Yefferson Palacios Mosquera

CONTRIBUCIONES DE LIOUVILLE A LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Departamento de Ciencias Básicas
Medellín, diciembre de 2012

CONTRIBUCIONES DE LIOUVILLE
A LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Educación Matemática

Yefferson Palacios Mosquera

Director
Leonardo Solanilla Ch.
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística
de la Universidad del Tolima

Universidad de Medellín
Departamento de Ciencias Básicas
Programa de Maestría en Educación Matemática
Medellín, diciembre de 2012

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Este trabajo de grado es un análisis histórico de la primera parte del artículo *Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville* (Liouville, 1880). Se trata de un trabajo fundamental para el concepto contemporáneo de función elíptica puesto que en él se pone, quizás por primera vez, a la Variable Compleja como prerequisito de la teoría. Ya que se trata de un trabajo histórico, la metodología empleada en lo que sigue la consideraremos hermenéutica. Asumimos que el lector conoce los fundamentos de la Variable Compleja de nuestros días.

El trabajo está organizado en cuatro capítulos. En el primero, interpretamos y damos varias demostraciones posibles al teorema fundamental que aplicaremos después a las funciones doblemente periódicas. Para la etapa de camisa de fuerza, apelamos únicamente a cierto resultado analítico de Cauchy. Para nuestra interpretación contemporánea, recurrimos a los resultados básicos de un curso de pregrado sobre Variable Compleja, es decir, a las propiedades elementales de las funciones holomorfas y meromorfas. El segundo capítulo está dedicado a los dos primeros hallazgos fundamentales de Liouville (1880) para las funciones elípticas: una función doblemente periódica no puede ser acotada y, aún más, tampoco puede tener un único polo. El ingrediente esencial para lograr estos resultados es el Teorema de Liouville-Borchardt del Capítulo 1. Las notas de pie de página contienen explicaciones importantes en el lenguaje de la Variable Compleja de hoy. En el tercer capítulo se muestra por construcción directa que las funciones doblemente periodicas tienen al menos dos infinitos. También se establece una importante relación entre los dos polos y los dos ceros para este tipo de funciones. Sin embargo, lo más interesante y relevante de este tercer capítulo yace en las relaciones algebraicas que guardan las funciones meromorfas doblemente periódicas que tienen el mismo conjunto de polos. En el capítulo cuarto se muestra como las funciones elípticas con mas de dos polos se pueden estudiar con ayuda de aquellas que poseen solamente dos polos.

Al final, se bosquejan algunas conclusiones sobre los resultados y hallazgos encontrados y sobre el futuro de nuestra investigación histórica sobre las integrales elípitcas. Así mismo, se presenta una bibliografía esencial, un mapa conceptual del trabajo, que recoge importantes relaciones entre la organización original de Liouville y nuestro esfuerzo por hacerla caber en el marco de la Variable Compleja contemporánea. Para facilidad del lector, incluímos también nuestra traducción del artículo original, tal como lo redactó Borchardt.

Con la presente investigación se da un paso más en la investigación de la historia y la epistemología de las funciones elípticas, tema de interés para el grupo SUMMA de la Universidad de Medellín y el grupo `MaT` de la Universidad del Tolima. Ciertamente, ya se habían estudiado con anterioridad las integrales elípticas en los siglos XVII y XVIII, su primera teoría debida a Euler y Lagrange, la formalización de Legendre y la emergencia histórica del concepto de función elíptica en los trabajos de Abel y Jacobi. No es este el lugar para hablar de todas estas investigaciones. Basta con decir que el gran aporte de Liouville a la teoría de las funciones elípticas ha consistido en descubrir que su marco teórico natural es la Variable Compleja. Así lo prueban los hallazgos de este trabajo de grado.

CAPÍTULO 1

Teorema de Liouville-Borchardt

El propósito de este capítulo es dar una demostración rigurosa del Teorema de Liouville-Borchardt (Corolario 1.3). Este resultado es importante porque de el se derivan todas las sorprendentes y maravillosas propiedades que Liouville descubrió sobre las funciones doblemente periódicas y, por ende, las funciones elípticas.

La forma original de este resultado constituye el TEOREMA I. Luego de revisar la demostración presentada por Borchardt, damos una demostración[1] moderna y más clara del mismo teorema. Al final, mostramos su relación con el conocido Teorema de la aplicación abierta.

1.1. A conveniencia de Borchardt

Comencemos revisando el teorema fundamental del que Liouville (1880), a través de Borchardt, hace desprender todos sus importantes teoremas sobre las funciones doblemente periódicas.

TEOREMA I. Sea $z = x + y\sqrt{-1}$ una variable imaginaria repre-

[1]Original, aún siendo una consecuencia inmediata del Principio del módulo máximo. El nombre Liouville-Borchardt es nuestro y no nos consta que aparezca en otro lugar de la literatura sobre el tema.

> sentada geométricamente por el punto cuyas coordenadas rectangulares son x, y; sea $f(z)$ una función bien determinada y continua. [2] (es decir, que no pasa bruscamente de un valor finito a otro, del que difiere por una cantidad finita) y tal que, para los valores de z que pertenecen a los puntos situados en el interior de la curva cerrada K, ella toma todos los valores que puede tomar para los valores cualesquiera de z; asumido esto, digo que habrá al menos un valor de z, situado en el interior de K, para el que $f(z) = \pm\infty$, a menos que $f(z)$ sea igual una constante.

Anotemos, en primera instancia y para evitar equívocos en lo subsiguiente, que lo que se quiere demostrar es algo así como que *"una función meromorfa no constante definida en la región (cerrada) encerrada por una curva de Jordan posee obligatoriamente un valor infinito"*. Miremos, en seguida, la demostración dada en el mismo artículo.

> Supongamos que $f(z)$ no pueda volverse $\pm\infty$ y excluyamos el caso $f(z)$ constante, entonces el módulo $M(x, y)$ de la cantidad imaginaria $f(z)$ siempre estará por debajo de una cierta cota A[3] que representa el valor máximo de $M(x, y)$. Y por lo tanto, de la hipótesis que $f(z)$ toma todos sus valores en el interior de la curva K, se tendrá al menos un punto $(x_0,\ y_0)$ en el interior de esta curva, para el que el módulo $M(x, y)$ de $f(z)$ tome su valor máximo A. Así, se deberá tener que para todos los valores de x y de y la diferencia
>
> $$M(x, y) - M(x_0, y_0) =$$
> $$f(x + y\sqrt{-1}\overline{f(x + y\sqrt{-1})} - f(x_0 + y_0\sqrt{-1})\overline{f(x_0 + y_0\sqrt{-1})}$$

[2]No sabemos que entiende el autor por continuidad, pero debe ser algo más fuerte que la continuidad en el sentido contemporáneo. Ciertamente, debe indicar diferenciabilidad en el sentido complejo.

[3]Un hecho claro para la Topología de hoy: una función continua de valores reales, definida en un compacto, es acotada y alcanza su valor máximo.

> es negativa, lo cual es absurdo. Ciertamente, si ponemos $x = x_0 + h\epsilon,\ y = y_0 + k\epsilon$, donde ϵ representa una cantidad infinitamente pequeña, es fácil de ver (por un razonamiento análogo a aquel por el que Cauchy demuestra la existencia de raíces para las ecuaciones algebraicas, *Curso de Análisis*, pág. 337 y 338) que la diferencia en cuestión no puede ser del mismo signo para todos los valores posibles de h y de k[4]. Es por lo tanto imposible que $f(z)$ se mantenga finita, en consecuencia habrá al menos un valor en el interior de K, para el que $f(z) = \pm\infty$, a menos que $f(z)$ se reduzca a una constante.

Hay muchas cosas que decir sobre esta prueba. En primer lugar, Borchardt reconoce que ésta no fue la demostración que Liouville dió originalmente. En la nota al pie de la primera página de Liouville (1880), Borchardt confiesa que

> La prueba de este teorema dada por M. Liouville[5] (y que no he hecho indicar sino brevemente) ha sido remplazada en mi redacción por la demostración de un teorema más general, que no se refiere exclusivamente a las funciones doblemente periódicas y del cual resulta como corolario el teorema enunciado más abajo.

Claro, se refiere a un resultado central de la Variable Compleja que hoy, emparentado con el llamado Teorema de Liouville. A los interesados en los asuntos relativos a la originalidad en las Matemáticas, este episodio les encantará con toda seguridad. Nosotros dejamos de lado la posible mala fe o las posibles mentiras para concentrarnos en la validez de las afirmaciones.

Dicho sea de paso, hay un error tipográfico en Liouville (1880): la indicación para la conjugación compleja en la expresión para $M(x, y) - M(x_0, y_0)$ (dada más arriba) está equivocada.

[4] Hecho analítico con todo el sabor de la variable real.

[5] El mismo Borchardt dice más adelante que esta demostración se basaba en la representación de una función doblemente periódica en serie de senos y cosenos. Por esto, se trataba de algo mucho menos general que lo que nos ocupa aquí.

1.2. Teorema del módulo máximo

El teorema que se quiere probar encuentra hoy su formulación más natural bajo la luz del siguiente "principio".

Teorema 1.1 (Principio del módulo máximo)**.** *Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa*[6] *no constante definida en el subconjunto abierto y conexo*[7] *D del plano complejo. Entonces, $|f(z)|$ no puede alcanzar su valor máximo en D.*

Demostración. Supongamos que existe $z \in D$ (punto máximo del módulo) tal que

$$|f(z)| \geq |f(\zeta)|, \quad \forall \zeta \in D.$$

La posibilidad $f(z) = 0$ queda excluída por hipótesis. Sea, pues, $f(z) \neq 0$ y C una circunferencia de radio $r > 0$ contenida en D. La fórmula integral de Cauchy implica entonces que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta(\theta)) d\theta.$$

Entonces, ya que z es el punto máximo,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(\zeta(\theta))}{f(z)}\right) \leq \left|\frac{f(\zeta(\theta))}{f(z)}\right| \leq 1.$$

También, tomando las partes reales,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{f(\zeta(\theta))}{f(z)}\right) d\theta.$$

[6] Esto es, $\mathbb{C}$-diferenciable en un vecindad de cada punto de su dominio. Aún bien entrado el siglo XIX, los matemáticos franceses no tenían un concepto que englobara propiamente función y diferenciabilidad. Por ejemplo, Laurent (1880) habla de *fonctions monodromes et monogènes.*

[7] No sobra aclarar que estos conceptos de la Topología de hoy no estaban disponibles para Liouville (1880).

Por lo tanto, dado que esta parte real es una función continua, el análisis real[8] arroja que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(\zeta(\theta))}{f(z)}\right) = 1 \text{ y } \mathrm{Im}\left(\frac{f(\zeta(\theta))}{f(z)}\right) = 0.$$

Es decir,

$$f(\zeta(\theta)) = f(z)$$

en la región encerrada por C (independencia del radio r). Las propiedades conocidas de las funciones holomorfas (Levinson & Redheffer, Teorema 7.1[9]) implican que $f(\zeta) = f(z)$ en todo D. Por hipótesis, esto es imposible. $\square$

La Figura 1.1, tomada de `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Maximum_modulus_principle.png`, puede ayudar a visualizar el resultado obtenido. De paso, se obtiene el siguiente resultado importante.

Corolario 1.2 (Principio del máximo)**.** *Sea $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, una función holomorfa no constante definida en la clausura $\overline{D}$ de un subconjunto abierto y conexo D del plano. Supongamos también que $\overline{D}$ es compacta*[10]*. Entonces $|f(z)|$ asume su máximo en la frontera ∂D de D.*

Demostración. Como $\overline{D}$ es compacto y $|f|$ continua, este módulo alcanza su valor máximo en él. Ya que no lo puede asumir en el interior, lo ha de asumir en la frontera. $\square$

Con la ayuda de estos principios, podemos entender lo que Liouville y Borchardt quisieron decir en 1880. Buscamos, en verdad, una suerte de contrarecíproco. Sea $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el conjunto de los complejos extendidos, o esfera de Riemann.

[8] Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ un función continua tal que $g(\theta) \leq k$, para toda $\theta \in [a, b]$. Si

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(\theta)\, d\theta \geq k,$$

entonces g es constante e igual a k.

[9] Si f, g son holomorfas en un abierto y conexo D y $f = g$ en un una vencidad de un punto $z_o \in D$, entondes $f = g$ en D.

[10] Notemos de nuevo el uso contemporáneo de la Topología.

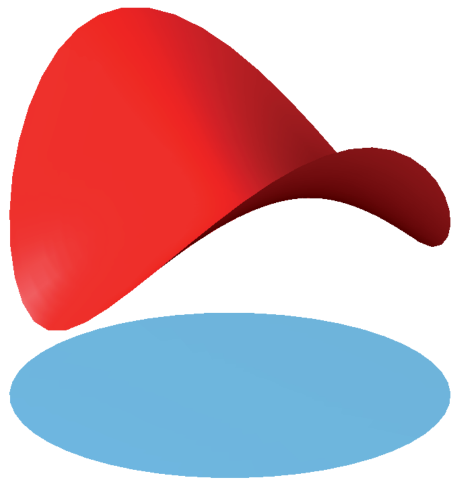

Figura 1.1: Principio del módulo máximo.

Corolario 1.3 (Teorema de Liouville-Borchardt)**.** *Sea $f : \overline{D} \to \mathbb{S}$, una función meromorfa*[11] *no constante definida en la clausura compacta $\overline{D}$ de un subconjunto abierto y conexo D del plano. Si $|f|$ no se hace infinita en ∂D ni alcanza allí su máximo, entonces existe un $z \in D$ tal que $f(z) = \infty$.*

Demostración. La posibilidad de que f sea holomorfa queda descartada. Por lo tanto, debe existir un $z \in D$ con $f(z) \notin \mathbb{C}$. O sea, $f(z) = \infty$. □

Hay varias cosas por anotar: la genialidad del argumento de Liouville, que nos saca ciertamente del plano complejo para adentrarnos en las superficies de Riemann; el uso del orden de los reales extendidos; la aparición de las funciones meromorfas; el hecho de que el módulo de f no se hace infinito en la frontera de D; . . . Otra cosa: debemos aceptar que la demostración original es más sencilla.

Sin duda, el lector contempóraneo quisiera pruebas menos analíticas. Preferimos, sin embargo, estas demostraciones porque muestran las ideas

[11] O sea, hay un conjunto discreto $P_f \subset D$ (dependiente de f) tal que f es holomorfa en $D - P_f$. En el caso particular en que f es holomorfa, $P_f = \emptyset$.

de la variable real que subsistían en el pensamiento de Cauchy. Recuérdese la referencia de Borchardt al *Cours d'analyse* (1821) del distinguido barón.

1.3. Otra reinterpretación contemporánea

Si queremos obtener el principio del módulo máximo como corolario de uno de los resultados importantes de la Variable Compleja, debemos mirar en la siguiente dirección.

Teorema 1.4 (de la aplicación abierta)**.** *Sea G un subconjunto abierto del plano complejo. Si $f : G \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no es una constante, entonces $f(G)$ es un conjunto abierto.*

Dando esto por cierto, como por ejemplo en Störm (2006, p. 9), obtenemos algo más fuerte que lo que habíamos encontrado antes.

Corolario 1.5 (Principio del módulo máximo local)**.** *Si f es una función holomorfa no constante definida en un subconjunto abierto y conexo D del plano, entonces $|f|$ no puede tener un máximo local en D.*

Demostración. Neguemos la tesis. Si $|f|$ alcanza un máximo local en z_0, entonces existe $r > 0$ tal que si $|z - z_0| < r$, entonces

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

Como consecuencia del Teorema de la aplicación abierta, existe un $\rho > 0$ tal que una $\rho-$vecindad de $f(z_0)$ está contenida en la imagen bajo f de la bola de radio r centrada en z_0. Sin embargo, en dicha $\rho-$vecindad de $f(z_0)$ se hallan elementos w tales que

$$|w| > |f(z_0)|.$$

Como existe un z con $|z - z_0| < r$ que realiza $w = f(z)$, hemos llegado a una contradicción. □

De aquí, se sigue el Teorema de Liouville-Borchardt como en la sección anterior. Notemos que este resultado nos acerca, de nuevo, a la demostración original dada por Borchardt en 1880, basada en el *Curso* de Cauchy.

El lector reconocerá que el camino para llegar al Teorema de Liouville-Borchardt no es evidente. El mismo Liouville, a lo largo de su vida, realizó al menos tres intentos por sacar el asunto en claro. Los detalles de las tres demostraciones correspondientes hacen parte del interesantísimo artículo de Peiffer (1983).

CAPÍTULO 2

Número de polos de una función elíptica

En este capítulo se demuestran los dos primeros teoremas de Liouville para las funciones elípticas. El primero de ellos es una consecuencia inmediata del Teorema de Liouville-Borchardt del capítulo anterior: las funciones elípticas deben ser, al menos, meromorfas. El segundo garantiza que el número de polos de tales funciones debe ser mayor que uno.aaaa

2.1. Una consecuencia inmediata

Antes de proseguir, se debe aclarar que Liouville (1880) no se movía a ciegas en el terreno de las funciones elípticas. Ya antes que él, Abel (1827) y Jacobi (1829) habían construido funciones meromorfas doblemente periódicas mediante un procedimiento de inversión formal de las integrales elípticas.

Las funciones elípticas tienen dos periodos linealmente independientes. El estudio de una función doblemente periódica en todo el plano complejo se reduce a determinar sus valores en cierto paralelogramo fundamental (semicerrado) P[1]. Puesto que queremos que las singularidades de nuestra

[1] Si "pegamos" los lados opuestos mediante la relación de equivalencia pertinente, obtenemos un toro. Así, la teoría se formula con más elegancia en el marco de las superficies de Riemann.

función sean un número finito de polos, es siempre posible encontrar un tal P tal que los mentados polos no queden en la frontera ∂P. Leamos como Liouville (1880) describe este paralelogramo:

> Sea $\varphi(z)$ una función doblemente periódica con índices de periodicidad [2] ω, ω', de suerte que
>
> $$\varphi(z) = \varphi(z + 2\omega) = \varphi(z + 2\omega').$$
>
> Entonces, $\varphi(z)$ tomará todos los valores atribuidos a z y contenidos en la fórmula
>
> $$z = z_0 + u\omega + u'\omega',$$
>
> donde u y u' varían desde -1 hasta 1. Estos valores pertenecen a los puntos situados en el interior del paralelogramo cuyos vértices corresponden a los valores
>
> $$z_0 - \omega - \omega',\ z_0 - \omega + \omega',\ z_0 + \omega - \omega',\ z_0 + \omega + \omega'.$$

En lo subsiguiente, Liouville usa la siguiente abreviatura para P:

$$z = z_0 + u\omega + u'\omega', \left\{ \begin{array}{ll} u = +1, & u' = +1 \\ u = -1, & u' = -1 \end{array} \right\}.$$

Dado que las constantes no son funciones interesantes, se obtiene directamente lo siguiente cuando aplicamos el Teorema de Liouville-Borchardt (Corolario 1.3) a las funciones doblemente periodicas (o elípticas). El dominio D es, en este caso, el interior de P. La curva de Jordan (regular a trozos) es $K = \partial P$.

Teorema 2.1 (Primero de Liouville para las funciones elípticas)**.** *Una función meromorfa, no constante y doblemente periódica $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ tiene que hacerse infinita en al menos un punto. Es decir, debe tener un polo.*

[2] O sea, periodos.

De nuevo, este hecho se interpreta fácilmente entendiendo que f debe ser meromorfa, pero no holomorfa. O sea, considerando a las funciones holomorfas como una parte de las meromorfas.

Si consideramos una representación de nuestra función en serie de potencias[3], podemos obtener una formulación alternativa equivalente a este "primer teorema". La Variable Compleja garantiza que esta representación de $\varphi(z)$ tiene una parte entera (analítica, holomorfa o de Taylor) $\lfloor\varphi(z)\rfloor$ y una parte fraccionaria (singular, principal o de Laurent) $\{\varphi(z)\}$, de tal suerte que

$$\varphi(z) = \lfloor\varphi(z)\rfloor + \{\varphi(z)\}.$$

De esta manera, el teorema anterior equivale a lo que sigue.

Corolario 2.2. *Una función meromorfa, no constante y doblemente periódica $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ no puede tener parte fraccionaria $\{\varphi(z)\}$ nula.*

2.2. Relación con el Teorema de Liouville

El teorema de la sección anterior se puede obtener muy rápidamente de uno de los teoremas importantes de la Variable Compleja.

Teorema 2.3 (de Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada, entonces es una función constante.*

Demostración. Por hipótesis, existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$. La aplicación del estimado de Cauchy[4], para cada $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{M}{R},$$

[3]Esta representación siempre es posible, a saber: la serie de Laurent de φ. Este es un resultado básico de la Variable Compleja.

[4]Si $f(z)$ es holomorfa en el disco $|z - a| < R$ y $|f(z)| \leq M$ en este disco, entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{R^n}.$$

Se trata de una consecuencia inmediata de la Fórmula Integral de Cauchy, *cf.* Levinson & Redheffer (1970, p. 137).

para cualquier radio R. O sea, $f'(\alpha) = 0$. Así, $f' \equiv 0$ y f es una constante en el plano. □

De nuevo, remitimos al lector a las tres demostraciones del Teorema de Liouville presentadas en Peiffer (1983). Con esto, es posible demostrar de otra manera (muchísimo más sencilla) el “primer” teorema de Liouville.

Corolario 2.4. *Una función meromorfa, no constante, doblemente periódica y acotada $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ es imposible.*

Demostración. Como φ es acotada en un paralelogramo fundamental, lo es en todo el plano. Así, queda reducida a $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. El Teorema de Liouville implica entonces que es una constante. Esto es imposible. □

2.3. Imposibilidad de un polo único

En esta sección seguimos la demostración de Liouville (1880) del siguiente hecho: tampoco existen funciones, como las consideradas hasta ahora, con un único infinito.

Teorema 2.5 (Segundo de Liouville para las funciones elípticas)**.** *Una función meromorfa, no constante y doblemente periódica $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ con un único polo es imposible.*

Demostración. Procedamos por *reductio ad absurdum.* Supongamos que existe una función φ que cumple las hipótesis y tiene un polo único en α en el interior de P. Entonces, su parte fraccionaria tienen la forma

$$\{\varphi(z)\} = \frac{a_{-1}}{z-\alpha}, \quad a_{-1} \in \mathbb{C}.$$

Cambiemos el origen a α, es decir, pongamos $\zeta = z - \alpha$ para obtener

$$\{\varphi(\alpha+\zeta)\} = \frac{a_{-1}}{\zeta} \quad \text{y} \quad \{\varphi(\alpha-\zeta)\} = -\frac{a_{-1}}{\zeta}.$$

De este modo,

$$\{\varphi(\alpha+\zeta) + \varphi(\alpha-\zeta)\} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(\alpha+\zeta)+\varphi(\alpha-\zeta)=2c,$$

donde c es una constante. Definamos entonces a la función auxiliar

$$f(\zeta)=\varphi(\alpha+\zeta)-c.$$

Vemos que f se hace infinito en $\zeta=0$.

Además, $f(\zeta)=-f(-\zeta)$ y f tiene los mismos periodos $2\omega, 2\omega'$ que φ. O sea, $f(\zeta+2\omega)=f(\zeta)$ y $f(\zeta+2\omega')=f(\zeta)$. Se sigue que $f(\omega)=f(\omega')=f(\omega+\omega')=0$. Definamos ahora las funciones producto

$$f(\zeta)\times f(\zeta+\omega),\ f(\zeta)\times f(\zeta+\omega') \text{ y } f(\zeta+\omega)\times f(\zeta+\omega').$$

Ellas son doblemente periódicas y acotadas, puesto que los comportamientos asintóticos cerca de sus posibles polos se cancelan con los comportamientos cerca de sus ceros[5]. Lo visto más arriba implica que son constantes. Denotemos respectivamente a tales constantes por k, k', k''. Así, multiplicando los dos primeroso productos y dividiendo entre el tercero, hallamos que

$$f(\zeta)\times f(\zeta)=\frac{k\times k'}{k''}$$

es una constante. Esto es imposible. □

En términos de la representación de Laurent que se usa en esta demostración, la reformulación equivalente del "segundo" teorema es como sigue.

Corolario 2.6. *Si $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{S}$ es meromorfa y doblemente periódica cuya parte fraccionaria es de la forma*

$$\{\varphi(z)\}=\frac{a_{-1}}{z-\alpha},\quad a_{-1}\in\mathbb{C},$$

entonces es una función constante.

[5]Este hecho exige una explicación, que Liouville (1880) no se esfuerza en dar. Quizás era evidente para él por los desarrollos en series de funciones que conocía para las funciones elípticas.

Figura 2.1: Joseph Liouville (1809–1882).

Esta foto ha sido tomada de `http://todayinsci.com/9/9_08.htm`

CAPÍTULO 3

Funciones elípticas con dos polos

Liouville habría, casi que seguramente, leído a Abel (1827) y a Jacobi (1829). Por lo tanto, sabía de la existencia de funciones meromorfas doblemente periódicas con dos polos. A pesar de ello, se cree en la obligación de mostrar su existencia mediante un ejemplo construído por él mismo. Pero Liouville (1880) llega mucho más allá: revela importantes propiedades algebraicas para las funciones doblemente periódicas que comparten características similares y descubre relaciones importantes entre los ceros y los polos de la funciones doblemente periódicas. Veamos.

3.1. Existencia, espacio vectorial

Lo dice el mismo Liouville (1880, sección 3) por intermedio de Borchardt: "... tendremos que examinar si hay funciones doblemente periódicas con dos infinitos. – El camino más corto de probar la existencia es la construcción de estas funciones. –".

Para tal fin, parte de la función

$$f(z) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{\omega}(z-\mu) - \cos \frac{\pi}{\omega}\nu},$$

para ciertas constantes μ y ν. Ella es meromorfa y simplemente periódica con periodo 2ω, puesto que $f(z+2\omega) = f(z)$. También, la paridad de la función coseno implica que $f(z)$ tiene dos polos $\alpha = \mu + \nu$ y $\beta = \mu - \nu$. Puestas juntas estas dos propiedades, obtenemos que $f(z) = \infty$ en los puntos

$$\alpha + 2n\omega,\ \ \beta + 2m\omega,\ \ n, m \in \mathbb{Z}.$$

En un segundo paso, se logra el otro periodo $2\omega'$ poniendo

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(z + 2k\omega').$$

De esta manera, se ha logrado construir una función meromorfa con dos periodos $2\omega, 2\omega'$ y con dos polos arbitrarios α, β en su paralelogramo fundamental. En otras palabras, los polos ocurren en los puntos

$$\alpha + 2n\omega + 2m\omega',\ \ \beta + 2n\omega + 2m\omega',\ \ n, m \in \mathbb{Z}.$$

El asunto de la construcción de estas funciones conduce a Liouville (1880) hacia la caracterización de todas las funciones que comparten los mismos periodos y los mismos polos. Este importante logro es la materia del siguiente resultado.

Teorema 3.1 (Tercero de Liouville para las funciones elípticas)**.** *El conjunto de todas las funciones meromorfas doblemente periódicas que tienen periodos $2\omega, 2\omega'$ y polos α, β posee una estructura natural de espacio vectorial bidimensional sobre $\mathbb{C}$. En concreto, si $\varphi(z)$ es un elemento de dicho espacio, las demás funciones con estas propiedades se dejan escribir como*

$$\psi(z) = \lambda\varphi(z) + \tau,\ \ \lambda, \tau \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Sea $\varphi(z)$ una función doblemente periódica con periodos 2ω, $2\omega'$ y polos α, β y sea $\psi(z)$ una función con estas mismas características. La teoría del capítulo anterior implica que

$$\{\varphi(z)\} = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \frac{b_{-1}}{z-\beta}, \quad a_{-1}, b_{-1} \in \mathbb{C} - \{0\},$$

$$\{\psi(z)\} = \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \frac{d_{-1}}{z-\beta}, \quad c_{-1}, d_{-1} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

En consecuencia,

$$\{a_{-1}\psi(z) - c_{-1}\varphi(z)\} = \frac{a_{-1}d_{-1} - c_{-1}b_{-1}}{z-\beta}.$$

De este modo, el Cororalio 2.6 implica que $a_{-1}\psi(z) - c_{-1}\varphi(z)$ es una función constante. Al despejar $\psi(z)$, se obtiene la tesis. □

De manera alternativa, podemos decir que el citado espacio consta de todas las funciones afines de $\varphi(z)$. Liouville (1880, p. 285) no utiliza la expresión “espacio vectorial”, puesto que la noción de esta estructura algebraica no estaba disponible en aquella época.

3.2. Polos y ceros

Los anteriores descubrimientos llevan a Liouville (1880) a dar un paso adelante con lo siguiente.

Proposición 3.2. *Una función meromorfa doblemente periódica con dos polos distintos tiene exactamente dos ceros distintos.*

Demostración. Sea $\varphi(z)$ es una función meromorfa doblemente periódica con dos polos distintos. Notemos que la función (meromorfa no constante doblemente periódica) $1/\varphi(z)$ tiene un polo en cada cero de $\varphi(z)$ y viceversa. Como $1/\varphi(z)$ debe tener al menos dos polos, $\varphi(z)$ se anula en al menos dos puntos α, β de su paralelogramo fundamental.

Veamos la imposibilidad de otro cero. Sea $\psi(z)$ una función doblemente periódica con los mismos dos periodos de $\varphi(z)$ y dos polos α, β (ceros de $\varphi(z)$). Por la proposición anterior, todas las funciones con estas propiedades son de la forma $\lambda\psi(z) + \tau$. Elijamos $\tau = -\lambda\psi(\gamma)$, donde γ es un polo de $\varphi(z)$, y construyamos la función (con las mismas características de $\psi(z)$):

$$\chi(z) = \lambda\left(\psi(z) - \psi(\gamma)\right).$$

Ahora, consideremos la función producto $\varphi(z)\chi(z)$. Por la forma como fue construida, esta función tiene a lo sumo un polo[1]. Esto implica que es una constante. En consecuencia, los ceros de $\varphi(z)$ son precisamente los infinitos de $\chi(z)$, o sea, α y β. $\square$

El espacio vectorial encontrando también conduce a la siguiente interesante propiedad.

Proposición 3.3. *Si $\varphi(z)$ es una función meromorfa doblemente periódica con dos polos α, β, entonces $\varphi(z) = \varphi(\alpha + \beta - z)$.*

Demostración. Ya que $\varphi(\alpha + \beta - z)$ tiene los mismos periodos y los mismos polos de $\varphi(z)$, es un elemento de nuestro espacio vectorial. Es decir,

$$\varphi(\alpha + \beta - z) = \lambda\varphi(z) + \tau.$$

Pero también, $\varphi(z) = \lambda\varphi(\alpha + \beta - z) + \tau$. De donde,

$$(1 + \lambda)(\varphi(z) - \varphi(\alpha + \beta - z) = 0.$$

Pero $\lambda = -1$ no es posible. Efectivamente, en tal caso se tendría

$$\varphi(z) + \varphi(\alpha + \beta - z) = \tau.$$

Y, con el cambio de variable $z = (\alpha + \beta)/2 + t$, se podría definir

$$f(t) = \varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + t)\right) - \frac{\tau}{2}.$$

Esta función tendría los mismos dos peridos de $\varphi(z)$, digamos $2\omega, 2\omega'$. Sin embargo, tendría cuatro ceros: $0, \omega, \omega', \omega + \omega'$[2]. Esto no puede ser. La única posiblidad que queda es $\varphi(z) = \varphi(\alpha + \beta - z)$. $\square$

[1] Nótese de nuevo el supuesto sobre los comportamientos asintóticos de las funciones.

[2] Aquí Liouville utiliza conocidas propiedades de las funciones doblemente periódicas, consecuencias inmediatas de la fórmula de adición: $\varphi(z+\omega) = -\varphi(z)$, $\varphi(z+\omega') = -\varphi(z)$, $\varphi(z + \omega + \omega') = -\varphi(z)$.

De paso, encontramos la forma de la parte fraccionaria de $\varphi(z)$.

Corolario 3.4. *Si $\varphi(z)$ es una función meromorfa doblemente periódica con dos polos α, β, entonces*

$$\{\varphi(z)\} = a_{-1}\left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta}\right).$$

Demostración. En verdad,

$$\{\varphi(z)\} = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \frac{b_{-1}}{z-\beta} = \{\varphi(\alpha+\beta-z)\} = -\frac{a_{-1}}{z-\beta} + \frac{b_{-1}}{z-\alpha}.$$

Debemos, pues, tener que $a_{-1} = b_{-1}$. □

La proposición anterior y su corolario son muy generales pues son válidos en todo el plano. Sin embargo, recordamos que las cosas se simplican grandemente tomamos (sin perder generalidad) a la función doblemente periódica como restringida a su paralelogramo fundamental.

Proposición 3.5. *Si $\varphi(z)$ es una función meromorfa doblemente periódica con dos polos α, β y dos ceros a, b en un paralelogramo fundamental, entonces*

$$\alpha + \beta = a + b.$$

Demostración. La función $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ es también meromorfa y doblemente periódica con dos polos en a, b y dos ceros en α, β. Por lo dicho más arriba,

$$\psi(z) = \psi(a+b-z)$$

y lo mismo es válido para $\varphi(z)$. Por lo tanto,

$$\varphi(\alpha+\beta-z) = \varphi(a+b-z).$$

La doble periodicidad de esta función implica entonces que

$$(\alpha+\beta) - (a+b) = m2\omega + m'2\omega', \text{ para ciertos } m, m' \in \mathbb{Z}.$$

Como estamos en un paralelogramo fundamental, $m = m' = 0$. □

Este hallazgo permite asumir siempre que, para las funciones estudiadas en este capítulo, los ceros y los polos (distintos, claro está) yacen en el interior de un rectángulo fundamental.

3.3. Propiedad algebraica más general

Las ideas de la sección anterior nos llevan a descubrir una cualidad algebraica mucho más interesante y general para las funciones elípticas que tienen los mismos periodos.

Teorema 3.6 (Cuarto de Liouville para las funciones elípticas)**.** *El conjunto de todas las funciones meromorfas doblemente periódicas que tienen periodos $2\omega, 2\omega'$ (sin importar donde quedan sus dos polos y sus dos ceros) se puede caracterizar en términos de funciones lineales y racionales. Con más precisión, si $\varphi(z)$ es un elemento de dicho espacio, las demás funciones con estas propiedades se dejan escribir como*

$$\psi(z) = \Phi(\varphi(z)),$$

donde Φ es una aplicación afín o una función racional con coeficientes complejos.

Demostración. Sea $\varphi(z)$ una función de esta clase con polos α, β. Con ella queremos construir una función $\psi(z)$ con los mismos periodos y con polos γ, δ y ceros $c, d = \gamma + \delta - c$[3]. Afirmamos concretamente que basta poner

$$\psi(z) = A \times \frac{\varphi(z+z_0) - \varphi(z_1)}{\varphi(z+z_0) - \varphi(z_2)},$$

donde A es una constante y z_0, z_1, z_2 se han de escoger adecuadamente. Observamos que la fórmula de adición elíptica garantiza que esta función es racional en $\varphi(z)$. Lo que queremos se logra con

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \gamma - \delta\right), \\ z_1 &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + c - d\right), \\ z_2 &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta - \gamma - \delta\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta - c - d\right). \end{aligned}$$

[3]Recalcamos el uso de la proposición anterior

La única expresión que requiere explicación es la última (para z_2). Sin embargo, la igualdad es cierta por la proposición anterior[4]. □

He aquí la redacción original de Liouville (1880, p. 289):

> Dada una función doblemente periódica con dos índices de periodicicad[5] $2\omega, 2\omega'$ y dos infinitos dados, todas las demás son funciones racionales lineales o fraccionarias de ella.

Figura 3.1: Niels Henrik Abel (1802–1829).

Esta imagen, extraída de una estampilla noruega, ha sido tomada de `http://ro.math.wikia.com/wiki/Transformarea_lui_Abel`

[4]De nuevo.

[5]Es decir, periodos.

CAPÍTULO 4

Funciones elípticas con más de dos polos

Comencemos este capítulo con palabras del propio Liouville, a través de Borchardt:

> Las funciones doblemente periódicas con dos infinitos no son solamente las más simples funciones de este género, sino que forman al mismo tiempo los elementos con los que se construyen algebraicamente las funciones doblemente periódicas con múltiples infinitos.

Veamos sus razones.

4.1. Representaciones por sumas

Sea $\psi(z)$ una función elíptica cualquiera, es decir, con polos distintos (o sea, irreducibles uno a otro) $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Es decir,

$$\{\psi(z)\} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{z-\alpha_2} + \cdots$$

Consideremos a continuación las siguientes partes fracionarias, correspondientes a funciones elípticas de dos polos únicamente, los cuales se indican junto al argumento de la función:

$$\begin{aligned}\{\varphi(z;\alpha,\alpha_1)\} &= \tfrac{G_1}{z-\alpha} - \tfrac{G_1}{z-\alpha_1},\\ \{\varphi(z;\alpha_1,\alpha_2)\} &= \tfrac{G_2}{z-\alpha_1} - \tfrac{G_2}{z-\alpha_2},\\ \{\varphi(z;\alpha_2,\alpha_3)\} &= \tfrac{G_3}{z-\alpha_2} - \tfrac{G_3}{z-\alpha_3}\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Para tener

$$\{\psi(z)\} = B_1\{\varphi(z;\alpha,\alpha_1)\} + B_2\{\varphi(z;\alpha_1,\alpha_2)\} + B_3\{\varphi(z;\alpha_2,\alpha_3)\} + \cdots,$$

basta con poner

$$B_i = \frac{A + A_1 + \cdots + A_{i-1}}{G_i}, i = 1, 2, 3, \ldots$$

Así pues,

$$\psi(z) = B + B_1\varphi(z;\alpha,\alpha_1) + B_2\varphi(z;\alpha_1,\alpha_2) + B_3\varphi(z;\alpha_2,\alpha_3) + \cdots.$$

Teorema 4.1. *Cualquier función elíptica se puede respresentar como una combinación lineal de funciones elípticas de dos polos.*

Si se tiene que $A_1 = -A, A_3 = -A_2, \ldots,$ tenemos $B_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}$. Este hecho sencillo implica el siguiente resultado.

Corolario 4.2. *Una función elíptica $\psi(z)$ con $2n$ infinitos*

$$\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$$

y parte fraccionaria

$$\{\psi(z)\} = \frac{A}{z-\alpha} - \frac{A}{z-\beta} + \frac{A_1}{z-\alpha_1} - \frac{A_1}{z-\beta_1} + \cdots$$

se puede representar bajo la forma

$$\psi(z) = C' + C\varphi(z;\alpha,\beta) + C_1\varphi(z;\alpha_1,\beta_1) + \cdots + C_{n-1}\varphi(z;\alpha_{n-1},\beta_{n-1}).$$

4.2. Representaciones por productos. Ceros y polos

Sea $\psi(z)$ una función elíptica cualquiera con dominio restringido a su paralelogramo fundamental. Supongamos también que

$$\psi(z) = \begin{cases} \pm\infty & z = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \\ 0 & z = a, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}. \end{cases}$$

Notamos que, en este momento, n puede ser distinta de m. Se entiende, además, que estos ceros y polos yacen en la región fundamental. Construyamos las cantidades

$$\begin{aligned} b &= \alpha + \alpha_1 - a, \\ b_1 &= \alpha_2 + b - a_1, \\ b_2 &= \alpha_3 + b_1 - a_2, \\ &\vdots \\ b_{n-2} &= \alpha_{n-1} + b_{n-3} - a_{n-2}, \end{aligned}$$

donde las sumas del lado derecho se toman módulo los periodos. De esta forma, estas cantidades están contenidas en el paralelogramo fundamental.

Definamos ahora la función producto

$$\omega(z) = \varphi(z; \alpha, \alpha_1; a, b) \times \varphi(z; \alpha_2, b; a_1, b_1) \times \cdots \times \varphi(z; \alpha_{n-1}, b_{n-3}; a_{n-2}, b_{n-2}),$$

donde las funciones φ denotan funciones con dos polos y dos ceros. Los dos polos se escriben luego de la variable z, los ceros después de éstos. Por la forma como se ha construído, los ceros y polos de $\omega(z)$ yacen en puntos distintos a los $b, b_1, \ldots, b_{n-3}$[1].

Ahora bien, procedamos por casos para comparar n con m. Si $m < n$, la función cociente

$$\frac{\omega(z)}{\psi(z)}$$

[1]Llamamos de nuevo la atención sobre la suposición de identidad en el comportamiento asintótico alrededor de los ceros y los polos

es doblemente periódica y meromorfa y no tiene polos ni en los puntos α ni en los a, pero esto es imposible, a menos que sea una constante. Si $m \geq n$, el cociente recíproco

$$\frac{\psi(z)}{\omega(z)}$$

es una función con un único polo en $z = b_{n-2}$. Debe ser, pues, una constante. En conclusión,

$$\psi(z) = C \times \omega(z),$$

C constante (distinta de cero). Así pues, $m = n$.

Así pues, hemos generalizado la Proposición 3.2.

Teorema 4.3. *En el paralelogramo fundamental de cualquier función elíptica $\psi(z)$, el número de polos distintos es igual al número de ceros distintos.*

Además, si notamos que los ceros de $\psi(z)$ y $\omega(z)$ coinciden, se debe tener en particular que

$$b_{n-2} = a_{n-1} \leftrightarrow \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = a + + \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Teorema 4.4. *Módulo sus periodos, la suma de los polos de una función elíptica cualquiera es igual a la suma de sus ceros.*

En el camino, hemos encontrado que

Teorema 4.5. *Toda función elíptica $\psi(z)$, con n ceros (y n polos), se puede representar como el producto de $n-1$ funciones elípticas de dos ceros (y dos polos).*

4.3. Funciones con un número par de polos

Si nos restringimos al caso en que n es par, entonces sus polos y ceros están relacionados por

$$\alpha + \alpha_1 \quad = \quad a + a_1,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 + \alpha_3 &= a_2 + a_3, \\
\vdots &= \vdots \\
\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} &= a_{n-2} + a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Con esto se tiene la suerte de que los factores segundo, cuarto, sexto, etc. de la representación

$$\omega(z) = \varphi(z;\alpha,\alpha_1;a,b) \times \varphi(z;\alpha_2,b;a_1,b_1) \times \cdots \times \varphi(z;\alpha_{n-1},b_{n-3};a_{n-2},a_{n-1})^2,$$

son constantes debido a los consabidos teoremas de los capítulos anteriores. En concordancia, obtenemos otra consecuencia importante.

Corolario 4.6. *Sea $\psi(z)$ una función elíptica con $2n, n \in \mathbb{N}$, polos de tal suerte que*

$$\psi(z) = \begin{cases} \pm\infty & z = \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1};\beta,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1}, \\ 0 & z = a,a_1,a_2,\ldots,a_{m-1};b,b_1,b_2,\ldots,b_{m-1}. \end{cases}$$

Si también

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha_1 &= a + a_1, \\
\alpha_2 + \alpha_3 &= a_2 + a_3, \\
\vdots &= \vdots \\
\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} &= a_{n-2} + a_{n-1},
\end{aligned}$$

entonces

$$\psi(z) = C\varphi(z;\alpha,\beta;a,b) \times \varphi(z;\alpha_1,\beta_1;a_1,b_1) \times \cdots \times \varphi(z;\alpha_{n-1},\beta_{n-1};a_{n-2},a_{n-1}).$$

Es decir, solamente son necesarios n factores.

[2] Nótese el uso de $b_{n-2} = a_{n-1}$.

Figura 4.1: Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851).

La foto de la figura 4.1 ha sido tomada de `http://angelustenebrae.livejournal.com/15908.html`

Conclusiones

Sobre Liouville y la Variable Compleja

La teoría de las funciones de una variable compleja, tal como la conocemos hoy, es el fruto de muchos años de trabajo, de paciénte remoción de redundancias. . .

Liouville, a diferencia de Abel y Jacobi, sí disponía de una teoría sobre estas funciones. Sin embargo, dicha teoría no estaba tan depurada como en la actualidad. A lo largo de su vida, cambió varias veces de opinión sobre el teorema que lleva su nombre, como lo muestra la interesante monografía de Peiffer (1983).

Más profundamente, el concepto contemporáneo básico de función holomorfa no fue totalmene claro para muchos matemáticos decimonónicos. Para explicar este asunto, basta mirar el libro de Briot y Bouquet (1859), o el de Laurent (1880). Detengámonos en la definición de función monódroma que dan los dos primeros autores en 1859:

> Aceptemos que la variable z está restringida a cierta porción del plano. Si la función u toma el mismo valor en un mismo punto, cualquiera que sea el camino seguido para llegar allí, sin salir de la porción de plano considerada, M. Cauchy dice que la función es monódroma en esta porción del plano.

En el mismo espíritu, heredero directo de Cauchy, Briot y Bouquet (1859) definen lo siguiente.

> Cuando el valor de la derivada es independiente de la dirección del desplazamiento, en otras palabras, cuando la función admite una derivada única en cada punto, M. Cauchy dice que la función es monógena.

El estudiante de Variable Compleja de hoy reconoce en estas dos defninciones ciertas propiedades de las funciones diferenciables en el sentido complejo, si bien en un orden distinto al actual, en el que la definción de función holomorfa precede al Teorema Integral de Cauchy. Años más tarde, Laurent (1880) da definiciones similares, pero en el orden natural al lector contemporáneo: primero función monógena, luego función monódroma. Remitimos a los interesados en el tema a leer esta otro interesante fuente bibliográfica.

Sobre el Teorema de Liouville-Borchardt

Desde el exterior, todo parece indicar que el Teorema de Liouville-Borchardt

> "si $f : D \to \mathbb{S}$ es una función holomorfa no constante cuyo módulo alcanza un máximo local en $z \in D$, entonces $f(z) = \infty$"

es equivalente, de alguna forma, a la siguiente consecuencia inmediata del Teorema de Liouville

> "si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ es una función holomorfa no constante, entonces f no es acotada".

Bueno, al menos para los dominios simplemente conexos D. Sin embargo, una mirada más cercana al asunto revela que se trata de resultados distintos. Ciertamente, tanto el argumento *à la Cauchy* invocado por Borchardt, como la versión deducida del Teorema de la aplicación abierta dejan ver que el principio del módulo es un resultado local. De otra parte, el Teorema de Liouville es un resultado global, que se fundamenta en el hecho de que el plano complejo no es acotado.

De otro lado, la primera afirmación se aplica al dominio simplemente conexo $\mathbb{C}$. Pero la hipótesis adicional sobre el máximo no se puede quitar, como lo demuestra la existencia de aplicaciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ que toman siempre valores finitos ($f(z) = z$) y que dejan de ser acotadas debido a que $|f(z)|$ tiende al infinito cuando z lo hace. Tampoco la hipótesis restringida de la segunda para el plano puede implicar la existencia de un máximo para el módulo en el caso en que $D \subset \mathbb{C}$ es acotado. Todo lo contrario, el Principio del máximo asegura que dicho máximo ocurre en la frontera de D.

La confusión surge de razones más profundas en la teoría de las superficies de Riemann. Es bien sabido que el Teorema de la aplicación conforme de Riemann afirma que

> Si D es un dominio simplemente conexo en el plano z, que no es ni $\mathbb{C}$ ni $\mathbb{S}$, entonces existe una función holomorfa biyectiva $w = f(z)$ de D sobre el disco unitario $|w| < 1$.

Por lo tanto, el problema se reduce a considerar el disco unitario y el plano complejo. Pero ellos no pueden ser conformemente equivalentes puesto que toda aplicación holomorfa del plano al disco es acotada y, así, constante en virtud del (hoy llamado) Teorema de Liouville.

Sobre el legado de Liouville para las funciones elípticas

La principal contribución de J. Liouville a la moderna teoría de las funciones elípticas ha consisitido en fundarlas sólidamente sobre el cálculo complejo. Este hecho no fue totalmente notado por Abel (1827) ni por Jacobi (1829), los padres de las funciones elípiticas complejas.

Ciertamente, si algo sorprende en este trabajo es la sencillez de las demostraciones de Liouville (1880), en comparación con los largos procedimientos algebraicos y analíticos de sus predecesores. Todo se debe, en esencia, a las poderosas propiedades de las funciones holomorfas y meromorfas. Ellas reducen (*a grosso modo*) el análisis complejo a una serie de sencillas manipulaciones algebraicas y topológicas. Claro está, en la época de Liouville no estaba disponible la Topología como la conocemos hoy en día.

De todos modos, después de Liouville las funciones elípticas pasaron a ser un capítulo, a menudo no muy bien enseñado, de las funciones de una variable compleja.

Sobre el estilo matemático decimonónico de Liouville

El Liouville de 1847 es, sin duda, un discípulo avanzado de Abel (1827) y de Jacobi (1829). Y no nos referimos solamente a los contenidos que estudia, sino también a su estilo. La simplicidad algebraico-topológica a la que nos referimos en el objetivo anterior se debe también, casi que seguramente, al cambio en la manera de concebir las matemáticas acaecido en la primera mitad el siglo XIX. Este nuevo modo matemático de pensar se ve reflejado por excelencia en el nacimiento del álgebra abstracta, cuyos artífices fueron Galois y el mismo Abel.

Tal cambio de paradigma matemático no constituye materia para este trabajo. Sin embargo, sabemos que es tema de investigaciones actuales. Basta aquí con citar el trabajo doctoral de Henrik Kragh Sørensen (versión 2010). En particular, invitamos al lector a consultar la tercera parte de este trabajo investigativo, que lleva por título *Interlude: Abel and the 'new rigor'*.

Sobre las propiedades algebraicas de los conjuntos de funciones elípticas

Ahora, de cara a las tareas que Liouville dejo para su posteridad en las funciones elípticas, debemos señalar primero al estudio de las propiedades algebraicas de ciertos conjuntos distinguidos de funciones elípticas. En lenguaje de hoy, Liouville (1880) dejó una tarea para los analistas posteriores, a saber: determinar estructuras algebraicas para las funciones elípticas que comparten sus periodos y sus polos, o para aquellas que tienen solamente los mismos periodos, o para aquellas que poseen otras características similares.

Sobre los ceros y los polos de una función elíptica

La otra tarea pendiente que nos deja la lectura de Liouville (1880) es el estudio de las propiedades geométricas de las funciones elípticas. En otras palabras, queremos entender mejor sus gráficas y, en particular, los subdominios donde son inyectivas. De esta manera, podremos decir que las entedemos del mismo modo que comprendemos la función exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas. Este estudio puede ciertamente convertirse en un nuevo proyecto de investigación sobre la historia de las funciones elípticas.

artículo relata las lecciones que Liouville impartió en 1847. Su redactor es C. W. Borchardt.

[7] Levinson, N. & Redheffer, R. M. (1970). *Complex Variables*. San Francisco, USA: Holden-Day, Inc.

[8] Peiffer, J. (1983). Joseph Liouville (1809-1882): ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Revue d'histoire des sciences, Tome 36, 3-4*, 209 - 248.

[9] Sørensen, H. K. (2010). *The Mathematics of Niels Henrik Abel: Continuation and New Approaches in Mathematics During the 1820s*. Department of Science Studies, University of Aarhus, Denmark.

[10] Störm, D. (2006). *The Open Mapping Theorem for Analytic Functions* (D-level thesis). Karlstads universitet, Karlstad, Sweden.