones asequibles a ellos.

La secuencia didáctica está propuesta con el fin de poder analizar cómo los estudiantes reconocen las diferentes relaciones entre una serie de gráficos – icónicos, de tal forma que puedan reconocer generalizaciones, identificar el patrón y por último expresarlo. Con lo anterior se espera aportar elementos conceptuales para colaborar con el desarrollo del razonamiento algebraico, puesto que promueven en el estudiante habilidades que permiten obtener un conocimiento matemático significativo.

En la tabla 3, se recoge la información que sintetiza la manera como está configurada la secuencia didáctica en el trabajo.

SITUACIONES	ACTIVIDADES	NÚMERO DE PREGUNTAS O CONSIGNAS
Situación 1. Diseño de baldosas para la remodelación del cuarto de Juan	1. *Explorando el diseño de la baldosa.*	5
	2. *Relaciones entre cantidades en los diseños de baldosas.*	3
	3. *Reconociendo patrones en los diseños de las baldosas*	3
Situación 2. Construyendo marcos para fotos	1. *Identificando la cantidad de tapas para realizar los marcos de fotos.*	3
	2. *Construyendo estrategias para realizar marcos para fotos.*	4
Situación 3. Decoración de cumpleaños	1. *Construyendo estrategias para la decoración de bombas.*	5
Cantidad total	6	23

Tabla 3. Configuración de la secuencia didáctica

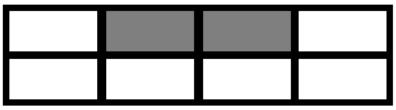
Según la tabla anterior, se puede observar que los nombres de las tres situaciones propuestas corresponden a los contextos procedentes de la vida diaria, debido a que son situaciones cercanas a los estudiantes. Además de esto, el nombre de cada actividad que configura determinada situación, ciertamente responde a los objetivos planteados para cada una de estas.

3.1.2 La secuencia didáctica

Situación 1. Diseño de baldosas para la remodelación del cuarto de Juan

Juan está pensando en remodelar el piso de su alcoba, para ello el constructor, le propone diferentes diseños de baldosas, las cuales están formadas por rectángulos blancos y grises, tal como se muestra a continuación.

Diseño de Baldosa 1



Diseño de Baldosa 2

Diseño de Baldosa 3

A partir de la situación anterior responde a las siguientes actividades:

Actividad 1: *Explorando el diseño de la baldosa*.

1. Observa la secuencia de diseños de baldosas presentados y describe algunas relaciones o regularidades que ves.

2. El constructor le quiere presentar a Juan el diseño de la baldosa 4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco y de color gris lleva la baldosa? Justifica tu respuesta y dibuja el diseño de la baldosa.

3. Si ahora el constructor desea presentarle a Juan el diseño de la baldosa 5. ¿De cuánto es la cantidad de rectángulos de color blanco y de color gris que hay en el diseño de esta baldosa? Explica cómo encontraste la cantidad de rectángulos de ambos colores.
4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color blanco en diseño en diseño?

5. ¿Cuántos rectángulos de color gris aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color gris en diseño en diseño?

Actividad 2: *Relaciones entre cantidades en los diseños de baldosas*

Juan ha decidido realizar una tabla en la cual se ubica algunas cantidades que él ha observado en las secuencias de baldosas. Ayúdale a Juan a Completar la tabla

Número del diseño de la baldosa	Cantidad de rectángulos de color gris	Cantidad de rectángulos de color blanco	Cantidad total de rectángulos en el diseño
1	1	5	6
5			14
	7		18
	11	15	
		24	

1. Explica como hiciste para completar la tabla, a partir de los datos dados.

2. De acuerdo con la tabla ¿qué relación tiene la cantidad de rectángulos de color gris y el número del diseño de la baldosa?

3. De acuerdo con la tabla ¿qué relación se puede observar entre la cantidad de rectángulos de color blanco y la cantidad de rectángulos de color gris? Explica tu respuesta

Actividad 3: *Reconociendo patrones en los diseños de las baldosas*

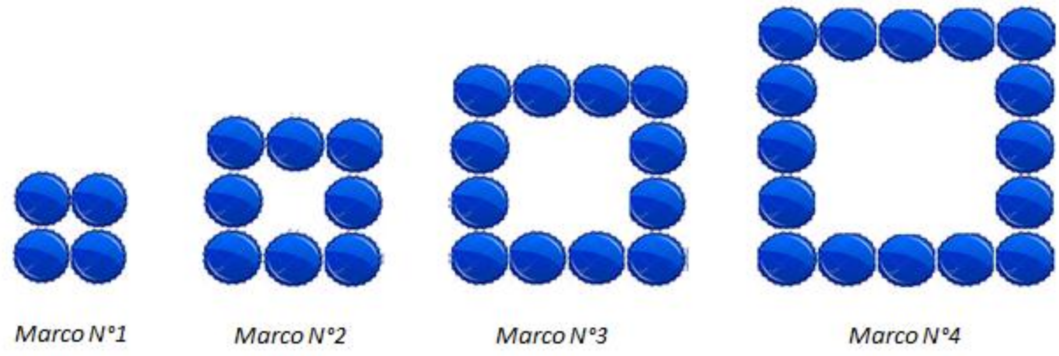
1. Juan desea hallar el número de rectángulos de color blanco en el diseño de la baldosa 50, explícale cómo hacerlo.

2. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de rectángulos de color blanco si se conoce la cantidad de rectángulos de color gris?

3. ¿Cómo se halla la cantidad de rectángulos (blancos y grises) de una baldosa si se conoce el número del diseño de esa baldosa? Explica tu respuesta.

Situación 2. Construyendo Marcos para fotos

Mónica decide realizar marcos para fotos de diferentes tamaños, para esto utiliza tapas de gaseosas y construyen los siguientes:



Actividad 1: *Identificando la cantidad de tapas para realizar los marcos de fotos*

1. Observa la secuencia que presentan los marcos de fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco número 5.

2. Mónica le quiere regalar a su mamá de cumpleaños el marco número 6 pero no sabe cuántas tapas necesita para construirlo. ¿Cuál es la cantidad de tapas que requiere Mónica para realizar dicho marco? Explica como obtuviste esta cantidad y dibuja el marco

3. ¿De cuánto es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica?

Actividad 2*: Construyendo estrategias para realizar marcos para fotos*

1. Mónica le quiere regalar a sus amigos marcos para fotos de diferentes tamaños. Para ello realiza una tabla en la cual se relaciona el número de marco y la cantidad de tapas necesarias para realizarlo. Ayúdale a completar la tabla:

Número (N°) de marco	Cantidad de tapas necesarias
1	
4	
7	
	44
	60
20	
83	

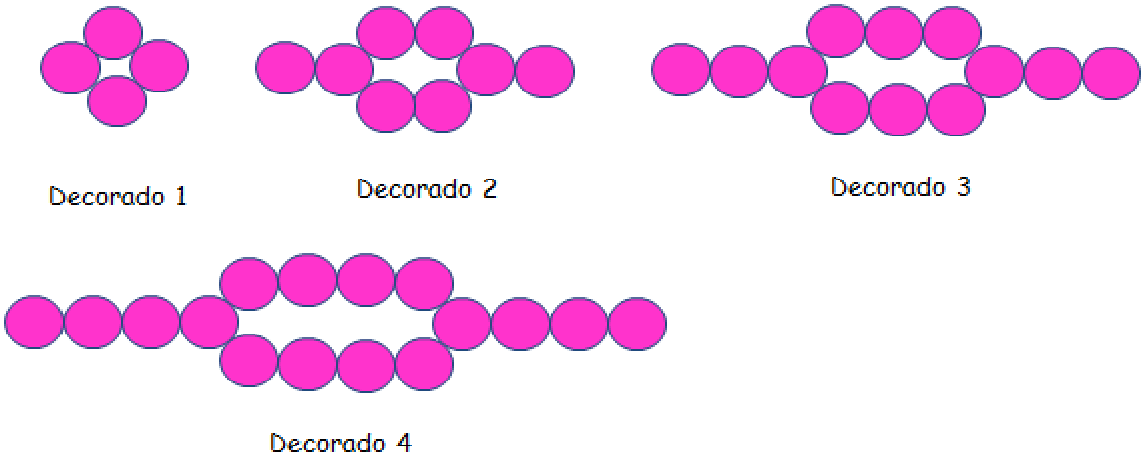
2. Explica como hiciste para completar la tabla.

3. Explícale a Mónica como hallaste el número de tapas del marco N° 83.

4. Inventa una estrategia que le permita a Mónica saber la cantidad de tapas que necesita para construir cualquier marco si se conoce el número de dicho marco.

Situación 3. Decoración de bombas para cumpleaños

Lorena cumple sus 15 años dentro de poco y junto a su mamá están planeando los preparativos la fiesta, uno de estos son los distintos decorados de bombas que van a realizar, los cuales se muestran a continuación:



A partir de la situación anterior, responde la siguiente actividad:

Actividad 1: Construyendo estrategias para la decoración de bombas

1) Ximena, una amiga de Lorena que asistirá a la fiesta, asegura que para el decorado número 5 se necesitan 18 bombas. Indica si la afirmación es cierta o no. Justifica tu respuesta.

2) Digan cuántas bombas necesitan Lorena y su mamá para realizar el decorado número 6. Explique cómo obtuvieron la respuesta y dibuja el decorado de la bomba.

3) Describe detalladamente cómo realizar los decorados de bombas, como si lo hicieran para un compañero del salón de clase que no está viendo las figuras.

4) Si Lorena y su mamá van a realizar el decorado de bombas 20, indica cuántas bombas necesitan para hacerlo. Justifiquen su respuesta.

5) Lorena y su mamá quieren saber cuántas bombas necesitarían para realizar cualquier decorado. Inventa una estrategia que le permita a ellas saber la cantidad de bombas necesarias si conocen el número del decorado.

3.1.3 Análisis de la secuencia didáctica: justificación y propósitos de las actividades

Es necesario señalar que la situación 1 por ser la primera tiene más cantidad de actividades, consignas y preguntas que la situación 2 y 3, debido a que se busca familiarizar a los estudiantes con el tipo de preguntas promoviendo de este modo un trabajo más orientado que les permita reconocer las regularidades e identificar el patrón que guarda esos diseños de baldosas. Por lo cual es posible afirmar que una diferencia entre las situaciones es que la primera es, ciertamente más dirigida que las dos últimas. En relación con estas últimas situaciones el número de preguntas o consignas se disminuye para darles oportunidad a los estudiantes que tengan mayor libertad de exploración y formulación de estrategias, dando lugar así a la emergencia de distintos medios semióticos de objetivación.

A continuación se presenta los propósitos con los que se realizaron las preguntas y consignas de cada situación.

Análisis de la situación 1

- *Actividad 1*

Esta actividad tiene como propósito principal que los estudiantes exploren los diseños de baldosas presentados de tal manera que puedan identificar algunas regularidades entre los diferentes diseños de baldosas presentados en la sucesión, para lo cual el proceso de observación tanto global como local de la secuencia de gráficos se hace determinante.

Específicamente la pregunta número 1 de esta actividad busca que los estudiantes puedan identifiquen variaciones y regularidades entre los diseños de baldosas, como por ejemplo, que el número de rectángulos de color blanco y gris aumenta de diseño en diseño, que el número de rectángulos de color blanco es mayor que el número de rectángulos de color gris en cada diseño, que la cantidad de rectángulos blancos y grises aumenta de 1 en 1 respecto al diseño anterior. De este modo se espera que los estudiantes no solamente realicen una percepción local o aislada de cada uno de los diseños, sino que pueda conectarlos y hacer inferencias.

Las preguntas 2 y 3 tienen como propósito que los estudiantes identifiquen la iconicidad de los diseños de baldosas presentados, para que así logren graficar los diseños inmediatamente y reconozcan los siguientes la manera cómo varia la cantidad de rectángulos de color blanco y gris de diseño en diseño. En otras palabras se espera que los estudiantes logren "capturar" el patrón gráfico que presenta la sucesión de diseños de baldosas.

El propósito de las preguntas 4 y 5 es que los estudiantes identifiquen e indiquen cómo es el aumento de los rectángulos tanto de color blanco como de color gris de diseño en diseño, por lo cual se espera que estas dos preguntas permitan a los estudiantes reconocer que el aumento de baldosas de color blanco y gris es de uno por cada diseño.

- A*ctividad 2.*

El propósito general de esta actividad es que los estudiantes reconozcan las relaciones entre las variaciones que se presentan en las sucesiones de los diseños de las baldosas. Tales relaciones van desde el número del diseño de la baldosa, la cantidad de rectángulos de color gris y blanco y la cantidad total de rectángulos en el diseño.

Específicamente de la pregunta 2 se espera que los estudiantes identifiquen e indiquen que la relación entre la cantidad de rectángulos de color gris y el número del diseño de la baldosa es la misma, es decir una relación uno a uno. Lo anterior resalta la relación directamente proporcional que guardan estas dos variaciones.

De la pregunta 3 se espera que los estudiantes reconozcan la relación de dependencia que se presenta entre la cantidad de rectángulos de color blanco y gris. De este modo los estudiantes deberían identificar que la cantidad de rectángulos de color blanco excede en 4 a los de color gris. Lo anterior pone de manifiesto la relación directamente proporcional que hay entre la cantidad de rectángulos de color blanco y gris.

Es importante resaltar que las preguntas 2 y 3 son importantes para lograr identificar la cantidad total de rectángulos en cualquier diseño de baldosa, es decir, para “capturar” un patrón importante en los diseños, puesto que esta cantidad parte de reconocer las relaciones que hay entre el número de diseño de la baldosa y la cantidad de rectángulos de color gris, y a su vez con la cantidad de rectángulos de color blanco.

Actividad 3.

Esta actividad busca que los estudiantes logren identificar el patrón que se presenta en los diseño de baldosas, de tal manera que puedan expresar la cantidad de rectángulos que hay de color blanco y gris, y por tanto los totales, en cualquier diseño propuesto.

En la pregunta 1 se espera que los estudiantes reconozcan el patrón que presentan los rectángulos de color blanco en los diseño de baldosas, de tal modo que esto les permita saber el número de rectángulos de color blanco en el número del diseño de la baldosa 50 sin necesidad de que el construya los 49 diseños anteriores.

En la pregunta 2 se espera que los estudiantes logren establecer la relación de dependencia que guardan la cantidad de rectángulos de color blanco y gris, esto es, dada la cantidad de rectángulos de color gris es posible determinar la cantidad de rectángulos de color blanco si se aumenta 4 más a los primeros.

En relación con la pregunta 3 se espera que, a partir de todas las preguntas anteriores los estudiantes indiquen el número total de rectángulos para cualquier diseño de baldosa sin necesidad de recurrir a su construcción gráfica, lo cual implicaría también graficar todos los diseños de baldosas anteriores, en otras palabras se espera que el estudiante capture el patrón de los diseños de las baldosas presentados.

Análisis de la situación 2

- *Actividad 1.*

Con esta actividad se pretende que los estudiantes reconozcan las variaciones que se presentan en los marcos para fotos dados y, además, la iconicidad que guarda el diseño de dichos marcos, de tal manera que estos elementos les permitan a los estudiantes construir los diseños de marcos para fotos siguientes a los presentados. Es importante resaltar que para lograr lo anterior el proceso de observación tanto global como local de los marcos para fotos se convierte en un elemento fundamental para el desarrollo de la actividad.

En relación con las consignas 1 y 2 se pretende que los estudiantes identifiquen cómo es la variación de la cantidad de tapas de los marcos de fotografía de diseño en diseño, es decir, que reconozcan que el aumento de tapas entre un diseño y su sucesor es de 4 tapas. Además de esto, es necesario que también se logre dar cuenta de la forma que conservan los diseños y su relación entre sí, de tal manera que esto les permita realizar la construcción gráfica de los marcos de fotografía solicitados en las consignas.

La pregunta 3 tiene como objetivo que los estudiantes hagan explícito la variación que presentan la cantidad de tapas de marco en marco.

- *Actividad 2.*

Las preguntas propuestas en esta actividad se realizan con el fin de que los estudiantes establezcan la relación entre el número del marco de fotografía y la cantidad de tapas necesarias para realizarlo. Lo anterior significa que se espera que los estudiantes "capturen" el patrón numérico que presenta la sucesión de marcos para fotos, es decir, que identifiquen que la cantidad de tapas necesarias para realizar cada marco es 4 veces el número que le corresponde al marco en la sucesión.

Para lo anterior se han planteado en la consignas 1 y 2 que buscan por medio de una tabla que los estudiantes logren relacionar la cantidad de tapas que se necesitan para un determinado número de marco.

El propósito de la pregunta 3 es que los estudiantes, una vez identificado el patrón numérico de la sucesión de marcos para fotos, hallen el número de tapas del marco N° 83, para lo cual se hace necesario multiplicar este valor por 4. Lo anterior permite reconocer que la covariación que se presenta entre las cantidades mencionadas es directamente proporcional.

Finalmente en la consigna 4 se espera que los estudiantes hagan explícito el patrón numérico que presenta la sucesión de marcos para fotos a partir de representaciones asequibles a ellos.

Análisis de la situación 3

- *Actividad 1.*

Con esta actividad, única en la situación, se busca de manera general que los estudiantes puedan percibir y generalizar el patrón que presentan los decorados de bombas a partir de diferentes estrategias accesibles a ellos, para lo cual es necesario que reconozcan las regularidades que presentan estos decorados y la covariación que existe entre la cantidad de bombas necesarias para realizar un decorado y el número que le corresponde a este en la sucesión.

De este modo, con las consignas número 1 y 2 se pretende que los estudiantes reconozcan las regularidades presentes en la sucesión de decorados de bombas, esto es, que el número del decorado es igual a la cantidad de bombas que hay en cada lado (izquierdo, derecho, arriba, abajo) del mismo; que la cantidad de bombas necesarias para realizar cada decorado varia de 4 en 4 de decorado en decorado; y, además, que cada uno de estos decorados conserva un patrón gráfico, es decir, que, conserve una relación icónica. Lo anterior debe permitir que los estudiantes logren indicar que la afirmación dada en la consigna 1 es falsa, puesto que para el decorado número 5 se necesitan 20 bombas y no 18 como ahí se indica, y también que logren realizar el decorado número 6 que se pide en la consigna 2.

El propósito de la consigna 3 es que los estudiantes, a través del lenguaje natural, puedan describir las características que presenta la sucesión de decorados, por ejemplo, que el decorado 3 tiene 3 bombas arriba, abajo, a la izquierda y derecha. En general, que puedan reconocer que el número del decorado es igual a la cantidad de bombas que lleva en cada uno de sus lados.

Esta consigna se construyó con el fin de evidenciar, en otros aspectos, lo mencionado por Mason et al. (1985) en relación a la segunda fase del proceso de generalización - *describir un patrón*, ya que se espera que, de acuerdo con este autor, los estudiantes puedan reconocer e indicar las regularidades que guarda la sucesión presentada, lo que los acerca a identificar el patrón que presenta dicha sucesión.

En relación con la consigna 4 se espera que los estudiantes luego de haber identificado la relación entre el número de decorado y la cantidad de bombas necesarias para hacerlo, indiquen cuantas bombas se necesita para realizar el decorado 20. De este modo, se esperaría que los estudiantes no hagan uso de gráficos para hallar la cantidad de bombas del decorado solicitado, sino que lo haga indicando que para obtener la cantidad de bombas del decorado 20 se debe multiplicar por 4 esta cantidad; lo que también podría hacerse estableciendo composiciones aditivas de la misma cantidad ($20 + 20 + 20 + 20 = 80$) evocando a la forma del gráfico.

Ahora bien, en la consigna 5 se pretende que los estudiantes expliciten la cantidad de bombas necesarias para cualquier número de decorado, logrando así un nivel de generalización mayor. Lo cual implica que los estudiantes identifiquen la covariación entre las cantidades involucradas.

3.2 METODOLOGÍA

El presente trabajo se inscribió metodológicamente bajo el enfoque cualitativo, puesto que de acuerdo con los objetivos planteados se tomó un grupo particular de estudiantes con los cuales se implementó una secuencia didáctica a propósito del desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos, para analizar e interpretar los resultados obtenidos.

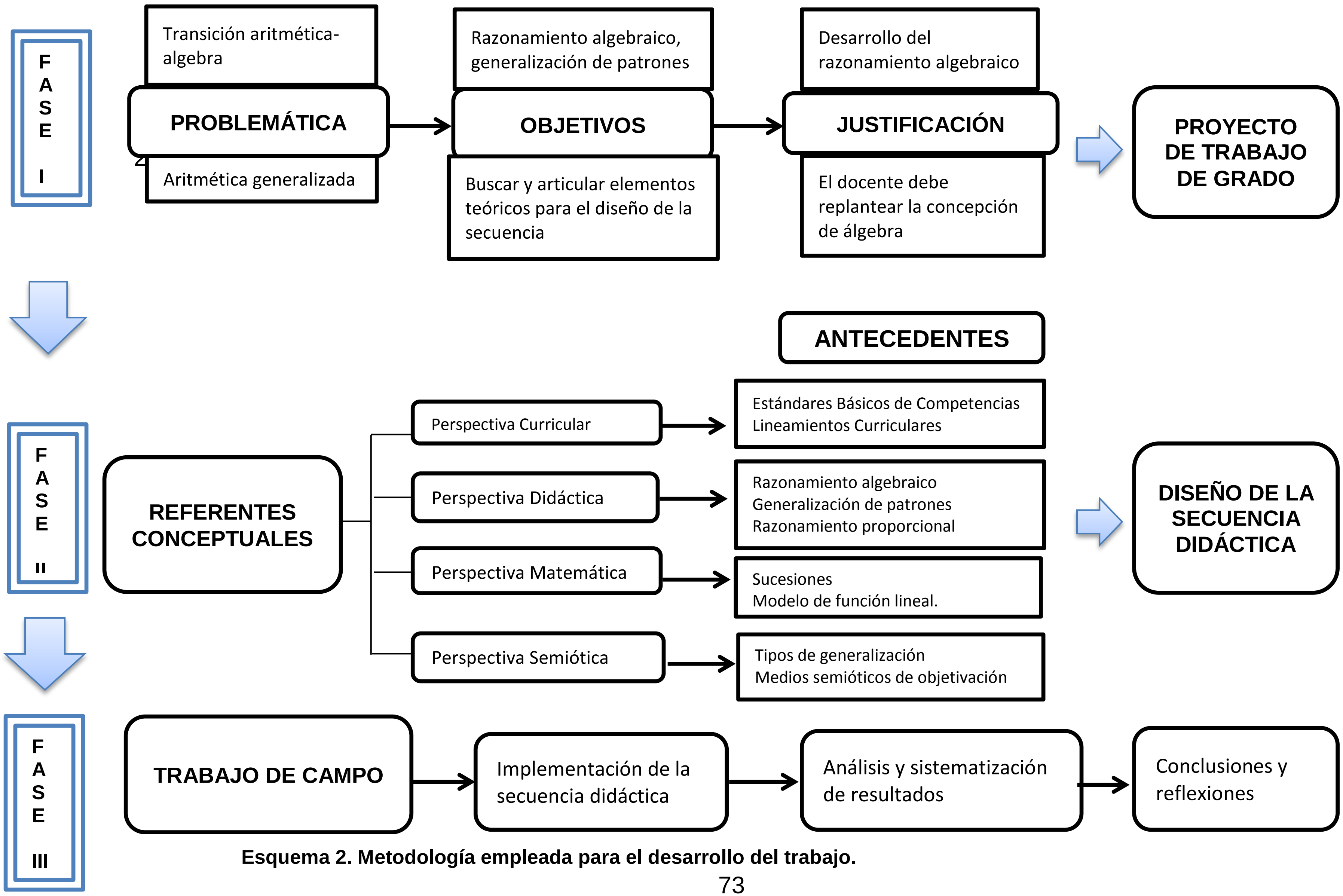
De acuerdo a esto el presente trabajo se estructura en las siguientes fases:

Fase 1: Se caracteriza la problemática en la cual se ubica el trabajo, teniendo en cuenta distintas investigaciones sobre algunos problemas que surgen en torno a los procesos de enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela, para luego plantear la pregunta de investigación que marca la pauta a seguir en el trabajo, además de los objetivos y la justificación del mismo.

Fase 2: corresponde a la búsqueda de elementos teóricos para el diseño de una secuencia didáctica que potencie el razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones en escenarios gráficos pictóricos, y para el análisis de los resultados obtenidos al implementarla. Dichos elementos teóricos se ubican en cuatro perspectivas: curricular, matemática, didáctica y semiótica.

Fase 3: Esta fase consiste en el trabajo de campo en el que se implementa la secuencia didáctica diseñada con un grupo particular de estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria, y posteriormente se realiza el análisis de los resultados obtenidos, generando así, conclusiones y reflexiones de acuerdo con los objetivos y los referentes teóricos propuestos.

A continuación se presenta el esquema 2, en donde se muestra de manera sintética las distintas fases que componen la metodología descrita.



Esquema 2. Metodología empleada para el desarrollo del trabajo.

3.2.1 La metodología de implementación

Población objeto de estudio

La secuencia didáctica propuesta en este trabajo se aplicó a un grupo de 42 estudiantes de grado quinto de la Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría Colegio Compartir, de Santiago de Cali. Estos estudiantes se ubican en la jornada de la tarde, la cual tiene una intensidad horaria de cinco horas diarias.

El grupo está conformado por 19 niñas y 23 niños, los cuales se encuentran entre los 10 a 11 años de edad. De estos, tres estudiantes son repitentes y dos son nuevos en la Institución. En relación con el rendimiento académico de este grupo, la mayoría de los profesores convergen en afirmar que es un buen grupo.

La intensidad horaria de estudio que reciben los estudiantes de esta institución es de 25 horas semanales, de las cuales 4 horas se dedican al área de matemáticas.

Implementación de la secuencia: descripción general

Para la implementación de la secuencia didáctica diseñada se organizaron a los estudiantes en parejas con el fin de que ellos socializaran las preguntas e intercambiaran sus ideas y conjeturas, y lograran acuerdos en relación con las respuestas a las preguntas planteadas. En cuanto al tiempo, la situación 1 se realizó el día miércoles 17 de junio del 2014, iniciando a las 2:30 pm y finalizando a las 4:00 pm. Las situaciones 2 y 3 se realizaron el día jueves 18 de Junio de 2014 para lo cual se emplearon dos horas, desde las 4:00 pm hasta las 6:00 pm.

También es importante mencionar que para la implementación de la situación 1 se contó con la asistencia de 42 estudiantes, por lo cual se conformaron 21 parejas de trabajo, mientras que para las situaciones 2 y 3 tan solo asistieron 26 estudiantes, lo cual obligó a que algunas parejas de estudiantes se redistribuyeran, obteniendo así 13 parejas de trabajo en la segunda sesión. Lo anterior es importante tenerlo en cuenta en virtud del análisis de los resultados que se presentan en el siguiente apartado, puesto que la frecuencia absoluta y relativa se altera de manera notable de la primera situación a la segunda y tercera.

Antes de iniciar cada situación se hizo una lectura general de las preguntas junto con los estudiantes, con el propósito de presentarlas y de despejar dudas referentes a la redacción de las mismas. Cabe mencionar que las autoras de este trabajo tuvieron constante relación con las parejas de estudiantes para aclarar las dudas que surgían respecto a la comprensión de las preguntas cuando desarrollaban las distintas situaciones, no obstante, estas intervenciones en ningún momento influyeron en sus respuestas.

3.3 Resultados y análisis de los resultados

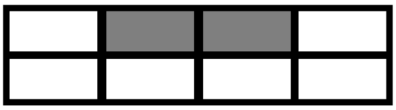
En este apartado se presentan las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas y consignas que conforman las actividades de las tres situaciones de la secuencia, para ello dichas respuestas se han agrupado en categorías o tipos de acuerdo con la similitud que presentan. Además de esto, se presentan los respectivos análisis de las mismas a la luz de los elementos conceptuales expuestos en el capítulo anterior, las cuales son tomadas principalmente de dos tipos de instrumentos, las respuestas que dan los estudiantes en físico (algunas de las cuales se colocan de manera completa en los anexos 6 al 8) y un registro fílmico que se realizó a lo largo de la implementación de la secuencia en las tres situaciones, los cuales permitieron construir protocolos de observación (que se encuentran de manera completa en los anexos 1 al 5), estos registros fílmicos permitieron tomar apartados de protocolos que se colocan en algunos de los análisis para realizar argumentos de algunas ideas.

3.3.1 Resultados y análisis de los resultados de la situación 1

Situación 1. Diseño de baldosas para la remodelación del cuarto de Juan

Juan está pensando en remodelar el piso de su alcoba, para ello el constructor, le propone diferentes diseños de baldosas, las cuales están formadas por rectángulos blancos y grises, tal como se muestra a continuación.

Diseño de Baldosa 1



Diseño de Baldosa 2

Diseño de Baldosa 3

Pregunta 1: Observa la secuencia de diseños de baldosas presentados y describe algunas relaciones o regularidades que ves.		
Tipos de respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Parejas que indican la cantidad rectángulos totales que hay en cada uno de los diseños presentados.	1	5%
Parejas que mencionan la cantidad de rectángulos totales y de color gris que hay en cada uno de los diseños presentados.	4	19%
Parejas que indican la cantidad de rectángulos totales, de color gris y blanco que hay en cada uno de los diseños presentados.	2	9%
Parejas que indican la cantidad de rectángulos de color gris que hay en cada diseño presentado.	1	5%
Parejas que indican la cantidad de rectángulos de color gris y blanco que hay en cada diseño presentado	4	19%

Parejas que indican la cantidad de rectángulos totales que hay en el diseño de baldosa 1	1	5%
Parejas que reconocen la cantidad de rectángulos de color gris y blanco del diseño de baldosa 1.	2	9%
Parejas que indican que por cada diseño se aumenta dos rectángulos y mencionan la cantidad total de cada diseño presentado.	1	5%
Parejas que indican que la cantidad de rectángulos totales aumenta de dos en dos y la cantidad de rectángulos de color gris de uno en uno.	1	5%
Parejas que indican que por cada diseño de baldosa presentada los rectángulos de color gris aumentan de un en uno.	2	9%
Parejas que reconocen que el aumento de rectángulos de color gris y blanco es de uno en uno de diseño en diseño presentado.	1	5%
Parejas que indican que las baldosas 2 y 3 tienen más rectángulos que la baldosa 1, por lo cual es de menor tamaño que las primeros.	1	5%

Tabla 4. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 1

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla 4, es necesario indicar que la mayoría de las relaciones establecidas por las parejas de estudiantes son de forma cuantitativa, a excepción de una pareja (5%) que da cuenta de una característica cualitativa al mencionar que los diseños de baldosas 2 y 3 tienen más rectángulos que la baldosa 1, por lo cual es de menor tamaño que los primeros, es decir centran más su atención en el tamaño de las figuras que en la cantidad de elementos que la componen.

Según lo anterior, es posible decir que la mayoría de las parejas (71%) describen ciertas características de cada uno de los diseños que se presentan, ya sea la indicando la cantidad de rectángulos totales; de color blanco y/o gris., sin lograr establecer alguna relación entre estos, en otras palabras la aprehensión visual de estos estudiantes se fija sobre cada una de las baldosas de manera aislada. Por el contrario, solo 6 parejas de estudiantes lograron describir variaciones presentes en la sucesión de diseños de baldosas a partir de sus procesos de observación (Mason et al., 1985) identificando así, algunas regularidades que presentan la cantidad de rectángulos de color blanco, gris y totales de los diseños. Cabe resaltar que en las respuestas obtenidas, las parejas de estudiantes reconocen la cantidad de rectángulos de color gris más que las otras cantidades, quizá debido a que en los diseños de baldosas este color sobresale haciéndolos más fáciles de percibir. Una de las variaciones expuestas por las parejas de estudiantes se puede evidenciar en la siguiente ilustración.

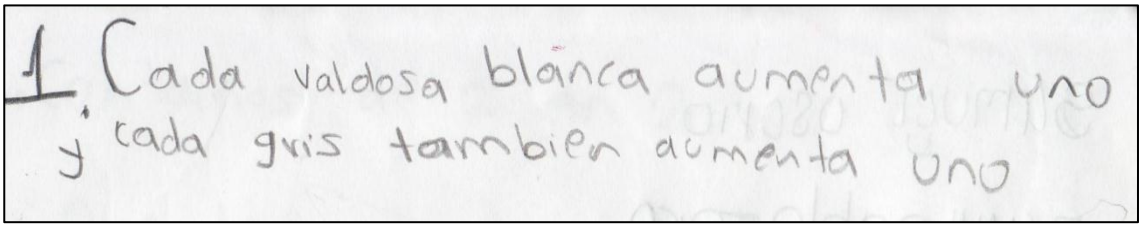

1. Cada valdosa blanca aumenta uno y cada gris tambien aumenta uno

Ilustración 3. Pregunta 1, actividad 1, situación 1.

Respecto a la ilustración 3, se puede observar que esta pareja de estudiantes en particular reconocen las variaciones al indicar que hay un aumento de uno en uno tanto de los rectángulos de color gris como de color blanco.

Pregunta 2. El constructor le quiere presentar a Juan el diseño de la baldosa 4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco y de color gris lleva la baldosa? Justifica tu respuesta y dibuja el diseño de la baldosa.			
Tipos de respuestas	**Justificación**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que indican la cantidad de rectángulos de color blanco y gris que conforma la baldosa, y la dibujan correctamente.	Justifican que los diseños 1, 2 y 3 tienen 1, 2 y 3 rectángulos de color gris, respectivamente.	1	5%
	Explican que por cada diseño se aumenta un rectángulo de color gris y uno blanco.	4	19%

	No justifican	9	43%
Parejas que realizan correctamente la baldosa 4 mencionando solo la cantidad de rectángulos de color gris que hay en ella.	Reconocen que en cada diseño de baldosa se aumentan dos rectángulos.	1	5%
Parejas que dibujan correctamente la baldosa 4, sin indicar la cantidad de rectángulos de color gris y blanco que hay en ella.	Responden que en el diseño 3 hay 3 rectángulos de color gris por lo que en el diseño siguiente debe haber 4.	2	9%
	No justifican	3	14%
Parejas que dibujan incorrectamente el diseño de la baldosa 4 pues no conservan su iconicidad (patrón gráfico), aun cuando indican la cantidad de rectángulos de color blanco y gris que hay en ella es correcta.	Escriben que tienen en cuenta los rectángulos de color blanco y gris del diseño anterior.	1	5%

Tabla 5. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 1

Según los resultados expuestos en la tabla 5, el 95% de las parejas de estudiantes dibujaron correctamente el diseño de baldosa 4 manteniendo la iconicidad de los diseños de baldosas presentados en la sucesión. Lo anterior permite afirmar que reconocieron las regularidades gráficas y cuantitativas de la cantidad de rectángulos de color blanco y gris de los diseños de baldosas presentados, en otras palabras, identifican el patrón grafico que presentan los diseños. No obstante, se observa que el 57% (12 de 21), a pesar de haber hecho el diseño de baldosa 4 correctamente no justifica cómo hizo para hallar la cantidad de rectángulos de dicho diseño, sin embargo es posible indicar que al realizarlo correctamente, logran reconocer el patrón gráfico (la iconicidad) que presentan los diseños de baldosas.

Respecto a la pareja de estudiantes que realizó incorrectamente el diseño de la baldosa 4, es posible establecer que no lograron “capturar” el patrón gráfico, sin embargo, es importante resaltar que sí reconocen la cantidad de rectángulos de color blanco y gris que hay en el diseño de la baldosa anterior al solicitado, tal como se evidencia en la ilustración 4.

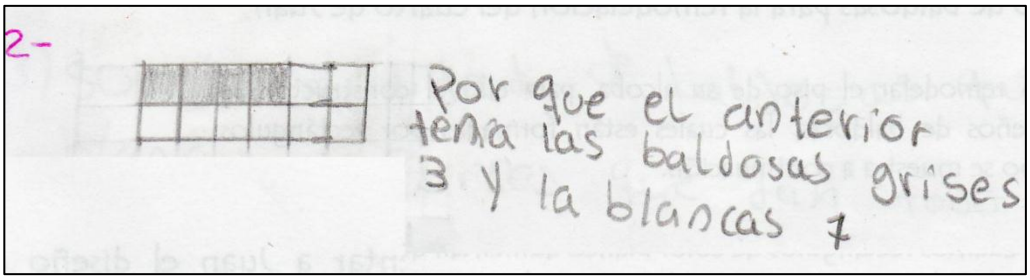


Ilustración 4. Pregunta 2, actividad 1, situación 1.

La anterior ilustración pone de manifiesto que esta pareja de estudiantes, tal y como se indicó, no logra reconocer el patrón icónico presente en los diseños de baldosas, en tanto no identifican, por ejemplo, que cada lado (derecho e izquierdo) del primer y último rectángulo de color gris debe quedar solo un rectángulo de color blanco, lo que hace posible indicar que estos estudiantes realicen el diseñó solicitado sin seguir un patrón gráfico. Además de lo anterior, la ilustración también permite evidenciar que estos estudiantes reconocen las cantidades de rectángulos de color gris y blanco en un diseño, se pueden expresar u obtener en función de lo que hay en los diseños anteriores.

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 3. Si ahora el constructor desea presentarle a Juan el diseño de la baldosa 5. ¿De cuánto es la cantidad de rectángulos de color blanco y de color gris que hay en el diseño de esta baldosa? Explica cómo encontraste la cantidad de rectángulos de ambos colores.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Parejas que dibujan correctamente la baldosa 5 e indican la cantidad de rectángulos de color blanco y gris que la conforman.</td><td>Reconocen que a partir de los diseños anteriores es posible construir los siguientes diseños de baldosas.</td><td>2</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>Afirman que por cada diseño de baldosa se aumenta un rectángulo de color blanco y gris.</td><td>4</td><td>19%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>11</td><td>52%</td></tr>
<tr><td>Parejas que solo dibujan correctamente la baldosa 5.</td><td>No justifican.</td><td>3</td><td>14%</td></tr>
<tr><td>Parejas que dibujan incorrectamente la baldosa 5, pues no conservan su iconicidad, ni la cantidad de rectángulos de color gris y blanco que debería haber.</td><td>No justifican.</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
</table>

Tabla 6. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 1

Según los resultados expuestos en la tabla 6, se evidencia que el 95% de las parejas de estudiantes no presentaron dificultad para mantener la iconicidad del diseño de la baldosa 5, pero siguen presentando dificultades en el momento de registrar la justificación de los procedimientos utilizados para realizar dicho diseño.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las preguntas 2 y 3, es importante resaltar que la gran mayoría de estudiantes acceden a la primera fase de generalización que plantea Mason et al. (1985), es decir, la observación del patrón, lo cual es fundamental para el reconocimiento del patrón gráfico. Además los estudiantes presentan un tipo de *generalización de hecho* (Radford, 2003), debido a que reconocen las regularidades tanto gráficas como numéricas presentes en la sucesión de diseños de baldosas pero para diseños particulares. Lo anterior se refleja en el siguiente diálogo entre la profesora y una pareja en particular de estudiantes en donde se evidencia que a partir de la observación de cada figura de la secuencia puede establecer la regularidad que presentan los rectángulos de color blanco y gris en cada diseño.

L1. **Estudiante A:** *Depende de las otras, a ver cuánto cada una.*
L2. **Entrevistadora 1:** *Haber, muéstreme, explíqueme que yo no sé cómo hacerlo.*
L3. **Estudiante A:** *Que cuente estas* [señala con su mano la secuencia, ver ilustración 5].
L4. **Entrevistadora 1:** *¿Qué cuento?*
L5. **Estudiante A:** *Y como cada una aumenta dos, una gris y una blanca, entonces así hicimos para saberlo.*
L6. **Entrevistadora 1:** *¡Ah!, osea que cuando yo sigo ¿qué pasa?, ¿aquí me aumentarían dos?* [Señala con su mano la secuencia, ver ilustración 5].
L7. **Estudiante A:** *Dos, una gris y una blanca.*
L8. **Estudiante B:** *Y en la 5, otra gris y otra blanca.*

Ilustración 5. Medios semióticos de objetivación para explicar lo argumentado en la L3 y L5. Pregunta 3, actividad 1, situación 1.

Obsérvese como el discurso del estudiante A revela explícitamente en la línea 5 que "Y como cada una aumenta dos, una gris y una blanca, entonces así hicimos para saberlo" lo cual claramente es una manifestación del reconocimiento de la variación que se presenta de rectángulos de color gris y blanco en cada uno de los diseños. También se puede observar en la ilustración 5, que este estudiante en particular utilizó la percepción visual y los deícticos como medios semióticos de objetivación para explicar la manera en la que se había dado cuenta de la variación de los rectángulos de color blanco y gris en la sucesión de diseños de baldosas.

Pregunta 4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color blanco en diseño en diseño?		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que mencionan de forma general que el aumento de los rectángulos de color blanco es de uno en uno de diseño en diseño.	9	43%
Parejas que reconocen que indican del diseño de la baldosa 1 a la 2 hay un rectángulo y la 2 a la 3 también, pero no lo hace de manera general.	3	14%
Parejas que establecen que por cada diseño de baldosa presentado aumentan dos rectángulos de color blanco.	1	5%
Parejas que suman la cantidad de rectángulos de color blanco de los tres diseños presentados.	5	24%
Parejas que responden incorrectamente la pregunta.	2	9%
Parejas que no responden la pregunta.	1	5%

Tabla 7. Tipificación pregunta 4, actividad 1, situación 1.

Considerando los resultados expuestos en la tabla 7, se puede mencionar que un poco menos de la mitad de las parejas de estudiantes reconocen las variaciones de los rectángulos de color blanco en los diseños de baldosas presentados, indicando de forma general tal variación para cualquier diseño de baldosa, tal y como se muestra a manera de ejemplo en la ilustración 8.

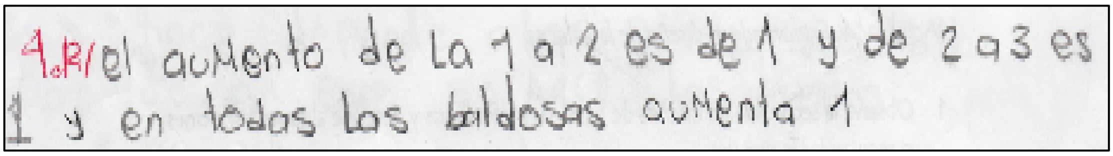

4.R/ el auMento de La 1 a 2 es de 1 y de 2 a 3 es 1 y en todos los baldosas auMenta 1

Ilustración 6. Pregunta 4, actividad 1, situación 1.

Se puede evidenciar en la anterior ilustración que esta pareja en particular logra dar cuenta de un mayor nivel de generalidad al mencionar "todas las baldosas".

Por otro lado, solo una pareja identificó un aumento de dos en dos respecto a los rectángulos de color blanco en cada diseño, quizá y esto se deba a que pudieron haber confundido estos rectángulos con la cantidad de rectángulos totales que si varían de dos en cada diseño de baldosa.

De acuerdo al 24% de las parejas que sumaron la cantidad de rectángulos de color blanco de los tres diseños presentados se observa que tuvieron inconvenientes en el momento de establecer una variación respecto a los rectángulos de color blanco o de entender lo que la consigna solicita, puesto que sumaron la cantidad de rectángulos de color blanco de los tres diseños mostrados.

Pregunta 5. ¿Cuántos rectángulos de color gris aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color gris en diseño en diseño?		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que identifican de forma general, que el aumento de los rectángulos de color gris es de uno en uno de diseño en diseño.	9	43%
Parejas que reconocen solo el aumento de un rectángulo gris respecto de la baldosa 1 a la 2 y la 2 a la 3.	4	19%
Parejas que suman la cantidad de rectángulos de color gris de los tres diseños presentados.	3	14%
Parejas que responden incorrectamente la pregunta	2	9%
Parejas que no responden la pregunta.	3	14%

Tabla 8. Tipificación pregunta 5, actividad 1, situación 1.

En relación con los resultados de la tabla 8, se puede apreciar que el 43% de las parejas de estudiantes (9 de 21) logran identificar el aumento general de un rectángulo de color gris en cada diseño de baldosa, el 19% (4 de 21) solamente indican el aumento entre los diseños de baldosas 1 a la 2 y de 2 a la 3.

Por otro lado, el 14% de las parejas (3 de 21) realizan la suma de los rectángulos de color gris de los tres diseños presentados, el 9% de las parejas (2 de 21) responde la pregunta incorrectamente, siendo las dos mismas parejas que lo hacen de igual forma en la pregunta anterior. Finalmente el 14% no responde la pregunta, observando un aumento en la cantidad de parejas respecto a la pregunta anterior.

En contraste con las respuestas dadas a la pregunta anterior es posible indicar que en esta disminuyó el porcentaje de las parejas de estudiantes que realizaron la suma de la cantidad de rectángulos, ya sea de color blanco o gris, ante esto llama la atención por qué los estudiantes comprenden las preguntas como si tuvieran que hacer una operación, en este caso de adición. Se resalta también que 3 parejas siguen sin reconocer las regularidades presentes de estos en cada diseño de baldosa, lo que permite afirmar, que probablemente no comprendieron la consigna planteada.

Igualmente se mantiene el mismo de porcentaje de parejas (43%) que identifican el aumento de uno en uno de los rectángulos de color gris, reconociendo la variación entre dichos rectángulos y logrando indicarlos de forma general.

Pregunta 1. Explica como hiciste para completar la tabla a partir de los datos dados.			
Tipos de respuestas	**Justificación**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que completaron correctamente la tabla.	Explican que deben hacer una suma	6	28%
	Mencionan que la cantidad total de rectángulos de una baldosa es la suma de rectángulos de color blanco y gris.	2	9%
	No justifican.	8	41%
	Explican que le suman 4 a los rectángulos de color gris para completar los de color blanco.	2	9%
Parejas que completaron incorrectamente la tabla.	No justifican.	3	14%

Tabla 9. Tipificación pregunta 1, actividad 2, situación 1.

Según los resultados representados en la tabla 9, se puede observar que la mayoría de las parejas (87%) completaron correctamente la tabla propuestas, reconociendo las variaciones entre las cantidades involucradas, sin embargo, cerca de la mitad de estas parejas de estudiantes no explican como la completan, pero el 18% que sí lo hace, especifican sobre las relaciones aditivas que se configuran en las variables puestas en juego de los diseños presentados, no obstante, estas parejas solo establecen una de las dos relaciones (la cantidad total de rectángulos es igual a la suma de los rectángulos de color blanco y gris o que la cantidad de rectángulos de color blancos es igual a la cantidad de rectángulos de color gris más 4), lo cual no quiere decir que no haya identificado las dos relaciones.

A continuación en la ilustración 7 en donde se muestra a manera de ejemplo una pareja de estudiantes que reconocen implícitamente la relación aditiva entre la cantidad de rectángulos de color gris y blanco.

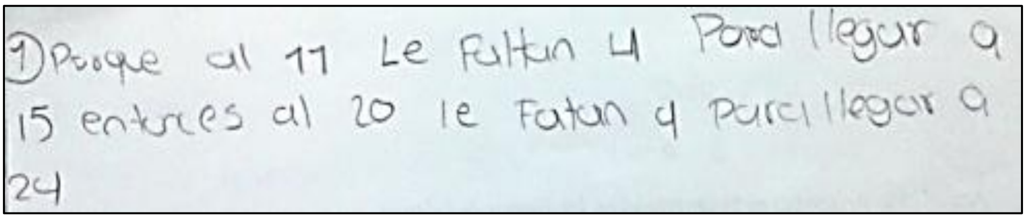

1) Poque al 11 le faltan 4 para llegar a 15 entonces al 20 le fatan 4 para llegar a 24

Ilustración 7. Pregunta 1, actividad 2, situación 1.

Se puede observar que esta pareja en particular, siempre suma 4 que es la diferencia numérica que guarda la cantidad de rectángulos de color blanco con los de color gris.

Por otro lado, el 28% de las parejas que realizan la tabla correctamente y en sus explicaciones describen que se debe realizar una suma, pero no especifican qué tipo de suma, ni las cantidades que se involucran en ella, por lo que queda la duda de que la hayan reconocido la relación existentes entre las diferentes cantidades propuestas en la tabla.

Finalmente, de acuerdo al 18% de las parejas que logra establecer alguna relación aditiva entre las diferentes cantidades involucradas en los diseños de baldosas, es posible evidenciar que la fase de “ver” (Mason et al., 1985) trasciende en el sentido de que se pasa de reconocer características de la sucesión de diseños de baldosas a relaciones numéricas presentes en estos diseños, también ubicándose en un tipo de generalización contextual (Radford, 2003) debido a que logran pasar de establecer la regularidad de una figura en particular a aplicar la misma relación a otra figura cualquiera.

Pregunta 2. De acuerdo con la tabla ¿qué relación tiene la cantidad de rectángulos de color gris y el número del diseño de la baldosa?		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que identifican que la cantidad de rectángulos de color gris es igual al	11	52%

número del diseño de la baldosa.		
Parejas que responden la pregunta de forma incorrecta.	4	19%
Parejas que no responden la pregunta.	6	28%

Tabla 10. Tipificación pregunta 2, actividad 2, situación 1.

De acuerdo a los resultados exhibidos en la tabla 10, el 52% de las parejas (11 de 21), logran reconocer una variación directamente proporcional que existe entre el número del diseño de la baldosa y la cantidad de rectángulos de color gris al identificar que estas cantidades son iguales, tal y como se muestra a manera de ejemplo en la siguiente ilustración.

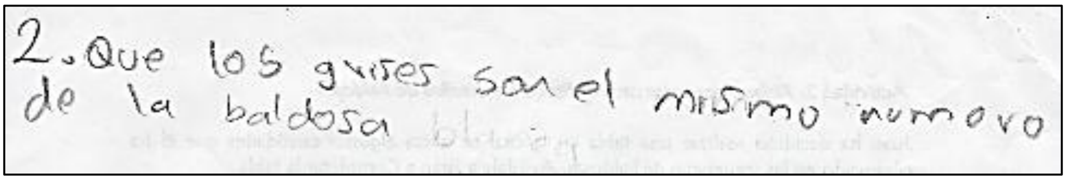

2. Que los grises son el mismo numero de la baldosa

Ilustración 8. Pregunta 2, actividad 2, situación 1.

En la ilustración 8 se puede evidenciar que esta pareja de estudiantes en ningún momento menciona un número particular de baldosa, lo que significa que identifican la variación entre los rectángulos de color gris y el número del diseño. Según lo mencionando anteriormente es posible afirmar que más de la mitad de las parejas de estudiantes se ubican en un tipo de generalización contextual (Radford, 2003), debido a que pueden abstraer uno de los patrones que presentan los diseños de baldosas. Por otra parte, se tiene un 28% de las parejas que no responden la pregunta, posiblemente porque no lograron identificar la relación entre las cantidades involucradas y el 19% respondieron la pregunta de forma incorrecta, quizá porque no entendieron lo que se preguntaba.

Pregunta 3. De acuerdo con la tabla ¿qué relación se puede observar entre la cantidad de rectángulos de color blanco y la cantidad de rectángulos de color gris? Explica tu respuesta.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que mencionan que la cantidad de rectángulos de color blanco es mayor a la cantidad de rectángulos de color gris.	4	19%
Parejas que indican que la cantidad de rectángulos de color blanco excede en 4 a los de color gris en cada diseño.	2	9%
Parejas que suman la cantidad de rectángulos de color blanco y gris de los tres diseños de baldosas presentados.	3	14%
Parejas que indican que la cantidad de rectángulos de color blanco es igual a la cantidad de rectángulos de color gris.	1	5%
Parejas que responden la pregunta incorrectamente.	9	42%
Parejas que no responden la pregunta	2	9%

Tabla 11. Tipificación pregunta 3, actividad 2, situación 1.

De acuerdo a los resultados expuestos en la tabla 11, se puede observar que solo dos parejas lograron identificar la relación correcta entre la cantidad de rectángulos de color blanco y gris, estableciendo una relación implícita de proporcionalidad directa entre estas dos cantidades. En relación con las 4 parejas que solo establecieron que la cantidad de rectángulos de color blanco es mayor a los de color gris, se evidencia que no generan relaciones cuantitativas en las variaciones de las cantidades sobre las cuales esta puesta la pregunta, lo que en términos de Piaget e Inhelder (citado por Ruiz & Valdemoros, 2006) mostraría indicios de un razonamiento proporcional cualitativo más que cuantitativo. Una tipo de esta clase de respuestas se puede evidenciar a continuación a manera de ejemplo en la ilustración 9.

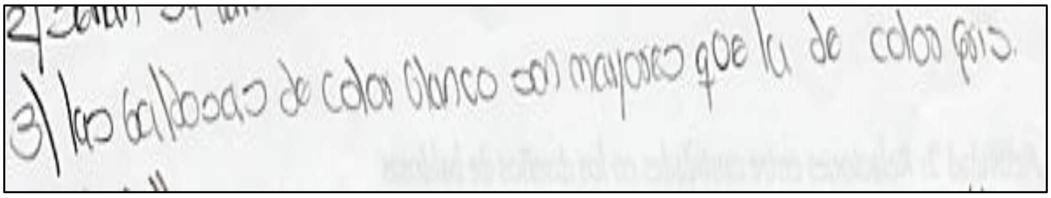

3) los baldosas de color blanco son mayores que la de color gris.

Ilustración 9. Pregunta 3, actividad 2, situación 1.

Esta pareja de estudiantes, no logra establecer la relación numérica que existe entre la cantidad de rectángulos de color gris y blanco.

Por otra parte, el 14% de las parejas que suman la cantidad de rectángulos de color blanco y gris de los tres diseños se ubican en una generalización de hecho propuesta por Radford (2003) debido a que mencionan de manera aislada la cantidad de rectángulos de color blanco y gris, sin establecer la relación de covariación entre estas cantidades, además no realizan apreciaciones que van más allá de los diseños de baldosas presentados.

Finalmente, el 42% de las parejas (9 de 21) mencionan algunas respuestas que no tienen relación con la pregunta planteada, tal y como se muestra a continuación.

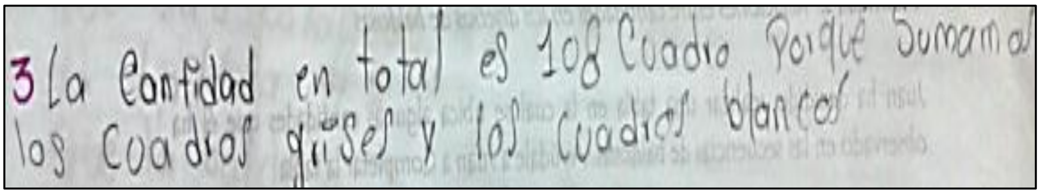

3 La Cantidad en total es 108 Cuadro Porqué Sumamos los Cuadros grises y los Cuadros blancos

Ilustración 10. Pregunta 3, actividad 2, situación 1.

En la anterior ilustración se puede observar como una pareja de estudiante en particular, suma la cantidad de rectángulos de color gris y blancos expuestos en la tabla, lo que podría permitir afirmar que no comprendieron la pregunta, puesto que respondieron algo que no tiene relación con lo requerido.

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 1. Juan desea hallar el número de rectángulos de color blanco en el diseño de la baldosa 50, explícale cómo hacerlo.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Parejas que responden que hay 54 rectángulos de color blanco en el diseño de la baldosa 50.</td><td>Explican que a los rectángulos de color gris se le suma 4.</td><td>11</td><td>52%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>2</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>Parejas que no hallan el número de rectángulos de color blanco en el diseño de la baldosa 50.</td><td>Explican que se debe sumar.</td><td>2</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>Parejas que responden realizando el diseño de la baldosa 50 de manera incorrecta.</td><td>No justifican.</td><td>1</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Parejas que no responden la pregunta.</td><td>No justifican.</td><td>5</td><td>24%</td></tr>
</table>

Tabla 12. Tipificación pregunta 1, actividad 3, situación 1

Respecto a los resultados expuestos en la tabla 12, se puede evidenciar que el 61% de las parejas de estudiantes logran “capturar” el patrón numérico de la sucesión de los diseños de baldosas, ubicándose en una generalización contextual (Radford, 2003), pues logran registrar el patrón que les permite hallar el número de rectángulos de color blanco del diseño de la baldosa 50, tal y como se evidencia en el siguiente diálogo entre un estudiante y entrevistadora.

L1. **Estudiante C:** *Si es la baldosa 50 también tiene que tener 50 grises* [señala con su mano la tabla, ver ilustración 11].
L2. **Entrevistadora 1:** *¡aja!*
L3. **Estudiante C:** *Le aumentamos 4 y son 50, entonces quedan 54 blancos.*
L4. **Entrevistadora 1:** *¡eso!, entonces si yo le digo la baldosa N°64, ¿Cuántos rectángulos de color gris tiene y cuántos de color blanco?*
L5. **Estudiante C:** *mmm… ¿64?, hay 64 grises y de color blanco 68*
L6. **Entrevistadora 1:** *La baldosa N°64 ¡aja!*

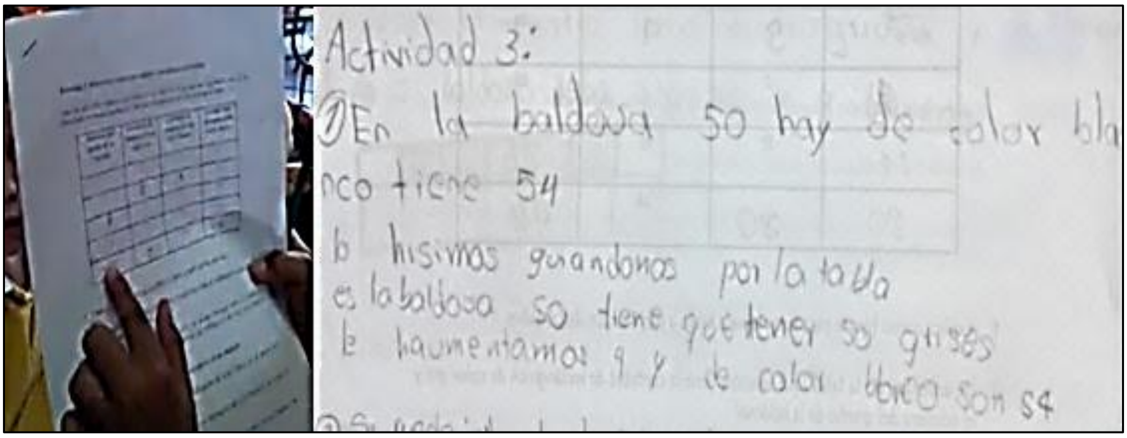


Ilustración 11. Descripción de la regularidad del patrón evidenciada en L1 y L3 a partir de la tabla. Pregunta 1, actividad 3, situación 1.

En el anterior diálogo y la ilustración 11, se observa como un estudiante de una pareja en particular produce un discurso en el cual deja ver que “captura” la regularidad del patrón numérico, teniendo como base la tabla que ha completado anteriormente. También se puede evidenciar que el nivel de percepción del estudiante es más mayor respecto al de sus compañeros, debido a que no se basa en las figuras de la secuencia de diseños de baldosas presentados, sino que se refiere a diseños muchos mayores que no están presentes en dicha secuencia y además logra hacerlo para cualquiera.

Respecto a la pareja de estudiantes que no hallaron la cantidad de rectángulos de color blanco del diseño de la baldosa 50, y en vez de eso realizaron el diseño de la baldosa 50 incorrectamente, sin lograr “capturar el patrón” debido a que no establecen relaciones cuantitativas, puesto que su percepción visual se centra en los gráficos de los diseños de baldosas, situándose así, en una generalización de hecho (Radford, 2003). Tal como se muestra a manera de ejemplo en la siguiente ilustración.

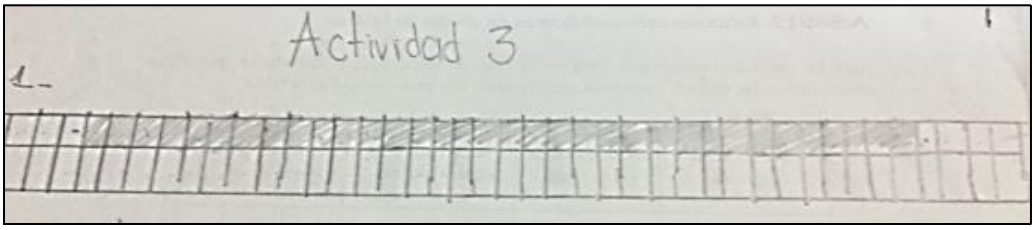


Ilustración 12. Pregunta 1, actividad 3, situación 1.

En la ilustración 12 se muestra que una pareja de estudiantes no ha capturado el patrón numérico puesto que alude a la representación gráfica para poder dar respuesta a la consigna.

Por otro lado se aumenta el porcentaje de las parejas que no responden la pregunta respecto a la actividad anterior a un 24%, posiblemente porque tal y como lo reconocen Mason et al. 1985 se les dificulta pasar de la fase de *ver* al *describir.*

Pregunta 2. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de rectángulos de color blanco si se conoce la cantidad de rectángulos de color gris?		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que indican que se debe aumentar 4 a los rectángulos de color gris para hallar la cantidad de rectángulos de color blanco.	5	23%
Parejas que mencionan que para hallar la cantidad de rectángulos de color blanco hay que sumar o restar.	4	19%
Parejas que solo indican que los rectángulos de color blanco dependen de la cantidad de rectángulos de color gris.	1	5%
Parejas que responden que para hallar la cantidad de rectángulos de color blanco deben hacer el grafico y contar los de color blanco.	1	5%
Parejas que indican que los rectángulos de color blanco tienen la misma cantidad que los de color gris.	1	5%
Parejas que hallan la cantidad de rectángulos de color blanco para un caso en particular.	2	9%
Parejas que no responden la pregunta.	7	33%

Tabla 13. Tipificación pregunta 2, actividad 3, situación 1

De acuerdo a la anterior descripción a los expuesta en la tabla 13, de las 5 parejas que lograron identificar como hallar la cantidad de rectángulos de color blanco a partir de los de color gris se puede inferir que responden a la fase de registrar el patrón (Mason et al., 1985) debido a que logran "capturarlo" y escribirlo a través del lenguaje natural, además de ubicarse también en un tipo de generalización contextual (Radford, 2003), ya que en sus respuestas se evidencia el uso de diferentes medios semióticos de objetivación correspondientes a dicha generalización, tal como se muestra a continuación.

L1. **Entrevistadora 1***: Entonces si yo le digo explíquele a ella,* [haciendo referencia a la entrevistadora 2] *si ella te da el número de baldosa ¿Cómo tú haces para saber cuántos rectángulos de color gris tiene y cuantos rectángulos de color blanco tiene? ¿Cómo haces para saber eso?* *L2***. Estudiantes C:** *mmm…, porque aquí en la primera actividad,* [señalando la actividad 1 de la situación 1] *en el diseño de baldosa 1 tiene 1, en el diseño de baldosa 2 tiene 2 y en el 3 tiene, entonces en cualquier número, si en la 64 debe tener el mismo número de los grises y en la blanca le aumentamos 4.* *L3*. **Entrevistadora:** *Listo muy bien.*

De acuerdo al anterior diálogo se observa que un estudiante en particular en L2 menciona un término genérico al decir "cualquier número" utilizándolo como medio semiótico de objetivación que le permite lograr un nivel de generalización mayor para encontrar la cantidad de rectángulos de color blanco a partir de la cantidad de rectángulos de color gris, teniendo en cuenta implícitamente que el número del diseño es igual a la cantidad de rectángulos de color gris.

Llama la atención como en la pregunta anterior, cuando se pide la cantidad de rectángulos de color blanco para un diseño en particular, el porcentaje de parejas que establecen la covariación entre los rectángulos de color blanco y gris es más alto, pero cuando en esta pregunta se pide hallar los rectángulos de color blanco para cualquier diseño, el porcentaje disminuye, debido a que la pregunta exige un mayor nivel de generalidad para hallar la cantidad de rectángulos de color blanco a partir de los de color gris.

Por otra parte, la pareja que propuso realizar el diseño de la baldosa respectivo demuestra que hasta ahora no ha identificado el patrón numérico presente en la secuencia, puesto que centran su atención en el gráfico, más no en las regularidades cuantitativas de la sucesión, dando cuenta de una generalización de hecho (Radford, 2003), puesto que no logra evidenciar la covariación entre la cantidad de rectángulos de color blanco y gris. Cabe resaltar que dicha pareja es la misma que en la pregunta anterior realizó el diseño de la baldosa 50 de manera incorrecta.

Y respecto a las dos parejas que hallaron la cantidad de rectángulos de color blanco para un diseño en particular se evidencia que logran identificar el patrón para determinado caso pero no logran describirlo de manera general.

Por último se sigue observando un incremento en el porcentaje (33%) de las parejas que no responden la pregunta respecto a la anterior, posiblemente porque no la entendieron.

Pregunta 3. ¿Cómo se halla la cantidad de rectángulos (blancos y grises) de una baldosa si se conoce el número del diseño de esa baldosa? Explica tu respuesta.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que indican que la cantidad de rectángulos de color gris es igual al número del diseño de la baldosa, y para la cantidad de rectángulos de color blanco se suma 4 a la cantidad de rectángulos de color gris.	3	14%
Parejas que indican que para hallar la cantidad de rectángulos de color blanco se le suma 4 a la cantidad de rectángulos de color gris.	1	5%

Parejas que indican que el número del diseño de la baldosa es el mismo que la cantidad de rectángulos de color gris.	1	5%
Parejas que responden que se debe sumar los rectángulos de color blanco y gris de un diseño para saber la cantidad de rectángulos.	2	9%
Parejas que hallan correctamente la cantidad de rectángulos de color blanco y gris para un diseño en particular.	6	29%
Parejas que no responden la pregunta.	8	38%

Tabla 14. Tipificación pregunta 3, actividad 3, situación 1.

Teniendo en cuenta los resultados expuestos en la tabla 14, se puede observar que solo 3 parejas de estudiantes lograron establecer la relación entre todas las cantidades involucradas, registrar el patrón (Mason et al., 1985) y a su vez se sitúan en nuevo tipo de generalización llamada contextual (Radford, 2003), debido a que abstraen todas las relaciones de la sucesión de diseños de baldosas y utilizan términos lingüísticos genéricos como medios semióticos de objetivación que le permiten referirse a cualquier diseño de baldosa. Lo anterior se muestra en la siguiente ilustración.

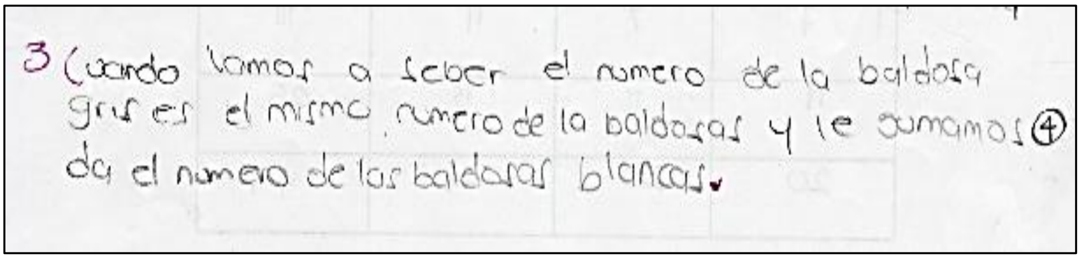

3 Cuando vamos a saber el numero de la baldosa gris es el mismo numero de la baldosas y le sumamos 4 da el numero de las baldosas blancas.

Ilustración 13. Pregunta 3, actividad 3, situación 1.

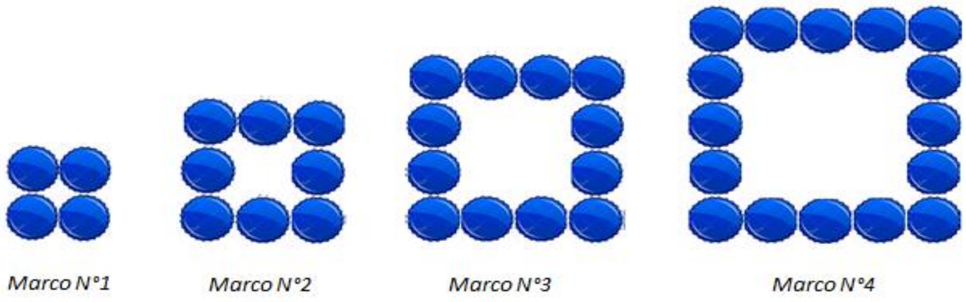
Se observa que esta pareja de estudiantes en particular ya no se refieren a un diseño de baldosa concreto para poder establecer todas las relaciones que se evidencian, al mencionar la palabra “número” transforma así su discurso para referirse a cualquier figura dada.

Respecto a las 6 parejas que se hallan la cantidad de rectángulos de color blanco y gris para un diseño de baldosa en particular, se evidencia que, a diferencia de los anteriores, no logran describirlo de forma general. Por otro lado nuevamente se presenta un alto porcentaje (38%) de parejas que no responden la pregunta respecto a la anterior, probablemente porque se les dificulta reconocer y describir la generalidad presentada.

3.3.2 Resultados y análisis de los resultados de la situación 2

Situación 2. Construyendo Marcos para fotos

Mónica decide realizar marcos para fotos de diferentes tamaños, para esto utiliza tapas de gaseosas y construyen los siguientes:



Pregunta 1: Observa la secuencia que presentan los marcos de fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco número 5.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que dibujan correctamente el marco de fotografía número 5 conformado por 20 tapas, manteniendo la secuencia de marcos para fotos dada.	6	46%
Parejas que dibujan el marco número 5 con la cantidad correcta de tapas, pero no mantienen la iconicidad de la figura.	4	31%
Parejas que realizan incorrectamente el marco de fotografía número 5, pues lo hacen con menos de 20 tapas y sin mantener la iconicidad de las figuras.	1	8%
Parejas que grafican incorrectamente el marco de fotografía número 5, puesto que lo hacen con más de 20 tapas, sin mantener la secuencia que presentan los marcos.	2	15%

Tabla 15. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 2.

Según los resultados expuestos en la tabla 15, es posible indicar que las parejas de estudiantes a partir del proceso de observación lograron analizar el patrón gráfico que se muestra entre los marcos de fotografía, lo que significa que cerca de la mitad de las parejas de estudiantes se ubican en el primer tipo de generalización propuesta por Radford (2003), esto es generalización de hecho, en tanto que se apoyan de distintos medios semióticos como la percepción y las señales sobre los marcos dados para reconocer las regularidades de estos, y así llegar a dibujar el marco solicitado.

En la siguiente ilustración, se evidencia como un estudiante utiliza las señales para contar la cantidad de tapas del marco 4 y así lograr establecer la cantidad de tapas que lleva el marco de fotografía 5.

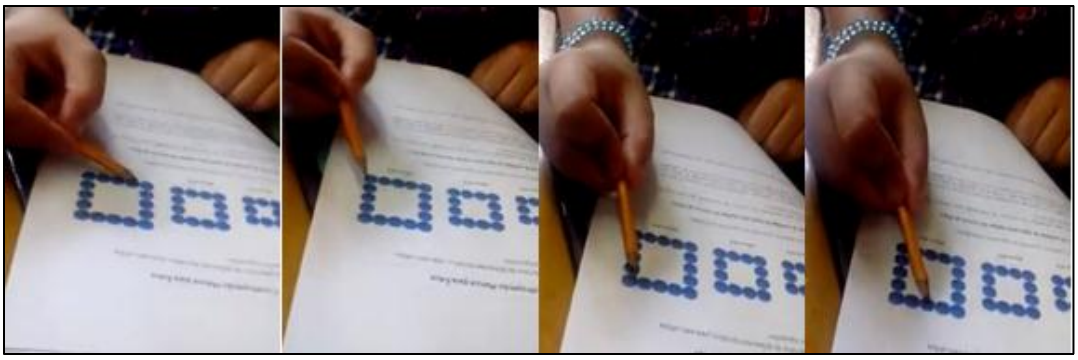


Ilustración 14. Secuencia de señales que utiliza un estudiante. Pregunta 1, actividad 1, situación 2.

Lo anterior pone de relieve que el conteo uno a uno y la señalización con el lápiz de cada tapa se convierte en un medio semiótico de objetivación para esta pareja, mantenido la regularidad gráfica que hay en la secuencia de marcos de fotografía teniendo en cuenta las cantidades de tapas de cada lado, tal como se muestra a manera de ejemplo en la siguiente ilustración

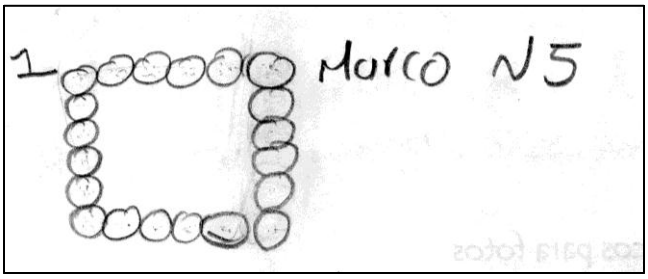


Ilustración 15. Pregunta 1, actividad 1, situación 2.

Ahora bien, en relación con las cuatro parejas de estudiantes que no identifican la regularidad que presentan los gráficos de marcos para fotos, se destaca, no obstante, que pueden encontrar la cantidad de tapas necesarias para realizar el marco 5, esto permitiría suponer que tomaron como referencia la secuencia presentada. Por lo anterior no se puede afirmar que dichas parejas de estudiantes hayan logrado abstraer la generalización entre la cantidad de tapas necesarias para realizar cualquier marco.

En relación con las 3 parejas de estudiantes que no logran identificar el patrón grafico en la secuencia de marcos para fotos, es posible indicar que presentaron dificultades para reconocer la variación que se da entre la cantidad de tapas que va de 4 en 4, y reconocer que la figura se le debe adicionar una tapa en cada uno de los lados que lo conforman.

La siguiente ilustración muestra como una pareja de estudiantes no cae en cuenta que se necesitan 20 tapas para el marco 5.

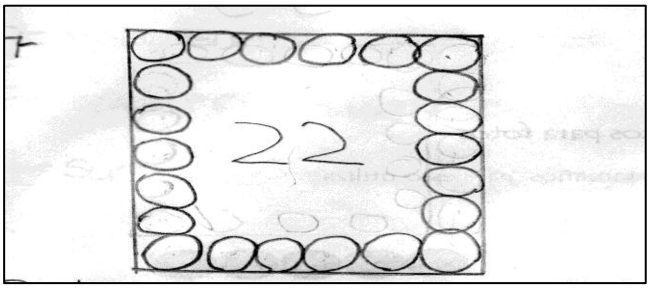


Ilustración 16.Pregunta 1, actividad 1, situación 2.

También es posible afirmar que en la ilustración anterior, como esta pareja de estudiantes no mantienen configuración del marco según la secuencia dada, por lo que el patrón figural se pierde.

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 2. Mónica le quiere regalar a su mamá de cumpleaños el marco número 6 pero no sabe cuántas tapas necesita para construirlo. ¿Cuál es la cantidad de tapas que requiere Mónica para realizar dicho marco? Explica como obtuviste esta cantidad y dibuja el marco.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Parejas que dibujan correctamente el marco de fotografía número 6.</td><td>Indican que obtuvieron esa cantidad porque cada lado del marco debe tener 7 tapas.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Explican que el número del marco es igual a la cantidad de tapas de cada lado de este.</td><td>2</td><td>15%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parejas que dibujan el marco número 6, con 24 tapas sin seguir la secuencia de marcos para fotos presentada.</td><td>Explican que le aumenta 4 a la cantidad de tapas del marco número 5.</td><td>4</td><td>31%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Parejas que dibujan el marco número 6 con menos de 24 tapas sin seguir el patrón grafico que presenta la secuencia de marcos para fotos.</td><td>No justifican.</td><td>3</td><td>23%</td></tr>
<tr><td>Parejas que no dibujan el marco número 6, pero reconocen que debe tener 24 tapas.</td><td>Explican que le aumentan 4 a la cantidad de tapas del marco número 5.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
</table>

Tabla 16. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 2.

Respecto a los resultados que se exponen en la tabla 16, se puede afirmar que ninguna de las parejas de estudiantes logran dar una explicación en términos de las variaciones que se presentan entre la cantidad de tapas necesarias para realizar cada marco de fotografía y a su vez dibujar el gráfico siguiendo la secuencia presentada, puesto que los que realizaban bien el marco de fotografía solicitado, en algunas explicaciones se evidencia que tienen en cuenta características del marco en específico y otros intentan establecer una relación incorrecta entre el número del marco y la cantidad de tapas de cada lado de dicho marco. En conclusión, las parejas de estudiantes no logran mantener la iconicidad de los marcos de fotografía y al mismo tiempo reconocer la variación existente entre el número del marco y la cantidad de tapas.

Ahora bien, es posible evidenciar que un 39% de parejas de estudiantes en sus explicaciones identifican la variación que se presenta entre la cantidad de tapas, reconociendo la cantidad de tapas necesarias para el marco número 6, sin embargo de este porcentaje el 8% no realiza este marco de fotografía y el 31% lo realiza sin conservar la iconicidad de marcos para fotos. Tal como se muestra a manera de ejemplo en la siguiente ilustración.

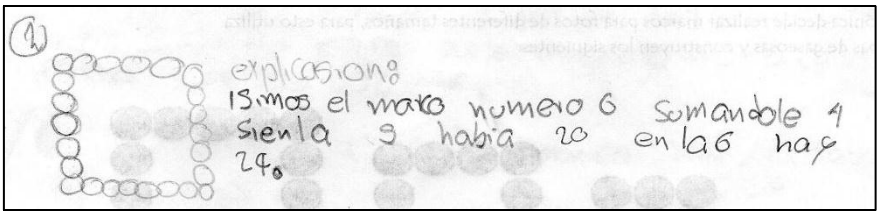


Ilustración 17. Pregunta 2, actividad 1, situación 2.

Obsérvese como en la respuesta a la pregunta, esta pareja de estudiantes en particular identifican la cantidad de tapas necesarias para el marco número 6, no obstante el gráfico no corresponde con la secuencia que se presenta.

Pregunta 3. ¿De cuánto es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica?		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que responden que cada marco de fotografía aumenta 4 tapas en relación con el anterior.	9	69%

Parejas de estudiantes que indican que cada marco de fotografía aumenta 3 tapas respecto a su antecesor.	1	8%
Parejas que responden que cada marco de fotografía aumenta de 1 tapa respecto al anterior.	1	8%
Parejas que responden que cada marco aumenta de 2 tapas en relación con el anterior.	1	8%
Parejas que escriben la cantidad de tapas de cada marco presentado en la secuencia.	1	8%

Tabla 17. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 2.

En relación con los resultados obtenidos evidenciados en la tabla 17, es posible afirmar que más de la mitad de las parejas (69%) de estudiantes logran reconocer la variación existente entre la cantidad de tapas de cada marco de fotografía presentado, lo que significa que estos estudiantes se presentan en un tipo de generalización de hecho (Radford, 2003) debido a que logran reconocer dicha regularidad basándose en la percepción visual de la secuencia de marcos de fotografía.

Sin embargo, hay que indicar que tres parejas de estudiantes presentan respuestas diferentes, puesto que cada una de estas parejas afirman que la cantidad de tapas aumenta de 1, 2 o 3 respectivamente, por lo que es posible suponer que las parejas de estudiantes que reconocieron el aumento de 1 tapa en cada marco de fotografía estaban centrando su atención en uno de los lados de la figura. Lo anterior se evidencia por ejemplo en la siguiente ilustración:

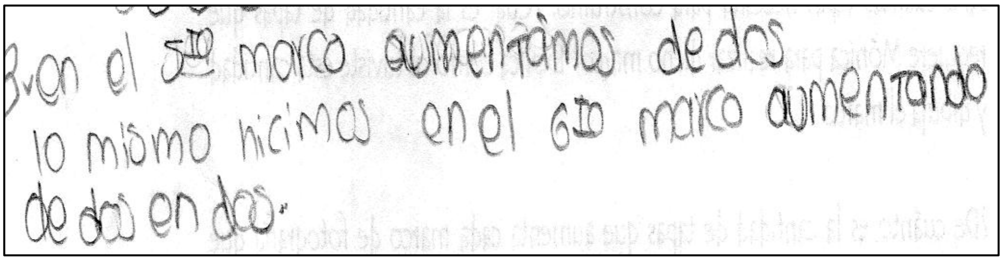


Ilustración 18. Pregunta 3, actividad 1, situación 2.

Tal como se muestra en la ilustración, esta pareja en particular menciona que desde el marco de fotografía número 5 ha aumentado dos tapas y que por eso lo hacen también en el marco número 6, por lo que se evidencia que no reconocen la regularidad, además de esto, en los dibujos de los marcos presentados no mantienen la iconicidad de la secuencia.

En relación con la pareja que menciona la cantidad de tapas de cada marco de fotografía presentado, centran su atención en cada uno de las figuras de la sucesión, sin lograr establecer la relación entre la manera como varían, lo que le permite acceder a dicha regularidad.

Pregunta 1. Mónica le quiere regalar a sus amigos marcos para fotos de diferentes tamaños. Para ello realiza una tabla en la cual se relaciona el número de marco y la cantidad de tapas necesarias para realizarlo. Ayúdale a completar la tabla:

Número (N°) de marco	Cantidad de tapas necesarias
1	4
4	
7	
	44
	60
20	
83	

Tipos de respuestas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Parejas que completan correctamente la tabla.	7	54%
Parejas que completan la tabla pero se equivocan en una o dos filas al hallar la cantidad de tapas necesarias.	3	23%
Parejas que completan la tabla pero se equivocan en dos filas al hallar el número del marco.	1	8%
Parejas que completan la tabla incorrectamente, puesto que le suman 4 al número del marco para obtener la cantidad de tapas, o bien restan 4 a la	2	15%

cantidad de tapas necesarias para hallar el número del marco.		

Tabla 18. Tipificación pregunta 1, actividad 2, situación 2.

Teniendo en cuenta los resultados expuestos de la tabla 18, se puede observar que un poco más de la mitad de las parejas de estudiantes (54%) completan correctamente la tabla, lo que podría dar a pensar que logran establecer la relación directamente proporcional que existe entre el número del marco de fotografía y la cantidad de tapas necesarias para construirlo, esto es una relación $1:4$, no obstante no se descarta la idea de que hayan evocado a la secuencia de marcos de manera lineal, contando desde el primer marco para foto.

Es importante mencionar que el 31% de las parejas de estudiantes (4 de 13) que cometen algunos errores al completar la tabla, se debe principalmente a dos hecho, por un lado están aquellas parejas (3 de 13) que se equivocaron en establecer la relación multiplicativa, particularmente, cuando el número del marco es mucho mayor en relación con los primeros dados, en este sentido, llama la atención como los estudiantes aunque sí pudieron establecer esta relación para los números de marco 1, 4 y 7 no lo lograron hacer para los números de marcos 20 y 83, quizá y esto se deba a que para los primeros marcos de fotografía es fácil evocar a la representación gráfica para darse cuenta de la cantidad de tapas necesarias.

Por su parte, está una pareja de estudiantes que se equivocaron al establecer la relación inversa a la multiplicación, es decir la división que se debía hacer para encontrar el número del marco a partir de la cantidad de tapas necesarias. Evidenciando que el anterior porcentaje de estudiantes no tiene una conciencia absoluta de la relación entre el número del marco y la cantidad de tapas.

Tal como se muestra en la ilustración 19, esta pareja si bien logra identificar la relación multiplicativa que existe entre el número del marco y el factor 4 para hallar, no sucede lo mismo cuando se debe realizar la operación recíproca a esta, debido a que para hallar el número del marco lo que hacen es dividir entre 2 la cantidad de tapas, lo anterior se evidencia en la siguiente ilustración.

Número (N°) de marco	Cantidad de tapas necesarias
1	4
4	16
7	28
22	44
30	60
20	80
83	332

Ilustración 19. Pregunta 1, actividad 2, situación 2.

Ahora bien en relación con las dos parejas que no completan ningún dato de la tabla de manera correcta, tal como se observa en la ilustración 20, es posible afirmar que si bien intentan establecer una relación entre el número del marco y la cantidad de tapas, esta es incorrecta, pues adicionan dichas cantidades en vez de multiplicarlas. A continuación se muestra un claro ejemplo de lo mencionado anteriormente.

Número (N°) de marco	Cantidad de tapas necesarias
1	4
4	8
7	11
40	44
56	60
20	24
83	87

Ilustración 20. Pregunta 1, actividad 2, situación 2.

De acuerdo con la anterior ilustración, esta pareja en particular de estudiantes al número del marco le suma 4 para obtener la cantidad de tapas necesarias, quizá y se deba a que de acuerdo con la actividad 1 de esta situación, previamente ellos han identificado la variación que presentan la cantidad de tapas de marco en marco, lo cual tensiona esta respuesta.

Pregunta 2. Explica como hiciste para completar la tabla.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que explican que completaron la tabla, multiplicando por 4 el número del marco de fotografía.	2	16%
Parejas que explican que completaron la tabla, explicando que si tenían el número del marco para fotos, multiplicaban por 4 y si tenían la cantidad de tapas dividían por 4 dicha cantidad.	3	23%
Parejas que explican que completaron la tabla, sumando 4 a la cantidad de tapas del marco anterior.	5	38%
Parejas que explican que completaron la tabla, sumando 4 al número del marco de fotografía.	2	16%
Parejas que no explican cómo completaron la tabla.	1	8%

Tabla 19. Tipificación pregunta 2, actividad 2, situación 2.

En cuanto a los resultados presentados en la tabla 19, se puede afirmar de aquellas parejas que reconocieron que para completar la tabla se debía multiplicar o dividir según sea el caso, logran identificar la covariación que se presenta entre las cantidades involucradas en la situación, lo anterior se puede observar a través de la ilustración 21, en donde esta pareja de estudiantes hace explícita la relación multiplicativa.

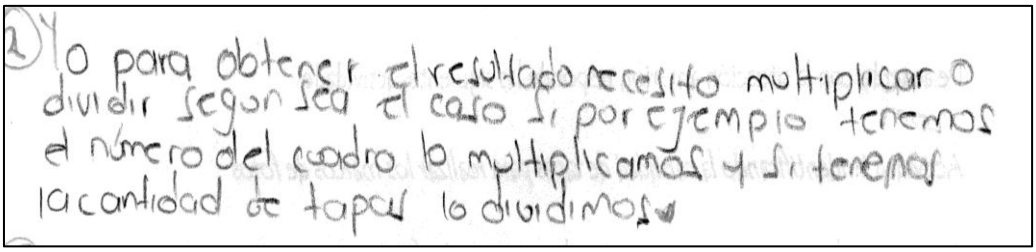

2) Yo para obtener el resultado necesito multiplicar o dividir segun sea el caso si por ejemplo tenemos el nmero del cuadro lo multiplicamos y si tenemos la cantidad de tapas lo dividimos

Ilustración 21.Pregunta 2, actividad 2, situación 2.

Es importante anotar de acuerdo con lo anterior que estas parejas de estudiantes, además de identificar, describen y registran la regularidad del patrón presentado (Mason et al., 1985), por lo que se puede afirmar de acuerdo con Radford (2003) se ubican en un tipo de generalización contextual, pues no se refieren a un caso en particular de marco.

Lo anterior también se constata en el siguiente registro en donde una pareja de estudiantes indica explícitamente que hay que realizar una multiplicación.

L1. ***Entrevistadora 1:*** *¿Cómo hacen para saber cuántas tapas necesito?*
L2. ***Estudiante D:*** *mmm, multiplicando por la tabla del 4.*
L3. ***Entrevistadora 1:*** *¿Multiplicando por la tabla del 4? ¿Qué multiplicas por la tabla del 4?*
L4. ***Estudiante D:*** *El marco 1, 2, 3, 4…, 5, 6.*
L5. ***Entrevistadora 1:*** *¡Eso es!, si yo le digo el número del marco 5, ¿Cuántas tapas necesito?*
L6. ***Estudiante E:*** *¡20!*
L8. ***Entrevistadora 1:*** *¿El marco 6?*
L9. ***Estudiante D y E:*** *24*
L10. ***Entrevistadora 1:*** *¿El marco 8?*
L11. ***Estudiante D y E:*** *¡28!... ¡ve!*
L12. ***Entrevistadora 1:*** *Les voy a decir para el marco 12.*
L13: ***Estudiante D:*** *¡Está en la tabla!* [Le dice al estudiante E].
L14: ***Estudiante E:*** *¡No!, no está. ¡48!*
L15. ***Entrevistadora 1:*** *¿Cómo hiciste?* [Le pregunta al estudiante E].
L16. ***Estudiante D:*** *¡32!*
L17. ***Estudiante E:*** *¿4 por 12 32?*
L19. ***Entrevistadora 1:*** *¿Tu qué hiciste?* [Le pregunta al estudiante E].
L20. ***Estudiante D:*** *¿4 por 12?*
L21. ***Entrevistadora 1:*** *¿Porque por 12?*
L22. ***Estudiante D:*** *porque es el número del marco.*
L23. ***Entrevistadora 1:*** *¿y el 4 por qué?*
L24. ***Estudiante E:*** *porque hemos sumado de 4 en 4.*

De acuerdo al anterior diálogo se puede observar que los estudiantes desde el inicio hacen referencia a la tabla de 4, posiblemente porque identifican la presencia del factor 4 para encontrar la cantidad de tapas necesarias para determinado marco de fotografías, pero en la L14 el estudiante B logra conseguir la cantidad de tapas para el marco 12, respondiendo que se necesitan 48 tapas, y en las líneas 17, 22 y 24 explica como obtuvo dicho resultado, logrando establecer la covariación entre el número del marco y la cantidad de tapas.

Por otra parte, las cinco parejas que explicaron que completaron la tabla sumando 4 a la cantidad de tapas del diseño anterior, no lograron identificar la relación numérica presente entre las dos cantidades, es decir no logran capturar el patrón que se presenta en la situación. Sin embargo, cuando algunas de estas parejas completan la tabla, se evidencia que encuentran ciertas cantidades, específicamente aquellos marcos que tienen las primeras posiciones (1, 4, 7). Lo anterior significa que estas parejas dependen de la secuencia de marcos presentados, por lo que es posible afirmar que no logran tomar conciencia sobre el patrón numérico que se presenta, ubicándose en un tipo de generalización de hecho (Radford, 2003) debido a que solo se basan en la regularidad de la secuencia presentada, sin establecer ninguna relación con el número del marco en general.

Y por último las dos parejas que en la tabla sumaron 4 al número del marco de fotografía para encontrar la cantidad de tapas, se evidencia que en esta pregunta confirman que si bien lograron establecer una relación entre el número del marco y la cantidad de tapas para construirlo esta no se corresponde con la que realmente se presenta entre estas cantidades, además, es importante anotar tal como ya se dijo que estas parejas de estudiantes identifican el numero 4 lo que permitiría afirmar cierto acercamiento con la relación correcta.

Pregunta 3. Explícale a Mónica como hallaste el número de tapas del marco N° 83.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que explican que para hallar el número de tapas del marco N°83 se debe multiplicar por 4.	9	69%
Parejas que explican que hallaron el número de tapas del marco N°83, siguiendo la secuencia y sumándole 4 a la cantidad de tapas del marco anterior.	1	8%
Parejas que explican que hallaron el marco N°83 sumándole 4 al número del marco.	2	16%
Parejas que no responden la pregunta.	1	8%

Tabla 20. Tipificación pregunta 3, actividad 2, situación 2.

Tomando como referencia los resultados expuestos en la tabla 20,es posible afirmar que el 69% de las parejas de estudiantes lograron “capturar” el patrón numérico presente en la sucesión de marcos de fotografía, lo que significa que se podrían presentar en un tipo de generalización contextual (Radford, 2003) puesto que abstraen las regularidades y las logran registrar (Mason et al., 1985). Sin embargo es importante resaltar el contraste de estas respuestas en relación con la pregunta anterior, tal y como es posible evidenciar de acuerdo con la anterior pregunta, solo 5 parejas mostraron la necesidad de multiplicar por 4 para encontrar la cantidad de tapas, pero en esta pregunta se incrementaron 4 parejas más, justamente las 4 parejas que en la pregunta anterior habían afirmado que para encontrar la cantidad de tapas de marco había que sumar 4 al marco anterior. En otras palabras, hubo 4 parejas que al parecer replantearon sus respuestas e indicaron la necesidad de multiplicar por 4 para encontrar la cantidad de tapas del marco 83 sin necesidad de sumar 4 a la cantidad de tapas del marco anterior. Lo anterior se puede observar en la ilustración 22.

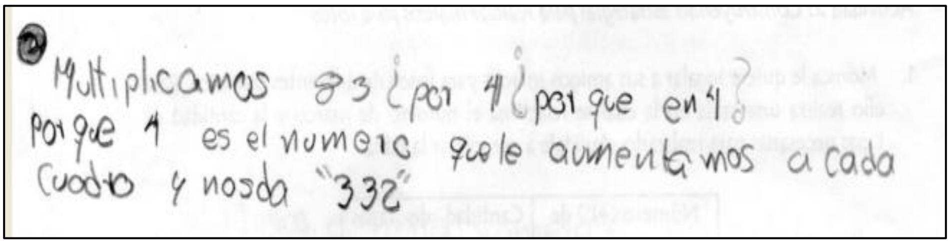


Ilustración 22. Pregunta 3, actividad 2, situación 2.

Esta pareja en particular en la forma de explicar evidencia que pasa de establecer una relación aditiva entre cada marco de fotografía, para luego plantear una relación multiplicativa.

Y por último cabe anotar que dos parejas mantienen su forma de abordar las preguntas, al afirmar nuevamente que se le debe sumar 4 al número del marco, respecto a la pregunta anterior.

<table>
<tr><td colspan="3">Pregunta 4. Inventa una estrategia que le permita a Mónica saber la cantidad de tapas que necesita para construir cualquier marco si se conoce el número de dicho marco.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td>Parejas que sugieren que se multiplique el número del marco por 4 para así obtener la cantidad de tapas necesarias.</td><td>5</td><td>38%</td></tr>
<tr><td>Parejas que reconocen la cantidad de tapas del marco 7, identificando el aumento de 4 en 4.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Parejas que sugieren que se sume el número del marco con 4 para así obtener la cantidad de tapas necesarias.</td><td>5</td><td>38%</td></tr>
<tr><td>Parejas que sugieren tener en cuenta los múltiplos de 4 para obtener la cantidad de tapas necesarias.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Parejas que no responden la pregunta.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
</table>

Tabla 21. Tipificación pregunta 4, actividad 2, situación 2.

En relación con los resultados presentados en la tabla 21, es posible percibir que menos de la mitad de las parejas (38%) expresan como estrategia multiplicar por 4 el número del marco de fotografía para hallar la cantidad total de tapas necesarias para construirlo; estrategia diferente a la que usa una pareja de estudiantes, pues reconoce el aumento de 4 tapas en cada marco; ahora, un poco más de la mitad de las parejas (54%) no logran reconocer una estrategia válida para determinar la cantidad de tapas que se necesitan para realizar cualquier marco, debido a que el 38% de estas sugiere que se debe sumar 4 al número del marco, mientras que el 8% aunque no brinda una estrategia precisa si indica la necesidad de tener en cuenta los múltiplos del 4 para obtener la cantidad solicitada, y una pareja no da respuesta a la consigna.

En concordancia con las respuestas dadas a las preguntas 1, 2 y 3 de esta actividad, 5 parejas logran tomar conciencia sobre el patrón presente en la secuencia de marcos de fotografía, logrando así llegar a registrarlo (Mason et al., 1985) en la estrategia propuesta y a su vez situándose en un tipo de generalización contextual (Radford, 2003) debido a que abstraen la relación entre las cantidades involucradas. Tal como se ilustra a continuación.

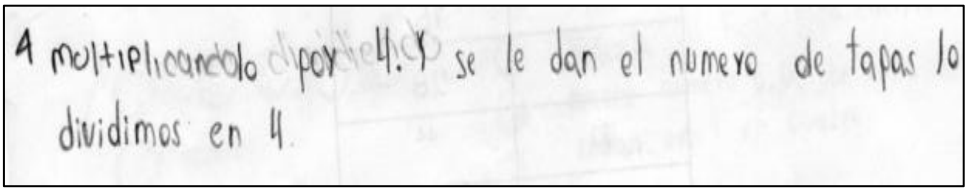

4 multiplicandolo por 4. y se le dan el numero de tapas lo dividimos en 4.

Ilustración 23. Pregunta 4, actividad 2, situación 2.

Se puede observar en la ilustración 23 que esta pareja en particular, además de reconocer la necesidad de multiplicar para hallar la cantidad de tapas según el número del marco, también identifican la necesidad de realizar la operación inversa de esta para encontrar el número del marco.

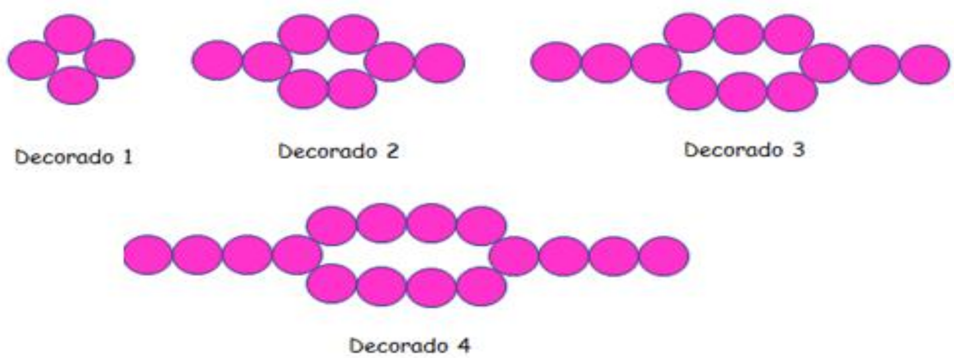
Por otro lado, se evidencia que una pareja de estudiantes solo ha establecido la variación de la cantidad de tapas entre cada marco de fotografía, y no han logrado establecer una relación entre estas cantidades, ubicándose en tipo de generalización de hecho (Radford, 2003), pues solo han capturado la regularidad entre la cantidad de tapas, sin abstraer ninguna relación y un nivel de mayor generalidad.

Finalmente llama la atención de la respuesta a esta pregunta, el aumento notable de parejas (5 parejas) de estudiantes que indican que para hallar la cantidad de tapas necesarias para un número de marco es necesario sumarle 4 a dicho número, respecto a la pregunta anterior en la cual solo dos parejas hicieron la misma afirmación. Cabe resaltar que las 3 parejas de más en esta consigna, en la pregunta anterior reconocieron multiplicar por 4 para obtener el número de tapas del marco de fotografía 83.

3.3.3 Resultados y análisis de los resultados de la situación 3

Situación 3. Decoración de bombas para cumpleaños

Lorena cumple sus 15 años dentro de poco y junto a su mamá están planeando los preparativos para la fiesta, uno de estos son los distintos decorados de bombas que van a realizar, los cuales se muestran a continuación:



<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 1. Ximena, una amiga de Lorena que asistirá a la fiesta, asegura que para el decorado número 5 se necesitan 18 bombas. Indica si la afirmación de Ximena, es cierta o no. Justifica tu respuesta.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Parejas que contestaron que la afirmación de Ximena es falsa, indican que para realizar el decorado 5 necesita 20 bombas.</td><td>Afirma que se debe aumentar 4 bombas a la cantidad de estas del decorado 4.</td><td>5</td><td>38%</td></tr>
<tr><td>Mencionan que el decorado 4 tiene 16 bombas y como los decorados aumentan de 4, entonces el decorado 5 le corresponde 20 bombas.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>4</td><td>31%</td></tr>
<tr><td>Parejas que solo mencionan que el decorado 5 lleva 20 bombas y realiza el dibujo del decorado correctamente.</td><td>Afirman que aumentaron 4 bombas al decorado anterior.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parejas que contestan que la afirmación hecha por Ximena es verdadera y además realizaron el decorado incorrectamente.</td><td>Indican que al realizar el decorado 5 utilizaron 18 bombas.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Mencionan que el decorado 5 debe llevar 18 bombas para que sea más grande que el decorado anterior.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
</table>

Tabla 22. Tipificación pregunta 1, actividad 1, situación 3.

Respecto a los resultados exhibidos en la tabla 22, se puede observar que el 85% de las parejas (11 de 13) contestaron que es falsa la afirmación hecha por Ximena, pues indican que el decorado 5 necesita 20 bombas para hacerlo, el 31% de estas parejas no mencionó ninguna justificación al respecto, y 46% de las parejas restantes en su justificación aluden a que se debe aumentar 4 bombas a la cantidad de estas del decorado anterior, aunque una de estas indica que los decorados aumentan de 4 en 4.

Ahora bien, en la ilustración 24 se puede observar cómo una pareja reconoce la variación de los decorados de bombas, en cuyo discurso se puede demostrar que logran una generalización mayor, pues afirman que los decorados de bombas aumentan de 4 en 4, llegando así, a una abstracción de los objetos específicos y cifras concretas involucrados en la regularidad.

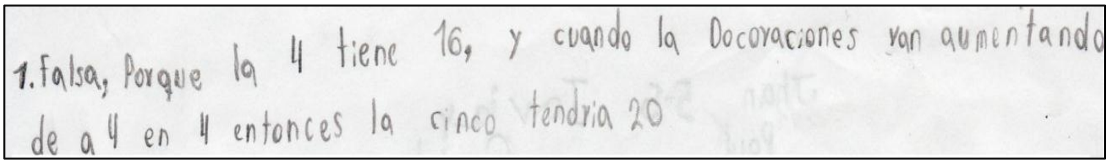

1. Falsa, Porque la 4 tiene 16, y cuando la Docoraciones van aumentando de a 4 en 4 entonces la cinco tendria 20

Ilustración 24. Pregunta 1, actividad 1, situación 3.

De acuerdo con el 46% de las parejas de estudiantes que reconocen la relación numérica entre el decorado de bombas 4 y el solicitado, en particular una de ellas llama la atención, pues en su respuesta también realizan el dibujo del decorado de forma correcta, usándolo como un medio semiótico de objetivación para justificar y verificar lo mencionado, como se presenta en la siguiente ilustración.

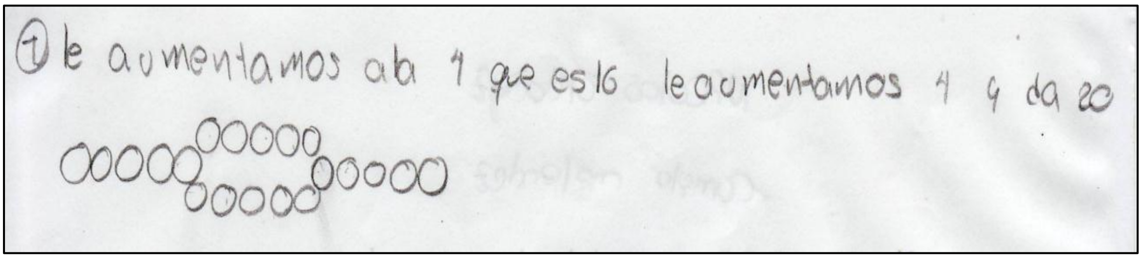

1 le aumentamos ala 4 que es 16 le aumentamos 4 y da 20

Ilustración 25. Pregunta 1, actividad 1, situación 3.

En la ilustración 25 se puede percibir que esta pareja de estudiantes en particular, además de reconocer la relación numérica entre la sucesión de decorados de bombas “capturan” el patrón gráfico, puesto que dicho decorado lo realizan de manera correcta manteniendo la iconicidad de la secuencia de decorados de bombas.

En relación con las parejas de estudiantes que en su justificación afirman que para encontrar la cantidad de bombas necesarias para el decorado 5, indican que deben sumar cuatro bombas a la cantidad de estas del decorado anterior, es posible establecer que su atención visual es lo que prima en su argumento, debido a que se perciben que dicha abstracción se enfoca más en el gráfico del decorado que en la relación numérica de forma general, dando cuenta del reconocimiento de la variación, especialmente al mencionar la palabra “aumentamos”.

Por otro lado, 2 parejas de estudiantes, indican que necesitan 18 bombas para el decorado 5, una de ellas afirma que dicha cantidad es verdadera, pues el decorado 5 debe ser más grande que los anteriores, de tal forma se puede resaltar que reconocen una relación cualitativa de la sucesión de decorados de bombas, lo que es indicio de esto que Piaget e Inhelder (citado por Ruiz & Valdemoros, 2006) razonamiento proporcional cualitativo, no obstante ambas parejas realizan el dibujo de manera incorrecta puesto que no mantienen la forma de la sucesión de decorados presentados, dando cuenta de que no perciben el patrón gráfico ni la relación numérica al no mantener la cantidad de bombas, como se puede percibir en la siguiente ilustración.

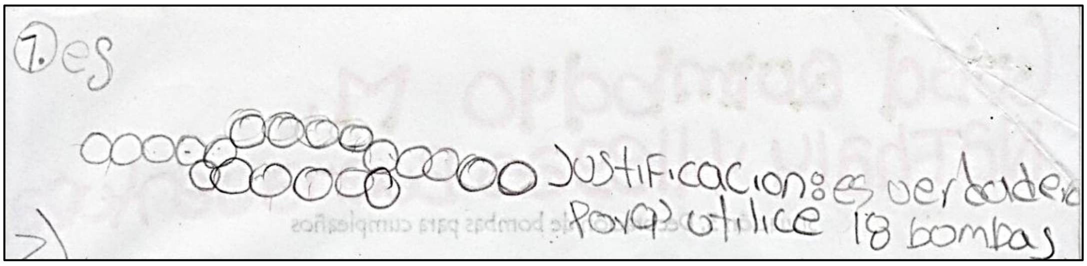


Ilustración 26. Pregunta 1, actividad 1, situación 3.

En la ilustración 26 se puede observar que esta pareja de estudiantes al mencionar que utiliza 18 bombas para realizar el decorado 5, muestra que aún no ha reconocido la relación numérica.

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 2. Digan cuántas bombas necesitan Lorena y su mamá para realizar el decorado número 6. Explique cómo obtuvieron la respuesta y dibuja el decorado de la bomba.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td>Parejas que indican que se necesitan 24 bombas para el decorado 6 y no realizan el gráfico del decorado 6.</td><td>Afirma que aumentaron 4 bombas al decorado número 5.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parejas que indican que se necesitan 24 bombas para el decorado 6 y realizan el gráfico correctamente.</td><td>Indican que aumentaron 4 bombas al decorado 5.</td><td>5</td><td>38%</td></tr>
<tr><td>Afirman que sumaron de 4 en 4.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Parejas que mencionan que se necesitan 24 bombas pero realizan el gráfico del decorado 6 de forma incorrecta.</td><td>Afirma que contaron de 4 en 4.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Establecen que aumentaron 4 bombas al decorado 5.</td><td>2</td><td>15%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Parejas que solamente realizaron incorrectamente el gráfico del decorado 6.</td><td>Mencionan que aumentaron 2 bombas al decorado anterior.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
</table>

Tabla 23. Tipificación pregunta 2, actividad 1, situación 3.

Teniendo en cuenta los resultados expuestos en tabla 23, se puede observar que el 76% de las parejas de estudiantes al mencionar que los decorados de bombas aumentan de 4 en 4 y que se debe aumentar 4 bombas al decorado anterior, los primeros reconocen la variación existente de la sucesión de decorados de bombas, en su discurso evidencian que logran una mayor generalización, debido a que aluden a la relación numérica general de los decorados, mientras que los segundos implícitamente aluden a un gráfico particular y no tanto a la relación numérica general. En ambos casos, tanto los unos como los otros estudiantes reconocen que cada término de la secuencia puede ser expresado en función de los anteriores.

En cuanto a la representación gráfica solo el 46% (6 de 13) lograron percibir correctamente el patrón gráfico de los decorados de bombas, debido a que conservan la iconicidad y la cantidad de bombas, dando cuenta de una generalización de hecho (Radford, 2003) pues utiliza dicho gráfico como medio semiótico de objetivación para lograr reconocer la variación de la sucesión de decorados de bombas, tal como se puede apreciar en la siguiente ilustración.

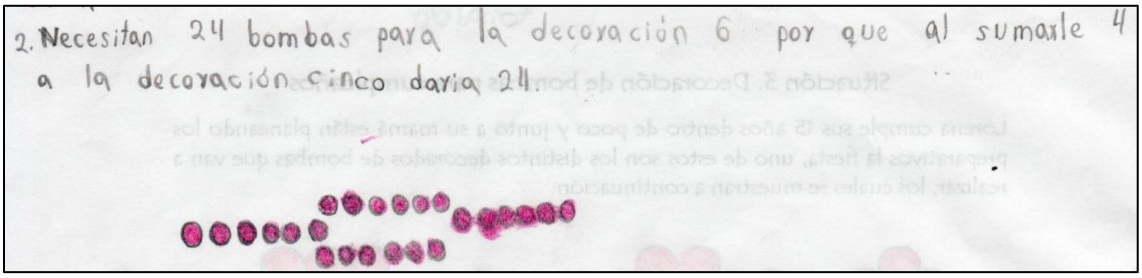


Ilustración 27. Pregunta 2, actividad 1, situación 3.

Además, 6 de 13 parejas de estudiantes realizaron incorrectamente el decorado de bombas número 6 debido a que no mantienen la iconicidad, aunque 4 de estas parejas indican correctamente la cantidad de bombas de dicho decorado, lo que permite evidenciar que los estudiantes reconocen la relación numérica entre la cantidad de bombas y el número del decorado, pero se les dificulta realizar la representación gráfica, ya sea por la posición que conserva cada bomba en determinado decorado o en otros casos por la cantidad de bombas. Tal y como se puede apreciar en la siguiente ilustración.

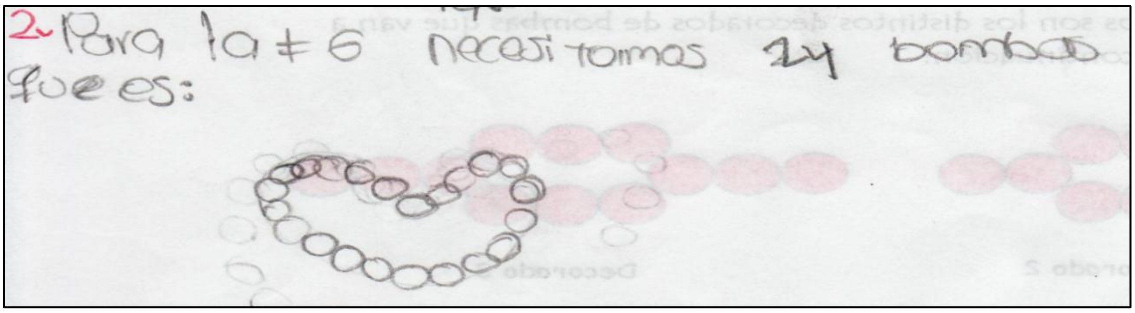


Ilustración 28. Pregunta 2, actividad 1, situación 3.

En relación con la ilustración 28 esta pareja de estudiante logra indicar la cantidad de bombas necesarias para el decorado 6, pero pierde la iconicidad sin tener en cuenta la sucesión de decorados presentada.

En esta pregunta en particular, se puede resaltar que solo el 16% de las parejas (2de 13) no justifican su respuesta, demostrando así, un disminución respecto a la pregunta anterior, mostrando así, que el 76% de las parejas de estudiantes reconocen y son conscientes de lo que realizan, debido a que dan cuenta de lo afirmado.

Pregunta 3. Describe detalladamente cómo realizar los decorados de bombas, como si lo hicieran para un compañero del salón de clase que no está viendo las figuras.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que mencionan que el número del decorado es igual a la cantidad de bombas que se deben colocar a cada lado del mismo (arriba, abajo, izquierda y derecha) y además mencionan un caso particular.	1	8%
Parejas que menciona la cantidad de bombas necesarias para realizar el decorado 1 mencionando la manera como se ubican: arriba, abajo, izquierda y derecha. Además, indican que por cada decoración se aumenta 4 bombas.	1	8%
Parejas que mencionan que la cantidad de bombas aumentan de 4 en 4 en cada uno de los decorados presentados.	6	46%
Parejas que indican la cantidad total de bombas de un decorado en particular.	3	23%
Parejas que no responden la pregunta	2	16%

Tabla 24. Tipificación pregunta 3, actividad 1, situación 3.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 3 expuestos en la tabla 24, es posible afirmar que gran parte de las parejas de estudiantes (84%)

reconocen relaciones cuantitativas de los decorados de bombas, es decir, reconocen la variación presente en dicha sucesión de decorados, esto es logrando hacer dicho registro a través del lenguaje natural. Por otro lado, un 16% logró mencionar regularidades que dan cuenta de la iconicidad que presentan la sucesión de los decorados de bombas, es decir, se evidencia que reconocen el patrón gráfico y además describen (Mason et al., 1985) a su compañero la forma de cada decorado de bombas a través del uso del lenguaje natural, facilitando el proceso de generalización del patrón a partir del establecer implícitamente una covariación, en este caso, el número del decorado y la cantidad de bombas necesarias para dicho decorado, pero aludiendo implícitamente a los gráficos. Lo anterior se puede mostrar a continuación en el siguiente registro.

L7. ***Entrevistadora 1:*** *Si yo digo decorado 100, ¿cómo sería el decorado 100?*
L8. ***Estudiante F:*** [se ríe] *cien bombas.*
L9. ***Entrevistadora 1:*** *¿Cien bombas en dónde? ¿Cuántas bombas tendría en total?*
L10. ***Estudiante F:*** *En total, en total serían 40* [hace un gesto de negación con la cabeza] *400.*
L11. ***Entrevistadora 1:*** *¿Y cómo irían acomodados?*
L12. ***Estudiante F:*** *Cien arriba, cien abajo, cien al lado, cien al otro* [se ríe, mientas señala con las manos haciendo un gesto como de "extensión" cada uno de los lados mencionados] *cien bombas.*

En el anterior diálogo entre la entrevistadora y el estudiante F se puede mencionar que dicho estudiante ha logrado percibir el patrón icónico para un caso en particular, puesto que describe detalladamente la configuración de la sucesión de los decorados de bombas.

Por otra parte un 54% de las parejas describen que la cantidad de bombas de los decorados aumentan de 4 en 4, ubicándose así, en los un tipo de generalización contextual, tal como indica Radford (2003) al mencionar de forma general, una relación numérica, que permite evidenciar una abstracción de los objetos específicos y cifras concretas involucrados en la regularidad, de estas parejas llama la atención, que el 46% no realiza ningún otro tipo de descripción gráfico, referente a la de posición de las bombas en los decorados, dejando en duda, si reconocen la el patrón gráfico de la sucesión presentada.

Sin embargo, el 23% (3 de 13) responden cuantas bombas son necesarias para un decorado en particular, no logran describir una relación las características gráficas y numéricas de la sucesión de decorados de bombas, centrando su atención visual en un diseño en particular sin tener en cuenta las regularidades que esta sucesión mantiene.

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 4.Si Lorena y su mamá van a realizar el decorado de bombas 20, indica cuántas bombas necesitan para hacerlo. Justifiquen su respuesta.</td></tr>
<tr><th>Tipos de respuestas</th><th>Justificación</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Parejas que responden que se necesitan 80 bombas para el decorado 20.</td><td>Afirman que multiplicaron el número del decorado por 4.</td><td>2</td><td>15%</td></tr>
<tr><td>Indican que aumentaron 4 bombas teniendo en cuenta el número de estas del decorado anterior.</td><td>3</td><td>23%</td></tr>
<tr><td>Mencionan que como cada lado el decorado son 20 bombas entonces se debe sumar la cantidad de bombas de los 4 lados.</td><td>2</td><td>15%</td></tr>
<tr><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Parejas que responden que se necesitan 80 bombas para el decorado 20 y además realizan el dibujo del decorado correctamente.</td><td>Mencionan que como cada lado es de 20 bombas entonces se debe sumar la cantidad de bombas de los 4 lados.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
<tr><td>Parejas que solamente realizan el decorado 20 incorrectamente debido a que no mantienen la forma de la sucesión de decorados presentado.</td><td>No justifican.</td><td>1</td><td>8%</td></tr>
</table>

Parejas de estudiantes que no responden la pregunta.		3	23%

Tabla 25. Tipificación pregunta 4, actividad 1, situación 3.

En relación a los resultados presentados en la tabla 25, llama la atención como una pareja de estudiantes ademas de sumar la cantidad de bombas de cada lado del decorad para un total de 80 bombas, realiza el dibujo de este correctamente, tal y como se puede observar en la ilustración 29, cabe mencionar que la consigna no solicita realizarlo.

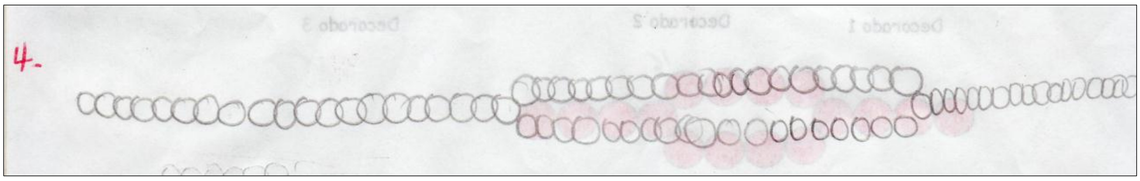


Ilustración 29. Pregunta 4, actividad 1, situación 3.

De acuerdo a la ilustración 29, es posible mencionar que esta pareja de estudiantes reconocen una covariación de los decorados de bombas, pero además de esto alude implícitamente a la configuración gráfica del decorado, probablemente como parte de verificación y validación de su respuesta.

En conclusión, se puede apreciar que gran parte de las parejas e estudiantes (69%) han logrado identificar, describir y registrar el patrón (Mason et al., 1985) de diversas maneras, teniendo en cuenta la relación de covariación entre el número del decorado y la cantidad de bombas necesarias, ya sea aplicando una suma o una multiplicación, o realizando el gráfico para hallar la cantidad de bombas necesarias para un determinado decorado, como se puede apreciar en las ilustraciones 30 y 31.

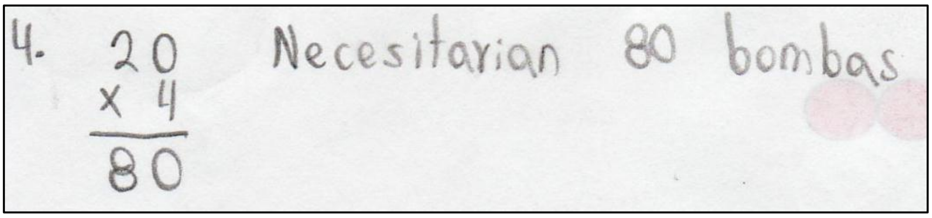


Ilustración 30. Pregunta 4, actividad 1, situación 3.

Respecto a la ilustración anterior es posible evidenciar que esta pareja ha realizado un tipo de generalización mayor, porque en su justificación prevalece de forma general la abstracción numérica de la sucesión de los decorados de bombas.

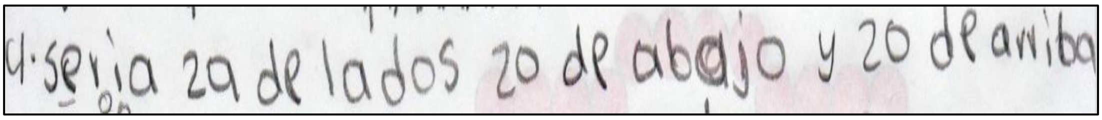


Ilustración 31. Pregunta 4, actividad 1, situación 3.

De acuerdo a la anterior ilustración es posible mencionar que esta pareja alude implícitamente al gráfico para poder establecer y reconocer la relación entre la cantidad de bombas y el número del decorado, pues menciona la cantidad de bombas de cada lado según la configuración que presenta la secuencia de decorados y no hace alusión a la relación multiplicativa de dichas cantidades.

Por otro lado, un 8% de las parejas realizan incorrectamente el dibujo del decorado número 20, puesto que no mantiene la iconicidad del decorado y mucho menos la cantidad de bombas que lo compone, evidenciando así, que no reconocen ni el patrón gráfico ni el numérico, tal como se puede observar en la ilustración 32.

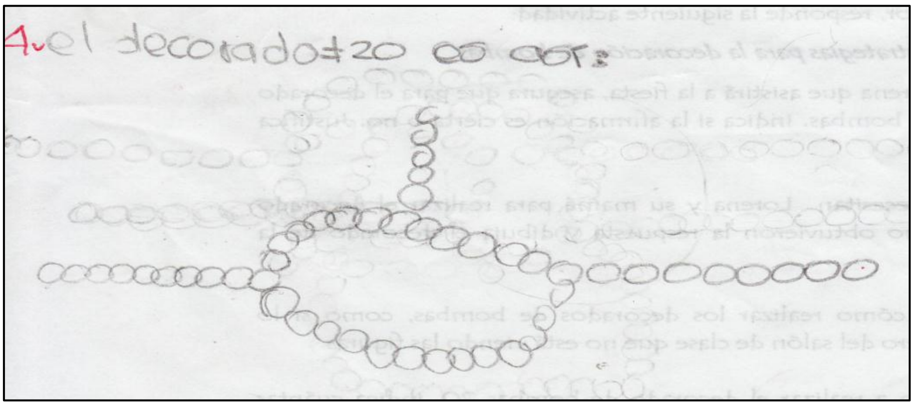


Ilustración 32. Pregunta 4, actividad 1, situación 3.

Ahora bien, se presenta preocupación debido a que 3 de las parejas de estudiantes no responden a la consigna, probablemente porque no la entendieron, no tuvieron tiempo suficiente para terminarla o no reconocieron la relación para hallar la cantidad de bombas del decorado 20.

Pregunta 5. Lorena y su mamá quieren saber cuántas bombas necesitarían para realizar cualquier decorado. Inventa una estrategia que les permita a ellas saber la cantidad de bombas necesarias si conocen el número del decorado.		
Tipos de respuestas	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Parejas que indican que se debe multiplicar por 4 el número del decorado para así, obtener la cantidad de bombas necesarias para dicho decorado.	4	31%
Parejas que utilizan un ejemplo particular de decorado e indicando que se debe multiplicar por 4 el número del decorado para obtener el número total de bombas.	3	23%
Parejas que proponen contar de 4 en 4 empezando desde el primer decorado y así obtener la cantidad de bombas necesarias para hallar la cantidad de bombas.	2	15%
Parejas que no responden la pregunta	4	31%

Tabla 26. Tipificación pregunta 5, actividad 1, situación 3.

Respecto a los resultados exhibidos en la tabla 26, se puede observar el 54% de las parejas de estudiantes que indican que se debe multiplicar por 4 el número del decorado, el 31% de estas, lo menciona de forma general, logrando alcanzar un tipo de generalización mayor, porque reconocen de manera adecuada la relación numérica entre la cantidad de bombas y el número del decorado sin importar que número de decorado se les presente; sin embargo el 23% restante aluden implícitamente a esta relación partiendo de un caso en particular para poder mencionarla, presentando dificultades para generalizar el patrón presente en la sucesión de decorados de bombas.

En el siguiente registro de observación se pueden percibir como una pareja de estudiantes menciona de forma general la estrategia de hallar la cantidad de bombas necesarias para cualquier decorado.

L1. ***Entrevistadora 2:*** *Lorena y su mamá quieren saber cuántas bombas necesitarían para realizar cualquier decorado. Inventa una estrategia que les permita a ellas saber la cantidad de bombas necesarias si conocen el número del decorado.*
L2. ***Estudiante G:*** [Levanta la mano] *Multiplicamos por 4 el decorado.*
L3. ***Entrevistadora 2:*** *Multiplicamos por 4 el decorado ¿Cómo así que multiplicamos por el decorado?*
L4. ***Estudiante G:*** *Por el número del decorado*
L3. ***Entrevistadora 2:*** *¡Muy bien!*

Según el anterior diálogo es posible mencionar que este estudiante en particular logra identificar y describir la covariación entre el número del decorado y la cantidad de bombas necesarias cualquier decorado en general.

Por otra parte, las parejas que mencionan que se debe aumentar de 4 en 4 la cantidad de bombas empezando desde el primer decorado hasta llegar al decorado requerido, solamente reconociendo esta variación que guardan la sucesión de decorados de bombas, cabe indicar que dicha variación la mencionan de forma general.

En conclusión, es posible establecer que de acuerdo a los resultados obtenidos en las 5 consignas de actividad 1 en la situación 3, las parejas de estudiantes lograron reconocer el patrón de la sucesión de decorados de bombas, debido a que durante el desarrollo de la actividad 1, la mayoría mencionan correctamente la cantidad de bombas necesarias para determinado decorado, cuando de graficar se trató lo realizaron correctamente, al describir regularidades, indicaban relaciones que daban cuenta de la forma gráfica, de los decorados, pero sobre todo, al proponer una estrategia para hallar la cantidad de bombas necesarias, lo logran hacer de forma válida; cabe resaltar que muchas de las parejas usaron como medios semióticos de objetivación en su mayor parte el lenguaje natural y en ocasiones representaciones gráficas de los decorados probablemente con el fin de verificar o validar sus respuestas.

3.4. Algunos hallazgos generales de los resultados

Teniendo en cuenta los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las tres situaciones se pueden destacar los siguientes aspectos generales:

- Respecto a la identificación del patrón gráfico, es posible evidenciar que fueron menos las parejas de estudiantes que lograron reconocer el patrón gráfico de los marcos de fotografía (situación 2), a diferencia del reconocimiento del patrón gráfico de los diseños de baldosas (situación 1), en otras palabras fue más fácil para los estudiantes dibujar los diseños de baldosas que los marcos para fotos, mientras que en la situación 3, solo la mitad de los estudiantes lograron identificar el patrón gráfico de los decorados de bombas. Es posible mencionar que el bajo número de parejas de estudiantes que no logran reconocer del patrón gráfico que presentan los marcos para fotos quizá pueda deberse, entre otras razones, a que la figura cuadrada que presentan dichos marcos implica que existan siempre 4 tapas en cada esquina que deben compartir dos lados, lo cual, tal como se observó en los análisis expuestos en el apartado anterior, las parejas de estudiantes en muchos de sus diseños no identificaban por lo que colocaban una tapa adicional en cada esquina.

- De acuerdo a la observación que logran realizar las parejas de estudiantes sobre las distintas secuencias de gráficos presentados en las tres situaciones, es posible indicar que hay por lo menos dos grupos de parejas de estudiantes que centran su atención en distintos factores, por un lado, aquellas que en sus explicaciones aluden a descripciones locales de cada uno de los gráficos que se presentan en las distintas secuencias, como por ejemplo, la cantidad de rectángulos de color blanco y gris de cada diseño de baldosa presentado, y además mencionan descripciones cualitativas de dicha secuencia. Por otro lado se encuentran las parejas que centran su atención en variaciones cuantitativas presentes en la secuencia de gráficos, particularmente, en la situación 1 son más las parejas que pertenecen al primer grupo, y conforme avanzan las situaciones, empieza a aumentar la cantidad de parejas que se ubican en el segundo grupo.

Lo anterior permitiría de alguna manera explicar el hecho de que en la primera situación, tal como ya se indicó, sean más las parejas que logran identificar el patrón gráfico, en el sentido de que al tomar conciencia sobre las descripciones locales que conforman cada una de las figuras, permite que dichas parejas continúen con la secuencia de esas figuras, dándoles más elementos para reconocer las variaciones presentes y así poder capturar el patrón gráfico.

- En relación con el reconocimiento de las diversas variaciones que se presentan en las tres situaciones de la secuencia didáctica, como por ejemplo el aumento de rectángulos de color blanco en la primera situación, el aumento de la cantidad de tapas en cada marco de fotografía en la segunda, y el aumento de bombas en cada decorado, fue posible evidenciar el progreso que tuvieron las parejas de estudiantes en relación con la identificación de esas variaciones, es decir, mientras en la situación 1 de los diseños de baldosas fueron menos las parejas que lograron reconocer las distintas variaciones que allí se presentaban, en la situación 2 la cantidad de parejas que identificaron la variación involucrada es mayor, y aún más esta cantidad crece en el reconocimiento de las variaciones que se presentan en la situación 3. Lo anterior posiblemente sucede porque la situación 1 estuvo direccionada por las autoras de este trabajo, en el sentido que se planteaban más preguntas que de alguna forma tensionaban las respuestas de las parejas de estudiantes, caso contrario con las otras dos situaciones en las que los estudiantes tenían más posibilidades de explorar las situaciones.

- De acuerdo a las preguntas que tenían como objetivo establecer diferentes estrategias para describir el patrón de forma general, se resalta que en la situación 1 los estudiantes lograron identificar ciertas covariaciones, evidenciando las más elementales, como por ejemplo, la relación entre el número del diseño y la cantidad de rectángulos de color gris, esto es “uno es a uno”; y la cantidad de rectángulos de color gris y blanco que es de “uno es a cuatro”. Sin embargo cuando había que encontrar la covariación entre cualquier diseño y la cantidad total de rectángulos presentaban cierta dificultad, quizá esto se debe a que esta última relación es una composición aditiva de las dos anteriores. Ahora bien, respecto a las situaciones 2 y 3, se puede observar que aumenta el número de parejas que logran reconocer para casos generales el patrón en la cantidad de tapas según el marco de fotografía, y el número de bombas necesarias según el decorado.

- Finalmente, es posible indicar también que respecto a las propiedades de la proporcionalidad directa expuestas en la perspectiva matemática se puede observar que las parejas de estudiantes no evidencian en ninguna de sus explicaciones de las tres situaciones el uso de propiedades tales como la homogeneidad de la suma y del producto, debido a que establecen la covariación entre distintas cantidades a partir de reconocer la constante de proporción o tener en cuenta el gráfico anterior, quizá esto se deba a que la identificación y reconocimiento de estas propiedades en sus explicaciones necesita un nivel de maduración más amplio en trabajos como los propuestos para que hagan uso este tipo de argumentos en sus respuestas.

CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

La presentación de este capítulo se ha divido en dos apartados, en el primero se exponen algunas conclusiones del trabajo, y en el segundo, algunas reflexiones que se pueden generar a partir de lo presentado en este informe. Con respecto al primer apartado se debe resaltar que dichas conclusiones emergen tomando como referencia los objetivos trazados desde el inicio del trabajo y los resultados obtenidos de la implementación de la secuencia. Por su parte, las reflexiones didácticas surgen, principalmente, del reconocimiento y necesidad de desarrollar razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de la Educación Básica Primaria y de la manera como debería presentarse el trabajo algebraico en las aulas de clases.

4.1 CONCLUSIONES

- Según los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica, es posible afirmar que ésta aportó elementos para el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes, en virtud de que realizaron justificaciones, argumentaciones, establecieron conjeturas y relaciones entre distintas magnitudes, y lograron ciertos niveles de abstracción y generalización que se reflejan de manera progresiva en las tres situaciones presentadas. De este modo la secuencia didáctica se presenta como un recurso valioso para favorecer este tipo de razonamiento.

- De acuerdo a la postura que se asume en este trabajo en torno al razonamiento proporcional y a los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica, es posible afirmar que los estudiantes muestran algunos indicios del desarrollo de dicho razonamiento, dando cuenta de algunas características que mencionan distintos investigadores como Lesh, Post y Behr (citado por Mochón, 2012) y Koellner & Lesh, 2003 que son distintivos de este razonamiento, tal y como la identificación de variaciones cualitativas y cuantitativas, el reconocimiento de relaciones aritméticas y covariaciones, entre otros.

- En relación con los referentes conceptuales presentados en este trabajo, los cuales fueron tomados desde cuatro perspectivas a saber: curricular, matemática, didáctica y semiótica, es posible anotar que brindaron insumos fundamentales para el diseño de la secuencia didáctica y la realización del análisis de los resultados que arrojó la implementación de dicha secuencia. Cabe resaltar la coherencia que guardan estas perspectivas en el sentido de que algunos elementos de la perspectiva didáctica se articulan con elementos de la perspectiva semiótica lo cual da consistencia para la realización del análisis.

- Respecto al diseño de la secuencia didáctica propuesta es importante mencionar que las actividades presentadas permitieron que los estudiantes alcanzaran progresivamente mayores niveles de generalización en sus procesos de aprehensión visual y en las relaciones cuantitativas que se desprendían de la secuencia de gráficos expuestos. Lo anterior es importante resaltarlo en virtud de que responden al llamado que hacen investigadores como Mason et al. (1985) y Bednarz et al. (1996) en relación con que la generalización de patrones se convierte en una entrada para dotar de sentido y significado el lenguaje algebraico que en años posteriores se presentará a los estudiantes con los cuales se desarrolló el estudio de campo.

- La secuencia didáctica propuesta en este trabajo permitió un trabajo exploratorio y colaborativo respondiendo a la fase que propone Mason et al. (1985) respecto a describir un patrón, puesto que al agrupar los estudiantes en parejas se promovió el intercambio de ideas, discusión de distintas percepciones, establecimiento y reformulación de conjeturas, y planteamiento de distintas estrategias.

- Este trabajo atiende a la necesidad expuesta en los antecedentes reportados de desarrollar razonamiento algebraico en los primeros ciclos de escolaridad, en virtud de que se logra proponer una secuencia didáctica sustentada en muchos de estos antecedentes, para lo cual los estudiantes responden positivamente al hecho de lograr mayores niveles de abstracción y generalización en diferentes escenarios a partir del reconocimiento de patrones tanto gráficos como cuantitativos.

- La secuencia didáctica propuesta permitió que los estudiantes usaran diferentes medios semióticos de objetivación, tales como gráficos, la percepción, términos genéricos como “el número”, “cualquiera”; los cuales fueron elementos sustanciales para transitar por diferentes niveles propuestos por Radford (2003) en relación a avanzar en el proceso de generalización de patrones y para tomar conciencia de las variaciones y covariaciones presentes en la sucesión de gráficos.

- En relación con las investigaciones propuestas por Radford (2003) se puede observar que en los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes no logran acceder al tercer a un tipo de “generalización simbólica”, en el sentido de que en sus respuestas no emerge ningún simbolismo algebraico para representar las magnitudes involucradas. Es importante anotar, sin embargo, que no es esta la intención de la propuesta misma de la secuencia didáctica, puesto no era el objetivo contemplado. Se considera pues que para lograr que los estudiantes lleguen a estos niveles de generalización se necesitan actividades que tengan este propósito y que por tanto permitan la emergencia del simbolismo algebraico.

- Los patrones gráficos - icónicos contribuyeron a que los estudiantes no solamente identificaran dichos patrones, sino que además lograran abstraer variaciones de tipo cuantitativo que se presentaban en esos gráficos, es decir, reconocer patrones numéricos. Lo anterior permite afirmar que el trabajo con estos patrones favorece, por un lado, el reconocimiento de secuencias figurales y la iconicidad de estas, y por otro, el establecimiento de relaciones numéricas.

- La secuencia didáctica propuesta a partir de situaciones problemáticas, donde emergían unos contextos asequibles al grado de escolaridad y personal de los estudiantes permitió incentivarlos en el desarrollo de un pensamiento matemático autónomo, que le posibilite la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar (MEN, 1998), particularmente en situaciones donde deban relacionar diferentes cantidades.

- En el sentido propuesto por el MEN (2006), este trabajo aporta al desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos puesto que los estudiantes logran dar cuenta de algunas características como el reconocimiento de la variación y el cambio en una sucesión de figuras y representación de los siguientes términos de la sucesión por medio de dibujos o forma escrita, lo cual es propio de dicho pensamiento desde los primeros ciclos de escolaridad, convirtiéndose así en un trabajo importante para en años posteriores introducir conceptos como el de función, dependencia, independencia, variación, dominio, entre otros.

- Teniendo en cuenta que el álgebra se entiende aquí como el estudio de las relaciones y no como la manipulación de letras sin sentido, es posible afirmar que con este tipo de propuestas se logra avanzar en el trabajo algebraico con los estudiantes, puesto que durante la implementación de la secuencia didáctica fue posible reconocer que los estudiantes establecían relaciones y comparaciones entre las magnitudes que se involucraban en las situaciones presentadas.

- El desarrollar este trabajo con una metodología sistematizada aporta a las autoras del mismo, en la formación académica y profesional, puesto que amplía la concepción que se tiene del trabajo algebraico en la escuela, apropiándose de unos enfoques teóricos que permitieron construir una secuencia didáctica que contribuye al desarrollo del razonamiento algebraico.

4.2 REFLEXIONES DIDÁCTICAS

- Es necesario cambiar la idea generalizada que tienen maestros, directivos y estudiantes respecto a que el desarrollo del razonamiento algebraico es propio de la Educación Básica Secundaria, y además, es importante resaltar la idea de que es posible y necesario desarrollarse en los primeros ciclos de escolaridad. Este trabajo es prueba de ello, pues tal y como se afirmó, se logra potenciar este tipo de razonamiento en los estudiantes objetos de estudio con la secuencia didáctica diseñada.

- Es importante que el maestro tenga conciencia de que el trabajo algebraico no es propio de ciertos grados de la Educación Básica Secundaria, por lo cual es necesario que éste desarrolle el razonamiento algebraico en los primeros ciclos de escolaridad, favoreciendo actividades que la investigación misma en didáctica del álgebra está proponiendo para desarrollar este tipo de razonamiento, en este orden de ideas, es necesario que el maestro reconozca la posibilidad de hacer este tipo de actividades y que para ello cualifique su práctica.

- Con relación al trabajo algebraico es importante iniciarlo a partir de situaciones que logren dotar de sentido y significado la emergencia de símbolos logrando así niveles de abstracción en los estudiantes, que les permita posteriormente desprenderse de ese campo semántico para luego en la Educación Básica Secundaria empezar a realizar un tratamiento propiamente algebraico de estos símbolos, esto es, carente de cualquier carga semántica.

- Es necesario propiciar el desarrollo del razonamiento algebraico desde los primeros ciclos de escolaridad para lograr generar espacios con los estudiantes en los cuales se contribuya a la superación de dificultades y errores que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra, como por ejemplo, la concepción de signo igual, la falta de cierre, la concepción de las letras, el carácter operacional y estructural de los signos, entre otras.

- Es necesario generar investigaciones articuladas a este trabajo, en relación con las actividades propuestas para el desarrollo del razonamiento algebraico que favorezca la emergencia de símbolos, pues tal y como ya se ha mencionado, estos no emergen en el trabajo de los estudiantes en virtud de que no es el propósito de la secuencia didáctica presentada.

- Este tipo de secuencias didácticas realizadas para los estudiantes rompen con esquemas tradicionales de la enseñanza de las matemáticas y del álgebra en particular, atendiendo al llamado que hacen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para promover el desarrollo del pensamiento matemático. Es importante resaltar además que este tipo de propuestas necesita de tiempos y espacios adecuados para su desarrollo, los cuales no se corresponde por lo general en el plano de trabajo real.

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Acevedo, J. (1991). Patrones de razonamiento proporcional en la resolución de tareas de ciencia. *Suma, 8* (1), 41-47.

Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. Educational Studies in Mathematics, 6- 23.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). Funciones y Gráficas. Colección: Matemáticas: Cultura y aprendizaje. (pp.81- 103). España: Síntesis

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza. Traducción de Urbano. Kluwer academic publishers. Montreal. Canadá.

Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria*. (Tesis doctoral). Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional. México, D. F.

Butto, C. & Rojano (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22* (3), 55-86.

Castro, E. (1995). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales (Tesis doctoral). Comares, Granada.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Investigación en Educación Matemática. 16, 75 - 94.

Castro, F., Godino, G., & Rivas, M., (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Unión: Revista Iberoamericana de educación matemática, 11 (25)*, 73-88.

Castro, W.F (2008). Razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio (tesis de maestría). Universidad de Granada. Granada.

Garriga, J. (2011). El lenguaje algebraico: Un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria (tesis doctoral). Universidad Zaragoza. Zaragoza.

Gascón, J. (1999). La naturaleza pre- algebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática. 11* (1), 77-88.

Gobernación de Antioquia [GA]. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. Módulo 2. *Didáctica de las matemáticas.* Universidad de Antioquia. Antioquia, Medellín.

Godino, J. D. & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. 767 – 826.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias.

Holguín, C. (2012). *Razonamiento proporcional* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, *7*, 229-240.

Koellner, C. & Lesh, K. (2003, Febrero). Whodunit Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103,* (2). 92, 93.

Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1999). Cálculo y Geometría Analítica. (L. Abellanas, Trad.). México, DF. : Compañía Editorial Ultra, S.A de C.V.

Mason, J., Graham A., Pimm, D., & Gower, N. (1985). Routs to roots of algebra. The Open University Press, Great Britain.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* 65- 86. London: Kluwer Academic Publishers.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fé de Bogotá, Colombia.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciencias Ciudadanas.* Santa Fe de Bogotá. Colombia.

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización (Tesis de Maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Mochon, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. 24*, (1), 133- 157.

Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria (tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical thinking and learning. 5, (1)*, 37-70.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *British Society for Research into Learning Mathematics. 12,* (1), 1- 19.

Rivera E. & Sánchez L. (2012). Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: Generalización de patrones numéricos. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ruiz, E, & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9, (2),* 299- 324.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Editorial Síntesis. Madrid.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista Números*, *77*, 5-34.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. & Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias. 14 (3)*, 351- 363.

Torres, L. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Valoyes, L., & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Cali, Valle del Cauca.

Vasco, C. E. (1999). Qué es el GEM Las Matemáticas Escolares en el año 2001. Boletín de la Red en Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle, 1.

Vergel, R, (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis Doctoral).Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

ANEXOS

Anexo 1: protocolo de la pregunta 3, actividad 1, situación 1.

Estudiante A: *Depende de las otras, a ver cuánto cada una.*
Entrevistadora 1: *Haber, muéstreme, explíqueme que yo no sé cómo hacerlo.*
Estudiante A: *Que cuente estas* [señala con su mano la secuencia, ilustración 7].
Entrevistadora 1: *¿Qué cuento?*
Estudiante A: *Y como cada una aumenta dos, una gris y una blanca, entonces así hicimos para saberlo.*
Entrevistadora 1: *¡Ah!, osea que cuando yo sigo ¿qué pasa?, ¿aquí me aumentarían dos?* [Señala con su mano la secuencia, ilustración 7].
Estudiante A: *Dos, una gris y una blanca.*
Estudiante B: *Y en la 5, otra gris y otra blanca.*
Entrevistadora 1*: mmm, Y si yo le digo la baldosa N° 7*
Estudiante B: [mira a su compañero y se ríe] ¡*Pues no hemos hecho la cuenta hasta allá!*

Anexo 2: protocolo de la pregunta 1, actividad 3, situación 1.

Estudiante C: *Si es la baldosa 50 también tiene que tener 50 grises* [señala con su mano la tabla, ilustración 13].
Entrevistadora 1: *¡aja!*
Estudiante C: *Le aumentamos 4 y son 50, entonces quedan 54 blancos.*
Entrevistadora 1: *¡eso!, entonces si yo le digo la baldosa N°64, ¿Cuántos rectángulos de color gris tiene y cuántos de color blanco?*
Estudiante C: *mmm… ¿64?, hay 64 grises y de color blanco 68*
Entrevistadora 1: *La baldosa N°64 ¡aja!*
Entrevistadora 1*: Entonces si yo le digo explíquele a ella*, [haciendo referencia a la entrevistadora 2] *si ella te da el número de baldosa ¿Cómo tú haces para saber cuántos rectángulos de color gris tiene y cuantos rectángulos de color blanco tiene? ¿Cómo haces para saber eso?*
Estudiantes C: *mmm…, porque aquí en la primera actividad en el diseño de baldosa 1 tiene, en el diseño de baldosa 2 tiene 2 y en el 3 tiene, entonces en cualquier número, si en la 64 debe tener el mismo número de los grises y en la blanca le aumentamos 4.*
Entrevistadora: *Listo muy bien.*

Anexo 3: protocolo de la pregunta 2, actividad 2, situación 2.

Entrevistadora 1: *¿Cómo hacen para saber cuántas tapas necesito?*
Estudiante D: *mmm…, multiplicando por la tabla del 4.*
Entrevistadora 1: *¿Multiplicando por la tabla del 4? ¿Qué multiplicas por la tabla del 4?*
Estudiante D: *El marco 1, 2, 3, 4…, 5, 6.*
Entrevistadora 1: *¡Eso es!, si yo le digo el número del marco 5, ¿Cuántas tapas necesito?*
Estudiante E: *¡20!*
Entrevistadora 1: *¿El marco 6?*
Estudiante D y E: *24*
Entrevistadora 1: *¿El marco 8?*
Estudiante D y E: *¡28!... ¡ve!*
Entrevistadora 1: *Les voy a decir para el marco 12.*
Estudiante D: *¡Está en la tabla!* [Le dice al estudiante 2].
Estudiante E: *¡No!, no está. ¡48!*
Entrevistadora 1: *¿Cómo hiciste?* [Le pregunta al estudiante 2].
Estudiante D: *¡es 32!*
Estudiante E: *¿4 por 12 es 32?*
Entrevistadora 1: *¿Tu qué hiciste?* [Le pregunta al estudiante 2].
Estudiante D: *¿4 por 12?*
Entrevistadora 1: *¿Porque por 12?*
Estudiante D: *porque es el número del marco.*
Entrevistadora 1: *¿y el 4 por qué?*
Estudiante E: *porque hemos sumado de 4 en 4.*
Entrevistadora 1*: Bueno, entonces la estrategia ¿cuál es?, así como ya ustedes tienen una estrategia. Ustedes les dan el número del marco y yo no sé qué hacen, suman restan, pero ustedes me dicen el número de tapas ¿cierto?*
Estudiante D: *¡Multiplicamos!*
Entrevistadora 1: *La idea es que ustedes cuenten esa estrategia. Cuenten ustedes como hallar el número de tapas conociendo el número del marco. ¿Sí?* [Las estudiantes afirman moviendo la cabeza].

Anexo 4: protocolo de la pregunta 3, actividad 1, situación 3

Entrevistadora 1: *Supongamos que usted no ha visto esos decorados, entonces yo le digo, cuéntele a él* [señalando a estudiante F] cómo son los decorados, descríbale, cuéntele como puede él hacer esos decorados, el decorado 1 es así, el decorado 2….
Estudiante F: *El decorado 1, debe tener cuatro bombas, una arriba, una abajo una al lado y otra al otro lado* [señalando con la mano en forma de círculo a cada uno de los lados mencionados, es decir, arriba, abajo, a la izquierda, a la derecha], *la segunda debe tener dos bombas arriba, dos bombas abajo, dos bombas al lado y dos bombas al otro lado,* [señalando nuevamente cada lado mencionado pero en la mano muestra dos dedos] *y la tercera, tres bombas arriba, tres bombas abajo, tres bombas al lado y tres al otro lado* [señalando nuevamente, arriba, abajo, a la izquierda, a la derecha, pero en la mano muestra tres dedos].
Entrevistadora 1: *¿Y el decorado 8, cómo sería?*
Estudiante F: *ocho bombas arriba, ocho bombas abajo* [se ríe], *ocho bombas al lado y ocho al otro lado* [señalando con la mano abierta a cada uno de los lados mencionados].
Entrevistadora 1: *¿Cómo sabes que van tantas bombas acá, haya?*
Estudiante F: *primero, si nos digieran muchas bombas, las acomodamos en hilera,* [señalando con la mano en forma de circulo arriba, abajo, a la izquierda, a la derecha]*... primero vamos aumentando una bomba a cada lado, y si llegamos a siete, yo le aumento una para llegar a ocho.*
Entrevistadora 1: *Si yo digo decorado 100, ¿cómo sería el decorado 100?*
Estudiante F: [se ríe] *cien bombas.*
Entrevistadora 1: *¿Cien bombas en dónde? ¿Cuántas bombas tendría en total?*
Estudiante F: *En total, en total serían 40* [hace un gesto de negación con la cabeza] *400.*
Entrevistadora 1: *¿Y cómo irían acomodados?*
Estudiante F: *Cien arriba, cien abajo, cien al lado, cien al otro* [se ríe, mientas señala con las manos haciendo un gesto como de "extensión" cada uno de los lados mencionados] *cien bombas.*
Entrevistadora 1: *¡Eso, Entonces eso es!*
Estudiante F: *Sí..., pero para el decorado 100* [se ríe y a la vez en su voz deja ver que duda de lo que dice].
Entrevistadora 1: *No, hágalo de manera general, sabes cómo es de manera general, ¿si yo te doy cualquier número de decorado cómo sería?*
Estudiante F: *mmm ya* [afirmando con la cabeza].
Entrevistadora 1: *Si yo le doy el decorado 4, ¿cómo sería?*
Estudiante F: *El decorado 4, sería cuatro bombas arriba, cuatro bombas abajo, cuatro bombas al lado y cuatro al otro lado* [señalando nuevamente, arriba, abajo, a la izquierda, a la derecha, pero en la mano muestra cuatro dedos].
Entrevistadora 1: *Entonces la idea es que usted le explique a su compañero que no está viendo los decorados ¿cómo lo podría hacer? y ¿cómo es? qué característica tiene, si él le da cualquier número de decorado.*
Estudiante F: *¿Entonces él* [señalando al estudiante F] *me tiene que dar un número de decorado y yo lo hago?*
Entrevistadora 1: *¡No! , explícale, descríbale dependiendo del número del decorado, de cualquier número de decorado, si yo te digo el decorado 100, ¿cómo sería?*
Estudiante F: *¡mil! Sería mil arriba, mil abajo, mil al lado y mil al otro lado* [señalando con la mano arriba, abajo, a la izquierda y derecha]

Entrevistadora 1: *¿De qué depende el decorado de las bombas? ¿Usted cómo sabe, cómo hacer el decorado de la bomba?*
Estudiante F: *como esta en la ilustración*
Entrevistadora 1: *aja*
Estudiante M*: De cómo lo quieran, por ejemplo si lo quiere como una "ele"* [con la mano señala la forma de la "ele"]
Entrevistadora 1: *Listo. Ahí lo que usted tiene que hacer, es que descríbale, explíquele a alguien que no está viendo, ¿cómo es el decorado que ustedes saben hacer? Dependiendo de qué, del número del decorado que les den, ¿cuántas bombas necesitan? Si yo les digo el decorado 500, ¿cómo sería?*
Estudiante F: *Quinientos arriba...*
Entrevistadora 1: *¿500 qué?*
Estudiante F: *Quinientas bombas arriba, quinientas bombas abajo, quinientas al lado y al otro lado*
Entrevistadora 1: *¿Usted cómo sabe cuántas bombas van arriba, cuántas bombas abajo… cómo sabe?*
Estudiante F: *del número que da*
Entrevistadora 1: *¿Cuál número, yo que número doy?*
Estudiante F*: el del diseño, quiere decir que uno le dice a un muchacho tiene quinientas bombas arriba, quinientas bombas abajo.*
Entrevistadora 1*: ¡Ojo! yo digo el número del decorado, pero usted me lo acomoda, yo quiero el decorado 20, pero usted ya sabe ¿cómo va ese decorado, cierto?*
Estudiante F: *Si...* [Afirmando con la cabeza] pero hay que preguntarle cómo lo quiere.
Entrevistadora 1: *mmm…, si pero hágalo como de manera general, si me dan cualquier número de decorado entonces cómo lo haría.*
Estudiante F: *Entonces tengo que describirlo como sería, ¿pero cuál describiría?*
Entrevistadora 1: *El que usted quiera, pero necesito que usted me escriba cómo sabe cuántas bombas van arriba, cuántas bombas van abajo, cuántas a los lados, porque usted me dice que el decorado tiene unas bombas arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda, cierto, ¿de qué depende ese número de bombas?*
Estudiante F: *De decirle cuantas bombas uno quiere.*
Entrevistadora 1: *Listo, entonces explique eso.*

Anexo 5: protocolo de la pregunta 5, actividad 1, situación 3

Entrevistadora 2: *Para realizar el decorado bombas 20, indique ¿cuántas bombas necesita para hacerlo? Y justifique la respuesta. Dime*
Estudiante G: *[mientras levanta la mano] ¡80!*
Entrevistadora 2: *Cómo hiciste para hallar el 80?*
Estudiante G: *Porque pongo 20 arriba, 20 abajo, 20 al lado y 20 al otro [señalando arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha]*
Entrevistadora 2: *¿Cómo haces para saber que van 20 arriba, 20 abajo…?*
Estudiante G: *porque el número es 20 a cada lado.*
Entrevistadora 2: *Muy bien, ¿Quién más? ¿Quién?*
Estudiantes G, H y J: *Multiplicando 20 por 4.*
Entrevistadora 2: *Multiplicando 20 por 4 y le da 80, y ¿por qué multiplicar?*
Estudiantes G, H y J: *[Indicando con la cabeza que si]*
Estudiante G: *Porque es como sumar 4 veces*
Entrevistadora 2: *mmm ya, listo la quinta pregunta. Lorena y su mamá quieren saber cuántas bombas necesitarían para realizar cualquier decorado. Inventa una estrategia que les permita a ellas saber la cantidad de bombas necesarias si conocen el número del decorado.*
Estudiante G: [Levanta la mano] *Multiplicamos por 4 el decorado.*
Entrevistadora 2: *Multiplicamos por el decorado ¿Cómo así que multiplicamos por el decorado?*
Estudiante G: *Por el número del decorado*
Entrevistadora 2: *¡Muy bien!*

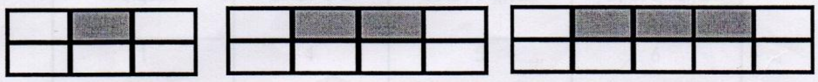
Anexo 6: Situación 1

• DIANA Marcela Orobio Guerrero 5-5

• Diana Carolina Rivera Carvajal.

Situación 1. Diseño de baldosas para la remodelación del cuarto de Juan

Juan está pensando en remodelar el piso de su alcoba, para ello el constructor, le propone diferentes diseños de baldosas, las cuales están formadas por rectángulos blancos y grises, tal como se muestra a continuación.



Diseño de Baldosa 1 — Diseño de Baldosa 2 — Diseño de Baldosa 3

A partir de la situación anterior responde a las siguientes actividades:

Actividad 1: *Explorando el diseño de la baldosa.*

1. Observa la secuencia de diseños de baldosas presentados y describe algunas relaciones o regularidades que ves.

2. El constructor le quiere presentar a Juan el diseño de la baldosa 4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco y de color gris lleva la baldosa? Justifica tu respuesta y dibuja el diseño de la baldosa.

3. Si ahora el constructor desea presentarle a Juan el diseño de la baldosa 5. ¿De cuánto es la cantidad de rectángulos de color blanco y de color gris que hay en el diseño de esta baldosa? Explica cómo encontraste la cantidad de rectángulos de ambos colores.

4. ¿Cuántos rectángulos de color blanco aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color blanco en diseño en diseño?

5. ¿Cuántos rectángulos de color gris aumentan del diseño de la baldosa 1 al diseño de la baldosa 2? Y cuántos del diseño 2 al diseño 3? En general ¿cuánto es el aumento de rectángulos de color gris en diseño en diseño?

Solucion

1) Diseño 1 Diseño 2

Blacos=Los blancos tienen 5 tiene 6 Blancos y

grises=LOS Grises tiene 1 2 Grises

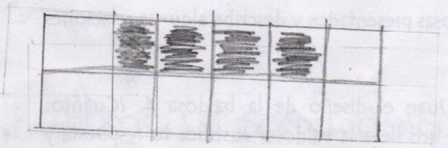
Diseño 3

tiene 3 Grises y

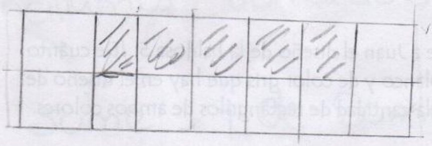
7 blancos

2) La baldosa 4 Tiene 4 Grises y 8 blancos

Justificacion: Nosotras Respondimos y contamos los de la 1 2,3 y hacia le aumetamos 1 blanco y 1 Gris



3)



explicacion: al encontrar los colores Gris y blanco Fue encontrandolo en 4 y

4) del diseño 1 al diseño 2: aumenta 1 blanco
del diseño 2 al diseño 3: aumenta 1 blanco
en General aumenta 1

5) del diseño 1 al diseño 2: aumenta 1 Gris
del diseño 2 al diseño 3: aumenta 1 Gris
en General aumenta 1

Actividad 2: *Relaciones entre cantidades en los diseños de baldosas*

Juan ha decidido realizar una tabla en la cual se ubica algunas cantidades que él ha observado en las secuencias de baldosas. Ayúdale a Juan a Completar la tabla

Número del diseño de la baldosa	Cantidad de rectángulos de color gris	Cantidad de rectángulos de color blanco	Cantidad total de rectángulos en el diseño
1	1	5	6
5	5	9	14
7	7	11	18
11	11	15	26
20	20	24	44.

1. Explica como hiciste para completar la tabla, a partir de los datos dados.
2. De acuerdo con la tabla ¿qué relación tiene la cantidad de rectángulos de color gris y el número del diseño de la baldosa?
3. De acuerdo con la tabla ¿qué relación se puede observar entre la cantidad de rectángulos de color blanco y la cantidad de rectángulos de color gris? Explica tu respuesta

Actividad 3: *Reconociendo patrones en los diseños de las baldosas*

1. Juan desea hallar el número de rectángulos de color blanco en el diseño de la baldosa 50, explícale cómo hacerlo.
2. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de rectángulos de color blanco si se conoce la cantidad de rectángulos de color gris?
3. ¿Cómo se halla la cantidad de rectángulos (blancos y grises) de una baldosa si se conoce el número del diseño de esa baldosa? Explica tu respuesta.

1) Porque al 11 Le Faltan 4 Para llegar a 15 entonces al 20 le Fatan 4 Para llegar a 24

2) No tiene diferencia Porque tiene el mismo numero

3) Que le lleva 4 diferencia

Actividad 3

1) al 50 aumentale 4 da 54

2) La hallamos sumandolo 4 de blancos son 64
La hallamos sumandolo 4 de Gris son 64

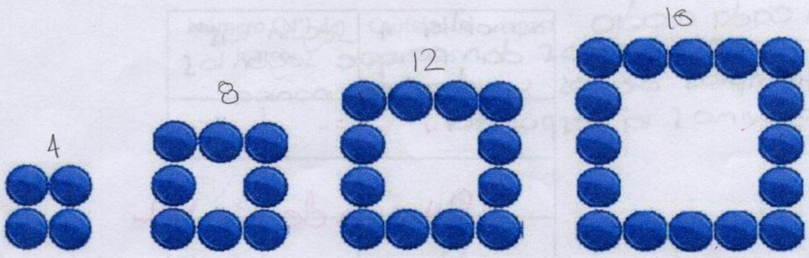
3 yo sume 4 de sumar en total me dio 44

Anexo 7: Situación 2

Michelle Sorasty Flor 5°S
Maria Isabel Castro 5°S

Situación 2. Construyendo Marcos para fotos

Mónica decide realizar marcos para fotos de diferentes tamaños, para esto utiliza tapas de gaseosas y construyen los siguientes:



Marco N°1 Marco N°2 Marco N°3 Marco N°4

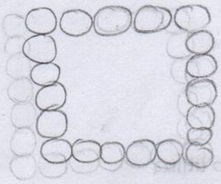
N5 = 20

De acuerdo con la situación anterior, responde las siguientes actividades:

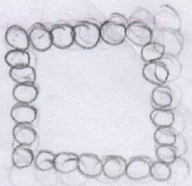
Actividad 1: ***Identificando la cantidad de tapas para realizar los marcos de fotos***

1. Observa la secuencia que presentan los marcos de fotografía que Mónica ha hecho y dibuja el marco número 5.
2. Mónica le quiere regalar a su mama de cumpleaños el marco número 6 pero no sabe cuántas tapas necesita para construirlo. ¿Cuál es la cantidad de tapas que requiere Mónica para realizar dicho marco? Explica como obtuviste esta cantidad y dibuja el marco
3. ¿De cuánto es la cantidad de tapas que aumenta cada marco de fotografía que realiza Mónica?

Solución N.1

① 

② Para el cuadro seis necesitamos 24 tapas para hacerlo obtuvimos la cantidad aumentando 4 tapas mas en cada cuadro.



③ En cada cuadro aumenta 4 segun las imagenes que nos dan porque segun los ejemplos de los cuadros de monica obtuvimos la respuesta.

Solución de la N2.

② Yo para obtener el resultado necesito multiplicar o dividir segun sea el caso si por ejemplo tenemos el número del cuadro lo multiplicamos y si tenemos la cantidad de tapas lo dividimos.

③ Como dijimos antes debemos de multiplicar por 4 para hallar el resultado porque por 4 por q' con el 4 fue el primer cuadro que hizo monica y fue aumentando 4 por eso lo multiplicamos por 4.

④ Pues monica la forma mas facil es que multipliques por el numero de tapas que utilizaste el primer marco y siguele aumentando segun sea el numero que hagas en el primer marco.

Actividad 2: *Construyendo estrategias para realizar marcos para fotos*

1. Mónica le quiere regalar a sus amigos marcos para fotos de diferentes tamaños. Para ello realiza una tabla en la cual se relaciona el número de marco y la cantidad de tapas necesarias para realizarlo. Ayúdale a completar la tabla:

Número (N°) de marco	Cantidad de tapas necesarias
1	4
4	16
7	28
11	44
15	60
20	80
83	332

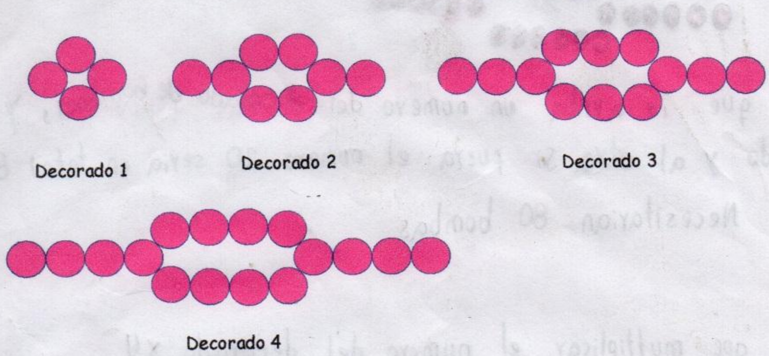
2. Explica como hiciste para completar la tabla.
3. Explícale a Mónica como hallaste el número de tapas del marco N° 83.
4. Inventa una estrategia que le permita a Mónica saber la cantidad de tapas que necesita para construir cualquier marco si se conoce el número de dicho marco.

Anexo 8: Situación 3

Jhan Paul 5-5 Javier Giraldo

Situación 3. Decoración de bombas para cumpleaños

Lorena cumple sus 15 años dentro de poco y junto a su mamá están planeando los preparativos la fiesta, uno de estos son los distintos decorados de bombas que van a realizar, los cuales se muestran a continuación:



A partir de la situación anterior, responde la siguiente actividad:

Actividad 1: Construyendo estrategias para la decoración de bombas

1) Ximena, una amiga de Lorena que asistirá a la fiesta, asegura que para el decorado número 5 se necesitan 18 bombas. Indica si la afirmación es cierta o no. Justifica tu respuesta.

2) Digan cuántas bombas necesitan Lorena y su mamá para realizar el decorado número 6. Explique cómo obtuvieron la respuesta y dibuja el decorado de la bomba.

3) Describe detalladamente cómo realizar los decorados de bombas, como si lo hicieran para un compañero del salón de clase que no está viendo las figuras.

4) Si Lorena y su mamá van a realizar el decorado de bombas 20, indica cuántas bombas necesitan para hacerlo. Justifiquen su respuesta.

5) Lorena y su mamá quieren saber cuántas bombas necesitarían para realizar cualquier decorado. Inventa una estrategia que le permita a ellas saber la cantidad de bombas necesarias si conocen el número del decorado.

1. Falsa, Porque la 4 tiene 16, y cuando la Docoraciones van aumentando de a 4 en 4 entonces la cinco tendria 20

2. Necesitan 24 bombas para la decoración 6 por que al sumarle 4 a la decoración cinco daria 24

3. Tienen que ir arriba un numero del decorado de bombas, y abajo al lado y al otro. si fuera el numero 20 seria en total 80

4. $$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 4 \\ \hline 80 \end{array}$$ Necesitarian 80 bombas

5. Tienen que multiplicar el numero del decorado x4